
Méthodes adaptatives pour les problèmes d'endommagement

Guillaume Jay^{*,**} — Denis Aubry^{*} — Bing Tié^{*}

Raphaël Muzzolini^{**}

^{*} *Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux (CNRS UMR 8579)
École Centrale Paris, Grande Voie des Vignes, 92295 Châtenay-Malabry cedex
{jay,aubry,tie}@mssmat.ecp.fr*

^{**} *Pechiney CRV, BP 27, 38341 Voreppe cedex
raphael_muzzolini@pechiney.com*

RÉSUMÉ. Cet article présente l'apport des méthodes adaptatives pour les problèmes d'endommagement avec un modèle de Gurson. L'adaptativité à la fois en maillage et en modèle (3D / coques de Mindlin) est considérée. L'adaptation de maillage est effectuée par remaillage de la structure avec des indicateurs d'erreur de discrétisation basés sur la méthode des résidus. Pour l'adaptativité en modèle, une analyse de l'erreur de modèle est d'abord effectuée qui souligne l'incohérence de la cinématique de Mindlin en déformations planes avec la loi de comportement en contraintes planes utilisée. On propose deux solutions pour contourner cette incohérence dans l'estimation de l'erreur. Des indicateurs d'erreur sont ensuite proposés. Enfin, des exemples numériques illustrent la méthodologie employée et l'avantage de l'adaptativité en maillage et en modèle pour bien décrire les phénomènes d'endommagement.

ABSTRACT. This paper presents the use of adaptive methods for damage problems with the Gurson model. Both mesh and model (3D / shell) adaptivities are considered. Mesh adaption is done by remeshing the structure with discretization error indicators based on the residual method. For model adaptivity, investigation of the model error highlights the inconsistency of plane strain Mindlin kinematics with the associated plane stress constitutive law. Two solutions are suggested herein to overcome this inconsistency in error estimation. Error indicators are then suggested. Several numerical examples are presented to emphasize the efficiency of the approach and advantages of mesh and model adaptivities to describe properly damage phenomena.

MOTS-CLÉS : éléments finis adaptatifs, méthode des résidus, erreur en modèle, localisation, endommagement.

KEYWORDS: adaptive finite elements, residual methods, model error, localization, damage.

1. Introduction

Le besoin constant des constructeurs aéronautiques d'alléger les structures tout en maintenant la sécurité des passagers renforce leur intérêt pour des méthodes de calcul éléments finis performantes. Les lois d'endommagement complexes qui étaient jusqu'à présent limitées au calcul de spécimens devraient maintenant pouvoir s'intégrer dans le calcul de structures plus complexes telles qu'un fuselage. Pour effectuer ces calculs avec des coûts raisonnables et une précision suffisante dans la description des phénomènes locaux, il est nécessaire d'adopter une approche adaptative en modèle et en maillage. Il sera ainsi envisageable de simuler la rupture d'une structure de type fuselage en prenant en compte simultanément les sollicitations en service dans la structure et un comportement de matériau réaliste.

La localisation des déformations qui découle des problèmes d'endommagement fait intervenir deux échelles : celle de la structure et celle des couches limites de localisation. Des travaux récents [DIE 98] tendent à montrer que seul un maillage adaptatif permet de prendre en compte ces deux échelles : dans certaines situations, il est ainsi possible avec une méthode adaptative de capturer des singularités de solution ou des modes de rupture non triviaux, comme par exemple, deux bandes de localisation très voisines que même un maillage uniforme fin ne peut pas détecter.

Le calcul adaptatif avec enrichissement des fonctions de forme permet de concentrer les efforts de calculs uniquement dans ces régions. L'emploi d'une telle stratégie nécessite de se doter d'une méthode d'estimation de l'erreur. On en distingue principalement trois :

- les méthodes des forces résiduelles qui consistent à étudier les résidus déduits de l'équation d'équilibre du problème mécanique [BAB 78, BAB 98, BAN 92, ODE 89, ZIE 86] ;
- la méthode de Zienkiewicz-Zhu qui utilise une méthode de projecteur de champs de contraintes [AIN 89, ZIE 92] ;
- la méthode proposée par Ladevèze basée sur le concept d'erreur en relation de comportement et sur une technique de construction explicite de champs de contraintes statiquement admissibles [LAD 83, COO 91].

On a choisi ici une méthode du premier type, basée sur les résidus [AUB 97]. Outre la question de l'estimation de l'erreur, on aborde également les diverses possibilités d'enrichissement, aussi bien en maillage qu'en modèle. En particulier, on examine les possibilités d'une telle approche vis-à-vis de la propagation de fissures dans les matériaux ductiles. On montre que des effets tridimensionnels tels que le gauchissement des surfaces endommagées peuvent être capturés par cette approche.

