
Éléments finis mixtes singuliers 3D pour le calcul des “surcontraintes” dans les assemblages de composites

David Crépin* — Mariusz Pyrz** — Géry De Saxcé**

* *Laboratoire de Modélisation Mécanique
et Mathématiques Appliquées
SP2MI, boulevard 3, téléport 2, BP 179
86960 Futuroscope Chasseneuil cedex
david.crepin@univ-poitiers.fr*

** *Laboratoire de Mécanique de Lille
URA CNRS 1441
boulevard Paul Langevin
59655 Villeneuve d’Ascq cedex
mariusz.pyrz@eudil.fr gery.desaxce@univ-lille1.fr*

RÉSUMÉ. Ce travail porte sur le développement d’une famille d’éléments finis mixtes tridimensionnels, bien adaptés à l’étude des concentrations de contraintes dans les structures en matériaux composites. Dans une première partie, on propose un code précis de calcul de concentrations de contraintes couvrant une large gamme de situations singulières rencontrées en pratique. Dans une seconde partie, on développe un élément fini mixte 3D permettant l’extraction de la distribution des F.I.C. le long des lignes singulières. Le schéma d’extraction proposé est basé sur une simple condensation statique et ne nécessite aucune intégration de contour. Cette méthode simple et générale autorise ainsi des maillages relativement lâches sans perte de précision significative sur les singularités de contraintes.

ABSTRACT. This work deals with the development of a mixed three-dimensional finite element family, particularly well fitted to overstress estimation in composite structures. In the first part, a code for precise evaluation of stress concentration is presented, enabling the investigation of many practical situations including singularities. In the second part, a 3D mixed finite element is developed, providing the distribution of stress intensity factors along the singularity lines. The proposed extraction scheme is based on a simple static condensation and does not require any contour integration. This general and simple method allows thereby relatively coarse meshing without significant loss of precision of stress singularity estimation.

MOTS-CLÉS : matériaux composites, éléments finis mixtes, concentration de contraintes, jonctions.

KEYWORDS: composites, mixed finite elements, stress concentration, junctions.

1. Position du problème

Les structures composites stratifiées et “sandwich” nécessitent fréquemment le recours au collage ou à la mise en place d’inserts et de rivets. En service et sous chargements parfois faibles, des phénomènes instables, notamment par délaminage, apparaissent, amorcés par des surcontraintes de nature faible [LEG 90] inhérentes à proximité de ces singularités géométriques. Les techniques courantes d’assemblage de composites (inserts, rivets, profils extrudés collés ...) ne peuvent en général être modélisées par le biais de géométries bidimensionnelles. Ceci n’est pas sans poser quelques problèmes techniques délicats lors de la définition de chemins d’intégration convenables, indispensables à la mise en œuvre des fonctions singulières duales [LEG 87]. Par ailleurs, le recours à des éléments finis aux fonctions de forme modifiées (voir en particulier [AKI 76]) se solde en général par des résultats d’une précision discutable en raison d’une interpolation souvent grossière des contraintes singulières. Pour contourner ces difficultés, nous proposons un élément fini mixte 3D couplé à un code de calcul de concentrations de contraintes. Ce dernier permet notamment de s’affranchir des intégrales de contour (de surface dans le cas 3D) inhérentes aux techniques basées sur des éléments hybrides (voir [KIM 95] dans le cas de structures bidimensionnelles) dont l’extension au 3D peut s’avérer délicate.

2. Un code de calcul des “surcontraintes” dans les structures composites

2.1. Localisation du modèle élastique 3D au voisinage de singularités géométriques

Dans ce qui suit, l’espace euclidien de dimension trois sera rapporté à la base orthonormée fixe (o, i, j, k) et par suite identifié à \mathbb{R}^3 . On modélise alors le voisinage d’une singularité géométrique par la réunion d’ouverts de \mathbb{R}^3 (chacun matérialisant un composite donné) présentant une arête curviligne commune Γ_f que l’on supposera “suffisamment régulière”¹. Précisément, Γ_f sera décrite par la carte suivante (cf. figure 1) :

$$\varphi : \xi^3 \in \bar{T} = [s_1, s_2] \subset \mathbb{R} \mapsto OP = \varphi(\xi^3) \in \Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$$

Soient par ailleurs, (P, e_1, e_2, e_3) une base orthonormée rattachée à φ (repère de Frenet), permettant de ramener tout voisinage de Γ_f à une métrique euclidienne ($\|\cdot\|$ désignera la norme euclidienne) et $\mathcal{P}_{(\Gamma_f)}$ un ouvert de poutre curviligne enrobant le lacet de jonction Γ_f , défini avec un léger abus de langage par :

$$\mathcal{P}_{(\Gamma_f)} = I \times \omega_p \subset \mathbb{R}^3; \omega_p = \{(\xi^1, \xi^2) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{PM} = \mathbf{m} = \xi^1 e_1(\xi^3) + \xi^2 e_2(\xi^3)\}$$

On désignera par π_p le sous-espace vectoriel, généré par $\{e_1, e_2\}$, associé au plan normal à e_3 . Si Ω désigne l’ouvert de \mathbb{R}^3 occupé par la structure, le voisinage de la

1. Sans entrer dans les détails, disons que Γ_f est une ligne ne possédant ni points anguleux, ni fortes perturbations géométriques.

supposée zone de concentrations de contraintes sera défini par : $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)} = \mathcal{P}_{(\Gamma_f)} \cap \Omega = I \times \omega$ auquel on “rattachera” la carte suivante :

$$(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \omega \times I \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbf{OM} = \varphi(\xi^3) + \mathbf{m}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathcal{V}_{(\Gamma_f)} \subset \mathbb{R}^3$$

Le couple $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ désignera les champs de contraintes et de déplacements définis sur $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}$ et $\mathcal{L}(\cdot)$ la forme linéaire des chargements extérieurs que l’on particularisera de la façon suivante :

$$\mathcal{L} : \mathbf{v} \in (\mathbb{R}^3) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{v}) = \langle \mathbf{L}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{L}_v, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}} + \langle \mathbf{L}_{\partial v}, \mathbf{v} \rangle_{\partial \mathcal{V}_{(\Gamma_f)}} \quad (\in \mathbb{R})$$

La notation $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega}$ (ou plus simplement $\langle \cdot, \cdot \rangle$ lorsqu’aucune confusion n’est à craindre) symbolise le produit scalaire type $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Afin de ne pas privilégier un système de coordonnées, introduisons l’opérateur $\mathbf{P} = \mathbf{1}_3 - \mathbf{e}_3 \cdot \overline{\mathbf{e}_3}$ de projection orthogonale sur π_p et son supplémentaire $\mathbf{e}_3 \cdot \overline{\mathbf{e}_3}$ ($\overline{\cdot}$ désigne le transposé d’un vecteur ou d’un endomorphisme vis à vis du produit scalaire de \mathbb{R}^3). À tout champ de vecteurs et d’endomorphismes symétriques définis sur $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}$, on associe alors les décompositions :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 & : \mathbf{v} = \mathbf{v}_t + v^3 \mathbf{e}_3 \\ \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{L}_{Sym}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) & : \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_t + 2Sym[\mathbf{e}_3 \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}_s}] + \tau_n \mathbf{e}_3 \cdot \overline{\mathbf{e}_3} \end{cases}$$

où : $(\boldsymbol{\tau}_t = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{P}, \boldsymbol{\tau}_s = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_3, \tau_n = \overline{\mathbf{e}_3} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{e}_3) \in \mathcal{L}_{Sym}(\pi_p, \pi_p) \times \pi_p \times \mathbb{R}$ et $(\mathbf{v}_t = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v}, v^3 = \overline{\mathbf{e}_3} \cdot \mathbf{v}) \in \pi_p \times \mathbb{R}$. Dans le cadre des petites perturbations, si $(\mathbf{L}_v, \mathbf{L}_{\partial v}) \in [\mathbb{L}^2(\mathcal{V}_{(\Gamma_f)})]^3 \times [\mathbb{L}^2(\partial \mathcal{V}_{(\Gamma_f)})]^3$, un simple calcul montre que $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$, dans le voisinage de Γ_f , est l’unique solution du modèle élastique suivant :²

