
Modélisation par éléments finis du comportement mécanique de structures textiles : de la fibre au tissu

Damien Durville

Laboratoire LMSSMat - CNRS UMR 8579
École Centrale Paris
Grande Voie des Vignes
F-92295 Châtenay-Malabry Cedex
durville@mss.ecp.fr

RÉSUMÉ. Dans cet article, une approche de la modélisation des interactions de contact-frottement entre poutres en grandes transformations est proposée en vue de simuler le comportement de structures textiles en tenant compte des contacts à l'échelle mésoscopique entre les fibres ou fils les constituant. Cette approche s'appuie notamment sur la détermination d'un support géométrique pour le domaine d'interaction et une discrétisation indépendante de celui-ci. Les éléments de contact générés s'intègrent naturellement à une formulation éléments finis. Des exemples numériques qui mettent en évidence des phénomènes non-linéaires complexes dans des fils et des échantillons de tissus sont fournis pour montrer la pertinence de la démarche.

ABSTRACT. In this paper, an approach of the modelling of contact-friction interactions between beams in large transformations is proposed in order to model the behavior of textile structures by taking into account the contacts which occur at a mesoscopic scale between the elementary fibres or wires. This approach is based in particular on the determination of a geometrical support for the domain of interaction and an independant discretization of this one. The generated contact elements are integrated naturally into a finite element formulation. Numerical examples which highlight complex non-linear phenomena in wires and samples of woven fabrics are given to show the relevance of the method.

MOTS-CLÉS : contact-frottement, grandes transformations, éléments finis, propriétés mécaniques de structures textiles, fil, tissus.

KEYWORDS: contact-friction, large transformations, finite element, mechanical properties of textile structures, yarn, woven fabric.

1. Introduction

Parce qu'on a davantage recours à des structures textiles comme renforts dans la mise en œuvre de composites, les caractéristiques de leurs comportements mécaniques demandent à être mieux évaluées. La compréhension du comportement complexe de telles structures, caractérisé par diverses non-linéarités, passe par une analyse à l'échelle des fibres élémentaires les constituant, échelle qu'on qualifiera de mésoscopique. Le comportement macroscopique des structures textiles dépend en effet bien sûr du comportement des fibres qu'elles incorporent, mais aussi fortement des interactions qui se développent entre elles.

Nous nous situons ici à cette échelle mésoscopique afin de simuler le comportement d'échantillons de petites tailles de structures textiles, en prenant en compte le comportement de chaque fibre ou fil élémentaire, et les interactions de contact-frottement développées entre eux. Pour y aboutir, une modélisation reposant sur la méthode des éléments finis a été développée, prenant en compte chaque fibre ou fil grâce à un modèle de poutre adapté, mais aussi surtout les interactions de contact-frottement entre eux à l'aide d'éléments de contact particuliers. Cette modélisation s'appuie largement sur l'approche développée dans le cadre de la modélisation de la mécanique interne des câbles ([DUR 98]).

Le problème du comportement d'une structure textile est posé sous la forme de la recherche de l'équilibre d'une collection de structures filaires en grandes transformations et en interactions de contact-frottement. Un modèle de poutre à cinématique enrichie, intégrant notamment des déformations de section des poutres est mis en œuvre. L'originalité de la méthode réside principalement dans la construction d'une géométrie intermédiaire support du domaine d'interaction de contact, et une discrétisation indépendante de ce dernier par des éléments de contact couplant des paires de particules matérielles.

Cette modélisation nous permet de simuler le comportement d'un fil composé d'un assemblage de fibres et d'échantillons de tissus soumis à divers chargements. Les résultats relatifs à ces cas, en mettant en évidence des effets non-linéaires typiques de ce genre de structures, montrent la validité de la démarche.

2. Position générale du problème

Nous considérons une structure textile comme un assemblage de N poutres en grands déplacements et en interactions de contact-frottement. Nous supposons que chaque poutre est représentée dans une configuration matérielle par un ouvert $\Omega_R^{(i)}$ défini par :

$$\Omega_R^{(i)} = \left\{ \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbf{R}^3; (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{S}^{(i)}(\xi_3), 0 < \xi_3 < L^{(i)} \right\},$$

$L^{(i)}$ représentant la longueur de la poutre i , et $\mathbf{S}^{(i)}(\xi_3)$ la section du cylindre en l'abscisse ξ_3 .

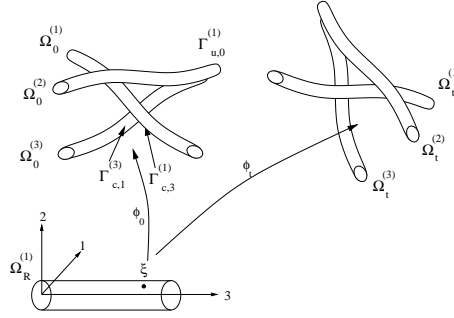


Figure 1. Position générale du problème

À chaque instant t , cette configuration matérielle est envoyée par une bijection ϕ_t sur une configuration spatiale $\Omega_t^{(i)}$, la configuration initiale se trouvant notée $\Omega_0^{(i)}$. On suppose que la surface de toute poutre $\Omega^{(i)}$, se décompose en :

$$\partial\Omega^{(i)} = \Gamma_u^{(i)} \cup \Gamma_f^{(i)} \cup \Gamma_{c,j}^{(i)},$$

