

---

# Régularisation d'une surface de contact par approximation diffuse

**Dominique Chamoret<sup>\*,\*\*</sup> — Alain Rassinoux<sup>\*\*\*</sup>  
Pierre Villon<sup>\*\*\*</sup> — Jean-Michel Bergheau<sup>\*\*</sup>**

*\* ESI Software  
Le Discover, 84 Boulevard Vivier Merle  
69485 Lyon Cedex 03, France*

*\*\* LTDS, UMR5513 CNRS/ECL/ENISE  
58 Rue Jean Parot  
42023 Saint Etienne, France  
chamoret@enise.fr; bergheau@enise.fr*

*\*\*\* LMR, UMR6066, UTC  
B.P. 529  
60205 Compiègne Cedex, France  
Alain.Rassinoux@utc.fr; Pierre.Villon@utc.fr*

---

*RÉSUMÉ. Nous présentons une nouvelle approche pour régulariser une surface de contact obtenue par la méthode des éléments finis. Pour ce faire, nous utilisons une méthode d'approximation diffuse qui s'appuie sur la position des nœuds du maillage éléments finis de la surface de contact. Une fois établie cette nouvelle description de la surface de contact, nous déterminons les grandeurs cinématiques du contact indispensables pour écrire le résidu et la matrice tangente élémentaires de contact diffus en utilisant les propriétés intrinsèques de la surface régularisée.*

*ABSTRACT. The purpose of this paper is to propose a new technique to regularise a contact surface generated by the finite element method. The non-smoothness of these surfaces is one of the fundamental problems for the numerical treatment of contact in large slips. The method used to smooth the contact surfaces rests on the technique of diffuse approximation based on the nodes of the mesh. The new geometrical model described, the elementary contact residual vector and the stiffness matrix are expressed using the properties of the smooth surface.*

*MOTS-CLÉS : surface de contact, méthode des éléments finis, régularisation, approximation diffuse.*

*KEYWORDS: Contact Surface, Finite Element Method, Diffuse Approximation.*

---

## 1. Introduction

La modélisation des phénomènes de contact nécessite une bonne description de la surface de contact. Dans le cas d'une discrétisation par éléments finis, la surface de contact est représentée par une surface facétisée, donc seulement différentiable par morceaux. Cette situation engendre des discontinuités des vecteurs normal et tangentiel, provoquant des problèmes de convergence en présence de grands glissements. Pour éviter ces inconvénients, plusieurs stratégies peuvent être considérées. Une technique de moyennation du vecteur normal peut être utilisée [WAN 97]. Il est aussi possible de lisser les normales [FOU 99]. D'autres approches consistent à régulariser la surface de contact en utilisant des techniques d'interpolation telles que l'interpolation par des splines ou des courbes de Bézier comme ceci est proposé dans [PIE 97] ou [WRI 01]. L'efficacité d'une telle approche est démontrée pour des problèmes  $2D$  dans [KRS 01a] et pour des problèmes  $3D$  dans [KRS 01b].

L'approche étudiée dans cet article consiste à régulariser la surface de contact en utilisant des techniques récemment utilisées, notamment pour le remaillage de surfaces maillées [RAS 00]. La stratégie que nous mettons en œuvre consiste à reconstruire la surface de contact à partir de la seule donnée du maillage éléments finis en utilisant la technique d'approximation diffuse [NAY 91].

Dans une première partie, les notions nécessaires à la description discrète du contact sont brièvement rappelées par une présentation rapide de l'élément de contact nœud-facette. La seconde partie est dédiée à la description de la technique de régularisation. Dans une troisième partie, nous présentons l'élément de contact diffus  $3D$ , avec la détermination du résidu élémentaire et la construction de la matrice tangente élémentaire.

## 2. Élément de contact nœud-facette

Pour introduire les notations et rappeler les notions élémentaires indispensables à la description du contact ainsi que les points essentiels à la construction d'un élément de contact, nous rappelons brièvement la formulation d'un élément de contact nœud-facette.

### 2.1. Notion de distance normale de contact et travail virtuel des efforts de contact

Soient deux corps discrétisés éventuellement en contact : un corps contacteur et un corps cible. Au moins un de ces deux corps est déformable. Un nœud  $x^c$ , du corps contacteur discrétisé, est susceptible d'entrer en contact avec une facette  $f_c$  du corps cible. La distance normale de contact est définie comme étant la distance minimale séparant le nœud  $x^c$  de la facette de référence. Pour ce faire, la notion de point proximal est introduite et le point  $x^m$  est défini tel que :

$$\|x^c - x^m\| = \min_{x \in f_c} \|x^c - x\| \quad [1]$$

Il apparaît alors clairement que le vecteur séparant  $\mathbf{x}^c$  et  $\mathbf{x}^m$  est colinéaire à  $\boldsymbol{\nu}$ , ce qui peut s'écrire :

$$\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^m = g_n \boldsymbol{\nu} \quad [2]$$

où  $\boldsymbol{\nu}$  est le vecteur normal associé à  $f_c$  au point  $\mathbf{x}^m$ . Le scalaire  $g_n$  est la distance normale entre les deux corps. C'est cette quantité qui va gérer les différents statuts de contact.

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour prendre en compte les contraintes de contact. Les méthodes les plus courantes sont la méthode de pénalisation, la méthode des multiplicateurs de Lagrange et la méthode du lagrangien augmenté qui peut être vue comme un compromis entre la méthode de pénalisation et la méthode des multiplicateurs de Lagrange [ALA 91].