2. Modèle d'endommagement

L'endommagement des matériaux est généralement décrit par des modèles de milieux poreux. Ceci vient de l'observation expérimentale que le processus d'endommagement consiste en la nucléation, la croissance et enfin la coalescence de microvides

à partir des particules de phase du matériau. Parmi ces modèles, le modèle de Gurson [GUR 77] modifié par Tvergaard [TVE 84] est le plus utilisé. Il considère que le matériau est constitué d'une matrice et de vides de densité volumique f . Les variables internes sont la fraction volumique de vide ou porosité, f et la déformation plastique cumulée dans la matrice, ε_M^p . La porosité f constitue la mesure de l'endommagement. Le potentiel de plasticité de Gurson s'écrit de la manière suivante :

$$\Phi(\sigma, f, \sigma_M) = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_M} \right)^2 + 2 q_1 f^* \cosh \left(\frac{3 q_2 p}{2 \sigma_M} \right) - 1 - (q_1 f^*)^2 = 0 \quad [1]$$

où $\sigma_e = \left(\frac{3}{2} \sigma^d : \sigma^d \right)^{\frac{1}{2}}$ est la contrainte équivalente de von Mises, $\sigma^d = \sigma - p\mathbf{I}$ est le déviateur des contraintes de Cauchy, $p = \frac{1}{3} \text{trace}(\sigma)$ est la pression macroscopique, σ_M représente la limite d'écoulement dans la matrice et f^* est la porosité effective détaillée plus bas. Les quantités q_1 et q_2 sont des paramètres du matériau (usuellement $q_1 = 1,5$ et $q_2 = 1$). On note que le matériau perd toute résistance lorsque la porosité effective f^* atteint $1/q_1$.

La porosité effective f^* a été introduite par Tvergaard et Needleman [TVE 84] pour simuler l'accélération de l'endommagement lors de la coalescence des cavités. Cette accélération intervient lorsque la porosité f atteint la valeur critique f_c :

$$f^* = \begin{cases} f & \text{pour } f \leq f_c \\ f_c + K(f - f_c) & \text{pour } f > f_c \end{cases} \quad [2]$$

L'évolution de la déformation plastique, $\dot{\varepsilon}^p$ est donnée par la loi d'écoulement classique :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad [3]$$

La loi d'évolution de l'endommagement $\dot{f} = \dot{f}_{growth} + \dot{f}_{nucleation}$ se décompose en deux parties :

$$\begin{cases} \dot{f}_{growth} = (1 - f) \text{trace}(\dot{\varepsilon}^p) \\ \dot{f}_{nucleation} = \frac{f_N}{S_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_M^p - \varepsilon_N}{S_N} \right)^2 \right] \dot{\varepsilon}_M^p \end{cases} \quad [4]$$

\dot{f}_{growth} représente la croissance des cavités existantes et $\dot{f}_{nucleation}$ la germination de cavités. Cette dernière est décrite par une loi gaussienne choisie de manière empirique par Needleman. Les quantités f_N , ε_N et S_N sont des paramètres du matériau.

ε_M^p représente la déformation plastique cumulée dans la matrice. Elle est obtenue en écrivant l'équivalence de la puissance plastique aux niveaux micro et macro :

$$(1 - f) \sigma_M \dot{\varepsilon}_M^p = \sigma : \dot{\varepsilon}^p \quad [5]$$

Enfin il faut se munir d'une loi d'écrouissage de la matrice exprimant σ_M en fonction de ε_M^p . On peut utiliser une courbe donnée point par point ou alors une expression analytique du type :

$$\sigma_M = \sigma_0 \left(\frac{E \varepsilon_M^p}{\sigma_0} + 1 \right)^N \quad [6]$$

où σ_0 est la limite d'élasticité, N l'exposant d'érouissage et E le module d'Young.

Pour les modèles de comportement de type Gurson, à partir d'un certain seuil de chargement, un érouissage négatif peut être présent, déclencheur bien connu de la localisation des déformations. Pour décrire la localisation, on s'appuie sur le critère de Rice, qui décrit l'existence possible de discontinuités de déformations en quasi-statique ou d'ondes d'accélération en dynamique [RIC 76]. Les difficultés numériques sont plutôt liées au changement de type du système d'équations aux dérivées partielles perdant localement l'unicité de solution. On obtient par conséquent une mauvaise approximation si le maillage est trop grossier ou mal orienté.

3. Adaptativité en maillage

On considère d'abord l'erreur de discrétisation qui est la différence entre la solution exacte et la solution approchée obtenue sur un maillage éléments finis. La méthode pour analyser cette erreur est basée sur l'étude des résidus locaux [AUB 97].

3.1. Analyse de l'erreur en maillage

La formulation variationnelle exacte du problème d'endommagement en vitesses s'écrit pour tout champ virtuel cinématiquement admissible \boldsymbol{w} dans le domaine Ω :

$$(\boldsymbol{C}^{ep} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}))_{\Omega} = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{w})_{\Omega} \quad [7]$$

où \boldsymbol{C}^{ep} est le tenseur élastoplastique, \boldsymbol{f} représente les forces volumiques, $\boldsymbol{\varepsilon}$ l'opérateur de déformation et \boldsymbol{v} le champ de vitesses. Pour simplifier, on a supposé que les conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann étaient homogènes. L'approximation par éléments finis sur un espace de dimension finie V_H correspondant à un maillage M_H s'écrit :

$$(\boldsymbol{C}^{ep} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_H), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}_H))_{\Omega} = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}_H)_{\Omega} \quad [8]$$

Si on note $\boldsymbol{e}_H = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_H$, l'erreur de discrétisation, celle-ci est liée au résidu d'équilibre de la manière suivante :

$$(\boldsymbol{C}^{ep} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{e}_H), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w})) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{w}) - (\boldsymbol{C}^{ep} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_H), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w})) \quad [9]$$