$\Gamma_u^{(i)}$ étant la partie de sa frontière sur laquelle les déplacements sont bloqués, $\Gamma_f^{(i)}$ celle sur laquelle des efforts sont appliqués et $\Gamma_{c,j}^{(i)}$ la portion de surface éventuellement en contact avec la poutre j . Nous introduisons, au niveau de chaque paire de poutres, un domaine d'interaction qui rassemble les parties des surfaces des poutres susceptibles d'entrer en contact. Pour deux poutres i et j , nous notons $\Gamma_c^{(i,j)}$ ce domaine défini par :

$$\Gamma_c^{(i,j)} = \Gamma_{c,j}^{(i)} \cup \Gamma_{c,i}^{(j)}.$$

Nous supposons que les interactions de contact-frottement se produisent au sein de couples de particules matérielles de ce domaine mises en contact à un instant donné. Entre deux particules $\xi^{(i)}$ et $\xi^{(j)}$ en contact à un instant t , c'est-à-dire vérifiant $\phi_t(\xi^{(i)}) = \phi_t(\xi^{(j)})$, nous supposons que l'interaction de contact-frottement résulte en deux forces opposées :

$$\mathbf{R}_{j \rightarrow i}(\xi^{(i)}, t) = -\mathbf{R}_{i \rightarrow j}(\xi^{(j)}, t),$$

représentant respectivement l'action exercée par la particule $\xi^{(j)}$ sur la particule $\xi^{(i)}$ et la réaction réciproque correspondante.

Nous posons le problème d'équilibre de la structure textile sous la forme du principe des travaux virtuels suivant, exprimé dans le cadre des grandes transformations :

Trouver \mathbf{u} cinématiquement admissible tel que $\forall \mathbf{v}$ cinématiquement admissible :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1,N} \sum_{j=i+1,N} \int_{\Gamma_c^{(i,j)}} \mathbf{R}_{j \rightarrow i}(\xi^{(i)}, t) \cdot (\mathbf{v}(\xi^{(i)}) - \mathbf{v}(\xi^{(j)})) d\gamma \\ & + \sum_{i=1,N} \int_{\Omega_0^{(i)}} \text{Tr} \left(\mathbf{s}(\mathbf{u}) \frac{D\mathbf{E}}{D\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} \right) d\omega = \sum_{i=1,N} \int_{\Gamma_f^{(i)}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}(\xi) d\gamma. \end{aligned}$$

Dans cette formulation, suivant un formalisme lagrangien total, le travail des forces internes est exprimé sur la configuration initiale à l'aide du second tenseur de Piola-Kirchhoff $s(\mathbf{u})$ et du tenseur de déformation de Green-Lagrange $\mathbf{E}(\mathbf{u})$.

L'introduction d'un domaine propre aux interactions de contact-frottement dans le principe des travaux virtuels donne une idée de la démarche qui sera suivie. En redonnant une importance intrinsèque à ce domaine d'interaction, le contact-frottement n'est plus seulement vu comme un ensemble de conditions aux limites, mais comme un phénomène physique en tant que tel, associé à un domaine, pouvant être doté d'une loi de comportement, et sur lequel une discrétisation particulière pourra être mise en œuvre.

3. Modélisation des poutres élémentaires

La nature élancée des fibres ou fils constituant les structures textiles appelle assez naturellement à la mise en œuvre de modèles de type poutre. On trouve des expressions variées de ces modèles selon les diverses hypothèses cinématiques faites pour réduire la formulation tridimensionnelle du problème initial. Nous reprenons ici le modèle de poutre à cinématique enrichie développé dans le cadre de la modélisation des câbles. Ce modèle postule que le placement $\phi_t^P(\boldsymbol{\xi})$ d'une particule matérielle s'exprime comme le développement au premier ordre du placement ϕ_t autour de la fibre moyenne de la poutre :

$$\phi_t^P(\boldsymbol{\xi}) = \phi_t(0, 0, \xi_3) + \xi_\alpha \frac{\partial \phi_t}{\partial \xi_\alpha}(0, 0, \xi_3), (\alpha = 1, 2).$$

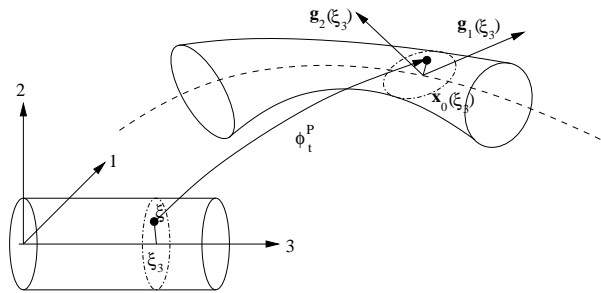


Figure 2. Cinématique du modèle de poutre

En changeant la notation de la restriction des champs tridimensionnels à la fibre moyenne nous réécrivons ce placement sous la forme :

$$\phi_t^P(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{x}_0(\xi_3, t) + \xi_\alpha \mathbf{g}_\alpha(\xi_3, t).$$

Le placement de toute particule de la poutre se trouve donc décrit à l'aide de trois vecteurs cinématiques, correspondant, pour \mathbf{x}_0 au placement du centre de section, et pour

les g_α à des vecteurs directeurs de section. Ce modèle cinématique, comportant neuf degrés de liberté, permet de considérer, par la variation des vecteurs de section, des déformations planes de chaque section. Un développement plus poussé du développement limité ferait intervenir d'autres vecteurs cinématiques, permettant de prendre en compte d'autres déformations de section. Ainsi, au second ordre, on récupérerait des déformations de gauchissement de la poutre.