Trouver le couple $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) \in Sym[\mathbb{L}^2(\mathcal{V}_{(\Gamma_f)})]^9 \times [\mathbb{H}^1(\mathcal{V}_{(\Gamma_f)})]^3$ tel que :

$$\begin{cases} \forall \hat{\mathbf{u}} \in [\mathbb{H}^1(\mathcal{V}_{(\Gamma_f)})]^3, \text{ C.A.} : \\ \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}_t, \partial_{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{u}}_t \rangle + \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s, \overline{\partial_{\mathbf{m}} \hat{\mathbf{u}}^3} + \mathbf{P} \cdot \partial_{\xi^3} \hat{\mathbf{u}} (1 + \|\mathbf{m}\| \mu)^{-1} \|\partial_{\xi^3} \varphi\|^{-1} \rangle \\ + \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n, (1 + \|\mathbf{m}\| \mu)^{-1} \|\partial_{\xi^3} \varphi\|^{-1} \overline{\mathbf{e}_3} \cdot \partial_{\xi^3} \hat{\mathbf{u}} \rangle = \langle \mathbf{L}, \hat{\mathbf{u}} \rangle \\ \forall \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in Sym[\mathbb{L}^2(\mathcal{V}_{(\Gamma_f)})]^9 : \\ \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}_t, \partial_{\mathbf{m}} \mathbf{u}_t \rangle + \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}_s, \overline{\partial_{\mathbf{m}} \mathbf{u}^3} + \mathbf{P} \cdot \partial_{\xi^3} \mathbf{u} (1 + \|\mathbf{m}\| \mu)^{-1} \|\partial_{\xi^3} \varphi\|^{-1} \rangle \\ + \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n, (1 + \|\mathbf{m}\| \mu)^{-1} \|\partial_{\xi^3} \varphi\|^{-1} \overline{\mathbf{e}_3} \cdot \partial_{\xi^3} \mathbf{u} \rangle = \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rangle \end{cases} \quad [1]$$

qui n’est pas autre chose que le principe variationnel mixte de Hellinger-Reissner (la première équation traduit le principe des puissances virtuelles et la seconde, la loi de comportement). \mathbf{S} désigne l’endomorphisme auto-adjoint, défini-positif de souplesse et $\mu : [0, 2\pi] \times I \rightarrow \mathbb{R}$ la courbure de Γ_f en P définie de sorte que : $\partial_{\xi^3} \mathbf{m} = \|\mathbf{m}\| \mu(\theta, \xi^3) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^3} \right\| \mathbf{e}_3$.

2. “C.A.” signifie “cinématiquement admissible”.

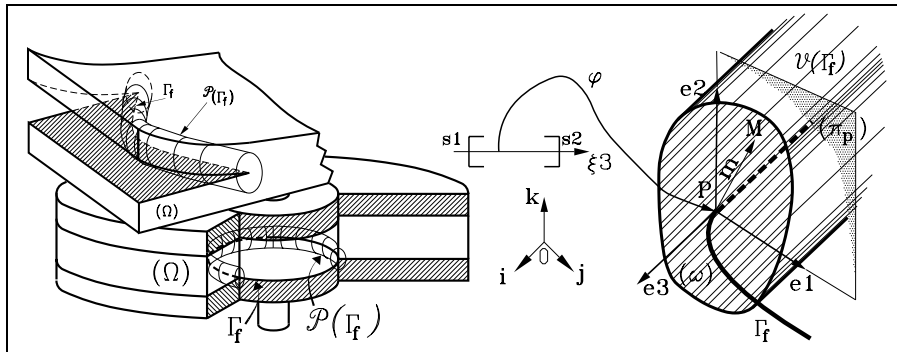


Figure 1. Voisinage d'une singularité géométrique

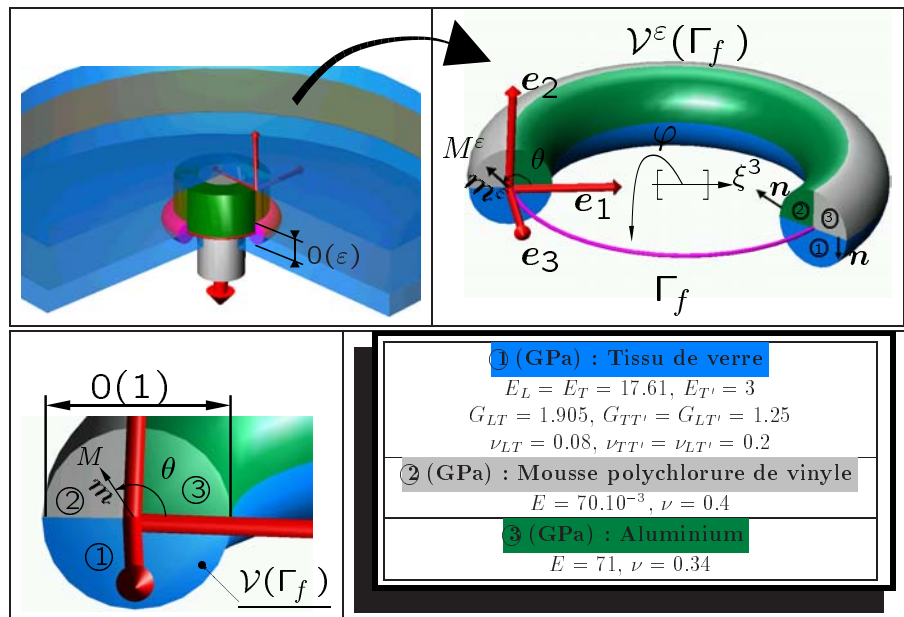


Figure 2. Voisinage dilaté

2.2. Analyse locale, zoom du voisinage de poutre

Une idée naturelle est de caractériser les contraintes singulières de carré intégrable sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de la structure comme les solutions du modèle mixte [1] pour un diamètre évanescents de ω . En choisissant $\tilde{u} \in [D(\mathcal{V}(\Gamma_f))]^{3 \times 3}$ et par un simple calcul

3. Ensemble des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

utilisant le théorème de la divergence, on obtient localement les égalités suivantes valables presque partout (au sens des distributions) :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Équations d'équilibre :} \\ \text{div}_m[(1 + \|\mathbf{m}\|\mu)\boldsymbol{\sigma}_t] + \frac{\partial}{\partial s}[\overline{\boldsymbol{\sigma}_s} + \sigma_n \overline{\mathbf{e}_3}] \cdot \mathbf{P} = -(1 + \|\mathbf{m}\|\mu)\overline{L\mathbf{v}_t} \\ \text{div}_m[(1 + \|\mathbf{m}\|\mu)\boldsymbol{\sigma}_s] + \frac{\partial}{\partial s}[\overline{\boldsymbol{\sigma}_s} + \sigma_n \overline{\mathbf{e}_3}] \cdot \mathbf{e}_3 = -(1 + \|\mathbf{m}\|\mu)Lv_3 \\ \text{avec : } ds = \|\partial_{\xi^3} \boldsymbol{\varphi}\| d\xi^3 = \text{arc curviligne élémentaire} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{dans} \\ \mathcal{V}_{(\Gamma_f)} \end{array} \quad [2]$$

Compatibilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \gamma = \text{Sym}[\partial_M \mathbf{u}] \Leftrightarrow 2\text{Sym}[\partial_M \overline{\text{div}_M \gamma}] - \Delta_M \gamma - \partial_M \overline{\partial_M \text{Tr}(\gamma)} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

Expressions dans lesquelles div_m et div_M représentent respectivement la divergence surfacique définie sur (ω) et la divergence volumique définie sur $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}$.