En intégrant par parties sur chaque élément T du maillage, on trouve :

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{C}^{ep} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{e}_H), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w})) &= \sum_T (\boldsymbol{f} + \text{Div } \boldsymbol{C}^{ep} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_H), \boldsymbol{w})_T \\ &\quad - \sum_{\partial T} (\boldsymbol{C}^{ep} [\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}_H)] \cdot \boldsymbol{n}, \boldsymbol{w})_{\partial T} \end{aligned} \quad [10]$$

∂T désigne l'interface de l'élément T , \boldsymbol{n} la normale de cette interface, les crochets le

saut de la quantité à travers ∂T . Cette expression fait apparaître le résidu local et le saut du vecteur contrainte aux interfaces. Or avec des éléments finis conformes, \mathbf{v}_H est continu à l'interface et le saut de vitesses de déformation s'écrit :

$$[\varepsilon(\mathbf{v}_H)] = \left[\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial \mathbf{n}} \right] \otimes_s \mathbf{n} \quad [11]$$

On obtient ainsi l'expression de l'erreur :

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}^{ep} \varepsilon(\mathbf{e}_H), \varepsilon(\mathbf{w})) &= \Sigma_T (\mathbf{f} + \text{Div } \mathbf{C}^{ep} \varepsilon(\mathbf{v}_H), \mathbf{w})_T \\ &\quad - \Sigma_{\partial T} (\mathbf{Q}^{ep} \left[\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial \mathbf{n}} \right], \mathbf{w})_{\partial T} \end{aligned} \quad [12]$$

où $\mathbf{Q}^{ep} = \mathbf{n} \mathbf{C}^{ep} \mathbf{n}$ est le tenseur acoustique élastoplastique utilisé dans le critère de localisation de Rice. Par ce critère, on sait que lors de la localisation, le tenseur \mathbf{Q}^{ep} possède une valeur propre nulle pour une direction spatiale \mathbf{n}_l , qui est la direction de localisation et que le vecteur propre correspondant, $\left[\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial \mathbf{n}} \right]$, est le mode de localisation. Comme au voisinage de l'interface entre les zones localisée et non localisée, $\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial \mathbf{n}}$ et le gradient de déformations sont grands, la quantité résiduelle $\mathbf{Q}^{ep} \left[\frac{\partial \mathbf{v}_H}{\partial \mathbf{n}} \right]$ est donc importante si l'interface éléments finis est mal orientée ($\mathbf{n} \neq \mathbf{n}_l$) ou si le saut n'est pas un mode de localisation. Or un maillage ne peut jamais respecter exactement la direction de localisation. Une stratégie d'adaptation de maillage basée sur les quantités résiduelles conduit naturellement à utiliser des éléments finis très fins dans les zones de localisation.

En élasticité linéaire, cette représentation de l'erreur permet d'aboutir à un encadrement de l'erreur de discrétisation par les résidus en norme de l'énergie élastique [ODE 89, JOH 92]. Pour un modèle de comportement élastoplastique endommageable, ceci n'est plus possible puisque l'opérateur \mathbf{C}^{ep} n'est plus défini positif après la localisation. Néanmoins, on peut définir des indicateurs d'erreur à partir de cette représentation [12] dans le but d'estimer les résidus locaux.

3.2. Indicateurs d'erreur a posteriori

Pour tester les résidus locaux, on utilise un espace V_h plus riche que V_H , correspondant à un maillage plus fin M_h . En effet sur l'espace V_H lui même, le travail des résidus est nul (voir [9] en injectant $w = w_H$). Dans la logique d'une stratégie de raffinement local de maillage, il faut éviter la construction réelle du maillage M_h . Dans ce but, le problème résiduel global [9] est éclaté en problèmes résiduels locaux définis sur des groupes d'éléments autour de chacun des nouveaux noeuds introduits par M_h par rapport à M_H (figure 1). Pour ces problèmes locaux, on choisit des conditions aux limites de type Dirichlet, c'est à dire déplacement nul sur le bord.

Le calcul de ces indicateurs locaux d'erreur a une double fonction. Il permet tout d'abord de décider du remaillage ou non de la structure. Typiquement le remaillage va

être déclenché si la somme des erreurs locales sur tout le maillage dépasse un certain seuil fixé par l'utilisateur. Ensuite, si un remaillage a été décidé, les indicateurs locaux permettent de construire une carte de taille d'éléments utilisée ensuite par le mailleur.

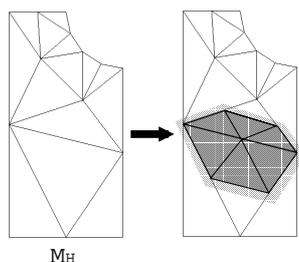


Figure 1. Exemple de problème local pour l'estimation d'erreur

4. Adaptativité en modèle

Dans le cadre du calcul de structures minces complexes, un calcul tridimensionnel ne peut être envisagé pour l'ensemble. Une modélisation de type coque est alors mise en œuvre. Le choix d'une cinématique spécifique de coque entraîne une erreur de modèle avant même de procéder à la discrétisation numérique. Cette erreur pouvant être plus ou moins importante dans les différentes zones de la structure, il paraît intéressant de pouvoir changer le modèle dans ces zones de manière adaptative.

