
Modélisation de problèmes non linéaires de grande taille : grandes déformations et autocontact dans un milieu cellulaire

Mikaël Barboteu* — Pierre Alart** — Stéphane Pagano**

*Laboratoire de Théorie des Systèmes, Université de Perpignan,
52, avenue de Villeneuve - 66860 Perpignan Cedex
barboteu@univ-perp.fr

**Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, UMR 5508,
CNRS-Université Montpellier 2,
Pl. E. Bataillon, 34 095 Montpellier Cedex 5
{alart, pagano}@lmgc.univ-montp2.fr

RÉSUMÉ. On présente une modélisation numérique du comportement non linéaire d'un milieu cellulaire sous fortes sollicitations par la mise en œuvre de méthodes numériques performantes. Les non-linéarités sont les grandes déformations et les conditions d'autocontact au sein de la microstructure modélisée par un réseau cellulaire à parois fines. Le solveur non linéaire est basé sur une méthode de Newton généralisée qui traite simultanément les deux types de non linéarités. Le système linéarisé est ensuite résolu par une méthode de décomposition de domaine adaptée au contact et au frottement. Les simulations sur des échantillons de taille croissante mettent en évidence les phénomènes de micro-flambements et l'influence du contact dans le processus de localisation par bandes de cisaillement.

ABSTRACT. The paper presents a numerical modelling of the non linear behaviour of a cellular medium submitted to strong loadings. Efficient numerical tools are performed. The non linearities are issued from finite deformations and self-contact conditions involving in the cellular network with thin walls. The non linear solver is based on a generalized Newton method which deals simultaneously with the two non linearities. The linearized system is solved by a domain decomposition method adapted to contact and friction. The numerical simulations using increasing size samples underline the microbuckling phenomenae and the influence of the contact condition on the localization process characterized by shear bands.

MOTS-CLÉS : milieux cellulaires, grandes déformations, autocontact, Newton généralisé, décomposition de domaines.

KEYWORDS: cellular media, finite deformations, self-contact, generalized Newton method, domain decomposition.

1. Introduction

La microstructure du bois se représente généralement par un réseau cellulaire de parois à épaisseur variable. Nous souhaitons effectuer une modélisation numérique du comportement transverse du bois qui, soumis à de fortes sollicitations en compression, est le théâtre de phénomènes de microflambements des parois allant jusqu'au contact entre elles dans un processus dit de densification. Dans un premier temps, nous considérons un matériau cellulaire modèle présentant une microstructure régulière dite en nid d'abeilles : cellules hexagonales périodiquement réparties. Les phénomènes mentionnés ci-dessus sont alors mis en évidence de manière spectaculaire [GIB 88]. Cette modélisation non linéaire nécessite d'une part, la prise en compte des grandes déformations au niveau des parois des cellules pour modéliser le flambement et, d'autre part, la prise en compte des conditions d'autocontact pour la fermeture partielle des cellules responsables du phénomène de densification cellulaire.

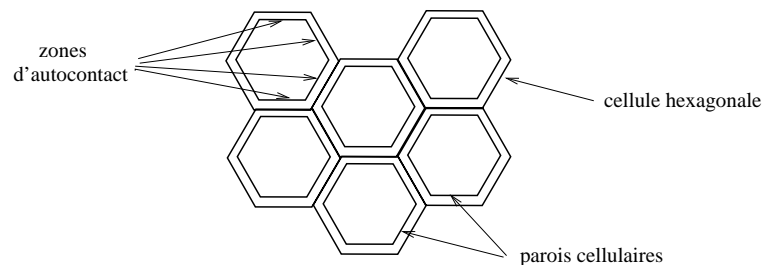


Figure 1. *Milieux cellulaires*

Les limites des techniques d'homogénéisation dans le cadre des grandes déformations [Mül 87, GEY 93] nous contraignent, pour déterminer le comportement non linéaire de milieux cellulaires, à considérer non pas une cellule mais une collection suffisante de cellules permettant de fournir un volume élémentaire "assez" représentatif. La prise en compte d'une importante collection de cellules nécessaire à notre modélisation demande le développement de méthodes numériques performantes bien adaptées aux problèmes de grande taille et fortement non linéaires. Pour cela, nous avons couplé la méthode de Newton et les techniques de décomposition de domaines de type Schur primal [LET 94]. La stratégie de résolution Newton-Schur, déjà adaptée aux problèmes dont la non-linéarité est due au contact [BAR 01] et la non-symétrie au frottement [ALA 00] (rideaux métalliques, collections de grains déformables) est étendue ici au cas des grandes déformations.

2. Formulation continue du problème

2.1. Grandes déformations

Dans ce paragraphe, nous présentons brièvement la modélisation en grandes déformations adoptée pour simuler le comportement des parois cellulaires. On se place dans une description lagrangienne totale (toutes les variables sont définies dans la configuration de référence). On considère ici un problème d'élasticité en grandes déformations impliquant un matériau dont le comportement est caractérisé par une densité d'énergie hyperélastique noté W . Le tenseur $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ de Piola-Kirchhoff est alors la dérivée de ce potentiel par rapport au gradient de la déformation \mathbf{F} :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \partial_{\mathbf{F}} W(\mathbf{x}, \mathbf{F}(\mathbf{x})), \quad (1)$$

avec le gradient de déformation $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})$, \mathbf{u} étant le vecteur déplacement. On écrit alors le problème d'équilibre dans la configuration de référence Ω à l'aide du principe des puissances virtuelles :