Il est très délicat d'aborder directement le calcul de $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ pour $\|\mathbf{m}\| \rightarrow 0$ à partir des équations du modèle tridimensionnel [2]. La raison est que le "petit paramètre" du problème : $\text{Diam}(\omega)$ n'apparaît pas explicitement et on voit mal de quelle façon on pourrait effectuer un passage à la limite. On est alors amené à s'inspirer des méthodes classiques de développements asymptotiques raccordés [LEG 87]. Précisément, on définit un voisinage de poutre $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon$ de diamètre ε ($\text{Diam}(\omega^\varepsilon) = \varepsilon$) comme l'homothétique de centre $P \in \Gamma_f$, de rapport ε , d'un voisinage dilaté, noté encore $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}$, de diamètre unité (cf. figure 2). Si on définit cette homothétie par l'application :

$$\mathcal{C}^\varepsilon : M = (m, \xi^3) \in \mathcal{V}_{(\Gamma_f)} \mapsto M^\varepsilon = \mathcal{C}^\varepsilon(M) = (\varepsilon m, \xi^3) \in \mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon,$$

alors à chaque fonction $f(M^\varepsilon)$ définie sur le voisinage $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon$, on associe son homologue sur l'ouvert dilaté $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}$ par $f \circ \mathcal{C}^\varepsilon(M) = f^\varepsilon(\varepsilon, M)$, ε jouant le rôle d'un simple paramètre. On notera d'ailleurs que pour $\varepsilon \rightarrow 0$, les sections de $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}$ (homothétique de la très fine poutre $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon$) sont assimilables géométriquement à un "emboîtement" de secteurs angulaires (cf. figure 2). Ainsi, l'endomorphisme des contraintes s'écrit sur $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}$: $\boldsymbol{\sigma} \circ \mathcal{C}^\varepsilon(M) = \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\varepsilon, m, \xi^3)$. On supposera pour ce dernier l'existence d'un équivalent asymptotique lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, que l'on écrira symboliquement : $\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon(\varepsilon, m, \xi^3) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \boldsymbol{\sigma}^0(\varepsilon, m, \xi^3)$. On notera avec soin que l'homothétie ainsi définie implique une mise à l'échelle du gradient et de la divergence volumique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial *}{\partial M^\varepsilon} = \varepsilon^{-1} \frac{\partial *}{\partial \mathbf{m}} \cdot \mathbf{P} + \frac{\partial *}{\partial s} \cdot \overline{\mathbf{e}_3} (1 + \varepsilon \|\mathbf{m}\|\mu)^{-1} \\ \text{div}_{M^\varepsilon} * = (1 + \varepsilon \|\mathbf{m}\|\mu) \varepsilon^{-1} \text{div}_m \mathbf{P} \cdot * + \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} (\|\mathbf{m}\|\mu) \cdot \mathbf{P} \cdot * + \frac{\partial}{\partial s} (* \cdot \overline{\mathbf{e}_3}) \end{array} \right.$$

En s'inspirant des formules de Frenet, on vérifie que : $\mu(\theta, \xi^3) = 0(R^{-1})$ et $\|\partial_{\xi^3} \boldsymbol{\varphi}\| = 0(R)$ où $R(\xi^3)$ désigne le rayon de courbure normal. Associons à cette courbure la norme locale : $\rho = \sup_{\theta, \xi^3} |\mu(\theta, \xi^3)|$. On peut alors vérifier que le comportement asymptotique ($\varepsilon \rightarrow 0$) des équations tridimensionnelles [2] admet au moins les deux ramifications suivantes :

- (i) si $\rho(\varepsilon) = 0(\varepsilon^\alpha)$, $\alpha > -1$ alors ∂_{ξ^3} est négligeable devant ∂_m pour $\varepsilon \rightarrow 0$;
- (ii) si $\rho(\varepsilon) = 0(\varepsilon^\alpha)$, $\alpha \leq -1$ alors ∂_{ξ^3} et ∂_m sont du même ordre de grandeur.

Dans toute la suite, on se placera dans la situation (i) ; ce qui de façon pratique exclut les fortes courbures pour Γ_f . Une telle configuration (fréquente en pratique, notamment lorsque Γ_f est une ligne de jonction) peut toujours être envisagée si on se donne un diamètre ε du voisinage de poutre “suffisamment petit”. Cependant, cette hypothèse est mise en défaut dans le voisinage des éventuels points anguleux et points extrêmes de Γ_f . Dans le premier cas $\rho = +\infty$, dans le second cas surviennent des phénomènes de couche-limite au voisinage des sections extrêmes. On montre alors aisément que les champs dominants (σ^0, u^0) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ sont, après retour à l’ouvert physique $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon$, les solutions uniques du modèle suivant (n désigne la normale unitaire extérieure à un quelconque des ouverts matérialisant un composite) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \hat{u} \in [\mathbb{H}^1(\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon)]^3, \text{ C.A.} : \langle \sigma_t^0, \partial_m \varepsilon \hat{u}_t \rangle + \langle \sigma_s^0, \overline{\partial_m \varepsilon \hat{u}^3} \rangle = \langle L_v^0, \hat{u} \rangle_{\mathcal{V}_\varepsilon} \\ \quad + \langle L_{\partial v}^0, \hat{u} \rangle_{\partial \mathcal{V}_\varepsilon} + \langle \text{div}_m \varepsilon \tilde{\Sigma}_t, \hat{u}_t \rangle + \langle \text{div}_m \varepsilon \Sigma_s, \hat{u}^3 \rangle \\ \quad - \langle \Sigma_t \cdot n, \hat{u}_t \rangle - \langle \bar{n} \cdot \Sigma_s, \hat{u}^3 \rangle \\ \forall \hat{\sigma} \in \text{Sym}[\mathbb{L}^2(\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon)]^9 : \langle \hat{\sigma}_t, \partial_m \varepsilon u_t^0 \rangle + \langle \hat{\sigma}_s, \overline{\partial_m \varepsilon u_3^0} \rangle = \langle \hat{\sigma}, \tilde{S} \cdot \sigma^0 \rangle \\ \tilde{S}_{st} = S_{st} - (S_{sn} \cdot S_{nt})/S_{nn}; \quad \tilde{S}_{tt} = S_{tt} - (S_{tn}^2)/S_{nn}; \quad \tilde{S}_{ss} = S_{ss} - (S_{sn}^2)/S_{nn}; \\ \sigma_n^0 = [\gamma_n^0 - (S_{nt} \cdot \sigma_t^0 + 2S_{ns} \sigma_s^0)]/S_{nn} \quad ; \quad \gamma_n^0 = \bar{m}^\varepsilon \cdot A(\xi^3) + B(\xi^3) ; \\ \Sigma = 2R_s \cdot \gamma_s^p + R_n \gamma_n^0 \quad ; \quad R = S^{-1} \quad ; \quad \gamma_s^p = C(\xi^3) \Omega_t \cdot m^\varepsilon ; \\ \Omega_t = 2 \text{Ant Sym}[e_1 \cdot e^2] \quad ; \quad (A, B, C) \in \pi_p \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Soit encore, localement, en termes de contraintes (et pour chaque matériau en présence) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\text{div}_m \varepsilon \sigma_t^0 = \overline{L_{v_t}^0} + \text{div}_m \varepsilon \Sigma_t \quad \left. \vphantom{-\text{div}_m \varepsilon \sigma_t^0} \right\} \text{ dans } \mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon \quad ; \quad \bar{n} \cdot \sigma_t^0 = \overline{L_{\partial v_t}^0} - \bar{n} \cdot \Sigma_t \quad \left. \vphantom{\bar{n} \cdot \sigma_t^0} \right\} \text{ dans } \partial \mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon \\ -\text{div}_m \varepsilon \sigma_s^0 = L_{v_3}^0 + \text{div}_m \varepsilon \Sigma_s \quad \left. \vphantom{-\text{div}_m \varepsilon \sigma_s^0} \right\} \text{ dans } \mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon \quad ; \quad \bar{n} \cdot \sigma_s^0 = L_{\partial v_3}^0 - \bar{n} \cdot \Sigma_s \quad \left. \vphantom{\bar{n} \cdot \sigma_s^0} \right\} \text{ dans } \partial \mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon \\ \left\{ \begin{array}{l} 2 \text{Sym}[\overline{\partial_m \varepsilon \text{div}_m \varepsilon \gamma_t^0}] - \Delta_m \varepsilon \gamma_t^0 \\ -\partial_m \varepsilon \overline{\partial_m \varepsilon \text{Tr}(\gamma_t^0)} = 0 \\ \text{Curl}_m \overline{\partial_m \varepsilon u_3^0} = 0 \end{array} \right. ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_t^0 = \tilde{S}_t \cdot (\sigma_t^0 + 2 \text{Sym}[\overline{e_3} \cdot \sigma_s^0]) \\ \gamma_s^0 = \tilde{S}_s \cdot (\sigma_t^0 + 2 \text{Sym}[\overline{e_3} \cdot \sigma_s^0]) \end{array} \right. \\ \sigma_n^0 = (\bar{m}^\varepsilon \cdot A + B - [S_{nt} \cdot \sigma_t^0 + 2S_{ns} \sigma_s^0])/S_{nn} \\ + \text{conditions limites appropriées (notamment continuité aux interfaces en jonction.)} \end{array} \right. \quad [3]$$