Dans le cas de la méthode de pénalisation, le travail virtuel des efforts de contact s'exprime [LAU 93] :

$$W_c = \varepsilon_n g_n \delta g_n \quad [3]$$

où  $\varepsilon_n$  est le paramètre de pénalité et  $\delta g_n$  est la première variation de  $g_n$ .

La linéarisation de  $W_c$  conduit à :

$$\Delta W_c = \varepsilon_n \delta g_n \Delta g_n + \varepsilon_n g_n \Delta \delta g_n \quad [4]$$

où  $\Delta \delta g_n$  est la seconde variation de  $g_n$ . La difficulté est alors d'évaluer les quantités  $\Delta \delta g_n$  et  $\delta g_n$ .

## 2.2. Résidu, matrice tangente

Pour compléter la description de l'élément de contact, il est indispensable de donner l'expression du vecteur résidu élémentaire de contact  $\mathbf{R}_c$  et de la matrice tangente élémentaire de contact  $K_c$ .

### 2.2.1. Vecteur résidu élémentaire de contact

Pour un élément de contact nœud-facette, le vecteur des inconnues  $\mathbf{u}$  est formé des coordonnées du nœud contacteur et des coordonnées des  $p$  nœuds attachés à la facette de référence  $f_c$ . Ce vecteur  $\mathbf{u}$  ainsi que ses variations sont donnés par :

$$\mathbf{u} = [ \mathbf{x}^c \quad \mathbf{x}^1 \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{x}^p ]^T \quad [5]$$

$$\delta \mathbf{u} = [ \delta \mathbf{x}^c \quad \delta \mathbf{x}^1 \quad \dots \quad \dots \quad \delta \mathbf{x}^p ]^T \quad [6]$$

Il est possible de montrer que l'écriture matricielle de la première variation de  $g_n$  est de la forme suivante :

$$\delta g_n = \delta \mathbf{u}^T \mathcal{N}_c \quad [7]$$

où  $\mathcal{N}_c$  est un vecteur à  $3(p+1)$  composantes dépendant des fonctions de forme définissant  $f_c$  évaluées en  $x^m$ .

Ainsi, le vecteur résidu élémentaire de contact  $\mathbf{R}_c$  s'exprime :

$$\mathbf{R}_c = \varepsilon_n g_n \mathcal{N}_c \quad [8]$$

### 2.2.2. Matrice tangente élémentaire de contact

Dans le cas général, la seconde variation de la distance normale  $g_n$  peut s'écrire de manière formelle :

$$\Delta \delta g_n = \delta \mathbf{u}^T \mathcal{M}_c \Delta \mathbf{u} \quad [9]$$

En reprenant [4], la matrice élémentaire de contact est donnée par :

$$K_c = \varepsilon_n g_n \mathcal{M}_c + \varepsilon_n \mathcal{N}_c \mathcal{N}_c^T \quad [10]$$

Une des difficultés de l'approche proposée dans la suite, sera de déterminer l'équivalent des grandeurs  $\mathcal{N}_c$  et  $\mathcal{M}_c$  dans la description diffuse du contact.

## 3. Approximation diffuse et contact

Nous supposons préalablement définies deux zones de contact potentiel, une zone contacteur et une zone cible. La zone cible est formée d'une collection de facettes issues du maillage du solide cible. Dans la suite, les nœuds de cette collection seront notés  $x^i$  ou  $i = 1, \dots, n$ . La zone contacteur est formée d'un ensemble de nœuds susceptibles d'entrer en contact avec la zone cible.

L'objectif est de déterminer une surface de contact approchée  $S_g^d$  à partir de la seule donnée des nœuds  $x^i$  en utilisant la technique d'approximation diffuse. La détermination de la surface diffuse nécessite la définition d'un repère  $R^d$ , appelé *repère diffus*, attaché à tous les nœuds  $x^i$ . Ce repère est défini comme étant le repère moyen au sens des moindres carrés associé aux  $x^i$ . Dans la suite, les coordonnées d'un point quelconque dans ce repère seront écrites en majuscule. Les coordonnées d'un nœud cible  $x^i$  dans  $R^d$  seront notées avec l'exposant  $i$ ,  $(X_1^i, X_2^i, X_3^i)$ , celles d'un nœud contacteur  $x^c$  avec l'exposant  $c$ ,  $(X_1^c, X_2^c, X_3^c)$ . Cette surface diffuse est construite à partir d'une succession d'approximations locales. L'approche proposée va associer, à chaque nœud contacteur  $x^c$ , une *approximation locale*  $S^d$  de la surface.

### 3.1. Détermination de l'approximation locale

Dans le repère  $R^d$ , au *voisinage* d'un point dit point de référence noté  $x^{ref}$ , l'approximation locale est représentée par une surface d'équation :

$$h_{x^{ref}}(X_1, X_2) = X_3 \quad [11]$$

La notation  $h_{\mathbf{x}^{ref}}$  traduit le fait que l'équation de la surface est définie *localement* autour du point  $\mathbf{x}^{ref}$ . L'écriture intrinsèque de  $h_{\mathbf{x}^{ref}}$  va donc s'exprimer en fonction de  $\mathbf{x}^{ref}$ .