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\partial_g \Omega = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (2)$$

avec les densités $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) \det \mathbf{F}$ et $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x})) |\mathbf{F}^{-t}| \det \mathbf{F}$; V étant l'espace des champs des déplacements cinématiquement admissibles. \mathbf{F}^{-t} désigne la transposée de l'inverse de \mathbf{F} . Pour des matériaux hyperélastiques isotropes, la densité d'énergie dépend dans le cas tri-dimensionnel des trois invariants, $I_1 = \text{tr}(\mathbf{F}^t \mathbf{F})$, $I_2 = \text{tr}((\text{cof} \mathbf{F})^t \text{cof} \mathbf{F})$ et $J = \det \mathbf{F}$, du tenseur de Green Cauchy $\mathbf{C} = \mathbf{F}^t \mathbf{F}$. Le comportement élastique compressible du matériau considéré suit une variante de la loi élastique d'Ogden (revue par Ciarlet et Geymonat [CIA 82]) où la densité d'énergie s'écrit :

$$W_{Ogd}(\mathbf{F}) = c_1(I_1 - 3) + c_2(I_2 - 3) + a(J^2 - 1) - 2(c_1 + 2c_2 + a) \ln J, \quad (3)$$

où c_1 , c_2 et a sont des constantes expérimentales. Un autre exemple de loi hyperélastique est la loi de Kirchhoff-Saint Venant qui est une généralisation de la loi linéaire de Hooke (avec $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^t \mathbf{F} - \mathbf{I})$, λ et μ étant les coefficients de Lamé),

$$W_{K-S^tV}(\mathbf{F}) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}(\mathbf{E}))^2 + \mu \text{tr}(\mathbf{E}^2) = \frac{\lambda}{8}(I_1 - 3)^2 + \frac{\mu}{4}(I_1^2 - 2I_1 - 2I_2 + 3). \quad (4)$$

Pour notre modélisation, nous nous plaçons dans le cas bidimensionnel ; les lois hyperélastiques ne dépendent plus que des invariants I_1 et J . Les précédentes densités d'énergie prennent alors respectivement les formes suivantes :

$$W_{Ogd}(\mathbf{F}) = c_1(I_1 - 2) + c_2(J^2 + I_1 - 3) + a(J^2 - 1) - 2(c_1 + 2c_2 + a) \ln J, \quad (5)$$

$$W_{K-S^tV}(\mathbf{F}) = \frac{\lambda}{8}(I_1 - 2)^2 + \frac{\mu}{4}(-2J^2 + I_1^2 - 2I_1 + 2). \quad (6)$$

2.2. Contact et frottement

Le contact entre les parois, *i.e.* l'autocontact au sein d'une cellule, est modélisé par les lois de contact unilatéral de Signorini et de frottement sec de Coulomb. Ces lois multivoques reliant les variables cinématiques (champ des écarts normaux g_n et des vitesses tangentielles $\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t$) et statiques (contraintes normales $\tau_n \mathbf{n}$ et tangentielles de contact $\boldsymbol{\tau}_t$) peuvent s'écrire localement sous la forme d'inclusions sous-différentielles :

$$\tau_n \in \partial \Psi_{\mathbf{R}^+}(g_n) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\tau}_t \in \partial \Psi_{C[\tau_n]}(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t), \quad (7)$$

où $\partial \Psi_{\mathbf{R}^+}$ et $\partial \Psi_{C[\tau_n]}$ représentent respectivement les sous-différentiels des fonctions indicatrices $\Psi_{\mathbf{R}^+}$ de la partie positive de \mathbf{R} et $\Psi_{C[\tau_n]}$ du disque convexe de rayon $-\mu\tau_n$ (noté $C[\tau_n]$), où μ représente ici le coefficient de frottement. On peut noter que le disque convexe $C[\tau_n]$ dépend de la contrainte normale de contact τ_n ce qui introduira ultérieurement la non-symétrie dans les matrices tangentes. Dans un processus quasi-statique, on peut réécrire [7] sous une forme incrémentale ; cela revient à remplacer $\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t$ par $\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t dt$ (dt étant un incrément de temps ou de chargement). Les formulations qui suivent et notamment le problème d'optimisation consistent donc à déterminer, lors d'un pas de chargement, la valeur des champs inconnus à la fin de ce pas.

2.3. Formulation en quasi-Lagrangien augmenté

Les lois de contact et de frottement dérivant de pseudo-potentiels, il est assez naturel de tenter de les intégrer dans une formulation variationnelle impliquant un milieu dont le comportement dérive lui-même d'un potentiel (hyperélasticité). A chaque pas, dans une formulation primale en déplacement, nous avons à déterminer le champ des déplacements \mathbf{u} minimisant une fonctionnelle I paramétrée ici par la contrainte de contact τ_n :

$$I(\mathbf{u}; \tau_n) := \inf_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \{I_e(\mathbf{v}) + I_c(\mathbf{v}, \tau_n)\}, \quad (8)$$

I_e est la différence entre l'énergie élastique interne et les potentiels d'énergie externe. I_c représente un pseudo-potentiel exprimant les lois de contact et de frottement. I_e et I_c sont définis par :

$$\begin{cases} I_e(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} W(\nabla \mathbf{F}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} d\partial_g \Omega, \\ I_c(\mathbf{v}, \tau_n) = \int_{\Gamma^c} \Psi_{\mathbf{R}^+}(g_n(\mathbf{v})) d\Gamma + \int_{\Gamma^c} \Psi_{C[\tau_n(\mathbf{u})]}^*(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t(\mathbf{v}) dt) d\Gamma. \end{cases} \quad (9)$$