4.1. Analyse de l'erreur en modèle

On se limite dans ce travail à l'élasticité linéaire. Pour évaluer l'erreur de modèle, on cherche à quantifier l'erreur d'approximation e_H^M qui est la différence entre la solution exacte tridimensionnelle et la solution de type coque Mindlin sur un maillage éléments finis M_H . De manière classique [ODE 89], on peut définir l'erreur d'approximation en terme de déplacement, soit :

$$e_H^M = \mathbf{u} - \mathbf{u}_H^M = \mathbf{u} - \mathbf{u}^M + \mathbf{u}^M - \mathbf{u}_H^M \quad [13]$$

où \mathbf{u}^M est la solution exacte de type coque Mindlin. L'erreur de discrétisation $\mathbf{u}^M - \mathbf{u}_H^M$ ayant été analysée dans la section précédente, on s'intéresse ici plus particulièrement à l'erreur de modèle $e^M = \mathbf{u} - \mathbf{u}^M$.

On peut encadrer l'erreur d'approximation e_H^M en norme de l'énergie de déformations élastiques $\|\cdot\|_\Omega^2$ (loi tridimensionnelle) de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \|e_H^M\|_\Omega^2 &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^M\|_\Omega^2 + \|\mathbf{u}^M - \mathbf{u}_H^M\|_\Omega^2 \\ &\quad + 2|(\mathbf{C}(\Theta \varepsilon(\mathbf{u}^M)), \varepsilon(\mathbf{u}^M - \mathbf{u}_H^M))_\Omega| \end{aligned} \quad [14]$$

où $\Theta = I - C^{-1}C^M$ et C^M est le tenseur d'élasticité en contraintes planes. On note que :

$$\Theta \varepsilon(\mathbf{u}^M) = \frac{\nu}{1-\nu} \text{tr}(\varepsilon(\mathbf{u}^M)) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad [15]$$

\mathbf{n} étant le vecteur normal unitaire à la surface de la coque. Le tenseur Θ donne donc la déformation dans l'épaisseur de la coque non prise en compte dans la cinématique de Mindlin.

L'erreur de modèle, elle-même, est encadrée de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^M\|_{\Omega}^2 &\leq \|\mathbf{R}(\mathbf{u}^M)\|_{0,\Omega} (C_1 t \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^M\|_{\Omega} + \|\mathbf{u}^I - \mathbf{u}^{IM}\|_{0,\Omega}) \\ &\quad + (C(\Theta \varepsilon(\mathbf{u}^M)), \varepsilon(\mathbf{u} - \mathbf{u}^M))_{\Omega} \end{aligned} \quad [16]$$

C_1 est une constante positive venant de la théorie classique de l'estimation de l'erreur d'interpolation, t désigne l'épaisseur de la coque, \mathbf{u}^I est l'interpolation linéaire dans l'épaisseur de \mathbf{u} et \mathbf{u}^{IM} sa projection dans l'espace cinématique de Mindlin. La quantité $\mathbf{R}(\mathbf{u}^M)$ est le résidu en modèle défini de la manière suivante :

$$(\mathbf{R}(\mathbf{u}^M), \mathbf{w})_{\Omega} = (\mathbf{f}, \mathbf{w})_{\Omega} - (C^M \varepsilon(\mathbf{u}^M), \varepsilon(\mathbf{w}))_{\Omega} \quad [17]$$

On voit que l'importance du résidu $\mathbf{R}(\mathbf{u}^M)$ dans la majoration de l'erreur e^M est pondérée par l'épaisseur de la coque t .

On constate dans les relations [14] et [16] que les termes qui posent problème pour l'encadrement de l'erreur e_H^M sont liés à $\mathbf{u}^I - \mathbf{u}^{IM}$ et à Θ , donc aux déformations dans l'épaisseur de la coque non prises en compte par la cinématique de Mindlin. Par exemple les termes liés à Θ suggèrent un raffinement de maillage dans une zone où la déformation est forte même si son gradient est faible.

Pour contourner cette difficulté, deux possibilités se présentent : soit on adopte une cinématique de coque enrichie permettant d'utiliser le tenseur élastique tridimensionnel [BEN 96], soit on calcule une déformation dans l'épaisseur de la coque en utilisant l'hypothèse des contraintes planes. Dans ce deuxième cas, on calcule un tenseur de déformation qui n'est plus compatible avec la cinématique de Mindlin :

$$\varepsilon^M(\mathbf{u}^M) = C^{-1} C^M \varepsilon(\mathbf{u}^M) = \varepsilon(\mathbf{u}^M) - \Theta \varepsilon(\mathbf{u}^M) \quad [18]$$

Après cette analyse, on juge qu'il est plus judicieux de définir l'erreur d'approximation en terme de déformations, soit :

$$e^{\varepsilon} = \varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon^M(\mathbf{u}_H^M) \quad [19]$$

$$= \varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon^M(\mathbf{u}^M) + \varepsilon^M(\mathbf{u}^M - \mathbf{u}_H^M) \quad [20]$$

$$= \Delta\varepsilon + \varepsilon^M(\mathbf{u}^M - \mathbf{u}_H^M) \quad [21]$$