On peut ainsi espérer obtenir le comportement singulier le plus significatif en l’extrayant de ce modèle.

2.3. Résolution de la formulation forte du modèle dominant

Soit $(r = \|m^\varepsilon\|, \theta, \xi^3)$ un système de coordonnées toriques décrivant $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon$. S’inspirant des idées de Lekhnitskii [LEK 63], on établit pour le problème homogène issu de [3] que les contraintes planes et transverses (σ_t, σ_s) dérivent de potentiels scalaires,

fonctions holomorphes des variables $Z_k = r\nu_k$, $\nu_k = \cos \theta + \mu_k \sin \theta$, $k = 1, 2, 3$. Les $\mu_k(\xi^3) \in \mathbb{C}$, sont solutions d'un problème aux valeurs propres fonction des matériaux en présence [LEK 63]. Par suite, un développement formel au voisinage de $r = 0$ permet d'agencer σ^0 sous la forme matricielle suivante [LAS 93] ($\{\mathbf{A}\}$ et $\{\mathbf{B}\}$ désignent respectivement une matrice rectangulaire et unicolonne, a^* le complexe conjugué de a) :

$$\{\sigma^0\} = \sum_{\alpha} 2\Re \left(K_{\alpha}(\xi^3) r^{\alpha(\xi^3)} \{[\tau(\mu_k)][\nu(\alpha)]\{\mathbf{A}_{\alpha}\} + [\tau^*(\mu_k)][\nu^*(\alpha)]\{\mathbf{B}_{\alpha}\}\} \right) \quad [4]$$

$$\text{où : } \begin{cases} K_{\alpha}(\xi^3) \in \mathbb{C} \text{ sont les F.I.C. a priori complexes ;} \\ [\tau(\mu_k)] \text{ contient les endomorphismes de base de la solution de Lekhnitskii ;} \\ (\{\mathbf{A}_{\alpha}\}, \{\mathbf{B}_{\alpha}\}) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 ; \\ [\nu(\alpha)] = \text{Diag}(\nu_1^{\alpha}, \nu_2^{\alpha}, \nu_3^{\alpha}) \text{ et } \nu_{12} = \alpha \nu_1^* \nu_1^{\alpha-1} \text{ si les } \mu_k \text{ sont multiples.} \end{cases}$$

De sorte que l'ensemble des conditions aux limites portant sur les interfaces débouche sur un problème aux valeurs propres implicite du type : $[C(\alpha)]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$, possédant des propriétés analogues à [LEG 87]. La matrice $[C(\alpha)]$ est obtenue par expansion de matrices élémentaires relatives aux conditions limites sur chaque interface (à l'instar des assemblages par éléments finis). Le noyau de $[C]$ est ensuite extrait directement par factorisation LU, fournissant les vecteurs propres $\{\mathbf{A}_{\alpha}\}$ et $\{\mathbf{B}_{\alpha}\}$ figurant parmi les composantes de $\{\mathbf{q}\}$. Les valeurs propres α annulant $\det[C]$ et conduisant à des contraintes de carré intégrable ($-1 < \Re(\alpha)$) sont obtenues en adaptant numériquement le théorème des résidus (cf. critère de Rouché).

2.4. Résultats numériques

– Planche 2 : fissure débouchant sur une interface (voir annexes)

Il s'agit d'une situation singulière traitée par [TIN 84] au moyen d'une méthode quasi-analytique basée sur une approche en déplacements utilisant les techniques de résolution d'équations aux dérivées partielles dépendant de deux variables dues à Stroh. Les valeurs propres estimées pour différentes stratifications sont consignées dans un unique tableau et coïncident parfaitement avec les résultats de [TIN 84]. On y retrouve en particulier, lorsque les fibres des deux couches ont même direction (composite type graphite/epoxy), la valeur propre triple non déficiente classique des problèmes de fissuration ($\alpha = -0.5$). Les déplacements singuliers associés à cette dernière (en particulier pour $[\theta_1, \theta_2] = [0, 0]$) sont illustrés sur la première rangée de graphiques. On y retrouve de gauche à droite : le mode d'ouverture, de glissement plan et de glissement transverse. Pour $\theta_1 \neq \theta_2$, on obtient systématiquement trois valeurs propres simples. Afin de fixer les idées, on a traité le cas $[\theta_1, \theta_2] = [45^\circ, 0]$. Les déplacements singuliers associés exhibent une configuration en "aile de papillon" (présence simultanée des modes propres d'ouverture et de glissement).

– Planche 3 : jonction insert/structure sandwich (voir annexes)

On considère ici le problème d'un insert cylindrique de révolution noyé dans une structure sandwich. Ce type de conception est généralement retenu lorsque des efforts

localisés sont transmis au panneau. Le rôle de l'insert est de "soulager" la fixation en redistribuant les contraintes. On s'intéresse plus particulièrement à l'intersection entre l'insert ③ réalisé en alliage d'aluminium, le coeur ② constitué d'une mousse polychlorure de vinyle et la peau inférieure ① réalisée à partir d'un tissu de verre (cf. tableau figure 2).