La première intégrale de I_c représente la contrainte (au sens mathématique) relative au contact unilatéral. Elle signifie que l'énergie nécessaire pour induire une inter-pénétration devrait être infinie. La deuxième intégrale est l'énergie dissipée par le frottement sur l'interface de contact Γ^c . Le problème de minimisation [8] n'est pas standard dans le sens où la minimisation dépend de la solution car le convexe de frottement $C[\tau_n(\mathbf{u})]$ dépend indirectement de la solution \mathbf{u} . Ce problème que l'on qualifie

alors de quasi-variationnel [8] peut s'écrire sous la forme d'un problème inf-sup obtenu via un "quasi-Lagrangien" pour lequel $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ est le couple de champs solution recherché. Afin de régulariser la non différentiabilité des termes de contact et frottement, on adopte une formulation en quasi-Lagrangien augmenté qui permet d'écrire un problème inf-sup non contraint [ALA 91],

$$L^r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}; \tau_n) = \inf_{\mathbf{v}} \sup_{\gamma_n} \sup_{\gamma_t} \{I_e(\mathbf{v}) + L_c^r(\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}; \tau_n)\}, \quad (10)$$

$$\text{avec } L_c^r(\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}; \tau_n) = \int_{\Gamma_c} l_n^r(\mathbf{v}, \gamma_n) d\Gamma + \int_{\Gamma_c} l_t^r(\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}_t; \tau_n) d\Gamma.$$

Les multiplicateurs de Lagrange λ_n, λ_t (γ_n, γ_t pour les variables virtuelles) peuvent être interprétés comme les contraintes normales et tangentielles de contact et frottement. Les termes l_n^r et l_t^r sont les régularisations des fonctions indicatrices $\Psi_{\mathbf{R}^-}(\gamma_n)$ et $\Psi_{\hat{C}}(\gamma_t)$,

$$\begin{cases} l_n^r(\mathbf{v}, \gamma_n) = (g_n(\mathbf{v}), \gamma_n) + \frac{r}{2} \|g_n(\mathbf{v})\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}_{\mathbf{R}^-}^2\{\gamma_n + r g_n(\mathbf{v})\} \\ l_t^r(\mathbf{v}, \boldsymbol{\gamma}_t; \tau_n) = \left(\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t(\mathbf{v}) dt, \boldsymbol{\gamma}_t \right) + \frac{r}{2} \|\overset{\circ}{\mathbf{g}}_t(\mathbf{v}) dt\|^2 - \frac{1}{2r} \text{dist}_{\hat{C}}^2\{\boldsymbol{\gamma}_t + r \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t dt\}, \end{cases} \quad (11)$$

où r est un coefficient de pénalité. Alart et Curnier [ALA 91] ont introduit une forme particulière du quasi-Lagrangien augmenté en remplaçant $C[\tau_n]$ par le convexe augmenté $\hat{C} := C[\text{proj}_{\mathbf{R}^-}(\lambda_n + r g_n(\mathbf{u}))]$. Cette approche permet de restaurer la continuité C^1 par morceau du Lagrangien par rapport aux deux variables et autorise donc d'utiliser une méthode de Newton, généralisée cependant aux opérateurs non différentiables tels les projections. Dans la perspective de résoudre un tel problème non linéaire par une méthode de Newton, il est utile de déterminer la première variation du Lagrangien augmenté. La solution $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$, appelée également point selle du problème inf-sup [10], doit annuler la première variation de L^r ,

$$DL^r = DI_e(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) + DL_c^r((\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}); (\delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\lambda})) = 0, \quad \forall \delta\mathbf{u}, \forall \delta\boldsymbol{\lambda}, \quad (12)$$

où les parties élastique DI_e et contact DL_c^r sont définies par :

$$DI_e(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \partial_{\mathbf{F}} W(\mathbf{u}) : \nabla \delta\mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial_f \Omega} \mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{u} d\partial_g \Omega$$

$$DL_c^r((\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}; \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}); (\delta\mathbf{u}, \delta\boldsymbol{\lambda})) =$$

$$\int_{\Gamma} \begin{pmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{u}} l_n^r(\mathbf{u}, \lambda_n) + \nabla_{\mathbf{u}} l_t^r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_t; \mathbf{u}, \lambda_n) \\ \nabla_{\lambda} l_n^r(\mathbf{u}, \lambda_n) + \nabla_{\lambda} l_t^r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_t; \mathbf{u}, \lambda_n) \end{pmatrix} d\Gamma,$$

avec les gradients suivants, utilisant les projections sur \mathbf{R}^- et \hat{C} ,

$$\begin{cases} \nabla_{\mathbf{u}} (l_n^r(\mathbf{u}, \lambda_n) + l_t^r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_t)) &= [\nabla_{\mathbf{u}} g_n(\mathbf{u})]^T P_{\mathbf{R}^-}(\lambda_n + r g_n(\mathbf{u})) \\ &+ \left[\nabla_{\mathbf{u}} \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t(\mathbf{u}) dt \right]^T P_{\hat{C}}(\boldsymbol{\lambda}_t + r \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t(\mathbf{u}) dt) \\ \nabla_{\lambda} (l_n^r(\mathbf{u}, \lambda_n) + l_t^r(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_t)) &= -\frac{1}{r} \left\{ \lambda_n - P_{\mathbf{R}^-}(\lambda_n + r g_n(\mathbf{u})) \right\} \mathbf{n} \\ &- \frac{1}{r} \left\{ \boldsymbol{\lambda}_t - P_{\hat{C}}(\boldsymbol{\lambda}_t + r \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t(\mathbf{u}) dt) \right\}. \end{cases} \quad (14)$$

3. Formulation discrétisée du problème

3.1. *Éléments de contact grandes rotations et grands glissements*

La discrétisation des interactions de contact et frottement est réalisée par des éléments de contact. Nous n'entrerons pas ici dans le détail de l'interpolation à partir du modèle continu ; on peut se référer sur cette question à [PIE 97]. La présentation qui suit se situe donc d'emblée entre deux corps discrétisés ; les variables discrètes sont définies directement mais peuvent être retrouvées *via* des interpolations linéaire pour les variables cinématiques et constante par morceaux pour les efforts de contact. On considère ici un élément de contact bifacette pour les grandes rotations et les grands glissements (figure 2). Cet élément est composé d'un nœud contacteur (numéroté 1), de deux facettes définies par les nœuds 2, 3 et 4 et d'un nœud multiplicateur (numéroté 5). Le nœud contacteur 1 peut ici entrer en contact avec les 2 facettes cibles [2, 3] et [3, 4] ; il permet ainsi le glissement, que l'on qualifiera de modéré, sur deux facettes.