On obtient alors la majoration suivante de e^{ε} :

$$\begin{aligned} \|e^{\varepsilon}\|_{\Omega}^2 &\leq \|\Delta\varepsilon\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{u}^M - \mathbf{u}_H^M\|_{\Omega,CP}^2 \\ &\quad + \frac{\nu}{1-\nu} |\text{tr} \varepsilon(\mathbf{u}^M - \mathbf{u}_H^M)| |\lambda \text{tr} \Delta\varepsilon + 2\mu \Delta\varepsilon_{nn}| \end{aligned} \quad [22]$$

où $\|\cdot\|_{\Omega, CP}^2$ est la norme en énergie des déformations élastiques en contraintes planes. D'après cette inégalité, la diminution de l'erreur totale passe par un compromis entre la diminution de $(\mathbf{u}^M - \mathbf{u}_H^M)$ et $\Delta\varepsilon$. On remarque que le terme de couplage (entre $(\mathbf{u}^M - \mathbf{u}_H^M)$ et $\Delta\varepsilon$) est plus intéressant que celui de [14] lié à Θ . Il fait intervenir les erreurs $(\mathbf{u}^M - \mathbf{u}_H^M)$ et $\Delta\varepsilon$ et non plus la déformation totale $\varepsilon(\mathbf{u}^M)$. La comparaison de [14] et [22] montre que le tenseur de déformations $\varepsilon^M(\mathbf{u}^M)$ [18] est plus proche de la solution exacte que $\varepsilon(\mathbf{u}^M)$ et en conséquence justifie de manière théorique son utilisation par les ingénieurs.

Pour obtenir $\Delta\varepsilon$, on cherche maintenant à estimer le déplacement tridimensionnel \mathbf{u} comme la somme de la solution coque \mathbf{u}^M et d'un terme additionnel tridimensionnel \mathbf{e} . Ce dernier est alors défini par le problème résiduel suivant :

$$(C \varepsilon(\mathbf{e}), \varepsilon(\mathbf{w}))_{\Omega} = (\mathbf{f}, \mathbf{w})_{\Omega} - (C \varepsilon(\mathbf{u}^M), \varepsilon(\mathbf{w}))_{\Omega} \quad [23]$$

L'erreur $\Delta\varepsilon$ s'écrit alors :

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{u}^M + \mathbf{e}) - \varepsilon^M(\mathbf{u}^M) \quad [24]$$

4.2. Indicateurs d'erreur en modèle

Comme pour l'erreur de discrétisation, le problème [23] sera résolu localement sur des groupes d'éléments (patches) avec \mathbf{w} variant dans un espace de fonctions enrichi. Deux alternatives se présentent pour le choix de cet espace : soit on utilise réellement des déplacements virtuels tridimensionnels, soit on utilise des déplacements virtuels issus d'une cinématique de coque enrichie. On peut obtenir une telle cinématique en ajoutant aux termes habituels, soit un terme de respiration suivant la normale \mathbf{n} pour la partie linéaire, soit un terme quadratique, ou même une combinaison des deux. Ces indicateurs d'erreur sont en cours de mise en œuvre.

5. Stratégie adaptative en maillage et en modèle

On dispose actuellement dans le code éléments finis OOFE [AUB 97] d'un outil permettant de construire automatiquement un maillage tridimensionnel cylindrique au sein d'un maillage coque. La liaison entre le maillage tridimensionnel et le maillage coque est une relation d'asservissement (du tridimensionnel par la coque); cependant les maillages n'ont pas besoin d'être compatibles.

5.1. Algorithme adaptatif en maillage et en modèle

L'algorithme adaptatif en maillage et en modèle est explicité en figure 2. Il comprend d'abord une boucle sur les étapes de chargement t_n . Pour chaque étape de chargement, après calcul de la solution, si l'estimation de l'erreur en modèle ne dépasse

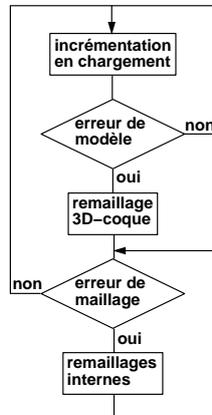


Figure 2. *Algorithme adaptatif en maillage et en modèle*

pas un certain seuil fixé par l'utilisateur, on passe à l'étape de chargement suivante. Sinon, après le remaillage 3D-coque, on effectue les itérations classiques : calcul de la solution, estimation de l'erreur en maillage et remaillage interne des parties 3D et coque. Le maillage obtenu à la fin de ce processus sert de maillage initial pour l'étape de chargement suivante.

5.2. Transfert des variables entre deux maillages

Lorsqu'au cours d'une étape de chargement un nouveau maillage est créé, il est nécessaire de transférer les variables d'état calculées aux points d'intégration de l'ancien maillage vers les points d'intégration du nouveau maillage. Pour cela on doit se munir d'une technique pour interpoler les champs calculés aux points d'intégration sur toute la structure. On utilise classiquement des méthodes de projection au sens des moindres carrés, soit globales sur tout le domaine, soit locales élément par élément [HIN 74], soit enfin sur des groupes d'éléments (patches) [ZIE 92].