La difficulté qui se pose pour le traitement d'une surface de contact est de prendre le point de référence le plus judicieux possible afin de donner la description la plus juste de la surface. Nous avons choisi de considérer comme point de référence le point  $\mathbf{x}^p$ , projection de  $\mathbf{x}^c$  sur le plan défini par  $R^d$ . Les coordonnées de ce point dans  $R^d$  sont exactement  $(X_1^c, X_2^c, 0)$ . Le voisinage est constitué de l'ensemble des nœuds  $\mathbf{x}^i$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Ainsi, l'approximation locale associée au nœud  $\mathbf{x}^c$  est décrite dans  $R^d$  par une surface d'équation :

$$f_{\mathbf{x}^c}(X_1, X_2) = X_3 \quad [12]$$

L'expression de  $f_{\mathbf{x}^c}$  s'exprime à l'aide d'une base polynomiale  $\mathbf{p}$ , d'ordre  $r$  et de  $k$  termes :

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{x}^c}(X_1, X_2) &= \sum_{j=1}^{j=k} p_j \alpha_j \\ &= \mathbf{p}^T (\mathbf{x} - \mathbf{x}^c) \boldsymbol{\alpha} \end{aligned} \quad [13]$$

Dans cette expression,

-  $p_j, j = 1, \dots, k$ , désigne un terme de la base polynomiale,

-  $\alpha_j, j = 1, \dots, k$  est la  $j^{\text{ième}}$  composante du vecteur  $\boldsymbol{\alpha}$  qui doit être déterminé.

Dans le cas général, la base  $\mathbf{p}$  utilisée est une base quadratique :

$$\begin{aligned} [1 \quad X_1 - X_1^c \quad X_2 - X_2^c \quad (X_1 - X_1^c)^2 \quad (X_2 - X_2^c)(X_1 - X_1^c) \quad (X_2 - X_2^c)^2]^T \\ \boldsymbol{\alpha} = [ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \alpha_6 ]^T \end{aligned} \quad [14]$$

Pour que l'approximation soit définie, le nombre de nœuds  $\mathbf{x}^i$  utilisés doit être au moins égal à la taille de la base polynomiale en tout point, c'est-à-dire six.

### 3.2. Détermination du vecteur $\boldsymbol{\alpha}$

L'objectif est maintenant de déterminer  $\boldsymbol{\alpha}$ . Ce vecteur est calculé en utilisant une méthode des moindres carrés pondérés, minimisant la différence entre l'altitude  $X_3^i$  des nœuds  $\mathbf{x}^i$  et la fonction  $f_{\mathbf{x}^c}$  évaluée en ces nœuds. Ceci conduit au critère  $J_{\mathbf{x}^c}$  suivant :

$$J_{\mathbf{x}^c}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^{i=n} w(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^c) \{ (\mathbf{p}^T (\mathbf{x}^i - \mathbf{x}^c) \boldsymbol{\alpha} - X_3^i) \}^2 \quad [15]$$

Dans cette expression,  $w(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}^c)$  pour  $i = 1, \dots, n$ , noté dans la suite  $w^i$  représente la fonction poids attachée au nœud  $\mathbf{x}^i$ . La fonction poids  $w^i$  est une fonction

non nulle sur  $\Omega^i$ , domaine d'influence du nœud  $x^i$  et nulle partout ailleurs :  $w^i > 0$  sur le domaine  $\Omega^i$  et  $w_i = 0$  ailleurs. Dans la formulation introduite précédemment, l'approximation diffuse n'est pas interpolante. La propriété d'interpolation peut être obtenue en considérant des fonctions de poids particulières. Ces nouvelles fonctions poids doivent être singulières aux nœuds. La régularité de la surface diffuse ainsi obtenue vient du fait que le même support est conservé au cours du processus. Dans l'approche que nous avons développée et implémentée dans le code par éléments finis SYSTUS, nous avons, actuellement, seulement des fonctions poids approximantes.

La détermination du coefficient  $\alpha$  nécessite le calcul du minimum de  $J_{x^c}$  par :

$$\frac{\partial J_{x^c}}{\partial \alpha} = 0 \quad [16]$$

Le vecteur  $\alpha$  doit alors être solution du système défini par :

$$\mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{P} \alpha = \mathcal{P}^T \mathcal{W} \mathcal{Z} \quad [17]$$

où

–  $\mathcal{Z}$  est le vecteur des troisièmes composantes de tous les nœuds  $x^i$ , utilisés dans l'approximation :

$$\mathcal{Z} = [ X_3^1 \quad X_3^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad X_3^n ]^T \quad [18]$$

–  $\mathcal{W}$  est la matrice diagonale des fonctions poids :

$$\mathcal{W} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & w_2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & w_n \end{bmatrix} \quad [19]$$

–  $\mathcal{P}$  est formé par la base polynomiale  $\mathbf{p}$  évaluée en chaque nœud  $x^i$  :

$$\mathcal{P} = [ \mathbf{p}^1 \quad \mathbf{p}^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{p}^n ]^T \quad [20]$$

$$\mathbf{p}^i = [ 1 \quad X_1^i - X_1^c \quad X_2^i - X_2^c \quad \dots \quad \dots \quad (X_2^i - X_2^c)^2 ]^T$$

La résolution du système [17] conduit à la détermination de  $\alpha$  et donc à la connaissance de l'approximation locale de la surface de contact associée au nœud  $x^c$ .