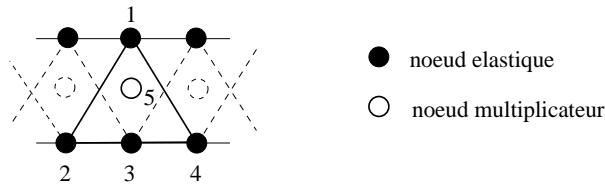


Figure 2. *Éléments contact bi-facettes*

Les versions discrètes de la distance de contact g_n et de l'incrément tangential de glissement $\delta \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t$ sont définies par :

$$\begin{cases} g_n = \mathbf{n}(\mathbf{u}) \cdot (\mathbf{y}_1 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{y}_1^\perp(\mathbf{u})). \\ \delta \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{n}(\mathbf{u}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{u})) (\mathbf{y}_1 + \mathbf{u}_1 - \mathbf{y}^{\text{ref}}(\mathbf{u})), \end{cases} \quad (15)$$

$\mathbf{y}^{\text{ref}}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ est la position dans la configuration courante de la projection du nœud 1, déterminée dans sa position en début d'incrément, sur l'une des deux facettes cibles [2, 3] ou [3, 4] ; elle est ensuite repérée par sa coordonnée barycentrique α . Le point $\mathbf{y}_1^\perp(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$, repéré par sa coordonnée barycentrique β , est la position de la projection du nœud 1 sur l'une des facettes [2, 3] ou [3, 4], les trois entités (nœud 1, facettes [2, 3] et [3, 4]) étant considérées ici dans leur configuration courante.

Une généralisation de ce type de contact pour les très grands glissements sur un incrément de chargement est aisément réalisable en considérant plusieurs facettes cibles. Une autre possibilité est de garder des éléments bi- ou tri-facettes au cours d'un processus, mais d'effectuer régulièrement un remaillage de l'interface de contact, c'est-à-dire en réactualisant les facettes en vis-à-vis. Cependant les simulations réalisées au paragraphe 5 utilisent des éléments de contact multi facettes composés de 20 facettes cibles.

3.2. Opérateur de contact et matrices tangentes

L'opérateur de contact discrétisé utilise les gradients calculés en [14] :

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} [\nabla_{\mathbf{u}} g_n]^T P_{\mathbf{R}^-}(\sigma_n) + [\nabla_{\mathbf{u}} \delta \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t]^T P_C(\sigma_t) \\ -\frac{1}{r} \left\{ \boldsymbol{\lambda} - P_{\mathbf{R}^-}(\sigma_n) \mathbf{n} - P_C(\sigma_t) \right\} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

où $\sigma_n = \lambda_n + r g_n(\mathbf{u})$ et $\sigma_t = \lambda_t + r \delta \mathbf{g}_t(\mathbf{u})$ sont les multiplicateurs augmentés. Pour l'élément de contact présenté précédemment (en considérant que le contact s'effectue sur la facette [2, 3]), nous avons :

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{u}} g_n &= (\mathbf{n}, -(1-\beta)\mathbf{n}, -\beta\mathbf{n}, \mathbf{0}), \\ \nabla_{\mathbf{u}} \delta \overset{\circ}{\mathbf{g}}_t &= (\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}, -(1-\beta)\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}, -\beta\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}, \mathbf{0}). \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'exprimer l'opérateur de contact élémentaire défini comme suit et pour lequel chaque ligne est associée aux "degrés de liberté" d'un des 5 nœuds de l'élément contact :

$$\mathcal{F}_{ec}(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda}) = \begin{bmatrix} F(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda}) \\ -(1-\beta)F(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda}) \\ -\beta F(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{0} \\ -\frac{1}{r}(\boldsymbol{\lambda} - F(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda})) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad F(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda}) = P_{\mathbf{R}^-}(\sigma_n) \mathbf{n} + P_C(\sigma_t).$$

La matrice tangente élémentaire $\mathbf{A}_{ec} = \nabla_{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \boldsymbol{\lambda}} \mathcal{F}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \boldsymbol{\lambda})$ associée à cet opérateur s'écrit comme la somme de deux contributions, une principale \mathbf{A}_{ecp} et une complémentaire \mathbf{A}_{ecc} . La première prend la forme suivante :

$$\mathbf{A}_{ecp} = \begin{bmatrix} r\mathbf{M} & -(1-\beta)r\mathbf{M} & -\beta r\mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ (\beta-1)r\mathbf{M} & (1-\beta)^2 r\mathbf{M} & (1-\beta)\beta r\mathbf{M} & \mathbf{0} & (\beta-1)\mathbf{M} \\ -\beta r\mathbf{M} & \beta(1-\beta)r\mathbf{M} & \beta^2 r\mathbf{M} & \mathbf{0} & -\beta\mathbf{M} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M} & -(1-\beta)\mathbf{M} & -\beta\mathbf{M} & \mathbf{0} & \frac{1}{r}(\mathbf{M} - \mathbf{I}) \end{bmatrix} \quad (17)$$

La matrice \mathbf{M} dépend des statuts de contact comme suit :

$$\mathbf{M} = \begin{cases} \mathbf{0} & \text{statut non contact} \\ \mathbf{I} & \text{statut adhérence} \\ (\mathbf{n} - \varepsilon \boldsymbol{\mu} t) \otimes \mathbf{n} & \text{statut glissement } \varepsilon. \end{cases}$$