Pour les problèmes de localisation des déformations et en particulier pour les problèmes d'endommagement, il n'est pas recommandé d'utiliser les techniques d'interpolation globales car elles ont tendance à diffuser les zones localisées [PER 96, DEB 96]. On a donc choisi ici d'utiliser une technique d'interpolation locale élément par élément (figure 3). Par exemple, pour les éléments triangles linéaires à un point d'intégration, on considère que la variable est constante par éléments ; pour les éléments triangles quadratiques à 3 points d'intégration, on effectue une interpolation linéaire à partir des points d'intégration. On voit que dans les deux cas, l'interpolation n'est pas a priori continue aux interfaces des éléments.

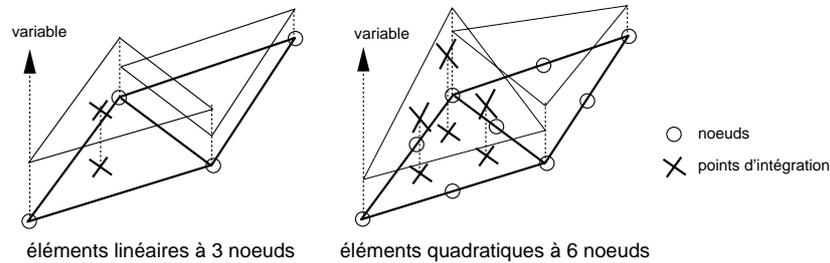


Figure 3. Technique d'interpolation des variables d'état

6. Résultats numériques

6.1. Éprouvettes de traction

On considère le calcul bidimensionnel d'une plaque mince fissurée en traction (*figure 4*) et le calcul tridimensionnel d'une plaque mince entaillée en traction (*figure 5*). Seul un quart de la pièce bidimensionnelle est modélisé en contraintes planes. Dans les deux cas on utilise des éléments quadratiques. Les propriétés matériau correspondent à un cas standard d'aluminium (*tableau 1*). Au cours du chargement, lorsque la porosité effective f^* calculée en un point de Gauss atteint $1/q_1$, celui-ci est considéré comme totalement endommagé et son état de contrainte σ est mis à zéro. Lorsqu'un élément a tous ses points de Gauss totalement endommagés, cela revient à supprimer celui-ci du maillage, technique qui est parfois utilisée en mécanique de la rupture numérique. On note dans les deux cas, bidimensionnel et tridimensionnel, que le raffinement de maillage se concentre bien dans les zones endommagées où les déformations sont susceptibles de se localiser, ici au voisinage de la pointe de la fissure.

6.2. Calcul d'endommagement avec remaillage automatique 2D/3D

La figure 6 présente un calcul d'endommagement mixte 2D/3D avec déplacement automatique de la zone 3D. Il s'agit d'une éprouvette de traction entaillée en U. En utilisant les symétries suivant les 3 axes, seul 1/8 de la pièce a été modélisé ; les éléments utilisés sont quadratiques ; la partie 2D est en contraintes planes. La zone 3D est définie à partir de l'intersection du maillage 2D initial avec un cercle. Sa position est actuellement pilotée par l'avancée de la fissure : elle est prise de taille constante et cen-

Paramètres matériau									
E (MPa)	ν	σ_0	N	f_0	f_c	K	f_N	ε_M	S_N
72 000	0,3	373,1	0,22	0,0001	0,2	9,0	0,1	0,1	0,1

