
Analyse vibratoire par sous-structuration avec modèle non paramétrique d'incertitudes aléatoires non homogènes

Hamid Chebli* — Christian Soize**

* Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales- DDSS,
92322 Châtillon
chebli@onera.fr

** Université de Marne-la-Vallée- LaM,
77454 Marne-la-Vallée cedex 02
soize@univ-mlv.fr

RÉSUMÉ. La prévision des vibrations linéaires des structures complexes modélisées par la méthode des éléments finis peut être améliorée en tenant compte des incertitudes aléatoires de modélisation et de modèle. Classiquement, on utilise les approches paramétriques pour prendre en compte les incertitudes de modélisation. Récemment, une approche non paramétrique a été introduite, qui permet de modéliser les incertitudes de modélisation et de modèle pour des incertitudes homogènes. On présente ici l'extension au cas des incertitudes non homogènes en utilisant la méthode non paramétrique et la méthode de sous-structuration dynamique de Craig & Bampton. Un exemple numérique est présenté.

ABSTRACT. In linear vibration analysis, numerical predictions of complex structures modelled by the finite element method can be improved by taking into account the random uncertainties due to modelling and model errors. Usually, the parametric methods are used to take into account the uncertainties due to modelling errors. Recently, a nonparametric method has been introduced and allows the homogeneous random uncertainties due to modelling and model errors to be taken into account. In this paper, one presents an extension of this theory for the case of non-homogeneous random uncertainties by using the nonparametric approach and the Craig & Bampton dynamic substructuring. A numerical example is presented.

MOTS-CLÉS : incertitudes aléatoires non homogènes, modèle non paramétrique, sous-structuration dynamique.

KEYWORDS: non-homogeneous random uncertainties, nonparametric model, dynamic substructuring.

1. Introduction

La prise en compte des incertitudes dans les modèles de prévision pour la dynamique basse fréquence (BF) des structures est nécessaire, notamment dans la partie haute de la bande BF considérée puisque l'effet des incertitudes augmente avec la fréquence. En général, une approche paramétrique est utilisée pour modéliser les incertitudes (voir par exemple Haug *et al* 1986, Ibrahim 1987, Iwan & Jensen 1993, Lee & Singh 1994, Lin & Cai 1995, Soong 1973, Spanos & Zeldin 1994 pour des développements généraux, Ghanem & Spanos 1991, Kleiber *et al* 1992, Liu *et al* 1986, Shinozuka & Deodatis 1988, Spanos & Ghanem 1989, Vanmarcke & Grigoriu 1983 pour des aspects liés aux éléments finis stochastiques). Les méthodes de choix des paramètres incertains, la modélisation probabiliste de ces paramètres et les méthodes de résolution d'équations en présence de matrices aléatoires sont aujourd'hui bien développées. Toutefois, lorsque le nombre de paramètres incertains devient grand, ces méthodes peuvent devenir difficiles à mettre en œuvre. De plus, par construction, les méthodes paramétriques ne peuvent pas modéliser les erreurs de modèle.

Un modèle non paramétrique des incertitudes aléatoires pour des problèmes d'élasto-dynamique linéaire a été proposé (Soize, 2000 & 2001). Cette approche est basée sur le modèle probabiliste d'un ensemble de matrices aléatoires symétriques définies positives, construit à l'aide du principe du maximum d'entropie (Jaynes 1957, Shannon 1948). Les incertitudes sont alors prises en compte en modélisant directement les matrices généralisées du système dynamique par des matrices aléatoires, ce qui évite de déterminer les paramètres locaux incertains. De plus, cette approche non paramétrique permet de tenir compte des erreurs de modèle en plus des erreurs de modélisation.

Dans les structures complexes, le niveau d'incertitude peut ne pas être homogène dans toute la structure. Une méthode permettant de prendre en compte la non-homogénéité des incertitudes décrites par l'approche non paramétrique doit alors être construite. On présente ici (Chebli & Soize 2001, Soize & Chebli 2001) l'extension du modèle probabiliste non paramétrique au cas des incertitudes non homogènes par l'utilisation de la méthode de sous-structuration dynamique de Craig & Bampton (Craig & Bampton, 1968).

On présente dans la section 2 le modèle matriciel réduit aléatoire pour une sous-structure en utilisant le modèle non paramétrique des incertitudes aléatoires. La section 3 est consacrée à une application numérique relative à un modèle simple constitué d'une plaque mince rectangulaire décomposée en deux sous-structures.

2. Modèle non paramétrique des incertitudes aléatoires en sous-structuration dynamique

2.1. Problème aux limites moyen pour une sous-structure

On considère le problème de vibration linéaire d'une structure tridimensionnelle et non précontrainte, autour de sa position d'équilibre statique prise comme état de

référence. L'analyse se fera dans le domaine des basses fréquences (domaine modal) défini par l'intervalle B et on notera $\omega \in B$ la fréquence angulaire. Les équations du problème sont écrites dans le domaine des fréquences. La structure, constituée de matériaux hétérogènes et viscoélastiques sans mémoire, occupe un domaine Ω borné de \mathbb{R}^3 dont une partie $\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2$ du bord est fixe.

La structure Ω est décomposée en 2 sous-structures repérées par la lettre r avec $r = 1, 2$. Soit Ω^r le domaine ouvert borné de \mathbb{R}^3 , occupé par la sous-structure r . Soit $\partial\Omega^r$ le bord supposé suffisamment régulier du domaine Ω^r et \mathbf{n}^r la normale unitaire à $\partial\Omega^r$ extérieure à Ω^r (voir Figure 1).