La partie complémentaire prend en compte les variations du repère local au cours des itérations du solveur non linéaire et ne concerne que les statuts de glissement ;

autrement dit le repère est lui-même une inconnue du problème à chaque incrément comme détaillé dans [BAR 99].

$$\mathbf{A}_{ecc} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A} & -\mathbf{A} & 0 & 0 \\ -\mathbf{B} & -(1-\beta)(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{C} & (1-\beta)\mathbf{A} - \beta\mathbf{B} + \mathbf{C} & 0 & 0 \\ -\mathbf{B} & -\beta\mathbf{A} + (1-\beta)\mathbf{B} + \mathbf{C} & \beta(\mathbf{A} + \mathbf{B}) - \mathbf{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}\mathbf{A} & -\frac{1}{r}\mathbf{A} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

avec

$$\mathbf{N} = (\mathbf{n} - \varepsilon\mu\mathbf{t}) \otimes \mathbf{t}, \quad \mathbf{P} = (\mathbf{t} + \varepsilon\mu\mathbf{n}) \otimes \mathbf{n},$$

$$\mathbf{A} = \gamma(\sigma_n\mathbf{P} + \lambda_t\mathbf{M}), \quad \mathbf{B} = \gamma\sigma_n\mathbf{N}, \quad \mathbf{C} = \gamma^2\sigma_n g_n \mathbf{M}$$

Le coefficient γ est l'inverse de la longueur de la facette [2, 3], grandeur intervenant dans la définition de β ($\gamma = \|(\mathbf{y}_2 + \mathbf{u}_2) - (\mathbf{y}_3 + \mathbf{u}_3)\|^{-1}$). Pour des incréments suffisamment petits, il est possible de négliger la contribution complémentaire, ce qui revient à fixer le repère local sur l'incrément.

4. Solveur non linéaire et décomposition de domaine

Le problème non linéaire de contact avec frottement en grandes déformations est résolu par une méthode incrémentale de type Euler-Newton où les variables \mathbf{u} et λ sont traitées simultanément, $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, \lambda)$. Le système d'équations non linéaires discrétisé en temps et en espace se déduit de l'équation variationnelle [12] et peut se décomposer en une partie élastique différentiable \mathbf{G} et une partie contact frottant non différentiable \mathcal{F} ,

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathcal{F}(\mathbf{x}) = 0. \quad (19)$$

Ce système non linéaire non différentiable [19] est alors résolu par la méthode de Newton généralisée qui prend la forme itérative suivante [ALA 91] :

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{x}^i - (\mathbf{K}^i + \mathbf{A}_c^i)^{-1} (\mathbf{G}(\mathbf{x}^i) + \mathcal{F}(\mathbf{x}^i)), \quad \mathbf{K}^i = \partial\mathbf{G}(\mathbf{x}^i), \quad \mathbf{A}_c^i \in \partial\mathcal{F}(\mathbf{x}^i). \quad (20)$$

La matrice \mathbf{K}^i est la matrice tangente élastique et \mathbf{A}_c^i représente la matrice tangente de contact appartenant au Jacobien généralisé $\partial\mathcal{F}(\mathbf{x}^i)$. Cette méthode de Newton généralisée nécessite à chaque itération i la résolution du système linéaire non symétrique suivant :

$$(\mathbf{K}^i + \mathbf{A}_c^i) \Delta\mathbf{x}^i = -(\mathbf{G}(\mathbf{x}^i) + \mathcal{F}(\mathbf{x}^i)) \quad \text{où} \quad \Delta\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i+1} - \mathbf{x}^i. \quad (21)$$

La non symétrie de la matrice \mathbf{A}_c^i provient des termes de frottement rencontrés dans la matrice bloc \mathbf{M} définie en [17]. La convergence de cette méthode de Newton généralisée aux opérateurs non différentiables a été analysée dans [ALA 97]. Rien ne garantit théoriquement la convergence dans le cas où l'on couple, comme ici, différentes non

linéarités sévères, mais la pratique montre que l’algorithme est rarement mis en défaut par le contact. Il n’en est pas de même pour les grandes déformations ; des techniques de pas adaptatifs classiques peuvent alors être mises en oeuvre. Devant la taille du problème cellulaire, la résolution du système linéaire [21] est effectuée par une méthode de décomposition de domaine avec les préconditionneurs Neumann-Neumann multi-niveau généralisés au cas non symétrique assurant la scalabilité du solveur [ALA 00]. L’utilisation des techniques de décomposition de domaines nous permettent d’utiliser le potentiel des calculateurs parallèles : la parallélisation de l’algorithme, effectuée pour une machine à mémoire partagée, a été réalisée à l’aide du langage de programmation OpenMP. Les ressources informatiques utilisées (ORIGIN 3000) sont celles du Centre Informatique National de l’Enseignement Supérieur (CINES).

Le schéma global de résolution est décrit dans le tableau 1, où $\mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathcal{F}(\mathbf{x}) = 0$ représente le système non linéaire, et $\mathbf{S}_i \boldsymbol{\chi} = \mathbf{B}_i$ le système linéarisé non symétrique condensé aux interfaces de décomposition.