Tableau 1. Paramètres matériau

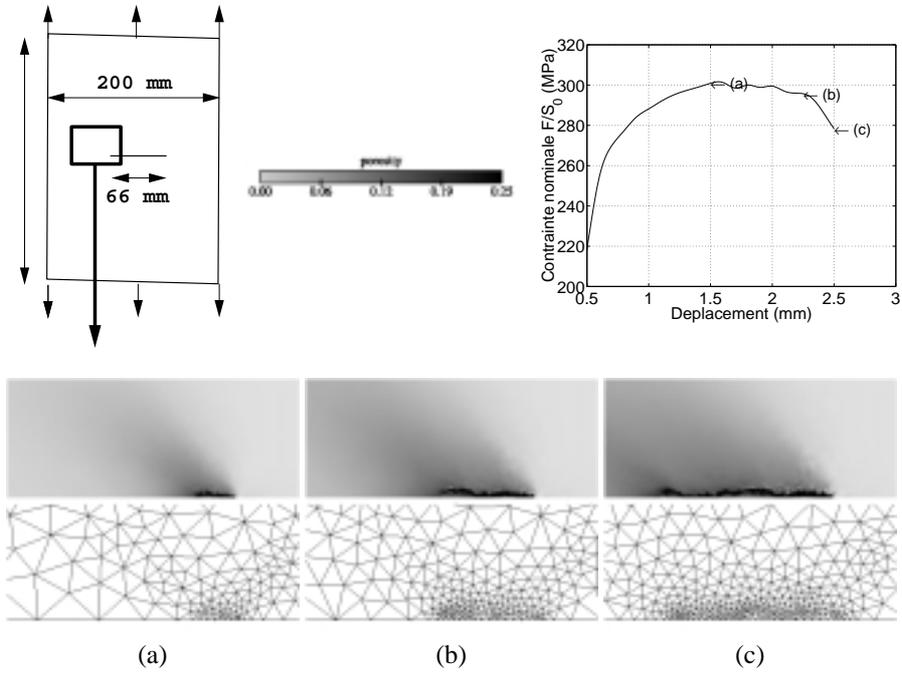


Figure 4. Calcul bidimensionnel d'une plaque mince fissurée en traction

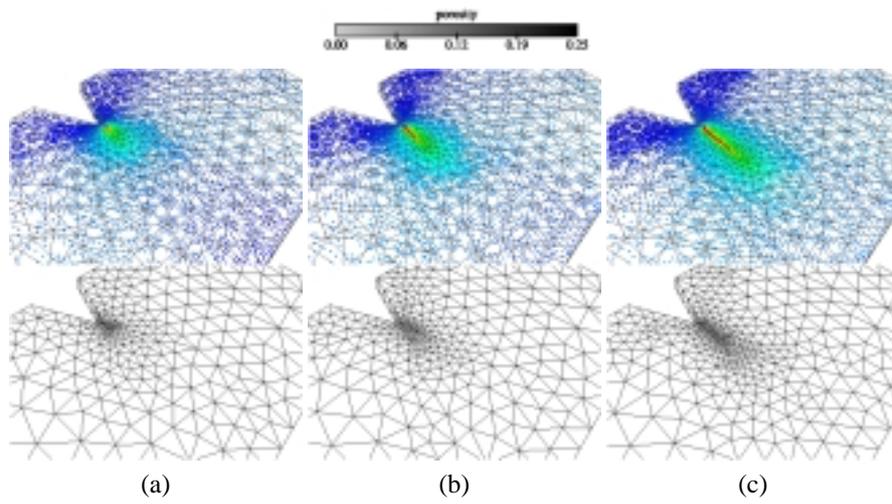


Figure 5. Calcul tridimensionnel d'une plaque mince entaillée en traction

trée sur le dernier point de Gauss à être totalement endommagé (porosité $f^* > 1/q_1$). Les modèles 2D et 3D obéissent tout les deux à la loi de Gurson ; cependant les isovaleurs de porosité n'ont pas été portées sur le maillage 2D pour que la figure soit plus lisible.

On note sur la série de coupes dans l'épaisseur de la figure 6(c) que la fissure s'amorce sur un triangle dans un plan perpendiculaire à l'axe de traction, puis se propage à 45° par rapport à ce même plan, phénomène bien connu expérimentalement dans le cas de la déchirure ductile de plaques minces. Cet exemple montre bien l'intérêt d'utiliser des éléments finis 3D plutôt que des éléments 2D dans la zone de fissuration.

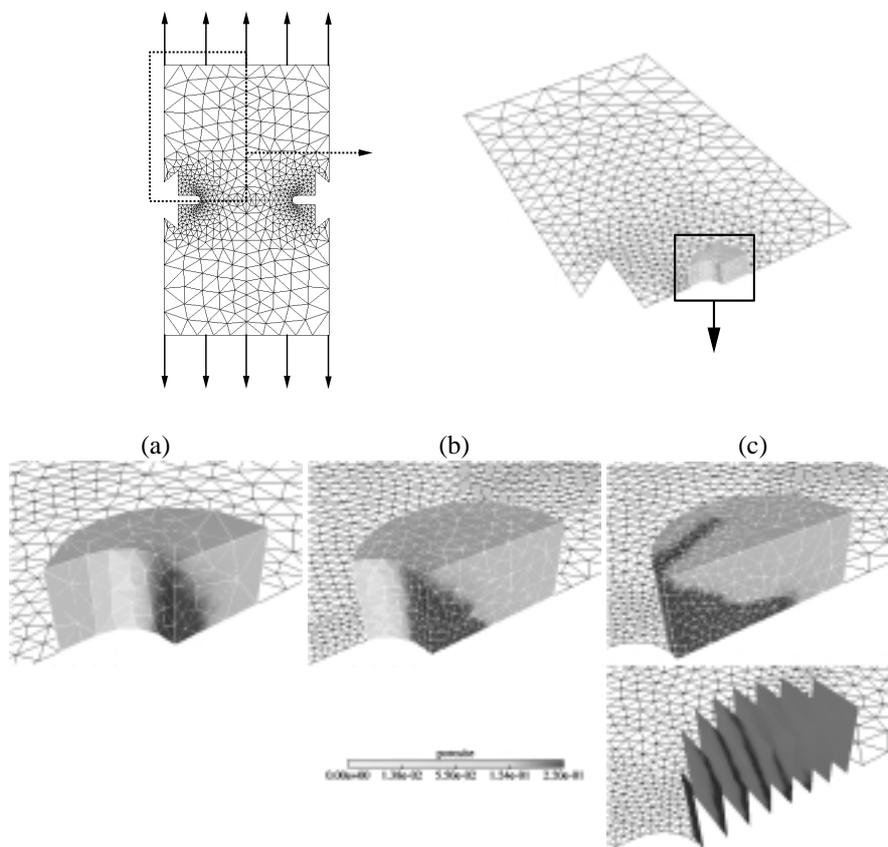


Figure 6. Calcul d'endommagement avec remaillage automatique 2D/3D

7. Conclusion

On a illustré dans cet article l'intérêt des méthodes adaptatives en maillage pour les problèmes d'endommagement ductile. Le raffinement local et automatique de maillage permet de bien capter les zones endommagées avec un coût numérique "optimal". Pour des structures minces industrielles de grande taille, la modélisation en coque est préconisée sauf dans les zones localisées d'endommagement où l'effet 3D doit être bien modélisé. La stratégie de l'adaptativité en modèle (3D/coque) proposée permet d'insérer un maillage 3D très fin, là où c'est nécessaire. On peut par conséquent bien prendre en compte la propagation de fissure dans une structure de taille industrielle avec un coût numérique raisonnable.