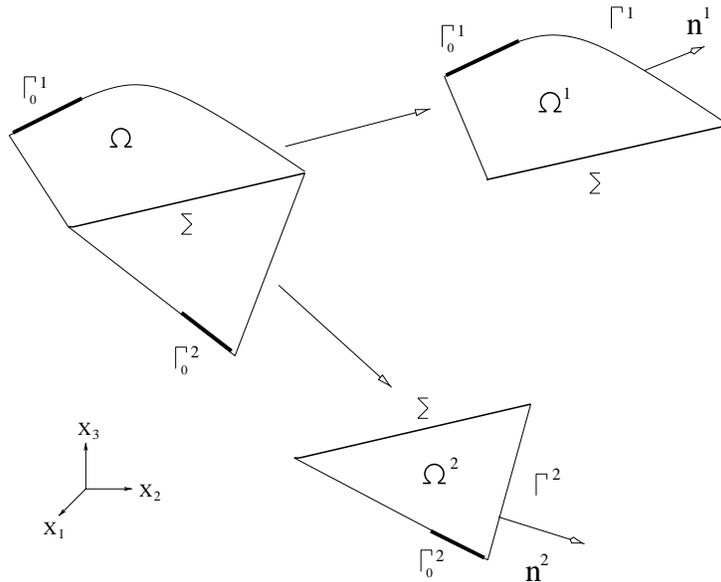


Figure 1. Structure décomposée en deux sous-structures

Chaque sous-structure est supposée fixe sur une partie Γ_0^r de son bord, c'est à dire que $\mathbf{u}^r = \mathbf{0}$ sur Γ_0^r avec $\mathbf{u}^r = (u_1^r, u_2^r, u_3^r)$ le champ de déplacement à chaque point $\mathbf{x} \in \Omega^r$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en coordonnées cartésiennes. On a alors que $\partial\Omega^r = \Gamma_0^r \cup \Sigma \cup \Gamma^r$, avec Γ_0^r la partie du bord où est imposé l'encastement, Σ l'interface de couplage et $\Gamma^r = \partial\Omega^r \setminus \{\Gamma_0^r \cup \Sigma\}$.

On imposera à chaque sous-structure un champ de force volumique $\{\mathbf{g}_\Omega^r(\mathbf{x}, \omega), \omega \in B\}$ appliqué dans Ω^r et un champ de force surfacique $\{\mathbf{g}_\Gamma^r(\mathbf{x}, \omega), \omega \in B\}$ appliqué sur Γ^r . La sous-structure Ω^r est soumise au champ de force surfacique $\{\mathbf{g}_\Sigma^r(\mathbf{x}, \omega), \omega \in B\}$ de couplage, appliqué sur l'interface de couplage Σ .

Le tenseur linéarisé des déformations est défini par $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^r) = \frac{1}{2}(u_{i,j}^r + u_{j,i}^r)$ où $u_{i,j}^r$ correspond à la dérivée partielle de la composante u_i^r par rapport à x_j . Pour un

matériau linéaire viscoélastique sans mémoire, le tenseur symétrique des contraintes σ_{ij}^r s'écrit :

$$\sigma_{ij}^r(\mathbf{u}^r) = a_{ijkh}^r(\mathbf{x})\varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^r) + i\omega b_{ijkh}^r(\mathbf{x})\varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^r). \quad [1]$$

Le tenseur des coefficients élastiques a_{ijkh}^r et celui des coefficients d'amortissement b_{ijkh}^r vérifient les propriétés classiques de symétrie et de positivité (Ciarlet, 1988).

Le problème aux limites moyen pour la sous-structure Ω^r , formulé en terme de champ de déplacement \mathbf{u}^r et dans le domaine fréquentiel, s'écrit :

$$-\omega^2 \rho^r u_i^r - \sigma_{ij,j}^r = g_{\Omega,i}^r \quad \text{dans } \Omega^r, \quad \omega \in B, \quad [2]$$

$$\sigma_{ij}^r n_j^r = g_{\Gamma,i}^r \quad \text{sur } \Gamma^r, \quad [3]$$

$$\sigma_{ij}^r n_j^r = g_{\Sigma,i}^r \quad \text{sur } \Sigma, \quad [4]$$

$$u_i^r = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0^r, \quad [5]$$

avec ρ^r la masse volumique définie sur Ω^r telle que $\rho^r(\mathbf{x}) > 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega^r$.

2.2. Formulation variationnelle du problème aux limites moyen

On introduit classiquement l'espace C_{Ω^r} des fonctions définies sur Ω^r , suffisamment régulières et à valeurs dans \mathbb{C}^3 . De plus, on définit l'espace des fonctions admissibles $C_{\Omega^r}^0 \subset C_{\Omega^r}$ tel que :

$$C_{\Omega^r}^0 = \{\mathbf{u}^r \in C_{\Omega^r} \mid \mathbf{u}^r = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_0^r\}. \quad [6]$$

La formulation variationnelle du problème aux limites moyen défini par [2]-[5] s'écrit (Dautray & Lions 1992, Ohayon & Soize 1998) :

Pour tout réel $\omega \in B$, pour tous champs de force \mathbf{g}_{Ω}^r et \mathbf{g}_{Γ}^r imposés dans la bonne classe, trouver $\mathbf{u}^r \in C_{\Omega^r}^0$ tel que :

$$-\omega^2 \underline{m}^r(\mathbf{u}^r, \delta \mathbf{u}^r) + i\omega \underline{d}^r(\mathbf{u}^r, \delta \mathbf{u}^r) + \underline{k}^r(\mathbf{u}^r, \delta \mathbf{u}^r) = f^r(\omega; \delta \mathbf{u}^r), \quad \forall \delta \mathbf{u}^r \in C_{\Omega^r}^0, \quad [7]$$

avec $\underline{m}^r(\mathbf{u}^r, \delta \mathbf{u}^r)$, $\underline{d}^r(\mathbf{u}^r, \delta \mathbf{u}^r)$, $\underline{k}^r(\mathbf{u}^r, \delta \mathbf{u}^r)$ les formes sesquilinéaires respectivement de masse, d'amortissement et de rigidité définies sur $C_{\Omega^r}^0 \times C_{\Omega^r}^0$. Leurs expressions sont :

$$\underline{m}^r(\mathbf{u}^r, \delta \mathbf{u}^r) = \int_{\Omega^r} \rho^r \mathbf{u}^r \cdot \overline{\delta \mathbf{u}^r} d\mathbf{x}, \quad [8]$$

$$\underline{d}^r(\mathbf{u}^r, \delta \mathbf{u}^r) = \int_{\Omega^r} b_{ijkh}^r \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^r) \varepsilon_{ij}(\overline{\delta \mathbf{u}^r}) d\mathbf{x}, \quad [9]$$

$$\underline{k}^r(\mathbf{u}^r, \delta \mathbf{u}^r) = \int_{\Omega^r} a_{ijkh}^r \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^r) \varepsilon_{ij}(\overline{\delta \mathbf{u}^r}) d\mathbf{x}, \quad [10]$$