Ce modèle cinématique présente l'avantage de s'exprimer naturellement en grandes transformations. En particulier, on s'affranchit de la difficulté de manipulation des grandes rotations nécessaires à la description en grands déplacements des modèles faisant l'hypothèse de sections rigides.

Pour constituer un modèle complet de poutre, au modèle cinématique doit être associé un modèle rhéologique adapté. Le tenseur de déformation correspondant au modèle cinématique adopté se développe par rapport aux coordonnées de section ξ_α sous la forme :

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}, t) = \mathbf{E}_0(\xi_3, t) + \xi_\alpha \mathbf{E}_\alpha(\xi_3, t) + \xi_\alpha \xi_\beta \mathbf{E}_{\alpha\beta}(\xi_3, t).$$

Dans cette décomposition, seul le tenseur \mathbf{E}_0 est complet. À l'ordre un, par exemple, la diagonale du tenseur est incomplète, les déformations planes des sections ne présentant qu'un terme constant. Cette incomplétude des tenseurs du développement génère un verrouillage qu'on peut qualifier de "cinématique" si l'on utilise une loi tridimensionnelle standard. Ce verrouillage est supprimé en ne conservant l'effet de Poisson que pour les termes d'ordre zéro, et en annulant le coefficient de Poisson pour les termes d'ordre supérieur.

Le modèle complet se formule sans obstacle pour des poutres initialement courbes. Un des intérêts majeurs que recèle l'utilisation d'un modèle de poutre pour la prise en compte des structures textiles qui nous intéresse, est que les déformations et contraintes liées à un tel modèle s'expriment naturellement dans un repère lié à l'axe de la poutre (fil ou fibre). Cela se prête particulièrement bien à la formulation de loi orthotropes, seules à même de reproduire de manière relativement satisfaisante les comportements des fibres et fils, et dont l'axe d'orthotropie correspond à l'axe de la structure.

4. Prise en compte du contact entre poutres en grandes transformations

4.1. Introduction

La modélisation des interactions de contact-frottement demande d'une part de définir quelles parties de la structure vont entrer en contact, et d'autre part d'exprimer les efforts d'interaction qui se développent au contact. La méthodologie suivie ici vise à répondre à plusieurs exigences. Dans un milieu tel que les structures textiles où les zones d'interaction peuvent être particulièrement denses, on souhaite d'abord que la mise en œuvre de la détection du contact soit réalisée automatiquement, et repose pour cela sur des méthodes générales pouvant s'appliquer à des cas divers. La considération d'interactions entre un nombre élevé de structures, pouvant présenter des

déplacements relatifs importants entre elles, requiert de cette détection du contact une grande robustesse, et une relative indépendance de la part des maillages des structures considérées, qui ne pourront en aucun cas être compatibles entre eux. La méthode que nous développons s'appuie sur la définition du domaine d'interaction que nous avons introduit plus haut.

4.2. Détermination prédictive des couples de particules en interaction

Dans le cadre de grands déplacements, une des premières difficultés de la modélisation du contact est de pouvoir prévoir quel point de la surface d'une structure va entrer en contact avec quel autre point. Ce problème recouvre la question de la direction de recherche utilisée pour apparier les points en contact. Cette dernière est souvent prise égale à la normale à l'une ou l'autre des surfaces en regard. Ce faisant, on risque cependant de ne considérer en quelque sorte que la moitié de la géométrie du problème de contact.

Notre approche vise à donner davantage de consistance au domaine d'interaction introduit plus haut, afin de pouvoir lui associer une géométrie, qui tendrait, au fur et à mesure que l'on s'approche de la solution, vers la surface de contact réelle. On attend de cette géométrie, conçue comme une géométrie intermédiaire entre les portions de surface en regard, qu'elle fournisse des directions de recherche dépendant simultanément de la géométrie des deux surfaces, et donc censées être plus pertinentes que des directions déterminées à partir de l'une seulement d'entre elles.

Deux étapes sont nécessaires pour y parvenir. Il s'agit d'abord de repérer parmi les surfaces des structures en interaction, des paires de portions de ces surfaces qui sont proches l'une de l'autre. Pour chacune des zones de proximité ainsi déterminée, on cherchera ensuite à construire une géométrie intermédiaire qui soit comme la moyenne des portions de surfaces déclarées proches. Cette approche, qui n'est pas sans difficulté si l'on considère des surfaces générales, se simplifie notablement dans le cas des poutres. Profitant de leur géométrie linéique, on transforme en effet le problème surfacique en un problème posé sur les lignes moyennes de ces poutres.