<div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px;">Itérations de Newton :</div> $i = 1, \dots$ <div style="margin-left: 40px;"> $\left\{ \begin{array}{l} \text{Linéarisation du problème global :} \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathcal{F}(\mathbf{x}) = 0 \rightarrow \bar{\mathbf{K}}_i \Delta \mathbf{x}^i = \mathbf{b}_i \end{array} \right. \quad \text{avec } \bar{\mathbf{K}}_i = \mathbf{K}^i + \mathbf{A}_c^i$ $\text{et } \mathbf{b}_i = \mathbf{G}(\mathbf{x}^i) + \mathcal{F}(\mathbf{x}^i)$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px; margin-left: 40px;">Méthode du Complément de Schur primal :</div> <div style="margin-left: 40px;"> $\left\{ \begin{array}{l} \text{Condensation du problème linéaire en un problème interface :} \\ \bar{\mathbf{K}}_i \Delta \mathbf{x}^i = \mathbf{b}_i \rightarrow \mathbf{S}_i \boldsymbol{\chi} = \mathbf{B}_i. \end{array} \right.$ </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-bottom: 5px; margin-left: 40px;">Résolution itérative par G.M.Res. de $\mathbf{S}_i \boldsymbol{\chi} = \mathbf{B}_i$</div> <p style="margin-left: 40px;">avec préconditionneurs non symétriques "Neumann-Neumann" multi-niveau.</p> <p>jusqu'à convergence.</p>
--

Tableau 1. *Algorithme "Newton - Schur"*

Une des spécificités de notre approche réside dans la sous-structuration qui revient à découper les sous-domaines dans le milieu élastique et non aux interfaces de contact [BAR 99, BAR 01]. Une telle stratégie est tout à fait naturelle dans le cadre d’une méthode de type Newton : à chaque itération, les éléments élastiques et contacts fournissent un système linéaire à résoudre qui est résolu par une méthode de décomposition de domaine pour laquelle les interfaces sont celles d’un problème élastostatique classique. La plupart des approches de traitement du contact avec des méthodes de

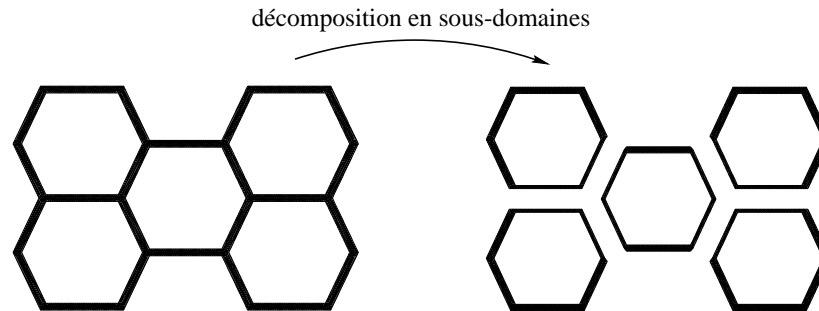


Figure 3. 5 cellules décomposées en 5 sous-domaines

décomposition de domaine utilisent les interfaces de contact comme interfaces de décomposition, ce qui conduit à des modifications non négligeables dans le schéma algorithmique et ne permet pas nécessairement d'équilibrer les charges par obligation d'intégrer les interfaces de contact dans les interfaces numériques [CHA 97, DUR 01]. Notre stratégie est particulièrement adaptée aux milieux cellulaires où la matière est connexe ; ainsi le plus petit sous-domaine que l'on peut construire est une cellule délimitée par des demi-parois. A titre d'illustration, on a considéré sur la figure 3 cinq cellules décomposées en cinq sous-domaines.

5. Simulation numérique d'un milieu cellulaire régulier

Comme précisé dans l'introduction, l'étude du comportement de milieux cellulaires dans une gamme de sollicitations pouvant déclencher la densification, exige de prendre en compte plus d'une cellule. Nous avons donc considéré successivement des échantillons à 1, 5 et 39 cellules avec des conditions aux limites "comparables".

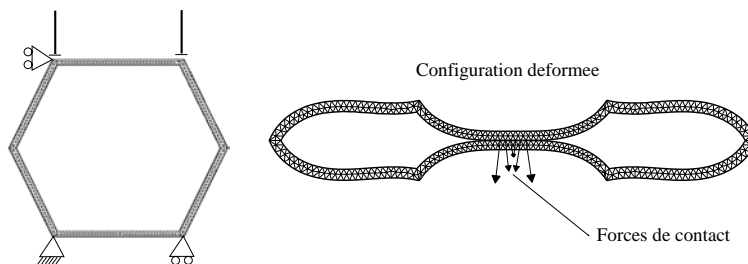


Figure 4. Compression d'une cellule jusqu'à l'autocontact.

Ne disposant pas pour l'instant de remaillage automatique d'éléments contacts au cours du processus, nous n'avons simulé que des essais de compression qui se limi-

teront au contact entre parois cellulaires opposées. Cependant, les très grands glissements paroi à paroi ont pu être pris en compte grâce aux éléments de contact multi-facettes.

5.1. Modélisation de la cellule : autocontact

La cellule étant posée sur un bâti, le déplacement vertical est imposé (négatif) aux 2 nœuds extrémités de la paroi supérieure (figure 4) modélisant ainsi l'action des cellules voisines.

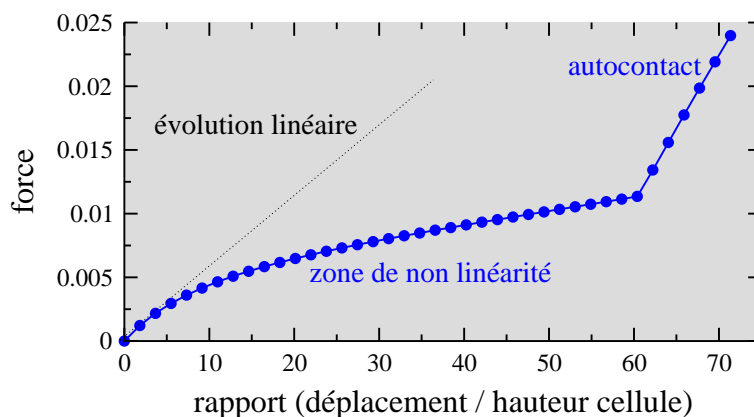


Figure 5. Courbe force de réaction - taux de compression

Le diagramme force-déplacement (figure 5) de ces nœuds fait apparaître trois régimes : un premier, avec forte pente et à peine esquissé, précède un deuxième régime à faible pente caractéristique d'une phase d'élasticité non linéaire ; le troisième débute avec le contact des parois inférieures et supérieures et se traduit par une augmentation de la pente caractéristique d'un durcissement.