Les formes hermitiennes \underline{m}^r , \underline{d}^r et \underline{k}^r sont définies positives. La forme antilinéaire $\delta \mathbf{u}^r \mapsto f^r(\omega; \delta \mathbf{u}^r)$ sur C_{Ω^r} est définie par :

$$f^r(\omega; \delta \mathbf{u}^r) = f_{imp}^r(\omega; \delta \mathbf{u}^r) + f_{coupl}^r(\omega; \delta \mathbf{u}^r), \quad [11]$$

avec :

$$f_{imp}^r(\omega; \delta \mathbf{u}^r) = \int_{\Omega^r} \mathbf{g}_{\Omega}^r \cdot \overline{\delta \mathbf{u}^r} d\mathbf{x} + \int_{\Gamma^r} \mathbf{g}_{\Gamma}^r \cdot \overline{\delta \mathbf{u}^r} ds, \quad [12]$$

$$f_{coupl}^r(\omega; \delta \mathbf{u}^r) = \int_{\Sigma} \mathbf{g}_{\Sigma}^r \cdot \overline{\delta \mathbf{u}^r} ds, \quad [13]$$

où $f_{imp}^r(\omega; \delta \mathbf{u}^r)$ et $f_{coupl}^r(\omega; \delta \mathbf{u}^r)$ sont les formes antilinéaires définies sur C_{Ω^r} représentant respectivement les efforts externes imposés \mathbf{g}_{Ω}^r dans Ω^r et \mathbf{g}_{Γ}^r sur Γ^r , et les efforts de couplage \mathbf{g}_{Σ}^r sur Σ .

2.3. Modèle élément fini moyen pour une sous-structure

La discrétisation par la méthode des éléments finis (Dautray & Lions 1992, Zienkiewicz & Taylor 1989) de la formulation variationnelle du problème aux limites moyen de la sous-structure Ω^r définie au paragraphe 2.2. s'écrit :

$$(-\omega^2 [\underline{M}^r] + i\omega [\underline{D}^r] + [\underline{K}^r]) \underline{\mathbf{U}}^r(\omega) = \underline{\mathbf{F}}^r(\omega), \quad [14]$$

où les matrices $[\underline{M}^r]$, $[\underline{D}^r]$ et $[\underline{K}^r]$ sont issues de la discrétisation élément fini (EF) des formes sesquiliéaires de masse, d'amortissement et de rigidité définies respectivement par les équations [8], [9] et [10]. Ce sont des matrices symétriques définies positives. Les vecteurs $\underline{\mathbf{U}}^r(\omega)$ et $\underline{\mathbf{F}}^r(\omega)$, à valeurs dans \mathbb{C}^{n^r} , sont respectivement constitués des n^r degrés de liberté (ddl) et des n^r forces nodales. Le vecteur $\underline{\mathbf{F}}^r(\omega)$ correspond à la discrétisation EF de la forme antilinéaire $f^r(\omega; \delta \mathbf{u}^r)$ définie par [11]-[13].

La décomposition de $\underline{\mathbf{U}}^r(\omega)$ et $\underline{\mathbf{F}}^r(\omega)$ par rapport aux n_i^r ddl internes et aux $n_{\Sigma} = n^r - n_i^r$ ddl de couplage s'écrit

$$\underline{\mathbf{U}}^r(\omega) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_i^r(\omega) \\ \underline{\mathbf{U}}_{\Sigma}^r(\omega) \end{bmatrix}, \quad [15]$$

$$\underline{\mathbf{F}}^r(\omega) = \underline{\mathbf{F}}_{imp}^r(\omega) + \underline{\mathbf{F}}_{coupl}^r(\omega) = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{F}}_i^r(\omega) \\ \underline{\mathbf{F}}_j^r(\omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \underline{\mathbf{F}}_{\Sigma}^r(\omega) \end{bmatrix}. \quad [16]$$

Dans [16], les vecteurs $\underline{\mathbf{F}}_{imp}^r(\omega)$ et $\underline{\mathbf{F}}_{coupl}^r(\omega)$ correspondent à la discrétisation EF respectivement des formes antilinéaires $f_{imp}^r(\omega; \delta \mathbf{u}^r)$ et $f_{coupl}^r(\omega; \delta \mathbf{u}^r)$ définies par [12] et [13]. Donc, $\underline{\mathbf{F}}_i^r(\omega)$ et $\underline{\mathbf{F}}_j^r(\omega)$ sont issus de la décomposition définie par [15] du

vecteur de chargement externe imposé. Le vecteur $\underline{\mathbf{F}}_{\Sigma}^r(\omega)$ correspond aux forces de couplage du modèle moyen sur l'interface de couplage Σ .

On introduit la décomposition par bloc correspondante pour les matrices du modèle EF moyen. Ainsi, la matrice de rigidité s'écrit :

$$[\underline{\mathbf{K}}^r] = \begin{bmatrix} [\underline{\mathbf{K}}_{ii}^r] & [\underline{\mathbf{K}}_{i\Sigma}^r] \\ [\underline{\mathbf{K}}_{i\Sigma}^r]^T & [\underline{\mathbf{K}}_{\Sigma\Sigma}^r] \end{bmatrix}, \quad [17]$$

où l'exposant T correspond à la transposée de matrice.