Dans un premier temps, on cherche donc à déterminer, parmi l'ensemble des lignes moyennes des poutres en interaction, des paires de portions de lignes moyennes dont la distance est inférieure à une certaine valeur δ . Nous notons $\gamma_{R,prox}^{(i,j)}$ une telle paire de portions de lignes proches définie par des intervalles d'abscisses curvilignes dans la configuration de référence de la manière suivante :

$$\gamma_{R,prox}^{(i,j)} = \gamma_R^{(i)} \cup \gamma_R^{(j)} = [s_d^{(i)}, s_f^{(i)}] \cup [s_d^{(j)}, s_f^{(j)}], \text{ tel que :}$$

$$\forall \xi_3^{(i)} \in \gamma_R^{(i)}, \exists \xi_3^{(j)} \in \gamma_R^{(j)} \text{ tel que } \|\phi_t(0, 0, \xi_3^{(j)}) - \phi_t(0, 0, \xi_3^{(i)})\| \leq \delta,$$

les abscisses curvilignes $s_d^{(i)}$ et $s_f^{(i)}$ délimitant la portion déclarée proche sur la ligne moyenne de la poutre i .

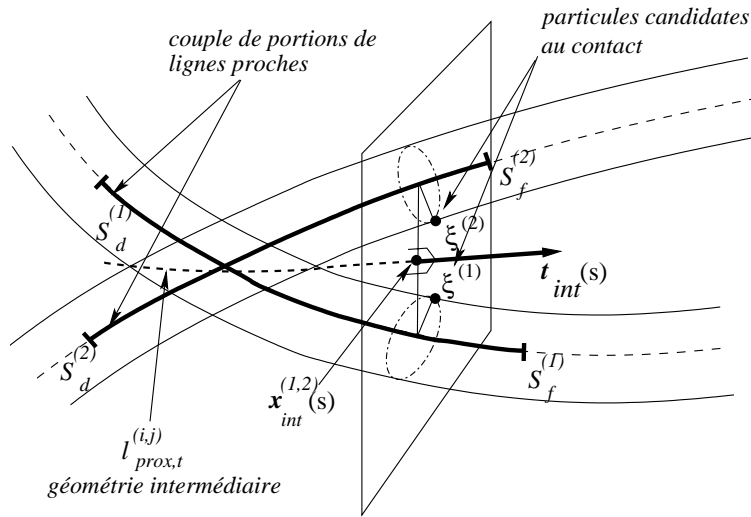


Figure 3. Détermination des particules prédites entrer en contact à partir de la géométrie intermédiaire du domaine d'interaction

Dans un deuxième temps, nous cherchons à construire pour chaque paire de lignes proches, une géométrie moyenne, ou intermédiaire, qui constituera le support géométrique du domaine d'interaction. Nous définissons une bijection entre les deux portions de lignes proches associant les points ayant une même abscisse curviligne relative sur les deux portions de lignes proches. La géométrie intermédiaire, notée $l_{prox,t}^{(i,j)}$ pour la paire de ligne proche $\gamma_{R,prox}^{(i,j)}$, est définie par l'ensemble des milieux des paires de points ayant même abscisse relative sur les deux portions de lignes proches :

$$l_{prox,t}^{(i,j)} = \left\{ \mathbf{x}_{int}^{(i,j)}(s); \forall 0 \leq s \leq 1 \right\},$$

$$\mathbf{x}_{int}^{(i,j)}(s) = \frac{1}{2} \left(\phi_t(s_d^{(i)} + s(s_f^{(i)} - s_d^{(i)})) + \phi_t(s_d^{(j)} + s(s_f^{(j)} - s_d^{(j)})) \right).$$

Cette géométrie intermédiaire représente une approximation, pour une configuration donnée, de la ligne de contact pouvant se produire entre deux poutres. Les particules candidates au contact seront cherchées dans une direction orthogonale à cette géométrie moyenne. Pour repérer ces particules, on cherche d'abord à déterminer les centres des sections susceptibles d'entrer en contact. Pour un point donné d'abscisse s sur la géométrie moyenne, on suppose que les centres des sections candidates au contact sont situés aux intersections du plan normal à la ligne intermédiaire avec les lignes moyennes des deux poutres en contact (cf. figure 3). Les sections candidates au contact en un point de la ligne intermédiaire étant repérées, il reste à localiser, sur le contour de chaque section, la position de la particule candidate au contact. Cette particule sera positionnée à l'intersection de la projection, dans le plan de la section, de la direction entre les deux centres de section, avec le contour de la section. À l'issue de ce proces-

sus, nous avons déterminé le couple de particules candidates au contact en un point d'abscisse relative s de la géométrie intermédiaire.

4.3. Description des comportements de contact-frottement

Considérant ici un couple de particules susceptibles d'être en contact, nous nous intéressons au comportement à lui affecter en vue de traduire les interactions de contact-frottement. Il convient pour cela de définir des mesures de déformations, auxquelles seront associées des contraintes par la donnée de lois de comportement appropriées. On distinguera le comportement normal, dont le rôle est d'empêcher toute pénétration entre les structures, du comportement tangentiel qui prend en compte les effets du frottement.