La planche 3 donne un aperçu des modes propres singuliers présents au voisinage de la jonction insert/peau inférieure. On notera en particulier que les valeurs propres α , distribuées de façon $\pi/2$ périodique le long de la ligne de jonction (en raison des propriétés du tissu de verre), sont de nature très proche aux exposants singuliers que l'on retrouve en fond de fissure par délaminage ($\Re e(\alpha) \simeq -0.5$ et $\Im m(\alpha) \simeq O(10^{-2})$). De telles singularités que l'on pourrait qualifier de "quasi-fortes" jettent un doute sur le caractère judicieux d'une telle conception.

Enfin, on trouvera sur cette même planche, les champs de déplacements singuliers ainsi que la variation vis à vis de θ des contraintes singulières associées sur deux sections du voisinage tubulaire $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon$.

3. Schéma adopté pour l'extraction des F.I.C : enrichissement d'éléments finis mixtes 3D

3.1. Présentation formelle du schéma d'extraction

Le modèle de base – Désignons par $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ l'ouvert occupé par la structure complète. Soient par ailleurs $(\overline{\mathbf{L}}_\Omega, \overline{\mathbf{L}}_{\partial\Omega}) \in [\mathbb{L}^2(\Omega)]^3 \times [\mathbb{L}^2(\partial\Omega)]^3$ les formes linéaires de chargement de volume et de bord et \mathbf{S} le tenseur de souplesse. Les champs de contraintes et de déplacements $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{U})$ définis sur Ω sont alors les solutions uniques du modèle mixte :

Trouver le couple $(\boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{U}) \in \text{Sym}[[\mathbb{L}^2(\Omega)]^9] \times [\mathbb{H}^1(\Omega)]^3$ tel que :

$$\begin{cases} \forall \hat{\mathbf{U}} \in [\mathbb{H}^1(\Omega)]^3, \text{ C.A.} & : \langle \boldsymbol{\Sigma}, \partial_M \hat{\mathbf{U}} \rangle = \langle \mathbf{L}_v, \hat{\mathbf{U}} \rangle_\Omega + \langle \mathbf{L}_{\partial v}, \hat{\mathbf{U}} \rangle_{\partial\Omega} \\ \forall \hat{\boldsymbol{\sigma}} \in \text{Sym}[[\mathbb{L}^2(\Omega)]^9] & : \langle \hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \partial_M \mathbf{U} \rangle = \langle \hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Sigma} \rangle \end{cases}$$

Considérons à présent la décomposition des contraintes en partie régulière et singulière $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\sigma}^r + \boldsymbol{\sigma}^s$ où $\boldsymbol{\sigma}^s$ est issue de [4]. En se limitant, comme on l'a déjà signalé, au spectre : $\{\alpha : -1 < \Re e(\alpha) < 0\}$, on est assuré du caractère intégrable de $\text{Tr}(\overline{\boldsymbol{\sigma}}^s \cdot \boldsymbol{\sigma}^s)$ sur Ω . Par suite $(\boldsymbol{\sigma}^r + \boldsymbol{\sigma}^s, \mathbf{U})$ est solution unique du modèle variationnel mixte de Hellinger-Reissner suivant :

$$\begin{cases} \forall \hat{\mathbf{U}} \in [\mathbb{H}^1(\Omega)]^3, \text{ C.A.} : & \\ \langle \boldsymbol{\sigma}^r, \partial_M \hat{\mathbf{U}} \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}^s, \partial_M \hat{\mathbf{U}} \rangle = \langle \mathbf{L}_\Omega, \hat{\mathbf{U}} \rangle_\Omega + \langle \mathbf{L}_{\partial\Omega}, \hat{\mathbf{U}} \rangle_{\partial\Omega} & \\ \forall (\hat{\boldsymbol{\sigma}}^r, \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s) \in (\text{Sym}[[\mathbb{L}^2(\Omega)]^9])^2 : \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}^r, \partial_M \mathbf{U} \rangle + \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s, \partial_M \mathbf{U} \rangle = & \\ \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}^r, \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}^r \rangle + \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}^r, \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}^s \rangle + \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s, \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}^r \rangle + \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}^s, \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\sigma}^s \rangle & \end{cases} \quad [5]$$

Troncature du support de σ^s – Soit $\Omega_h = \cup_{\text{éléments}} \omega_e$ un maillage de Ω (l'indice h fait référence à une approximation par éléments finis). Puisque les contraintes singulières σ^s sont confinées dans un voisinage immédiat de Γ_f , on peut raisonnablement tronquer leur support en le réduisant à un maillage du voisinage de poutre $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon$. Ceci est réalisé par la partition suivante :

$$\begin{cases} \Omega_h = \Omega_h^s \cup \Omega_h^r & \text{avec : } \Omega_h^s = \cup \omega_e^s = \text{maillage de } \mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon & \text{et } \Omega_h^r = \cup \omega_e^r \\ \text{tel que } \sigma_h = \sigma_h^r + \sigma_h^s & \text{dans } \Omega_h^s & \text{et } \sigma_h = \sigma_h^r & \text{dans } \Omega_h^r \end{cases}$$

Une telle troncature est surtout motivée par le fait que $\partial_r \sigma^s$ est $O(r^{\alpha-1})$ ⁴, de sorte que pour r “petit”, il serait illusoire de chercher une estimation de Σ par le biais de σ_h^r qui, généralement, est du type polynomial en (ξ^1, ξ^2, ξ^3) .

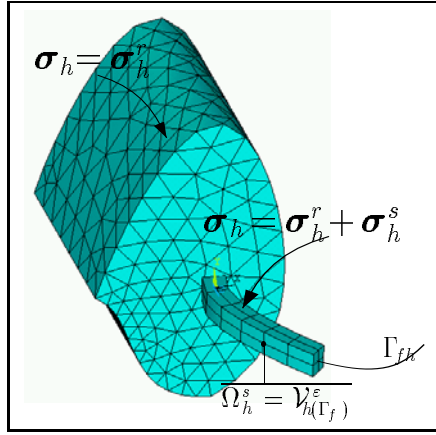


Figure 3. Troncature du support de σ^s : Le support de σ^s se réduit à l'ouvert de \mathbb{R}^3 occupé par la réunion des éléments dont les arêtes coïncident avec Γ_{fh}

Approximation par éléments finis – Les déplacements sont interpolés de manière nodale : $\{U_h\} = [N]\{q\}$ et par suite les déformations : $\{\text{Sym}[\partial_M U_h]\} = [B]\{q\}$. Le vecteur $\{q\}$ désigne les déplacements nodaux, $[N]$ et $[B]$ les matrices des fonctions d'interpolation et de leurs dérivées. Afin d'accélérer la convergence de l'extraction des F.I.C., on introduit les singularités de déformation par modification des fonctions d'interpolation de $[N]$ à la manière de [AKI 76].

Les contraintes régulières sont exprimées dans une base polynomiale : $\{\sigma_h^r\} = [\tau^r]\{h\}$. Le vecteur $\{h\}$ contient les paramètres des contraintes. La matrice d'interpolation $[\tau^r]$ est construite de sorte que les conditions du théorème de Brezzi soient satisfaites. Sous forme discrétisée, si \mathcal{R} désigne l'espace vectoriel des modes de corps rigides, ceci se traduit par :

$$\forall U_h \notin \mathcal{R} : \langle [\tau^r]\{h\}, [B]\{q\} \rangle_{\Omega_h} \neq 0 \iff \langle [\tau^r]\{h\}, [B]\{q\} \rangle_{\omega_e} \neq 0.$$

4. Ou éventuellement $O(r^{\alpha-1}(1 + \ln r))$ dans le cas d'un chargement singulier ou constant au voisinage de Γ_f (cf. [CRE 01]).