2.4. Modèle matriciel réduit moyen pour une sous-structure

La méthode de Craig-Bampton (Craig & Bampton, 1968) est utilisée avec N^r modes élastiques de la sous-structure Ω^r à interface de couplage Σ fixe. Le modèle matriciel réduit moyen correspondant s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{U}}_i^r(\omega) \\ \underline{\mathbf{U}}_{\Sigma}^r(\omega) \end{bmatrix} = [\underline{\mathbf{H}}^r] \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^r(\omega) \\ \underline{\mathbf{U}}_{\Sigma}^r(\omega) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [\underline{\mathbf{H}}^r] = \begin{bmatrix} [\underline{\Phi}^r] & [\underline{\mathbf{S}}_{\Sigma|i}^r] \\ [0] & [I_{n_{\Sigma}}] \end{bmatrix}, \quad [18]$$

avec $\underline{\mathbf{q}}^r(\omega)$ le vecteur des coordonnées généralisées à valeurs dans \mathbb{C}^{N^r} , $[\underline{\Phi}^r]$ la matrice réelle ($n_i^r \times N^r$) dont les colonnes correspondent aux modes de la sous-structure Ω^r à interface de couplage Σ fixe, $[\underline{\mathbf{S}}_{\Sigma|i}^r]$ la matrice réelle ($n_i^r \times n_{\Sigma}$) définie par $[\underline{\mathbf{S}}_{\Sigma|i}^r] = -[\underline{\mathbf{K}}_{ii}^r]^{-1}[\underline{\mathbf{K}}_{i\Sigma}^r]$ et $[I_{n_{\Sigma}}]$ la matrice identité ($n_{\Sigma} \times n_{\Sigma}$). En multipliant à gauche l'équation [14] par $[\underline{\mathbf{H}}^r]^T$ et en utilisant l'équation [18], on obtient :

$$(-\omega^2[\underline{\mathbf{M}}_{red}^r] + i\omega[\underline{\mathbf{D}}_{red}^r] + [\underline{\mathbf{K}}_{red}^r]) \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^r(\omega) \\ \underline{\mathbf{U}}_{\Sigma}^r(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_N^r(\omega) \\ \underline{\mathbf{G}}_{\Sigma}^r(\omega) + \underline{\mathbf{F}}_{\Sigma}^r(\omega) \end{bmatrix}. \quad [19]$$

On prouve que les matrices généralisées $[\underline{\mathbf{M}}_{red}^r]$, $[\underline{\mathbf{D}}_{red}^r]$ et $[\underline{\mathbf{K}}_{red}^r]$ sont à valeurs dans l'espace des matrices réelles ($m^r \times m^r$) symétriques définies positives noté $\mathbb{M}_{m^r}^+(\mathbb{R})$, $m^r = N^r + n_{\Sigma}$. Elles sont définies par :

$$[\underline{\mathbf{M}}_{red}^r] = [\underline{\mathbf{H}}^r]^T [\underline{\mathbf{M}}^r] [\underline{\mathbf{H}}^r], \quad [20]$$

$$[\underline{\mathbf{D}}_{red}^r] = [\underline{\mathbf{H}}^r]^T [\underline{\mathbf{D}}^r] [\underline{\mathbf{H}}^r], \quad [21]$$

$$[\underline{\mathbf{K}}_{red}^r] = [\underline{\mathbf{H}}^r]^T [\underline{\mathbf{K}}^r] [\underline{\mathbf{H}}^r]. \quad [22]$$

Le vecteur $\underline{\mathcal{F}}_N^r(\omega)$ à valeurs dans \mathbb{C}^{N^r} et le vecteur $\underline{\mathbf{G}}_{\Sigma}^r(\omega)$ à valeurs dans $\mathbb{C}^{n_{\Sigma}}$ sont définis par :

$$\underline{\mathcal{F}}_N^r(\omega) = [\underline{\Phi}^r]^T \underline{\mathbf{F}}_i^r(\omega), \quad \underline{\mathbf{G}}_{\Sigma}^r(\omega) = [\underline{\mathbf{S}}_{\Sigma|i}^r]^T \underline{\mathbf{F}}_i^r(\omega) + \underline{\mathbf{F}}_j^r(\omega). \quad [23]$$

avec $\underline{\mathbf{F}}_i^r(\omega)$ et $\underline{\mathbf{F}}_j^r(\omega)$ les vecteurs définis par [16].

2.5. Modèle non paramétrique des incertitudes aléatoires pour le modèle matriciel réduit

2.5.1. Modèle matriciel réduit aléatoire pour une sous-structure dans l'approche non paramétrique

La modélisation non paramétrique des incertitudes aléatoires (Soize, 2000) consiste à introduire le modèle matriciel réduit aléatoire pour la sous-structure Ω^r défini par :

$$\mathbf{U}^r(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_i^r(\omega) \\ \mathbf{U}_\Sigma^r(\omega) \end{bmatrix} = [\underline{\mathbf{H}}^r] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^r(\omega) \\ \mathbf{U}_\Sigma^r(\omega) \end{bmatrix}, \quad [24]$$

où $[\underline{\mathbf{H}}^r]$ est la matrice définie par [18], $\mathbf{Q}^r(\omega)$ le vecteur aléatoire des coordonnées généralisées à valeurs dans \mathbb{C}^{N^r} . Pour tout ω dans B , les vecteurs $\mathbf{Q}^r(\omega)$ et $\mathbf{U}_\Sigma^r(\omega)$ sont tels que :

$$(-\omega^2 [\mathbf{M}_{red}^r] + i\omega [\mathbf{D}_{red}^r] + [\mathbf{K}_{red}^r]) \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^r(\omega) \\ \mathbf{U}_\Sigma^r(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_N^r(\omega) \\ \underline{\mathbf{G}}_\Sigma^r(\omega) + \mathbf{F}_\Sigma^r(\omega) \end{bmatrix}, \quad [25]$$

avec $[\mathbf{M}_{red}^r]$, $[\mathbf{D}_{red}^r]$ et $[\mathbf{K}_{red}^r]$ les matrices aléatoires généralisées à valeurs dans $\mathbb{M}_{m^r}^+(\mathbb{R})$. Les vecteurs $\underline{\mathcal{F}}_N^r(\omega)$ et $\underline{\mathbf{G}}_\Sigma^r(\omega)$ sont définis par [23] et $\mathbf{F}_\Sigma^r(\omega)$ est le vecteur aléatoire des forces de couplage sur l'interface de couplage Σ .