4.3.1. Comportement normal

La mesure de déformation normale, destinée à estimer la pénétration entre les deux structures au niveau du couple de particules, dépend de la donnée d'une direction normale, censée représenter la normale à la ligne de contact. Cette direction normale, notée $N(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}, t)$, sera prise égale à direction entre les centres des sections portant les particules candidates au contact :

$$N(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}, t) = \frac{\phi_t(0, 0, \xi_3^{(j)}) - \phi_t(0, 0, \xi_3^{(i)})}{\|\phi_t(0, 0, \xi_3^{(j)}) - \phi_t(0, 0, \xi_3^{(i)})\|}.$$

On note $gap(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}, t)$, la mesure de pénétration entre les deux particules définie par :

$$gap(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}, t) = (\phi_t(\xi^{(j)}) - \phi_t(\xi^{(i)})) \cdot N(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}, t).$$

Afin d'empêcher la pénétration entre les deux structures, on utilise une méthode de pénalisation revenant à affecter au couple de particules un comportement de type élastique en fonction de la pénétration. Cette pénalisation est régularisée, afin d'améliorer la convergence de l'algorithme de Newton, en introduisant pour les pénétrations inférieures à une valeur gap_{seuil} , une partie quadratique assurant la continuité de la tangente à l'origine. Cette loi de comportement normal permet d'exprimer les forces d'interaction normales aux particules de la manière suivante :

$$R_N(\xi^i, \xi^j, t) = R_N(\xi^i, \xi^j, t) N(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}, t),$$

$$R_N(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } gap(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}, t) \geq 0, \\ \frac{K_c}{2} \frac{(gap(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}, t))^2}{gap_{seuil}}, & \text{si } gap_{seuil} < gap(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}, t) < 0, \\ K_c \left(gap(\xi^{(i)}, \xi^{(j)}, t) - \frac{gap_{seuil}}{2} \right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

4.3.2. Comportement tangentiel

Contrairement au cas du contact normal où on se contente d'analyser une situation à un instant donné, le frottement demande de considérer l'évolution du contact au

cours d'un incrément de temps. Il n'est pas évident de définir quelle entité a glissé sur quelle autre au cours de cet incrément. Diverses formulations dans des bases convectées adaptées ont été proposées pour aboutir à une mesure objective du glissement ([LAU 93], [KLA 95]). Notre approche du phénomène de contact-frottement présente un caractère eulérien dans la mesure où, nous plaçant en un lieu de la géométrie intermédiaire, nous déterminons les particules qui y viennent au contact. Notre dispositif de détection du contact n'étant donc pas en tant que tel attaché à l'une ou l'autre des structures en regard, nous définissons simplement la vitesse de glissement en un lieu de la géométrie intermédiaire comme la vitesse tangentielle relative des deux particules prédites y entrer en contact. Dans le cadre quasi-statique dans lequel nous nous plaçons, notant $\Delta \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(j)}, t, \Delta t)$ l'incrément de déplacement au cours de l'incrément Δt , nous calculons le glissement au sein du couple de particules comme :

$$\left[\Delta \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(j)}, t) \right]_T = (\mathbf{I} - \mathbf{N} \otimes \mathbf{N}) \Delta \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(j)}, t, \Delta t),$$

\mathbf{N} représentant la direction normale de contact. Nous considérons comme loi associée à ce glissement une loi de frottement de Coulomb régularisée tolérant un petit déplacement relatif réversible avant l'apparition du glissement proprement dit. Selon cette loi, les interactions tangentielles développées au sein du couple de particules seront exprimées comme suit :

$$\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(j)}, t) = \begin{cases} \rho \left[\Delta \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(j)}, t) \right]_{T,rev} \\ \quad \text{si } \|\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(j)}, t)\| < \mu \|\mathbf{R}_N(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(j)}, t)\|, \\ \mu \|\mathbf{R}_N(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(j)}, t)\| \frac{\left[\Delta \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(j)}, t) \right]_T}{\|\left[\Delta \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(j)}, t) \right]_T\|} \text{ sinon.} \end{cases}$$

La partie réversible considérée dans le déplacement introduit dans la formulation un effet mémoire qui pose la question de savoir à quoi rattacher et où stocker l'information correspondante. Cette quantité est en effet liée à l'interface de contact dont la continuité dans le temps est difficile à établir dans la mesure où les couples de particules en contact ne sont pas les mêmes d'un instant à l'autre. Une manière de remédier à cela consiste à attacher l'information relative à cette partie réversible à la matière.

4.4. Discrétisation du domaine d'interaction

Nous avons présenté pour l'instant le domaine d'interaction de contact dans un cadre continu. Renforçant en quelque sorte l'autonomie accordée à ce domaine, une des particularités de notre approche est d'en proposer une discrétisation indépendante de la discrétisation éléments finis des structures. Plutôt que de considérer l'ensemble des couples de particules déterminés sur le domaine d'interaction, la discrétisation proposée consiste à ne considérer qu'un nombre fini de couples de particules déterminés en un ensemble de points discrets de la géométrie intermédiaire de chaque couple de lignes proches. Étant donnée une ligne intermédiaire continue $l_{prox,t}^{(i,j)}$, nous consi-

déterminons la discrétisation de cette ligne moyenne, notée $l_{h,t}^{(i,j)}$, comme l'ensemble des points définis par :