5.2. Echantillon à 5 cellules

On considère ici la compression d'un échantillon constitué de 5 cellules confinées dans une boîte (figure 6). Cependant, le contact de la structure avec les faces latérales de la boîte n'est pas pris en compte par des éléments de contact ; seuls les quatre nœuds situés initialement au contact des parois latérales ont leur déplacement horizontal imposé nul. De même, le déplacement dans la direction verticale est imposé sur les 4 faces horizontales inférieures et supérieures.

On peut noter sur le diagramme force-déplacement des nœuds déplacés (figure 7), une zone de linéarité suivie d'un décrochement traduisant le flambement de la struc-

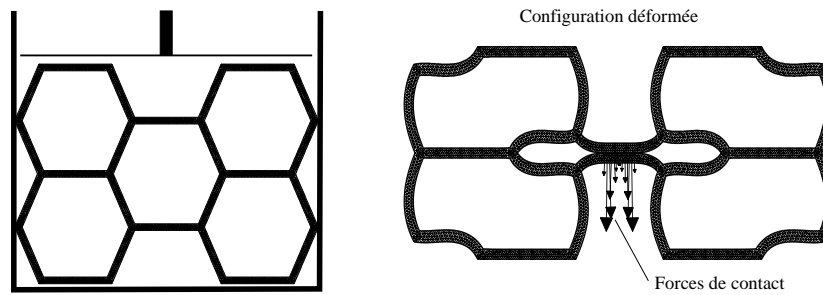


Figure 6. *Echantillon à 5 cellules comprimé avec flambement*

ture cellulaire et accompagné d'un régime à faible pente. Lui succède une augmentation modérée de la pente provenant du contact des parois de la cellule centrale. Le durcissement est ici atténué par rapport à la section précédente car l'autocontact ne concerne qu'une cellule sur cinq. Le saut traduisant l'instabilité de flambement pourrait être diminué par une adaptation du pas de chargement afin de mieux capturer la bifurcation ; ces développements sont en cours.

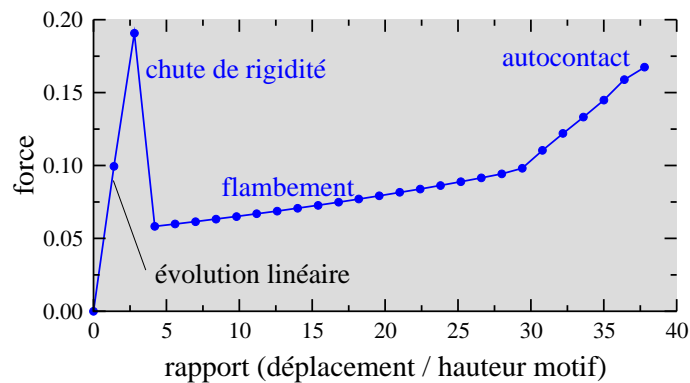


Figure 7. *Courbe force de réaction - taux de compression pour l'échantillon à 5 cellules*

5.3. Echantillon à 39 cellules

La simulation (figure 8) fait apparaître, avant l'autocontact, les mêmes motifs de flambement que dans les cas précédents à une et cinq cellules.

La figure 10 montre une évolution comparable à celle observée sur 5 cellules pour un même taux de compression maximal, mais avec quelques nuances cependant. La

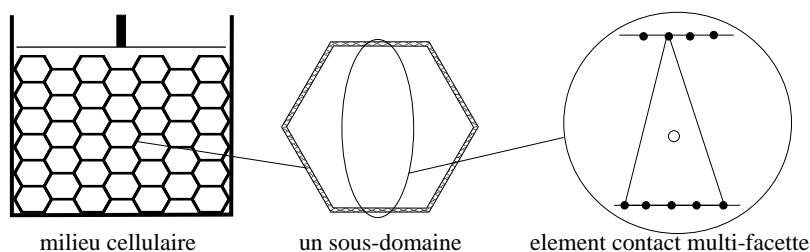


Figure 8. Compression d'une collection de 39 cellules avec conditions d'autocontact entre les parois cellulaires

chute de contrainte à l'initiation du flambement est nettement moins marquée et le sera certainement encore moins avec un échantillon comportant encore plus de cellules. La déformée du premier dessin de la figure 9 juxtaposée sur les 39 cellules plusieurs fois le motif, ou mode de flambement élémentaire, obtenu sur 5 cellules ; on note en particulier le flambement prononcé de 8 cellules sur 39.

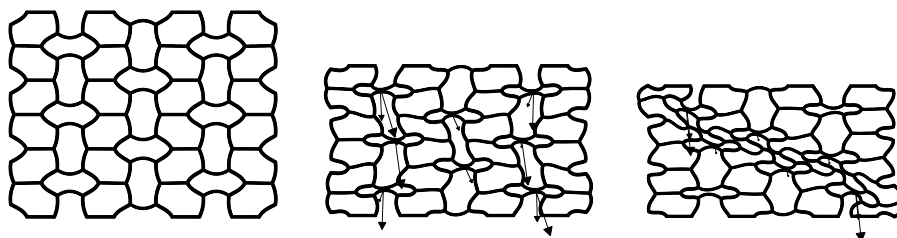


Figure 9. 39 cellules compressées en flambement avec autocontact ; naissance d'une bande de cisaillement

La phase de durcissement par autocontact, qui débute comme précédemment autour de 28 pourcent de taux de compression est suivie assez rapidement d'une phase à pente adoucie qui traduit l'apparition d'un nouveau mode de flambement que semble suggérer la deuxième déformée de la figure 9. On peut effectivement envisager sur un échantillon plus riche un mode de flambement ondulant verticalement d'autant plus stable que le frottement au contact est élevé.