2.5.2. Modèle probabiliste des matrices aléatoires du modèle réduit

Dans la théorie développée dans (Soize, 2000 & 2001), il est démontré que les matrices aléatoires $[\mathbf{M}_{red}^r]$, $[\mathbf{D}_{red}^r]$ et $[\mathbf{K}_{red}^r]$ à valeurs $\mathbb{M}_{m^r}^+(\mathbb{R})$ sont indépendantes et s'écrivent :

$$[\mathbf{M}_{red}^r] = [\underline{\mathbf{L}}_{M^r}]^T [\mathbf{G}_{M^r}] [\underline{\mathbf{L}}_{M^r}], \quad [26]$$

$$[\mathbf{D}_{red}^r] = [\underline{\mathbf{L}}_{D^r}]^T [\mathbf{G}_{D^r}] [\underline{\mathbf{L}}_{D^r}], \quad [27]$$

$$[\mathbf{K}_{red}^r] = [\underline{\mathbf{L}}_{K^r}]^T [\mathbf{G}_{K^r}] [\underline{\mathbf{L}}_{K^r}], \quad [28]$$

avec $[\underline{\mathbf{L}}_{M^r}]$, $[\underline{\mathbf{L}}_{D^r}]$ et $[\underline{\mathbf{L}}_{K^r}]$ les matrices réelles $(m^r \times m^r)$ triangulaires supérieures correspondant à la factorisation de Cholesky des matrices définies positives $[\underline{\mathbf{M}}_{red}^r]$, $[\underline{\mathbf{D}}_{red}^r]$ et $[\underline{\mathbf{K}}_{red}^r]$,

$$[\underline{\mathbf{M}}_{red}^r] = [\underline{\mathbf{L}}_{M^r}]^T [\underline{\mathbf{L}}_{M^r}], \quad [29]$$

$$[\underline{\mathbf{D}}_{red}^r] = [\underline{\mathbf{L}}_{D^r}]^T [\underline{\mathbf{L}}_{D^r}], \quad [30]$$

$$[\underline{\mathbf{K}}_{red}^r] = [\underline{\mathbf{L}}_{K^r}]^T [\underline{\mathbf{L}}_{K^r}]. \quad [31]$$

Les matrices $[\mathbf{G}_{M^r}]$, $[\mathbf{G}_{D^r}]$ et $[\mathbf{G}_{K^r}]$ définies par les équations [26]-[28] sont à valeurs dans $\mathbb{M}_{m^r}^+(\mathbb{R})$ et leurs valeurs moyennes sont :

$$E\{[\mathbf{G}_{M^r}]\} = [I_{m^r}], \quad E\{[\mathbf{G}_{D^r}]\} = [I_{m^r}], \quad E\{[\mathbf{G}_{K^r}]\} = [I_{m^r}], \quad [32]$$

avec $[I_{m^r}]$ la matrice identité ($m^r \times m^r$).

Soit $[\mathbf{G}_A]$ une matrice aléatoire à valeurs dans $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$ dont la valeur moyenne est $E\{[\mathbf{G}_A]\} = [\underline{G}_A] = [I_m]$ avec $[I_m]$ la matrice identité ($m \times m$). La matrice $[\mathbf{G}_A]$ pourra représenter la matrice aléatoire $[\mathbf{G}_{M^r}]$, $[\mathbf{G}_{D^r}]$ ou $[\mathbf{G}_{K^r}]$. La dispersion de la matrice $[\mathbf{G}_A]$ est introduite par le paramètre δ_A défini par :

$$\delta_A = \left\{ \frac{E\{\|[\mathbf{G}_A] - [\underline{G}_A]\|_F^2\}}{\|[\underline{G}_A]\|_F^2} \right\}^{1/2} \quad \text{avec} \quad 0 < \delta_A < \sqrt{\frac{n_0 + 1}{n_0 + 5}}, \quad [33]$$

où n_0 est un entier fixé tel que $1 \leq n_0 \leq m$. En notant $\mathbb{M}_m^S(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles ($m \times m$) symétriques, on prouve que la fonction de densité de probabilité $[G_A] \mapsto p_{[\mathbf{G}_A]}([G_A])$ définie sur $\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ par rapport à la mesure dG_A sur $\mathbb{M}_m^S(\mathbb{R})$ définie par $dG_A = 2^{m(m-1)/4} \prod_{1 \leq i < j \leq m} d[G_A]_{ij}$, s'écrit :

$$p_{[\mathbf{G}_A]}([G_A]) =$$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})}([G_A]) \times c_A \times (\det[G_A])^{\lambda_A - 1} \times \exp\left(-\frac{(m-1+2\lambda_A)}{2} \text{tr}\{[G_A]\}\right), \quad [34]$$

où \det représente le déterminant de matrices et tr la trace de matrices. La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})}([G_A])$ est égale à 1 si $[G_A] \in \mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$ et est égale à 0 si $[G_A] \notin \mathbb{M}_m^+(\mathbb{R})$. Dans [34], la constante positive c_A s'écrit :

$$c_A = \frac{(2\pi)^{-m(m-1)/4} \left(\frac{m-1+2\lambda_A}{2}\right)^{m(m-1+2\lambda_A)/2}}{\left\{ \prod_{\ell=1}^m \Gamma\left(\frac{m-\ell+2\lambda_A}{2}\right) \right\}}, \quad [35]$$

où, pour $\Re z > 0$, $\Gamma(z)$ est la fonction gamma définie par $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$. Le paramètre $\lambda_A > 0$ dépend de m et est défini par :

$$\lambda_A(m) = \frac{1 - \delta_A^2}{2\delta_A^2} m + \frac{1 + \delta_A^2}{2\delta_A^2}. \quad [36]$$

Afin de mettre en œuvre la simulation numérique de Monte Carlo des réponses dynamiques aléatoires du système étudié, une représentation algébrique adaptée de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}_A]$ doit être utilisée. Comme la matrice $[\mathbf{G}_A]$ est définie positive, elle pourra s'écrire :

$$[\mathbf{G}_A] = [\mathbf{L}_G]^T [\mathbf{L}_G], \quad [37]$$

où $[\mathbf{L}_G]$ est une matrice aléatoire réelle ($m \times m$) triangulaire supérieure qui est telle que :