### 3.3. Remarques

Il est important pour le traitement du contact et notamment pour l'expression des variables cinématiques de bien préciser quelles sont les dépendances de  $f_{x^c}$ . Nous noterons dans la suite :

$$f_{x^c}(X_1, X_2) = F(X_1, X_2, x^c, x^1, \dots, x^n) \quad [21]$$

Il apparaît clairement que  $f_{x^c}$  dépend des deux premières coordonnées  $X_1^c$  et  $X_2^c$  du nœud contacteur. Cette dépendance intervient de manière explicite par l'intermédiaire de la base  $\mathbf{p}$ , cette partie ne posera aucun problème dans le calcul des variations. Il est important de noter qu'il n'y a pas de dépendance en  $X_3^c$ . Elle intervient aussi de manière implicite, au travers de  $\alpha$ . Ce coefficient dépend de  $x^c$  de par sa construction. C'est cet aspect qui sera le plus délicat pour le calcul de la variation de  $f_{x^c}$ . L'approximation locale de la surface de contact dépend aussi obligatoirement des nœuds support de l'approximation, c'est à dire des coordonnées des nœuds  $x^i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ . Ceci intervient par l'intermédiaire seulement, du coefficient  $\alpha$ , contrairement à ce qui se passe pour le nœud  $x^c$ .

## 4. Élément de contact diffus 3D

Dans cette partie, la régularisation de la surface de contact est associée à la méthode des éléments finis pour mettre en évidence l'*élément de contact diffus 3D*. Une des différences majeures entre l'approche classique nœud-facette introduite précédemment (cf. section 2) et l'approche étudiée ici réside dans le fait que nous ne raisonnons plus en termes de facette de contact potentiel mais en termes de nuages de nœuds de contact potentiel. En effet, les surfaces contacteur et cible peuvent être considérées comme un ensemble de nœuds : un nœud contacteur  $x^c$  est supposé en contact avec une zone cible composée de  $n$  nœuds  $x^i$ .

L'élément de contact présenté est constitué d'un nœud contacteur  $x^c$  et des  $n$  nœuds  $x^i$ . Ces nœuds sont les nœuds qui ont été utilisés pour construire l'approximation locale associée à  $x^c$ . Le vecteur des inconnues de cet élément est noté  $\mathbf{u}^d$  :

$$\mathbf{u}^d = [ x^c \quad x^1 \quad x^2 \quad \dots \quad \dots \quad x^n ]^T \quad [22]$$

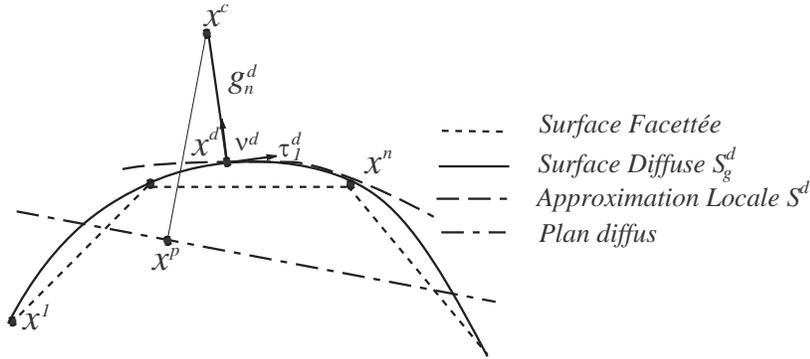
Les variations de ce vecteur sont écrites :

$$\delta \mathbf{u}^d = [ \delta x^c \quad \delta x^1 \quad \delta x^2 \quad \dots \quad \dots \quad \delta x^n ]^T \quad [23]$$

$$\Delta \mathbf{u}^d = [ \Delta x^c \quad \Delta x^1 \quad \Delta x^2 \quad \dots \quad \dots \quad \Delta x^n ]^T \quad [24]$$

### 4.1. Nouvelle description de la géométrie du contact

Avant la discrétisation par éléments finis, nous reprenons quelques notions de la théorie du contact que nous appliquons à la surface de contact régularisée. Ceci



**Figure 1.** Géométrie du contact diffus

concerne les grandeurs cinématiques du contact, notamment la distance normale de contact et ses variations. La distance normale de contact est habituellement définie comme la distance minimale séparant un nœud contacteur  $x^c$  de la surface cible. Il faut donc donner une définition de cette distance en utilisant la nouvelle description de la surface de contact.

4.1.1. *Point proximal*

Comme ceci a été effectué dans [KLA 95, LAU 93], il faut associer au nœud contacteur  $x^c$ , un point  $x^d$  appartenant à la surface diffuse. Ce point généralement appelé point proximal est la projection de  $x^c$  sur  $S_g^d$ . Or, l'équation de la surface diffuse n'est pas explicite. Seule une succession d'approximations locales permet d'obtenir cette surface. L'idée est donc de raisonner non pas sur la surface diffuse mais sur l'approximation locale  $S^d$  associée au nœud  $x^c$  (Figure 1). Ainsi, au nœud  $x^c$  est associé le point  $x^d$  appartenant à  $S^d$  et solution du problème de minimisation :