On évite ainsi de faire travailler les modes cinématiques à énergie nulle.

Les contraintes singulières σ^s sont évaluées pour des valeurs fixées de ξ^3 coïncidant avec les nœuds de Γ_{fh} . Une interpolation via les polynômes de Lagrange conduit à une formulation matricielle du type : $\{\sigma_h^s\} = [\tau^s(\xi^3)]\{\mathbf{K}\}$ où le vecteur $\{\mathbf{K}\}$ contient les F.I.C. aux nœuds de Γ_{fh} .

Extraction des F.I.C. – Définissons les matrices élémentaires de flexibilité et de connexion statique suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} [\mathbf{F}^r] = \int_{\omega_e^r} \overline{[\tau^r]} [\mathbf{S}] [\tau^r] & ; \quad [\mathbf{F}^s] = \int_{\omega_e^s} \overline{[\tau^s]} [\mathbf{S}] [\tau^s] \\ [\mathbf{F}^{rs}] = \int_{\omega_e^s} \overline{[\tau^r]} [\mathbf{S}] [\tau^s] & ; \quad \{\mathbf{L}\} = \int_{\omega_e} \overline{[\mathbf{N}]} \{\mathbf{L}_\Omega\} + \int_{\partial\omega_e} \overline{[\mathbf{N}]} \{\mathbf{L}_{\partial\Omega}\} \\ \overline{[\mathbf{G}^r]} = \int_{\omega_e^r} \overline{[\tau^r]} [\mathbf{B}] & ; \quad \overline{[\mathbf{G}^s]} = \int_{\omega_e^s} \overline{[\tau^s]} [\mathbf{B}] \end{array} \right.$$

L'injection du triplet $(\{\mathbf{U}_h\}, \{\sigma_h^r\}, \{\sigma_h^s\})$ précédemment défini dans le modèle mixte [5] donne par simple condensation statique des paramètres des contraintes $\{\mathbf{h}\}$ le système matriciel élémentaire :

$$\left[\begin{array}{cc} \overline{[\mathbf{K}^r]} & \overline{[\mathbf{G}^s]} \\ \overline{[\mathbf{G}^s]} & \overline{[\mathbf{F}^s]} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{q\} \\ \{\mathbf{K}\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \{\mathbf{L}\} \\ \{\mathbf{0}\} \end{array} \right\}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{[\mathbf{G}^s]} = [\mathbf{G}^s] - [\mathbf{G}^r] [\mathbf{F}^r]^{-1} [\mathbf{F}^{rs}] \\ \overline{[\mathbf{F}^s]} = \overline{[\mathbf{F}^{rs}] [\mathbf{F}^r]^{-1} [\mathbf{F}^{rs}]} - [\mathbf{F}^s] \\ \overline{[\mathbf{K}^r]} = [\mathbf{G}^r] [\mathbf{F}^r]^{-1} [\mathbf{G}^r] \end{array} \right.$$

Ce qui fournit directement après assemblage, outre les déplacements nodaux, l'ensemble des F.I.C., sans autres difficultés que quelques précautions usuelles pour l'intégration des termes singuliers. En pratique, le maillage des divers voisinages $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon$ est à peine plus raffiné que celui du reste de la structure.

3.2. Résultats numériques

– Planche 4 : validation sur un exemple simple (voir annexes)

L'extraction explicite des F.I.C. n'est envisageable que si le raccordement entre les solutions locales en contraintes définies d'une part sur $\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon$ et d'autre part sur le reste de la structure peut se faire localement en un point appartenant à $\partial\mathcal{V}_{(\Gamma_f)}^\varepsilon$. Un tel calcul est en général hors de portée (tout particulièrement dans le cadre des matériaux anisotropes). Cependant, le cas des micro-fissures (i.e. de diamètre "η" bien inférieur aux dimensions caractéristiques de la structure) peut être traité explicitement par des méthodes de développements asymptotiques raccordés et une adaptation au cas des matériaux anisotropes des fonctions d'Irwin. En passant en coordonnées cylindriques et en désignant par Σ^{ext} le champ de contraintes solution du problème en l'absence de fissure, on obtient aisément (\mathbf{n} désigne la normale unitaire aux lèvres) :

$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 = \sqrt{\eta/2r} \lim_{r \rightarrow 0} \bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Sigma}^{ext}$ que l'on peut alors comparer avec le comportement asymptotique fourni par l'élément mixte singulier.

On choisit pour cela le problème particulièrement simple d'une poutre cylindrique soumise à traction, comportant une petite fissure circulaire à coeur (cf. figure planche 4). Si cette dernière est située en dehors des supports de couches limites des sections extrêmes, alors $\boldsymbol{\Sigma}^{ext}$ est solution d'un problème de Saint-Venant et :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^0 = \sqrt{\frac{\eta}{2r}} \frac{F}{S} \mathbf{e}_2 \quad \text{avec : } S \text{ section droite de la poutre et } F \text{ résultante de traction.}$$

On a reporté sur la planche 4 le comportement des contraintes singulières en fonction du rapport "diamètre fissure/diamètre barre". On met ainsi d'une part en évidence la convergence des résultats fournis par l'élément et d'autre part on exhibe le caractère dominant de la contrainte de pelage (σ_{22}^s) indépendante de l'abscisse décrivant la ligne du front de fissure.

– Planche 1 : jonctions de structures "sandwich" par le biais d'inserts (voir annexes)

On reprend ici le problème de la jonction insert/sandwich de la planche 3. L'étude des modes singuliers avait exhibé le caractère surprenant des singularités des contraintes. On considère la jonction d'un insert cylindrique de révolution en alliage d'aluminium avec une plaque sandwich circulaire encastrée sur tout le bord latéral. La vis d'assemblage de l'insert (réalisée dans un acier de construction $E = 210$ MPa, $\nu = 0.285$) est soumise à traction. Les fibres des peaux du sandwich réalisées à partir d'un tissu de verre (cf. figure 2) ont un écart angulaire relatif de $\pi/4$. La planche 1 exhibe la distribution π -périodique alterne complexe des F.I.C. le long de la ligne de jonction inférieure (Γ_f^-). Le facteur K_1 est associé à la singularité réelle et $K_2 + jK_3$ à la singularité complexe. La normalisation des F.I.C. est ici réalisée par le code et définie de sorte que :

$$\text{Max}_{1 \leq i, j \leq 9} \quad \text{Sup}_{\theta} \quad |r^{-\alpha} \sigma_{ij}(r, \theta)|_{r=1} = 1$$

Il apparaît clairement pour une telle conception que la contrainte singulière associée à l'exposant le plus fort génère en définitive, à l'échelle de la structure, l'énergie la plus faible. Une telle observation n'est évidemment pas suffisante pour préjuger la singularité jouant un rôle prédominant dans un processus d'endommagement d'une telle jonction (notamment par arrachement). Pour un maillage de 2872 éléments hexaédriques à huit nœuds et de 2×88 éléments singuliers hexaédriques à dix nœuds⁵, le calcul complet (résolution des modes propres singuliers en chaque nœud coïncidant avec Γ_f^{\pm} , extraction des F.I.C. le long des lignes de jonction inférieure et supérieure) ne nécessite que 4 minutes CPU sur un simple micro-ordinateur du type PC.