- les variables aléatoires $\{[\mathbf{L}_G]_{\ell\ell'}, \ell \leq \ell'\}$ sont indépendantes dans leur ensemble ;
- pour $\ell < \ell'$, la variable aléatoire $[\mathbf{L}_G]_{\ell\ell'}$ à valeurs réelles s'écrit :

$$[\mathbf{L}_G]_{\ell\ell'} = \sigma U_{\ell\ell'} \quad \text{avec} \quad \sigma = \frac{\delta_A}{\sqrt{m+1}}, \quad [38]$$

où $U_{\ell\ell'}$ est une variable aléatoire réelle gaussienne, centrée et de variance unité ;
 - pour $\ell = \ell'$, la variable aléatoire $[\mathbf{L}_G]_{\ell\ell}$ à valeurs positives s'écrit :

$$[\mathbf{L}_G]_{\ell\ell} = \sigma \sqrt{2V_\ell}, \quad [39]$$

avec σ défini par [38] et où V_ℓ est une variable aléatoire positive dont la densité de probabilité $p_{V_\ell}(v)$ par rapport à la mesure de Lesbegue dv sur \mathbb{R} s'écrit :

$$p_{V_\ell}(v) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v) \{\Gamma(v_\ell)\}^{-1} v^{v_\ell-1} e^{-v} \text{ avec } v_\ell = \frac{m+1}{2\delta_A^2} + \frac{1-\ell}{2}. \quad [40]$$

2.6. Modèle non paramétrique de la structure Ω avec incertitudes aléatoires non homogènes

La méthode non paramétrique appliquée à chaque sous-structure Ω^r permet de construire la matrice aléatoire de rigidité dynamique généralisée $[\mathbf{A}_{red}^r(\omega)]$ définie par :

$$[\mathbf{A}_{red}^r(\omega)] = -\omega^2[\mathbf{M}_{red}^r] + i\omega[\mathbf{D}_{red}^r] + [\mathbf{K}_{red}^r], \quad \forall \omega \in B. \quad [41]$$

Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 2.5., la dispersion des matrices aléatoires $[\mathbf{M}_{red}^r], [\mathbf{D}_{red}^r]$ et $[\mathbf{K}_{red}^r]$ à valeurs dans $\mathbb{M}_{m^r}^+(\mathbb{R})$ est contrôlée par les paramètres δ_{M^r} , δ_{D^r} et δ_{K^r} respectivement, indépendants de m^r et choisis tels que l'équation [33] soit vérifiée. Il sera donc possible d'attribuer un niveau de dispersion donné pour chaque sous-structure Ω^r indépendamment les unes des autres.

La décomposition par bloc liée à l'équation [19], appliquée à $[\mathbf{A}_{red}^r(\omega)]$, donne :

$$[\mathbf{A}_{red}^r(\omega)] = \begin{bmatrix} [\mathcal{A}_N^r(\omega)] & [\mathbf{A}_c^r(\omega)] \\ [\mathbf{A}_c^r(\omega)]^T & [\mathbf{A}_\Sigma^r(\omega)] \end{bmatrix}. \quad [42]$$

En utilisant les conditions classiques de couplage sur l'interface Σ et l'équation [42], l'équation matricielle réduite pour la structure Ω s'écrit :

$$\begin{bmatrix} [\mathcal{A}_N^1(\omega)] & [0] & [\mathbf{A}_c^1(\omega)] \\ [0] & [\mathcal{A}_N^2(\omega)] & [\mathbf{A}_c^2(\omega)] \\ [\mathbf{A}_c^1(\omega)]^T & [\mathbf{A}_c^2(\omega)]^T & [\mathbf{A}_\Sigma^1(\omega)] + [\mathbf{A}_\Sigma^2(\omega)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^1(\omega) \\ \mathbf{Q}^2(\omega) \\ \mathbf{U}_\Sigma(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{F}}_N^1(\omega) \\ \underline{\mathcal{F}}_N^2(\omega) \\ \underline{\mathbf{G}}_\Sigma(\omega) \end{bmatrix}, \quad [43]$$

avec $\underline{\mathcal{F}}_N^1(\omega)$ et $\underline{\mathcal{F}}_N^2(\omega)$ les vecteurs définis par [23] et où $\underline{\mathbf{G}}_\Sigma(\omega) = \underline{\mathbf{G}}_\Sigma^1(\omega) + \underline{\mathbf{G}}_\Sigma^2(\omega)$.

La réponse aléatoire est alors calculée par l'équation matricielle suivante :

$$\mathbf{U}(\omega) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}^1(\omega) \\ \mathbf{U}^2(\omega) \\ \mathbf{U}_\Sigma(\omega) \end{bmatrix} \text{ avec } \begin{bmatrix} \mathbf{U}^1(\omega) \\ \mathbf{U}^2(\omega) \\ \mathbf{U}_\Sigma(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\Phi^1] & [0] & [\underline{S}_{\Sigma|i}^1] \\ [0] & [\Phi^2] & [\underline{S}_{\Sigma|i}^2] \\ [0] & [0] & [I_{n_\Sigma}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^1(\omega) \\ \mathbf{Q}^2(\omega) \\ \mathbf{U}_\Sigma(\omega) \end{bmatrix}, \quad [44]$$

où $\mathbf{U}(\omega)$ est la réponse aléatoire constituée des $n = n_i^1 + n_i^2 + n_\Sigma$ ddl de la structure Ω .

3. Application numérique

La structure considérée est celle étudiée dans (Chebli & Soize, 2001). L'application numérique présentée ci-après correspond à des incertitudes non homogènes.

3.1. Modèle mécanique et modèle élément fini moyen associé

On considère une structure Ω constituée d'une plaque mince rectangulaire, homogène, isotrope, en appui simple, avec une épaisseur de $0.4 \times 10^{-3} \text{ m}$, une largeur 0.5 m , une longueur 1.0 m , une densité massique 7800 kg/m^3 , un module d'Young $2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ et un coefficient de Poisson 0.29 . Deux masses concentrées de 3 kg et 4 kg sont localisées aux points $(0.4, 0.2)$ et $(0.75, 0.35)$. Trois ressorts ayant la même raideur 2.388 N/m sont attachés suivant la normale au plan de la plaque et localisés aux points $(0.28, 0.22)$, $(0.54, 0.33)$ et $(0.83, 0.44)$. Par conséquent, la structure Ω définie ci-dessus n'est plus homogène. La structure Ω est décomposée en deux sous-structures Ω^1 et Ω^2 . La première a pour longueur 0.6 m et la seconde 0.4 m (voir Figure 2). La bande fréquentielle d'analyse est $B = 2\pi \times [1, 100] \text{ rad/s}$.