$$\|x^c - x^d\| = \min_{x \in S^d} \|x^c - x\| \tag{25}$$

Ce choix particulier apparaît tout à fait licite. En effet, il a été constaté numériquement que  $x^d$  tend à se rapprocher du point  $x_g^d$ . Les deux premières coordonnées de  $x^d$  dans le repère  $R^d$  seront notées  $\bar{X}_1$  et  $\bar{X}_2$ . Sa troisième coordonnée sera exprimée à l'aide de  $f_{x^c}$  évaluée en  $\bar{X}_1, \bar{X}_2$  soit  $f_{x^c}(\bar{X}_1, \bar{X}_2)$ . Dans la suite, nous reprendrons la notation introduite en [21], pour écrire :

$$F(\bar{X}_1, \bar{X}_2, x^c, x^1, \dots, x^n) = \bar{F} \tag{26}$$

4.1.2. *Base locale en  $x^d$* 

L'approximation locale est paramétrée par  $(X_1, X_2)$  dans  $R^d$ . La base naturelle associée au paramétrage  $(X_1, X_2)$  est la base formée par les deux vecteurs :

$$\tau_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_1} \quad ; \quad \tau_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial X_2} \quad [27]$$

où  $\mathbf{x}$  désigne le vecteur position d'un point quelconque de  $S^d$  de coordonnées

$$(X_1, X_2, f_{\mathbf{x}^c}(X_1, X_2))$$

De ce fait, les vecteurs tangents au point  $\mathbf{x}^d$  s'expriment naturellement :

$$\tau_1^d = [ 1 \quad 0 \quad \bar{F}_{,X_1} ]^T \quad \text{et} \quad \tau_2^d = [ 0 \quad 1 \quad \bar{F}_{,X_2} ]^T \quad [28]$$

où la notation  $\bar{F}_{,X_l}$  désigne la dérivée partielle de  $\bar{F}$  par rapport à la variable  $X_l$ , pour  $l = 1, 2$ . Le vecteur normal  $\nu^d$  est le produit vectoriel de ces deux vecteurs :

$$\nu^d = \frac{\tau_1^d \times \tau_2^d}{\|\tau_1^d \times \tau_2^d\|} \quad \text{soit} \quad [ -\bar{F}_{,X_1} \quad -\bar{F}_{,X_2} \quad 1 ]^T \quad [29]$$

4.1.3. *Notion de distance normale de contact diffus*

Le critère de minimisation [25] conduit aux conditions :

$$(\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \tau_k^d = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2 \quad [30]$$

Autrement dit, le vecteur  $\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d$  est colinéaire au vecteur  $\nu^d$  :

$$\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d = g_n^d \nu^d \quad [31]$$

ce qui implique :

$$g_n^d = (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \nu^d \quad [32]$$

Ce scalaire  $g_n^d$  va gérer les statuts de contact sur la surface régularisée. De manière classique, nous avons :

$$\begin{cases} g_n^d = 0 & , \text{ le nœud est en contact avec la surface régularisée} \\ g_n^d > 0 & , \text{ le nœud n'est pas en contact} \\ g_n^d < 0 & , \text{ il y a interpénétration} \end{cases} \quad [33]$$

La description de l'élément de contact diffus 3D sera complète une fois que le résidu et la matrice tangente élémentaires de contact diffus auront été exprimés. L'expression générale de  $R_c^d$  et  $K_c^d$  va dépendre de la nouvelle expression de la surface de contact.

## 4.2. Résidu élémentaire

La quantité nécessaire à la détermination du résidu  $\mathbf{R}_c^d$  est la première variation de  $g_n^d$  (cf. section 2.2). Nous allons dans la suite nous attacher à calculer cette variation en utilisant les propriétés intrinsèques de la surface de contact régularisée.

### 4.2.1. Première variation de $g_n^d$

Cette quantité est calculée en reprenant [32]. De façon générale, cette variation s'écrit :

$$\begin{aligned}\delta g_n^d &= \delta [(\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\nu}^d] \\ &= \delta (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\nu}^d + g_n^d \boldsymbol{\nu}^d \cdot \delta \boldsymbol{\nu}^d\end{aligned}\quad [34]$$

Or  $\|\boldsymbol{\nu}^d\| = 1$ , ce qui a pour conséquence directe :

$$\boldsymbol{\nu}^d \cdot \delta \boldsymbol{\nu}^d = 0 \quad [35]$$

L'expression  $\delta g_n^d$  devient finalement :

$$\delta g_n^d = \delta (\mathbf{x}^c - \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\nu}^d \quad [36]$$

La difficulté qui apparaît alors vient de  $\delta \mathbf{x}^d$ . En effet, le calcul de cette quantité nécessite la détermination de la variation de  $\bar{F}$ . Au vue des dépendances introduites par l'équation [21], les contributions des  $n$  nœuds  $\mathbf{x}^i$  vont être prises en considération ainsi que celle du nœud  $\mathbf{x}^c$ . En utilisant la définition des vecteurs tangents  $\boldsymbol{\tau}_1^d$  et  $\boldsymbol{\tau}_2^d$  [28] il apparaît que :

$$\delta \mathbf{x}^d = \delta \bar{X}_1 \boldsymbol{\tau}_1^d + \delta \bar{X}_2 \boldsymbol{\tau}_2^d + d\bar{F} \quad [37]$$

où les deux premières composantes du vecteur  $d\bar{F}$  sont nulles. La troisième composante fait intervenir la variation de  $\bar{F}$  par rapport à  $\mathbf{u}^d$  :

$$d\bar{F}_3 = \delta \mathbf{u}^{dT} \nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} \quad [38]$$