5. On ne modélise ici que la moitié de la structure compte tenu de la π -périodicité.

4. Bibliographie

- [AKI 76] J. E. AKIN, « The generation of element with singularities », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, 1976, p. 1249-1259.
- [CRE 01] CRÉPIN D., « Éléments finis mixtes singuliers tridimensionnels pour l'étude des surcontraintes dans les structures en matériaux composites », Thèse de doctorat, Université de Lille I, 2001.
- [LEG 87] LEGUILLON D., SANCHEZ-PALENCIA É., *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*, Collection Recherche en Mathématiques Appliquées, Masson, 1987.
- [LEG 90] LEGUILLON D., SANCHEZ-PALENCIA É., « Solutions Locales en Élasticité et Effets de Concentration de Contraintes », *Calcul des Structures et Intelligence Artificielle*, Fouet J.M., Ladevèze P. et Ohayon R. Eds., 1990, Pluralis, p. 121-138.
- [LAS 93] SCHILS P., LASCHET G., DE SAXCÉ G., « Développement et validation de modèles pour la caractérisation des propriétés mécaniques et la description des mécanismes d'endommagement des structures en matériaux composites », Projet région Wallone, Rapport final de la convention n° 1889, novembre 1993.
- [KIM 95] KIM T.W., IM S., « Boundary layers in wedges of laminated composite strips under generalized plane deformation - part1 : asymptotic solutions, part2 : numerical solutions », *Int. J. Solids and Structures*, vol. 32, 1995, p. part1 : 609-628, part2 : 629-645.
- [LEK 63] LEKHNITSKIIS.G., *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, Holden-Day, 1963.
- [TIN 84] TING T.C.T., « Singularities at the tip of a crack normal to the interface of an anisotropic layered composite », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 20, n° 5, 1984, p. 439-454.

5. Annexes : Planches 1 à 4

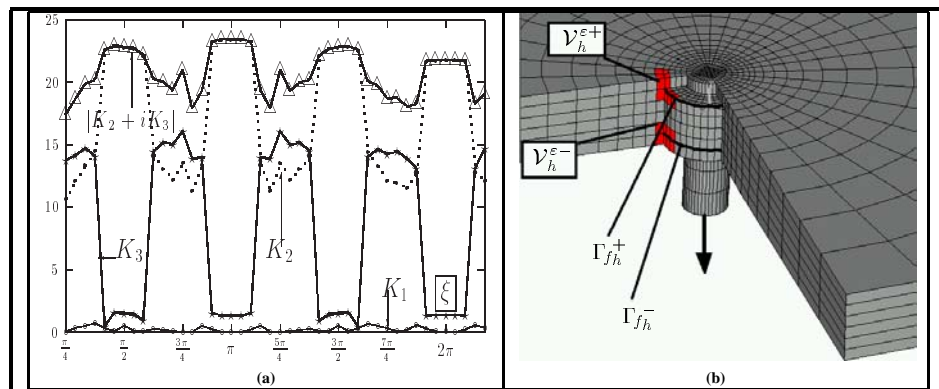


Planche 1. Jonction de structures "sandwich"