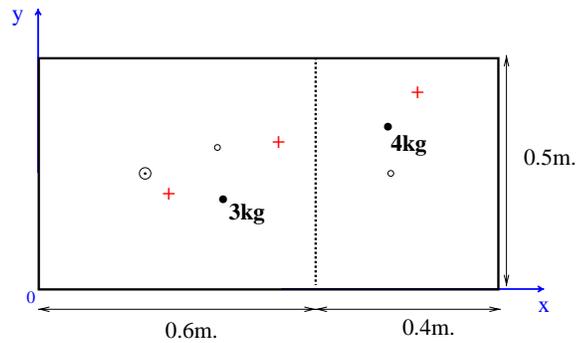


Figure 2. Géométrie de la structure Ω . • masses concentrées, + ressorts, \odot point d'excitation, \circ points d'observation.

Le modèle EF moyen de la structure Ω est construit en utilisant des éléments à quatre noeuds. Le pas du maillage EF (voir Figure 3) est pris égal à $0.01 m \times 0.01 m$. La structure Ω possède $n = 14849$ dds avec $n_i^1 = 8840$, $n_i^2 = 5860$ et $n_\Sigma = 149$.

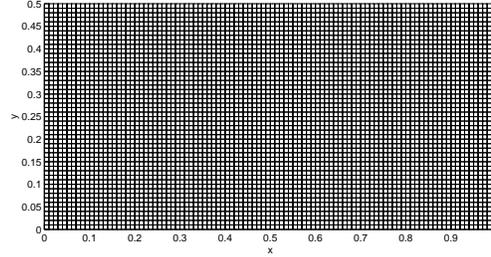


Figure 3. Maillage EF de la structure Ω

La matrice moyenne d'amortissement est construite en utilisant un modèle de Rayleigh correspondant à un taux d'amortissement moyen $\xi = 0.03$ pour les fréquences propres $f_1 = 2.6Hz$ et $f_{35} = 106.38Hz$. La structure Ω est soumise à une force extérieure $\mathbf{F}(\omega) = \underline{\eta}(\omega)\mathbf{g}$ pour laquelle la partie spatiale $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{R}^n$ est telle que $g_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ excepté pour un ddl correspondant au noeud dont les coordonnées en (x, y) sont $(0.24, 0.24)$. La fonction $\omega \mapsto \underline{\eta}(\omega)$ est définie par $\underline{\eta}(\omega) = \underline{\eta}_{max} \mathbb{1}_B(\omega)$ avec $\underline{\eta}_{max} = 1$ et la fonction $\omega \mapsto \mathbb{1}_B(\omega)$ est telle que $\mathbb{1}_B(\omega) = 1$ si $\omega \in B$ et $\mathbb{1}_B(\omega) = 0$ si $\omega \notin B$. Les dds d'observation ddl_{obs1} et ddl_{obs2} correspondant aux noeuds dont les coordonnées en (x, y) sont $(0.39, 0.31)$ et $(0.79, 0.24)$ respectivement, sont introduits.

3.2. Sous-structuration dynamique avec incertitudes aléatoires non homogènes

Deux cas différents d'incertitudes sont considérés. Pour le premier cas, les valeurs des paramètres de dispersion pour les sous-structures Ω^1 et Ω^2 sont égales à :

$$\text{Cas 1 : } \delta_{M^1} = \delta_{M^2} = 0, \quad \delta_{D^1} = \delta_{K^1} = 0.05, \quad \delta_{D^2} = 0.1, \quad \delta_{K^2} = 0.15. \quad [45]$$

Pour le second cas, on a :

$$\text{Cas 2 : } \delta_{M^1} = \delta_{M^2} = 0, \quad \delta_{D^1} = 0.1, \quad \delta_{K^1} = 0.15, \quad \delta_{D^2} = \delta_{K^2} = 0.05. \quad [46]$$

Pour la structure assemblée, le choix des paramètres de dispersion pour les cas 1 et 2 donne un "niveau global" de dispersion qui est "le même". On peut ainsi évaluer le rôle joué par la non-homogénéité.

Les réponses aléatoires de la structure Ω modélisée par sous-structuration sont obtenues en résolvant les équations [41]-[44]. Une simulation numérique de Monte Carlo a été mise en oeuvre. Le nombre d'échantillons n_S pour la simulation de Monte

Carlo est égal à 400 et le nombre de modes à interface fixe pour chaque sous-structure est égal à 20.

Pour ω fixé dans B , soit $\text{dB}_k(\omega)$ la variable aléatoire définie par $\text{dB}_k(\omega) = 10 \log_{10}(|\mathbf{U}_k(\omega)|^2)$ avec $\mathbf{U}(\omega) = (\mathbf{U}_1(\omega), \dots, \mathbf{U}_n(\omega))$. Un intervalle de confiance est construit tel que la probabilité $\mathcal{P}[\text{dB}_k^-(\omega) < \text{dB}_k(\omega) \leq \text{dB}_k^+(\omega)] = P_c$, avec P_c un niveau de probabilité donné. Les fonctions $\omega \mapsto \text{dB}_k^+(\omega)$ et $\omega \mapsto \text{dB}_k^-(\omega)$ sont les enveloppes supérieure et inférieure de cet intervalle définies par

$$\text{dB}_k^+(\omega) = 20 \log_{10}(|E\{\mathbf{U}_k(\omega)\}| + a_k(\omega)) \text{ et } P_c = 1 - (V\{\mathbf{U}_k(\omega)\} / a_k^2(\omega)), \quad [47]$$

$$\text{dB}_k^-(\omega) = 2\text{dB}_k^0(\omega) - \text{dB}_k^+(\omega) \quad \text{avec } \text{dB}_k^0(\omega) = 10 \log_{10}(|E\{\mathbf{U}_k(\omega)\}|^2), \quad [48]$$

$V\{\mathbf{U}_k(\omega)\}$ étant la variance de la variable aléatoire $\mathbf{U}_k(\omega)$. Les figures 4 et 5 représentent l'intervalle de confiance, construit avec $P_c = 0.95$, des dds d'observation $k = \text{ddl}_{obs1}$ et $k = \text{ddl}_{obs2}$. L'intervalle de confiance en trait maigre et en trait épais ont été calculés en utilisant respectivement les valeurs des paramètres de dispersion définies par [45] et [46]. Le trait en pointillé correspond au module (en dB) de la FRF entre le point d'excitation et le ddl d'observation considéré, pour le modèle moyen.