Les exemples numériques montrent la fiabilité des indicateurs d'erreur proposés pour l'adaptation de maillage. L'analyse théorique de l'erreur de modèle souligne l'incohérence de la cinématique de Mindlin en déformations planes avec la loi de comportement en contraintes planes et justifie le calcul des déformations dans l'épaisseur de la coque utilisant l'hypothèse de contraintes planes. Il a donc été proposé de définir l'erreur non plus en terme de déplacements, comme dans le cas classique, mais en terme de déformations. Cette démarche semble intéressante puisque les modèles cinématiques de coque (enrichis ou non) utilisent souvent des degrés de liberté en déformations incompatibles avec la cinématique pour supprimer les verrouillages numériques ou les verrouillages du coefficient de Poisson [BIS 00]. Les indicateurs de l'erreur de modèle proposés sont en cours de développement; ils permettront de déplacer un maillage 3D au sein d'un maillage coque dans le but de contrôler l'erreur de modèle.

8. Bibliographie

- [AIN 89] AINSWORTH M., ZHU J., CRAIG A., ZIENKIEWICZ O., « Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a-posteriori error estimator in the finite element method », *International Journal for numerical methods in engineering*, vol. 28, 1989, p. 2161-2174.
- [AUB 97] AUBRY D., LUCAS D., TIE B., « Une approche intégrée pour le calcul adaptatif par éléments finis », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 7, n° 1-2-3, 1997, p. 105-118.
- [BAB 78] BABUSKA I., RHEINBOLDT, « Error estimates for adaptive finite element computations », *Journal of Numerical Analysis*, vol. 15, n° 4, 1978, p. 736-754.
- [BAB 98] BABUSKA I., STROUBOULIS T., GANGARAJ S., COPPS K., DATTA D., « Practical aspects of a - posteriori estimation for reliable finite element analysis », *Computers and Structures*, vol. 66, n° 5, 1998, p. 627-664.
- [BAN 92] BANK R., SMITH R., « A posteriori error estimates based on hierarchical bases », *Industrial and Applied Mathematics*, vol. 30, 1992, p. 921-935.
- [BEN 96] BEN DHIA H., « Contribution au calcul scientifique des problèmes de la mécanique du solide. Modélisation de la mise en forme des tôles minces. », *Habilitation à diriger des recherches*, Université Paris VI, 1996.

- [BIS 00] BISCHOFF M., RAMM E., « On the physical significance of higher order kinematic and static variables in a three-dimensional shell formulation », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, 2000, p. 6933-6960.
- [COO 91] COOREVITS P., LADEVÈZE P., PELLE J., ROUGEOT P., « Some new applications for the control and optimization of finite element computations », LADEVÈZE P., ZIENKIEWICZ O., Eds., *New advances in computational structural mechanics*, p. 205-218, Elsevier, 1991.
- [DEB 96] DEB A., PREVOST J., LORET B., « Adaptive meshing for dynamic strain localization », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 137, 1996, p. 285-306.
- [DIE 98] DIEZ P., ARROYO M., HUERTA A., « Adaptive analysis of softening solids using a residual type error estimator », IDELSOHN S., ONATE E., DVORKIN E., Eds., *Computational mechanics, Buenos Ayres, New Trends and Applications*, 1998.
- [GUR 77] GURSON A., « Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : part I - yield criteria and flow rules for porous ductile media », *J. Eng. Mater. Tech.*, vol. 99, 1977, p. 2-15.
- [HIN 74] HINTON E., CAMPBELL J., « Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 8, 1974, p. 461-480.
- [JOH 92] JOHNSON C., HANSBO P., « Adaptive finite elements methods in computational mechanics », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 101, 1992, p. 143-181.
- [LAD 83] LADEVÈZE P., « Error estimate procedure in the finite element method and application », *J. Num. Anal.*, vol. 3, n° 20, 1983, p. 485-509.
- [ODE 89] ODEN J., DEMKOWICZ L., RACHKOWICK W., WESTERMANN T., « Toward a universal $h - p$ adaptive finite element strategy : A posteriori error estimates based on hierarchical bases », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 77, 1989, p. 113-180.
- [PER 96] PERIĆ D., HOCHARD C., DUTKO M., OWEN D., « Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-plasticity », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 137, 1996, p. 331-344.
- [RIC 76] RICE J. R., KOITER W. T., Ed., *14th Int. Congress on Theoretical and Applied Mechanics*, Delft North-Holland, 1976, North-Holland Publishing Co, p. 207-220.
- [TVE 84] TVERGAARD V., NEEDLEMAN A., « Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar », *Acta Metall.*, vol. 32, 1984, p. 157-169.
- [ZIE 86] ZIENKIEWICZ O., CRAIG A., *Adaptive refinement, error estimates, multigrid solution and hierarchical finite element method concepts, accuracy estimates and adaptive refinement in finite element computations*, John Wiley and Sons, 1986.
- [ZIE 92] ZIENKIEWICZ O., ZHU J., « The superconvergent patch recovery and a priori error estimates. », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, 1992, p. 1331-1382.