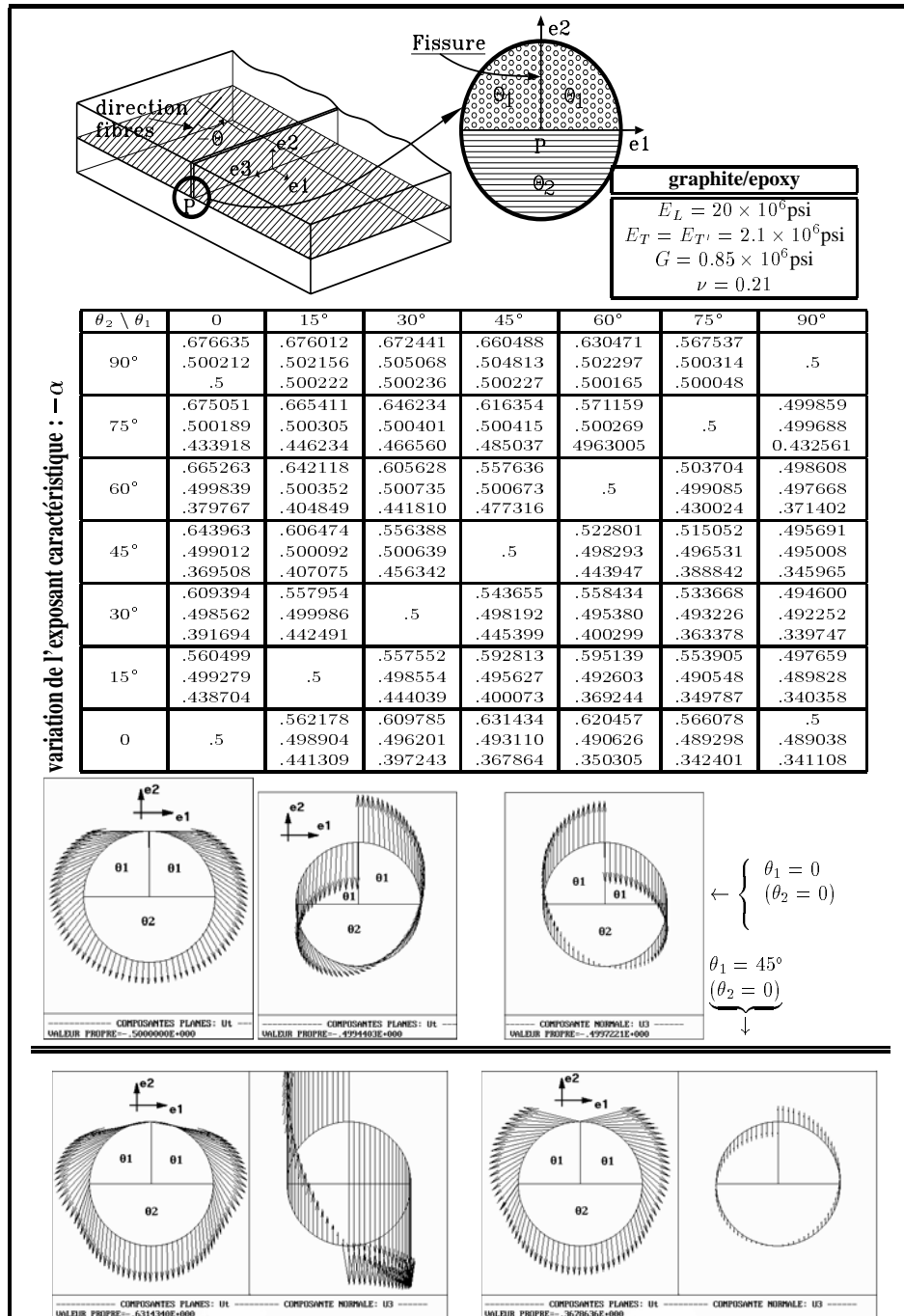


Planche 2. Fissure débouchant sur une interface

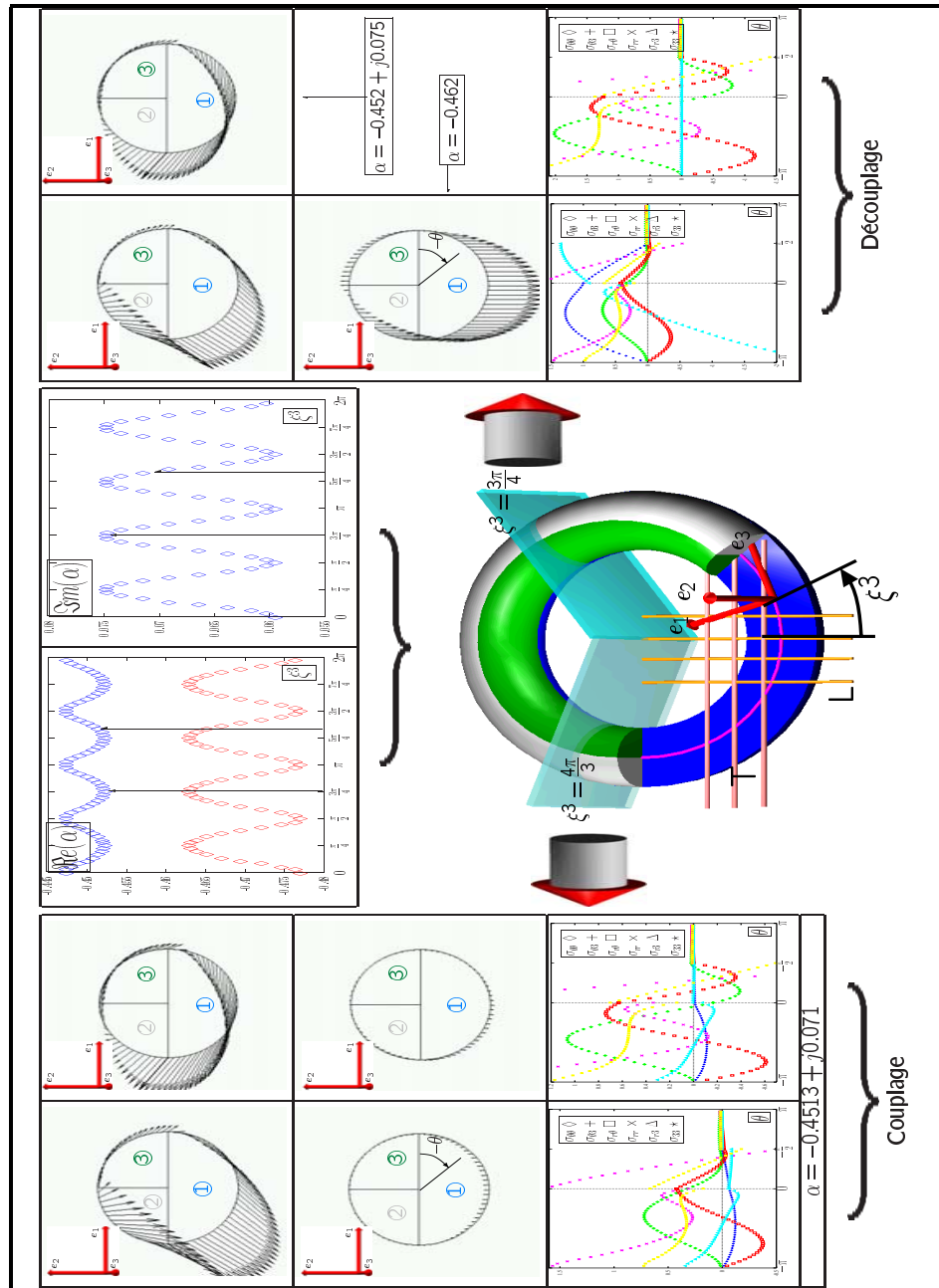


Planche 3. Insert structural en alliage d'aluminium

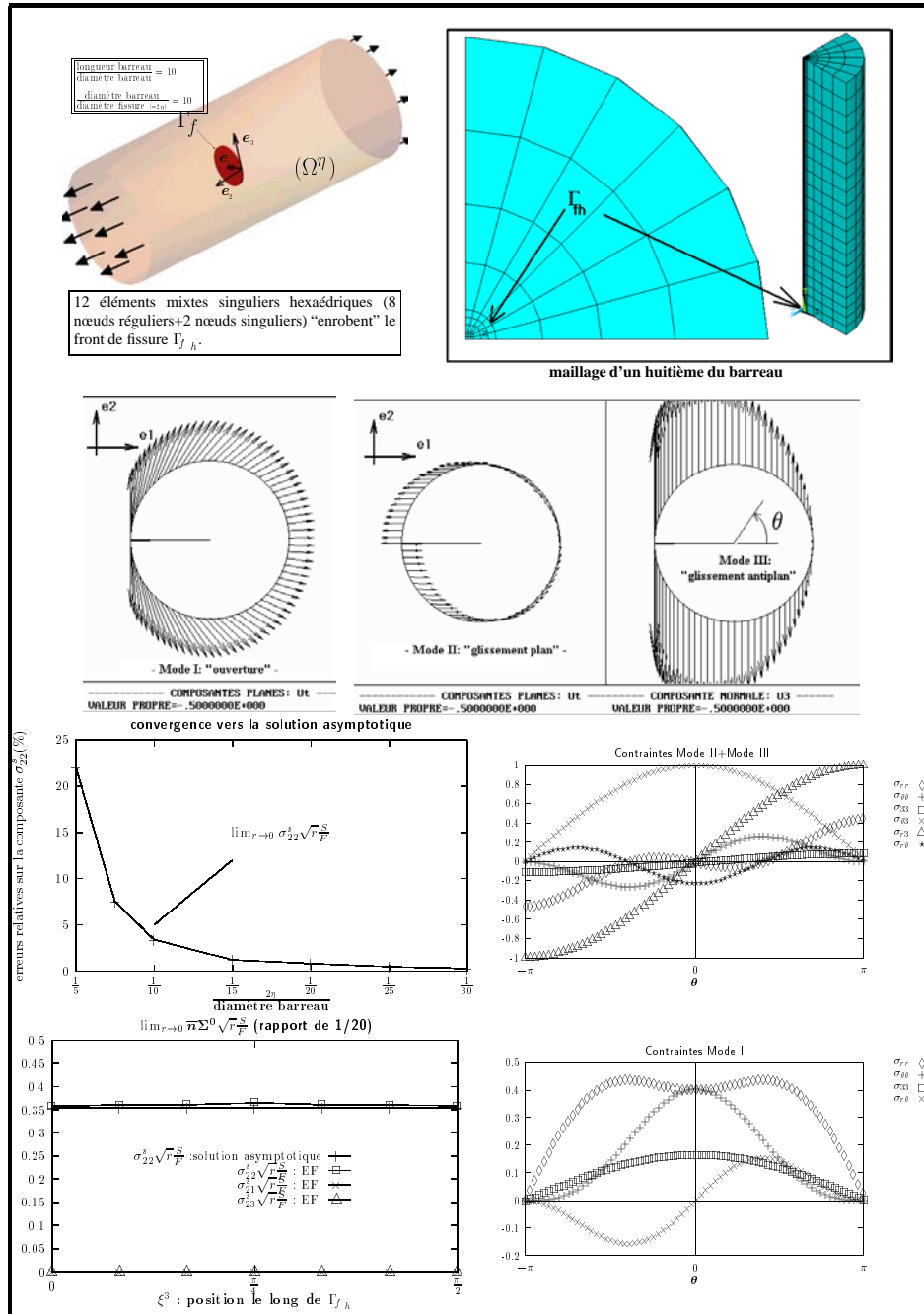


Planche 4. Petite fissure circulaire