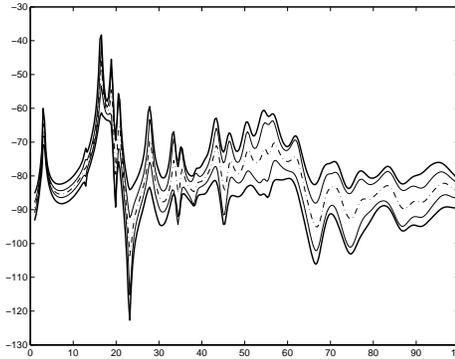


Figure 4. Intervalles de confiance construits avec incertitudes aléatoires non homogènes pour ddl_{obs1} . Cas 1 (trait maigre) et Cas 2 (trait épais)

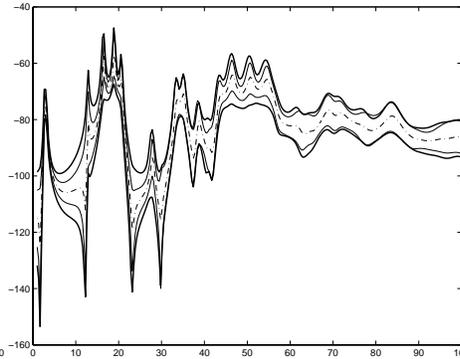


Figure 5. Intervalles de confiance construits avec incertitudes aléatoires non homogènes pour ddl_{obs2} . Cas 1 (trait maigre) et Cas 2 (trait épais)

On observe sur les figures 4 et 5 une incidence non négligeable, surtout pour la réponse de la plaque directement excitée (figure 4), sur les enveloppes supérieure et inférieure du domaine de confiance.

4. Conclusion

Nous avons présenté l'extension du modèle non paramétrique au cas des incertitudes aléatoires non homogènes en utilisant la méthode de sous-structuration dynamique de Craig & Bampton. Cette approche permet de traiter des structures complexes en présence d'incertitudes aléatoires non homogènes. L'intérêt principal de la méthode proposée est sa capacité d'adapter la modélisation des incertitudes aléatoires pour chaque sous-structure constituant la structure globale dans le cadre de l'approche non paramétrique.

5. Bibliographie

- Chebli H., Soize C., Une nouvelle approche de la modélisation des incertitudes de modélisation basée sur le principe du maximum d'entropie, en sous-structuration dynamique des structures, pour le domaine des basses fréquences, *Actes du Cinquième Colloque National en Calcul des Structures*, Giens (Var), 15-18 mai 2001, p. 967-974.
- Ciarlet P.G., *Mathematical Elasticity, Vol. I : Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
- Craig R.R., Bampton M.M.C., Coupling of substructures for dynamic analysis, *AIAA Journal*, 6, 1968, p. 1313-1319.
- Dautray R., Lions J.-L., *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and technology*, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- Ghanem R.G., Spanos P.D., *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- Haug E.J., Choi K.K., Komkov V., *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, 1986.
- Ibrahim R.A., Structural dynamics with parameters uncertainties, *Appl. Mech. Rev.*, 40(3), 1987, p. 309-328.
- Iwan W.D., Jensen H., On the dynamical response of continuous systems including model uncertainty, *Transactions of ASME*, 60, 1993, p. 484-490.
- Jaynes E.T., Information theory and statistical mechanics, *Physical Review*, 106(4), 1957, p. 620-630 & 108(2), 1957, p. 171-190.
- Kleiber M., Tran D.H., Hien T.D., *The Stochastic Finite Element Method*, John Wiley and Sons, 1992.
- Lee C., Singh R., Analysis of discrete vibratory systems with parameter uncertainties. Part II : Impulse response, *Journal of Sound and Vibration*, 174(3), 1994, p. 395-412.
- Lin Y.K., Cai G.Q., *Probabilistic Structural Dynamics*, McGraw-Hill, New York, 1995.
- Liu W.K., Belytschko T., Mani A., Random field finite elements, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 23, 1986, p. 1832-1845.

- Ohayon R., Soize C., *Structural Acoustics and Vibration*, Academic Press, San Diego, London, 1998.
- Shannon C.E., A mathematical theory of communication, *Bell System Tech. J.*, 27, 1948, p. 379-423 & p. 623-659.
- Soize C., A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3), 2000, p. 277-294.
- Soize C., Maximum entropy approach for modelling random uncertainties in transient elastodynamics, *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(5), 2001, p. 1979-1996.
- Soize C., Chebli H., Random uncertainties model in dynamic substructuring using a nonparametric probabilistic model, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, (Submitted in May 2001).
- Soong T.T., *Random Differential Equations in Science and Engineering*, Academic Press, New York, 1973.
- Spanos P.D., Ghanem R.G., Stochastic finite element expansion for random media, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, 115(5), 1989, p. 1035-1053.
- Spanos P.D., Zeldin B.A., Galerkin sampling method for stochastic mechanics problems, *Journal of Engineering Mechanics*, 120(5), 1994, p. 1091-1106.
- Shinozuka M., Deodatis G., Response variability of stochastic finite element systems, *Journal of Engineering Mechanics*, 114(3), 1988, p. 499-519.
- Vanmarcke E., Grigoriu M., Stochastic finite element analysis of simple beams, *Journal of Engineering Mechanics*, 109(5), 1983, p. 1203-1214.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The finite element method*, (4th edition), McGraw-Hill, New-York, 1989.