$$\mathbf{x}_k^{(i,j)}(s_k) = \frac{1}{2} \left(\phi_t(s_d^{(i)} + s_k(s_f^{(i)} - s_d^{(i)})) + \phi_t(s_d^{(j)} + s_k(s_f^{(j)} - s_d^{(j)})) \right),$$

$$s_k = \frac{k}{h}, 0 \leq k \leq h, k \in \mathbf{N}.$$

En tout point d'abscisse s_k de la ligne moyenne discrétisée $l_{h,t}^{(i,j)}$ sera déterminée un couple de particules noté $\left(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(j)} \right)_k$. Nous appelons élément de contact un tel couple de particules. Les particules matérielles des éléments de contact sont déterminées à la surface des éléments finis de poutre, leurs déplacements s'expriment donc, à l'aide des fonctions d'interpolation éléments finis, en fonctions des degrés de liberté aux nœuds du maillage. De ce fait, le comportement d'un élément de contact s'exprimera en fonction de ces mêmes degrés de liberté.

4.5. Algorithmique

Le problème global, résolu de manière incrémentale, présente des non-linéarités diverses. Une part de celles-ci sont imputables aux éléments de contact, de par leur construction et leur comportement. La géométrie intermédiaire du domaine d'interaction dépendant de la solution elle-même, les éléments de contact déterminés à partir de cette géométrie sont réactualisés sur un premier niveau d'itérations de point fixe. La direction normale de contact, intervenant dans la mesure de la pénétration, qui est déterminée en fonction de la position relative des particules dépend aussi de la solution. Un second niveau d'itérations de point fixe lui est consacré. Enfin, les autres non-linéarités incluses dans le problème sont traitées au sein d'un unique algorithme de type Newton imbriqué au sein des deux boucles précédentes.

5. Applications pratiques

5.1. Simulation du comportement d'un fil composé de fibres

En nous inspirant des données sur des fils textiles ([PID 93]) nous nous proposons de simuler le comportement d'un fil d'aramide. Ce cas illustre un exemple avec une grande densité de contacts. La simulation permet d'une part de calculer la configuration initiale, et d'autre part de mettre en évidence les comportements non-linéaires classiques de ce type de structure.

5.1.1. Présentation du modèle étudié

Le fil d'aramide étudié est composé de 3 mèches comprenant chacune 19 fibres élémentaires, soit 57 fibres au total. Les caractéristiques du modèle sont décrites dans

le tableau ci-dessous. On notera le nombre élevé d'éléments de contact considérés (≈ 5300) par rapport au nombre d'éléments finis.

Rayon des fibres	0.033 mm	Nb. éléments finis	1026
Pas d'hélice des fibres	5.12 mm	Nb. de nœuds	2109
Rayon d'enroulement des mèches	0.175 mm	Nb. de d.d.l.	18981
Pas d'hélice des mèches	5 mm	Nb. d'éléments de contact	≈ 5300
Module d'Young	21 GPa		
Coefficient de Poisson	0.3		

5.1.2. Calcul de la configuration initiale

Concernant le fil, la première problématique rencontrée est la détermination de la configuration initiale, a priori inconnue. La simulation permet une approche de cette configuration initiale. À partir d'une configuration fictive de départ, on applique une élongation qui entraîne un réarrangement dans le positionnement relatif des fibres, avec une densification de celles-ci au centre de l'assemblage, typique de ce genre de structures (Fig. 5). Ce réarrangement a pour conséquence qu'une fois cette étape de mise en place effectuée, les fibres ne présentent plus une courbure ou un angle d'hélice constants, ce qui génère des zones de fragilité accrue. Les informations purement géométriques tirées de ce type de calcul de configuration initiale se révèlent donc d'un intérêt majeur pour comprendre les mécanismes de ruine d'un fil.

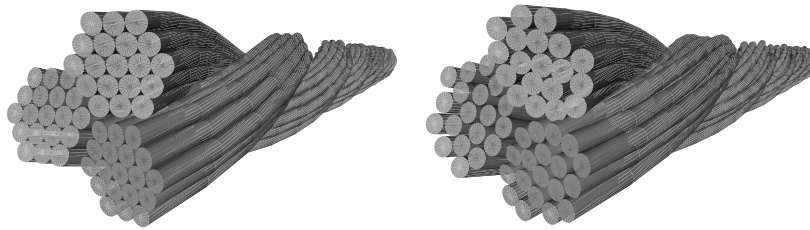


Figure 4. Calcul de la configuration initiale du fil. Maillage de la configuration de départ (à gauche) et de la configuration initiale calculée (à droite)

5.1.3. Comportement du fil en traction/compression et torsion

La configuration initiale calculée est prise comme configuration au repos pour les calculs ultérieurs effectués sur le fil. Les courbes force/allongement pour les calculs de traction/compression (figure 7) mettent en évidence la perte de module en compression liée aux flambements des fibres et des mèches observés sur la structure déformée (figure 6).