$\nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F}$  est le gradient de  $\bar{F}$  par rapport au vecteur  $\mathbf{u}^d$ , c'est-à-dire :

$$\nabla_{\mathbf{u}^d} \bar{F} = \left[ \nabla_{\mathbf{x}^c} \bar{F} \quad \nabla_{\mathbf{x}^1} \bar{F} \quad \dots \quad \nabla_{\mathbf{x}^n} \bar{F} \right]^T \quad [39]$$

où nous avons introduit les notations,

$$\nabla_{\mathbf{x}^c} \bar{F} = \left[ \bar{F}_{,X_1^c} \quad \bar{F}_{,X_2^c} \quad 0 \right]^T \quad \text{et} \quad \nabla_{\mathbf{x}^i} \bar{F} = \left[ \bar{F}_{,X_1^i} \quad \bar{F}_{,X_2^i} \quad \bar{F}_{,X_3^i} \right]^T \quad [40]$$

Dans cet article, le calcul détaillé des quantités  $\bar{F}_{,X_k^c}$  et  $\bar{F}_{,X_k^i}$  pour  $k = 1, 2$  et  $i = 1, \dots, n$  n'est pas présenté. Seule une expression générale est exprimée. En reprenant la définition de l'approximation locale introduite par l'équation [13] évaluée au point  $\mathbf{x}^d$ , les relations suivantes sont obtenues :

$$\begin{aligned}\bar{F}_{,X_k^c} &= \bar{\mathbf{p}}_{,X_k^c}^T \boldsymbol{\alpha} + \bar{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\alpha}_{,X_k^c} \\ \bar{F}_{,X_k^i} &= \bar{\mathbf{p}}^T \boldsymbol{\alpha}_{,X_k^i}\end{aligned}\quad [41]$$

où  $\bar{p}$  est la base polynomiale  $p$  évaluée en  $\bar{X}_1$  et  $\bar{X}_2$ . Il est à noter que la base polynomiale ne dépend pas des nœuds support  $x^i$ , ce qui explique l'expression de  $F_{,X_k^i}$ . Les difficultés rencontrées sont liées à l'évaluation des grandeurs  $\alpha_{,X_k^c}$  et  $\alpha_{,X_k^i}$ .

#### 4.2.2. Expression discrète et résidu élémentaire de contact diffus

Il est maintenant possible de donner l'expression discrète de la première variation de  $g_n^d$ . Cette quantité est calculée en reportant la valeur de  $\delta x^d$  [37], dans l'équation de la définition de  $g_n^d$  [36], nous obtenons alors :

$$\delta g_n^d = \delta \mathbf{u}^{dT} \mathcal{N}_c^d \quad [42]$$

où  $\mathcal{N}_c^d$  est un vecteur à  $3(n+1)$  composantes dont l'expression est :

$$\mathcal{N}_c^d = \frac{-1}{\|\boldsymbol{\tau}_1^d \times \boldsymbol{\tau}_2^d\|} \left[ \mathcal{N}_{c,1}^d \quad \nabla_{\mathbf{x}^1} \bar{F} \quad \dots \quad \nabla_{\mathbf{x}^n} \bar{F} \right]^T \quad [43]$$

Les trois premières composantes de ce vecteur prennent en compte seulement les contributions du nœud contacteur :

$$\mathcal{N}_{c,1}^d = \left[ \bar{F}_{,X_1^c} + \bar{F}_{,X_1} \quad \bar{F}_{,X_2^c} + \bar{F}_{,X_2} \quad -1 \right]^T \quad [44]$$

Le résidu élémentaire de contact est donc un vecteur à  $3(n+1)$  composantes donné par :

$$\mathbf{R}_c^d = \varepsilon_n g_n^d \mathcal{N}_c^d \quad [45]$$

où  $\varepsilon_n$  est le paramètre de pénalité.

### 4.3. Matrice tangente élémentaire de contact

Le calcul de la matrice tangente élémentaire de contact diffus nécessite le calcul de la seconde variation de  $g_n^d$ . Comme pour la première variation, cette quantité dépend des propriétés de l'approximation locale.

#### 4.3.1. Seconde variation de $g_n^d$

Cette seconde variation s'écrit de manière générale en dérivant la relation [36] :

$$\Delta \delta g_n^d = \Delta \left[ (\delta \mathbf{x}^c - \delta \mathbf{x}^d) \cdot \boldsymbol{\nu}^d \right] \quad [46]$$

ce qui est équivalent à,

$$\Delta \delta g_n^d = g_n^d \delta \boldsymbol{\nu}^d \cdot \Delta \boldsymbol{\nu}^d - \Delta \delta \mathbf{x}^d \cdot \boldsymbol{\nu}^d \quad [47]$$

Les difficultés rencontrées au cours de cette évaluation sont de la même nature que celles rencontrées pour la première variation, à savoir le calcul de  $\Delta \delta \mathbf{x}^d$  qui va faire intervenir la seconde variation de  $\bar{F}$ .