En effet la largeur de la plage de durcissement dépend fortement du coefficient de frottement entre les parois (ici $\mu = 0.5$). Dès que le contact intervient, une dissymétrie apparaît dans le motif guidant la structure vers le nouveau mode mentionné plus haut. Cette dissymétrie est accentuée dès que l'on franchit le seuil de glissement.

La troisième déformée de la figure 9 est obtenue pour un taux de compression avoisinant les 40 pourcent ; on peut très distinctement remarquer l'apparition d'une

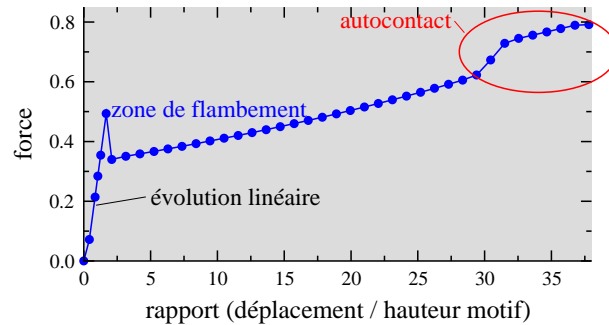


Figure 10. Courbe force de réaction - taux de compression

bande de cisaillement. Cette bande de cisaillement, provoquée par la présence de glissement entre certaines parois cellulaires, a notamment été observée dans l'ouvrage de L.J. Gibson and M.F. Ashby [GIB 88]. Le flambement et le contact se concentrent dans une bande alors que certains efforts de contact se relâchent dans le reste de la structure, comme le montre la visualisation des forces de contact sur la figure 9.

6. Conclusion

Dans cet article, nous nous sommes intéressés à la modélisation numérique d'essais de compression d'un matériau cellulaire. De par la taille du problème, notre stratégie de résolution s'est tournée vers le couplage entre une méthode de Newton et une méthode de décomposition de domaine de type Schur primal permettant d'utiliser le potentiel des calculateurs parallèles. De plus, la forte non-linéarité du problème, nous a contraint à adopter un processus incrémental piloté par des incréments de très petite taille. Ces stratégies nous ont permis de mettre en évidence, sur un milieu cellulaire composé de 39 cellules, une bande de cisaillement obtenue pour un taux de compression de 40 pourcent.

Dans la perspective d'aller plus loin dans le phénomène de densification, il faudra développer plusieurs aspects informatiques et numériques tels que le remaillage automatique d'élément contact au cours du processus, le contact entre plusieurs facettes, ainsi que l'implantation d'une méthode de Newton avec continuation permettant d'ajuster de manière automatique les pas d'incrémentation. Ces développements en cours de réalisation vont permettre d'une part, un gain de temps de résolution et, d'autre part, une certaine robustesse pour la résolution de problèmes fortement non linéaires.

Remerciements : Ces travaux rentrent dans le cadre du projet mgc2745 réalisé, en partie, au Centre Informatique National de l'Enseignement Supérieur (C.I.N.E.S.).

7. Bibliographie

- [ALA 91] ALART P., CURNIER A., « A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods », *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 92, 1991, p. 353-375.
- [ALA 97] ALART P., « Méthode de Newton généralisée en mécanique du contact », *J. Math. Pures Appl.*, vol. 76, 1997, p. 83-108.
- [ALA 00] ALART P., BARBOTEU M., LETALLEC P., VIDRASCU M., « Méthode de Schwarz additive avec solveur grossier pour problèmes non symétriques », *C. R. Acad. Sci.*, vol. 331, n° I, 2000, p. 399-404.
- [BAR 99] BARBOTEU M., « Contact, frottement et techniques de calcul parallèle », Thèse de doctorat, Université de Montpellier II, 1999.
- [BAR 01] BARBOTEU M., ALART P., VIDRASCU M., « A domain decomposition strategy for non classical frictional multicontact problems », *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 190, n° 37-38, 2001, p. 4785-4803.
- [CHA 97] CHAMPANEY L., COGNARD J. Y., DUREISSEIX D., LADEVÈZE P., « Large scale applications on parallel computers of a mixed domain decomposition method », *Comp. Mech.*, vol. 19, 1997, p. 253-263.
- [CIA 82] CIARLET P. G., GEYMONAT G., « Sur les lois de comportement en élasticité non-linéaire compressible », *C. R. Acad. Sci.*, vol. 295, n° I, 1982, p. 423-426.
- [DUR 01] DUREISSEIX D., FARHAT C., « A numerically scalable domain decomposition method for frictionless contact problems », *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, vol. 50, n° 12, 2001, p. 2643-2666.
- [GEY 93] GEYMONAT G., MÜLLER S., TRIANTAFYLIDIS N., « Homogenization of non linearly elastic materials; microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity », *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 122, 1993, p. 231-290.
- [GIB 88] GIBSON L. J., ASHBY M. F., *Cellular solids, structure and properties*, Pergamon press, 1988.
- [LET 94] LETALLEC P., « Domain decomposition methods in computational mechanics », *Computational Mechanics Advances*, North-Holland, 1994, In J. T. Oden, editor, p. 121-220.
- [Mül 87] MÜLLER S., « Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials », *Arch. Rational Mech. Anal.*, vol. 99, 1987, p. 189-212.
- [PIE 97] PIETRZAK G., CURNIER A., « Continuum mechanics modelling and augmented Lagrangian formulation of multibody, large deformation frictional contact problems », *CIMNE editor, Comput. Plast.*, 1997, p. 878-973.