Le calcul de comportement en torsion est effectué après une mise en tension initiale destinée à mieux mettre en évidence les couplages en traction et torsion. La courbe

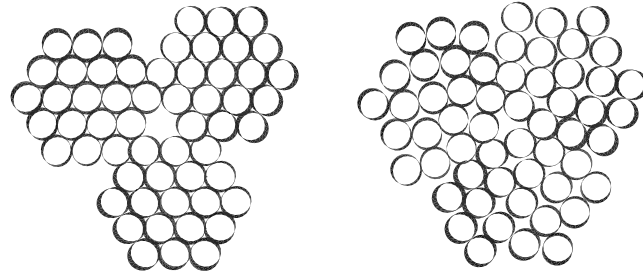


Figure 5. Calcul de la configuration initiale du fil. Coupes du maillage de la configuration de départ (à gauche) et de la configuration initiale calculée (à droite)

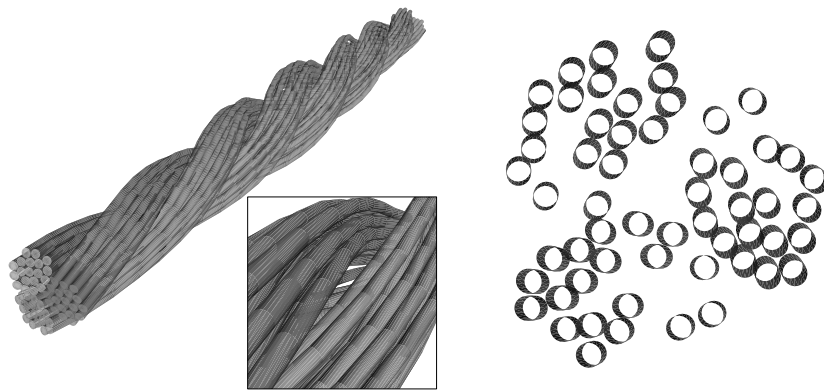


Figure 6. Déformée du fil en compression : apparition de flambements

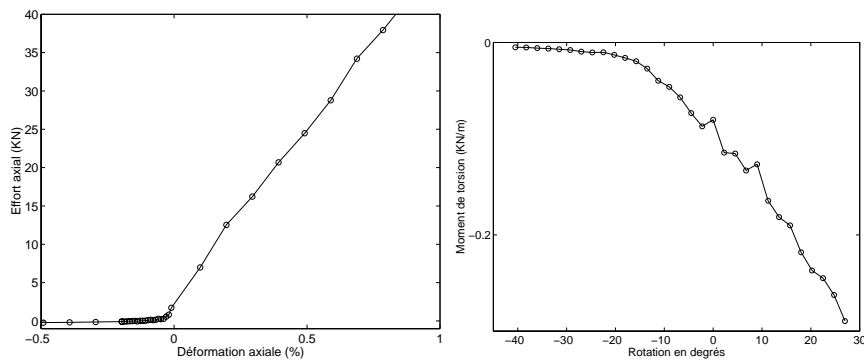


Figure 7. Courbe force/allongement et moment/rotation pour le fil

représentant le moment de torsion (figure 7) met en évidence un affaiblissement très notable du module de torsion à partir d'un certain seuil de torsion négative. Cette perte de rigidité semble liée à un début de décohésion du fil sous l'effet du détordage.

5.2. Simulation du comportement d'un échantillon de tissu

5.2.1. Calcul de la configuration initiale

La question de la connaissance a priori de la configuration initiale se pose à peu près dans les mêmes termes pour le tissu que pour le fil. Partant d'une configuration de départ initialement plane (figure 8), et après une initialisation de l'algorithme de Newton par une estimation de la solution qui respecte simplement l'ordre de chevauchement (dessus/dessous) des fils au niveau des croisements, le modèle calcule la configuration initiale équilibrée. En fonction des seules conditions initiales de chevauchement affectées aux croisements on obtient de cette manière aussi bien une toile qu'un sergé (figure 9). Là encore, le calcul de cette configuration initiale peut fournir des résultats intéressants d'un point de vue géométrique, par exemple par la mesure des porosités entre les fils qui influent sur les conditions d'imprégnation par des résines au cours l'élaboration des composites.

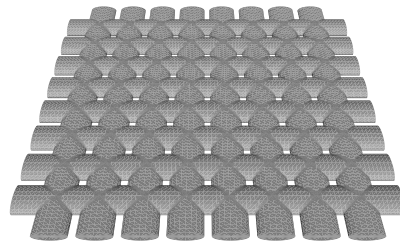


Figure 8. Configuration de départ commune pour les échantillons de tissus

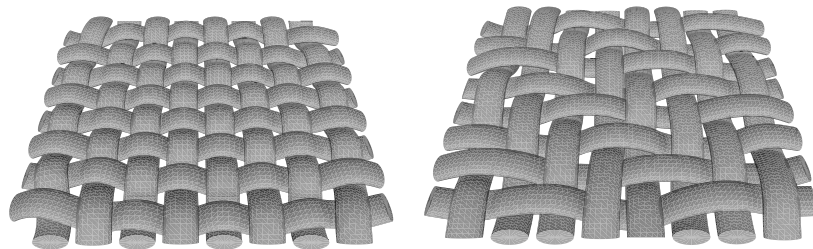


Figure 9. Configurations initiales calculées pour une toile (à gauche) et un sergé 2x2 (à droite)

5.2.2. Simulations de chargements biaxiaux et de cisaillement

Des calculs de chargements biaxiaux sont effectués, à partir des configurations initiales calculées pour les deux échantillons. Les courbes forces allongement obtenues (figure 10) montrent une allure en cohérence avec d'autres résultats (cf. [BOI 01]), en particulier dans le "plateau" au démarrage des courbes, et dans l'accroissement des efforts à mesure que le rapport entre les déformations appliquées dans le sens de la trame et de la chaîne s'approche de 1.