La seconde variation de  $x^d$  est déterminée en prenant la relation [37]. La quantité  $\Delta\delta x^d$  a alors la forme suivante :

$$\Delta\delta x^d = \delta\bar{X}_1 \Delta\tau_1^d + \delta\bar{X}_2 \Delta\tau_2^d + \Delta\delta\bar{X}_1 \tau_1^d + \Delta\delta\bar{X}_2 \tau_2^d + d^2\bar{F} \quad [48]$$

où les deux premières composantes du vecteur  $d^2\bar{F}$  sont nulles. La troisième composante est en fait la somme de la seconde variation de  $\bar{F}$  et de la première variation de  $\bar{F}_{,X_l}$  ( $l = 1, 2$ ) par rapport à  $u^d$  :

$$d^2\bar{F}_3 = \delta u^{dT} [\mathcal{H}_{\bar{F}} \Delta u^d + \mathcal{T}_1 \Delta\bar{X}_1 + \mathcal{T}_2 \Delta\bar{X}_2] \quad [49]$$

où  $\mathcal{H}_{\bar{F}}$  est la Hessienne de  $\bar{F}$  et  $\mathcal{T}_l$  est le gradient de  $\bar{F}_{,X_l}$  par rapport à  $u^d$ .

#### 4.3.2. Expression discrète et matrice tangente

Nous admettons que les variations des coordonnées  $\bar{X}_1$  et  $\bar{X}_2$  ainsi que celles du vecteur  $\nu^d$  sont de la forme :

$$\begin{aligned} \delta\bar{X}_l &= \delta u^{dT} \mathcal{S}_l \quad \text{et} \quad \Delta\bar{X}_l = \mathcal{S}_l^T \Delta u^d \quad l = 1, 2 \\ \delta\nu^{dT} &= \delta u^{dT} \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \Delta\nu^d = \mathcal{U}^T \Delta u^d \end{aligned} \quad [50]$$

où  $\mathcal{S}_l$  ( $l = 1, 2$ ) est un vecteur à  $3(n+1)$  composantes obtenu en différenciant [30].  $\mathcal{U}$  est une matrice appartenant à  $M_{3(n+1),3}$  obtenue en différenciant [29].

La variation des vecteurs tangents est indispensable. En reprenant leur expression [28], il apparaît clairement que seule la troisième composante de cette variation est non nulle. Il est possible de montrer que cette variation s'écrit :

$$\Delta\tau_l^d = [0 \quad 0 \quad \mathcal{D}_{\tau_l}^T \Delta u^d]^T \quad \text{avec} \quad l = 1, 2 \quad [51]$$

Le vecteur  $\mathcal{D}_{\tau_l}$  est un vecteur à  $3(n+1)$  composantes qui s'exprime à partir de  $\mathcal{S}_l$  et  $\mathcal{T}_l$  comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\tau_1} &= \bar{F}_{,X_1 X_1} \mathcal{S}_1 + \bar{F}_{,X_1 X_2} \mathcal{S}_2 + \mathcal{T}_1 \\ \mathcal{D}_{\tau_2} &= \bar{F}_{,X_2 X_1} \mathcal{S}_1 + \bar{F}_{,X_2 X_2} \mathcal{S}_2 + \mathcal{T}_2 \end{aligned} \quad [52]$$

Ces relations ainsi que le calcul de  $\Delta\delta x^d$  permettent d'écrire l'expression discrète de la seconde variation de  $g_n^d$  :

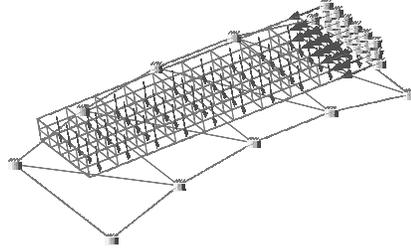
$$\Delta\delta g_n^d = \delta u^{dT} \mathcal{M}_c^d \Delta u^d \quad [53]$$

où la matrice  $\mathcal{M}_c^d$  est donnée par :

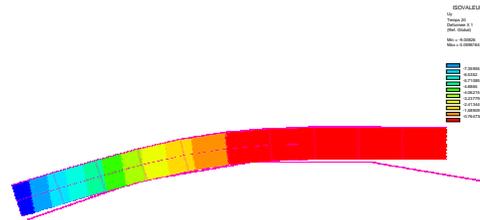
$$\mathcal{M}_c^d = \frac{-1}{\|\tau_1^d \times \tau_2^d\|} \left( \mathcal{H}_{\bar{F}} + \mathcal{T}_1 \mathcal{S}_1^T + \mathcal{T}_2 \mathcal{S}_2^T + \mathcal{S}_1 \mathcal{D}_{\tau_1}^T + \mathcal{S}_2 \mathcal{D}_{\tau_2}^T - g_n^d \mathcal{U} \mathcal{U}^T \right)$$

La matrice tangente élémentaire de contact diffus  $K_c^d$  est une matrice appartenant à  $M_{3(n+1),3(n+1)}$  et son expression est la suivante :

$$K_c^d = \varepsilon_n g_n^d \mathcal{M}_c^d + \varepsilon_n \mathcal{N}_c^d \mathcal{N}_c^{dT} \quad [54]$$



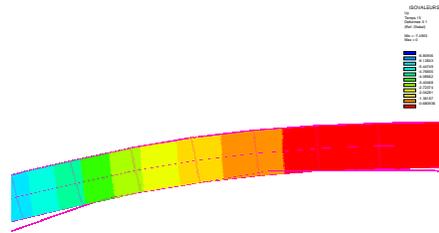
**Figure 2.** *Modèle élément finis : contact plaque cylindre*