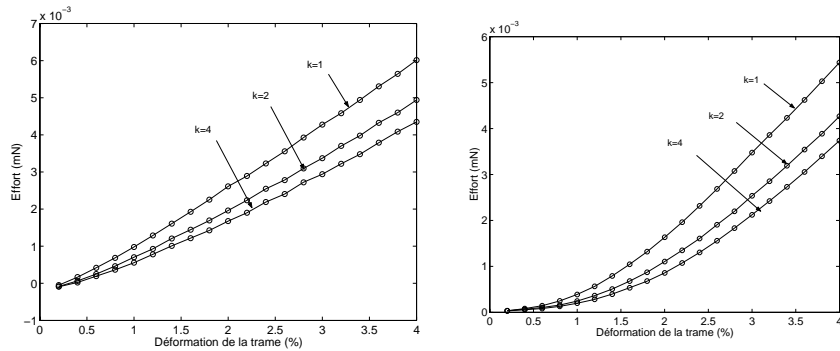


Figure 10. Courbes forces/allongement pour les fils de trame pour des chargements biaxiaux. k représente le rapport entre les allongements dans le sens de la trame et de la chaîne. À gauche, échantillon de toile, à droite, échantillon de sergé 2x2

La simulation de l'application d'un cisaillement (jusqu'à 35 %) à ces échantillons montre de forts effets non-linéaires (figure 11). La visualisation des maillages déformés (figure 12) met en évidence les fortes déformations subies par les fils au niveau des croisements et montre la pertinence de la méthodologie adoptée pour la modélisation du contact en grandes transformations.

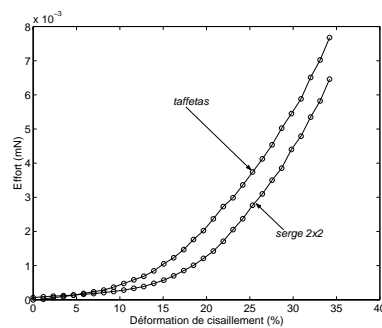


Figure 11. Courbes d'efforts de cisaillements appliqués aux échantillons

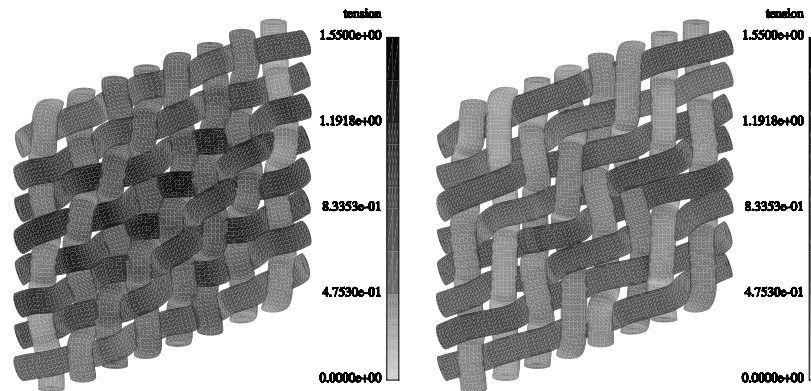


Figure 12. Isovaleurs de tension pour des échantillons soumis à un cisaillement

6. Conclusion

La méthode d'approche des interactions de contact-frottement entre structures en grandes transformations présentée ici, qui s'appuie notamment sur la construction d'un support géométrique pour le domaine d'interaction et une discrétisation indépendante de ce dernier, s'adapte bien à une modélisation du comportement de structures textiles prenant en compte les interactions entre fils ou fibres à l'échelle mésoscopique. Des efforts restent à faire en vue d'identifier, à l'aide de la simulation, des lois de comportement globales pour un fil unitaire, qui puissent être intégrées dans les modèles de tissus.

7. Bibliographie

- [BOI 01] BOISSE P., BUET K., GASSER A., LAUNAY J., « Meso/macro-mechanical behaviour of textile reinforcements for thin composites », *Composites Science and Technology*, vol. 61, 2001, p. 395-401.
- [DUR 98] DURVILLE D., « Modélisation du comportement mécanique des câbles métalliques », *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 7, n° 1-2-3, 1998, p. 9-22.
- [KLA 95] KLARBRING A., « Large displacement frictional contact : a continuum framework for finite element discretization », *Eur. J. Mech., A/Solids*, vol. 14, n° 2, 1995, p. 237-253.
- [LAU 93] LAURSEN T., « The convected description in large deformation frictional contact problems », *Int. J. Solids Structures*, vol. 31, n° 5, 1993, p. 669-681.
- [PID 93] PIDAPARTI R. M. V., « Stiffness characteristics of twisted cords for cord-rubber composites », *Composites Structures*, vol. 24, 1993, p. 291-298.