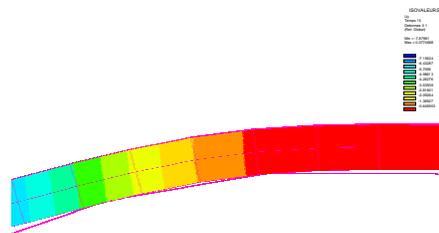
**Figure 3.** *Configuration déformée*

### 5. Exemple

La méthode proposée est implémentée dans le code par éléments finis SYSTUS [ESI 00]. La suite de cette partie est consacrée à la présentation d'un exemple pour mettre en évidence l'efficacité de l'approche développée. Dans un souci de clarté, nous présentons seulement un exemple de contact, solide rigide, solide déformable quasi  $2D$ . Nous considérons le contact entre un cylindre rigide et une plaque élastique de module d'Young  $E = 200000 MPa$  et de coefficient de Poisson  $\nu = 0.3$ . Les dimensions de la plaque sont les suivantes :  $l = 65mm$ ,  $L = 20mm$  et  $e = 5mm$ . Cette plaque est soumise à une pression imposée suivant la direction  $y$  sur une partie de sa frontière et à un déplacement imposé suivant la direction  $x$  sur une autre partie. Le modèle éléments finis ainsi que les conditions aux limites sont présentés sur la figure 2. La cible est définie comme étant le cylindre rigide. La figure 3 représente la configuration déformée de la plaque dans le plan  $XY$ .



(a) Sans élément de contact diffus



(b) Avec élément de contact diffus

**Figure 4.** Zoom sur la configuration déformée

Un zoom sur la configuration déformée obtenue avec un algorithme de contact n'utilisant pas l'élément de contact diffus  $3D$  est représenté sur la figure 4(a). Il est très net que la non régularité du cylindre pose des difficultés. Il apparaît une forte interpénétration. Ce problème est atténué en utilisant l'élément de contact diffus  $3D$ . Ceci est spécialement visible sur la figure 4(b). Le contact n'a plus lieu sur une facette (un plan), mais sur une surface qui suit tout à fait la forme du cylindre. Le décollement que l'on observe par rapport au maillage élément finis s'explique par le fait que les fonctions poids utilisées pour traiter cet exemple ne sont pas des fonctions poids interpolantes mais seulement approximantes.

## 6. Conclusion

Une nouvelle approche pour la régularisation d'une surface de contact a été proposée dans cet article et la construction d'un nouvel élément de contact dit élément de

contact diffus 3D a été spécifiée. Contrairement aux approches classiques, notamment l'approche nœud-facette, le contact est supporté non plus par les nœuds d'une facette de référence mais par un nuage de nœuds. En plus de l'apport purement géométrique dû à une surface de contact plus régulière, l'approche proposée modifie la gestion de la détection des candidats au contact. Il n'est plus indispensable de former l'association nœud contacteur, facette de référence qui pouvait être obtenue par exemple à l'aide d'un algorithme de tris tel le tri par buckets. Il est seulement nécessaire de connaître un nuage de nœuds susceptibles d'entrer en contact.

## 7. Bibliographie

- [ALA 91] ALART P., CURNIER A., « A Mixed Formulation for Frictional Contact Problems prone to Newton like Solution Methods », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 92, n° 3, 1991, p. 353–375.
- [ESI 00] ESI Software, « SYSTUS<sup>®</sup> 2000, User's Manual », 2000.
- [FOU 99] FOURMENT L., CHENOT J. L., MOCELLIN K., « Numerical formulations and algorithms for solving contact problems in metal forming simulation », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, 1999, p. 1435–1462.
- [KLA 95] KLARBRING A., « Large displacement frictional contact : a continuum framework for finite element discretization », *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 14, n° 2, 1995, p. 237–253.
- [KRS 01a] KRSTULOVIC-OPARA L., WRIGGERS P., « Convergence studies for 2D smooth contact elements », *European Conference on Computational Mechanics*, June 26–29 2001, Cracow, Poland.
- [KRS 01b] KRSTULOVIC-OPARA L., WRIGGERS P., « Convergence studies for 3D smooth frictional contact elements based on the quartic Bézier surfaces », *3<sup>rd</sup> Contact Mechanics International Symposium*, June 17-21 2001, Praia da Consolação, Peniche, Portugal.
- [LAU 93] LAURSEN T., SIMO J., « A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody large deformation frictional contact problems », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, 1993, p. 3451–3485.
- [NAY 91] NAYROLLES B., TOUZOT G., VILLON P., « L'approximation diffuse », *C.R Acad. Sci. Paris*, vol. 313, 1991, p. 293–296, Série II.
- [PIE 97] PIETRZAK G., « Continuum mechanics modelling and augmented lagrangian formulation of large deformation frictional contact problems », Thèse, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1997.
- [RAS 00] RASSINEUX A., VILLON P., SAVIGNAT J.-M., STAB O., « Surface remeshing by local hermite diffuse interpolation », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 49, n° 1-2, 2000, p. 31–49.
- [WAN 97] WANG S. P., NAKAMACHI E., « The inside-outside contact search algorithm for finite element analysis », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, n° 19, 1997, p. 3665–3685.
- [WRI 01] WRIGGERS P., KRSTULOVIC-OPARA L., KORELC J., « Smooth C1-interpellations for two-dimensional frictional contact problems », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, n° 12, 2001, p. 1469-1495.