

---

# Analyse limite des coques cylindriques à plusieurs tronçons par les méthodes cinématique et statique

**Lahbib Bousshine\*** — **Mustapha Bideq\*** — **Mohamed Kouam\*\***  
**Guy Guerlement\*\*\***

\* *Laboratoire de Mécanique des Structures et des Matériaux (LMSM),  
Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique  
BP 8118, Casablanca, Maroc  
lmsm@ensem-uh2.ac.ma*

\*\* *Faculté des Sciences et Techniques de Mohammedia,  
Université Hassan II Mohammedia, BP 145, Mohammedia, Maroc*

\*\*\* *Laboratoire de Mécanique des Matériaux et des Structures (LMMS),  
Faculté Polytechnique de Mons, 53 rue du Joncquois,  
7000 Mons, Belgique*

---

*RÉSUMÉ. Dans cet article, nous calculons la charge limite des coques cylindriques minces à plusieurs tronçons par les méthodes cinématique et statique. Dans la première méthode, la coque est discrétisée en éléments finis cylindriques axisymétriques cinématiquement admissibles. La méthode cinématique fournit une borne supérieure de la charge limite. Dans la deuxième méthode, la structure est discrétisée en éléments finis cylindriques d'équilibre. La solution obtenue est une borne inférieure de la charge limite. Les deux approches aboutissent à la résolution d'un problème de programmation mathématique.*

*ABSTRACT. In This paper, we calculate the limit load of thin cylindrical shells with several sections by kinematical and statical methods. In the first method, the shell is discretized into series of cylindrical finite elements kinematically admissible. Kinematical study lead to an upper bound of limit load. In the second method, the structure is discretized into cylindrical equilibrium finite elements. The solution given by this method is a lower bound of limit load. The two approaches lead to the resolution of a mathematical programming problem.*

*MOTS-CLÉS : coques cylindriques, éléments finis, analyse limite, méthode cinématique, méthode statique, borne supérieure, borne inférieure, programmation mathématique.*

*KEYWORD: cylindrical shells, finite elements, limit analysis, Kinematical method, statical method, upper bound, lower bound, mathematical programming.*

---

## 1. Introduction

Les structures formées de coques cylindriques sont très répandues dans l'industrie. Elles sont utilisées comme réservoirs pour contenir des produits chimiques liquides ou gazeux, ou comme silos pour le stockage des céréales, des ciments et d'autres matériaux granulaires. Avec l'avènement des ordinateurs, le calcul plastique de ces structures s'est largement développé. En particulier, l'analyse limite qui constitue l'une des branches les plus développées de la plasticité est de plus en plus utilisée pour évaluer le coefficient de sécurité vis-à-vis de la ruine partielle ou totale. Elle a pour objectif de calculer la charge limite que peut supporter une structure lorsque toutes les charges externes varient proportionnellement à un facteur appelé « multiplicateur de charge ». On distingue deux approches différentes mais complémentaires de l'analyse limite :

– l'approche cinématique, fondée sur le théorème de la borne supérieure, dans laquelle on recherche le plus petit multiplicateur de charge qui conduit à la formation d'un mécanisme de ruine ;

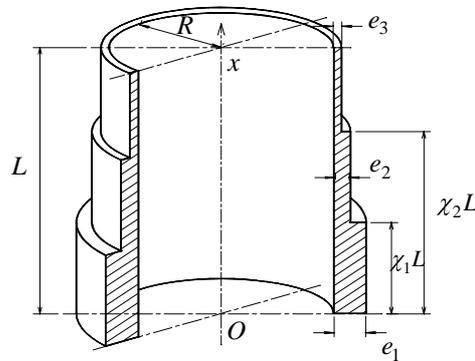
– l'approche statique basée sur le théorème de la borne inférieure. Dans cette approche, on recherche le plus grand multiplicateur de charge sous lequel les équations d'équilibre restent satisfaites sans violation du critère de plasticité. La borne inférieure de la charge limite est la plus intéressante car elle est placée du côté de la sécurité de la structure.

L'utilisation des méthodes numériques dans l'analyse limite des structures a permis la résolution d'un grand nombre de problèmes. L'utilisation de la programmation mathématique constitue une étape importante dans le développement de ce domaine. Cette idée a vu le jour dans les années 1950. Les premiers travaux concernaient l'utilisation de la programmation linéaire à l'analyse limite des treillis (Charles, 51). L'utilisation des critères de plasticité linéaires par morceau a permis de traiter l'analyse limite des plaques en flexion et des coques de révolution par la programmation mathématique linéaire (Lance 64). L'utilisation de la méthode des éléments finis a permis d'obtenir des résultats plus intéressants (Hodge, 68), (Maier, 68).

L'objectif du présent article est de déterminer l'état de ruine des coques cylindriques à plusieurs tronçons soumises à un chargement axisymétrique en l'absence de l'effort normal axial  $N_x$  (fig.1). Pour cela, il faut apporter des réponses aux questions suivantes : quand la coque va-t-elle s'effondrer ? Comment va-t-elle s'effondrer ? Quelle sera la valeur de la charge limite au moment de la ruine ? Les deux approches proposées tentent d'apporter une réponse à ces trois questions fondamentales.

## 2. Géométrie de la coque

La figure 1 représente un réservoir constitué de plusieurs tronçons. La variation de l'épaisseur de la structure d'un tronçon à l'autre permet une réduction du poids total de la coque et un gain non négligeable de matière.  $L$  est la longueur totale de la coque et  $R$  son rayon moyen. Chaque tronçon  $j$  a une épaisseur  $e_j$  et une longueur  $\chi_j L$  ( $0 < \chi_1 < \chi_2 < \dots \leq 1$ ). On travaille dans le système de coordonnées cylindriques  $(O, r, \theta, x)$ . L'origine des  $x$  est située dans la partie inférieure de la coque.



**Figure 1.** Coque cylindrique à trois tronçons

## 3. Chargement axisymétrique et proportionnel

La structure considérée est destinée généralement à contenir un gaz sous pression ou un liquide plus ou moins dense tels que les hydrocarbures ou les produits de l'industrie chimique. Nous ne tenons pas compte, dans cet article, des chargements cycliques. Par contre, nous considérons que le chargement est une pression interne variable le long de la coque (figure 2). Il est également considéré quasi statique ; tout effet dynamique est exclu dans cette étude :

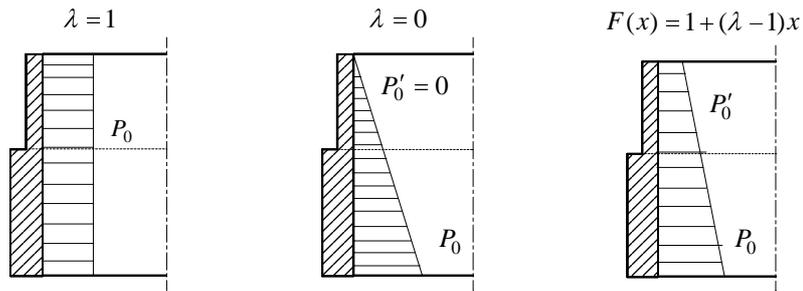
$$P(x) = P_0 \cdot F(x) \quad [1]$$

$P_0$  est un facteur de proportionnalité appelé paramètre de charge, il est l'inconnue principale du problème.  $F(x)$  est une fonction qui dépend du type de chargement :

$$F(x) = 1 + (\lambda - 1)x \quad [2]$$

$$\lambda = \frac{P'_0}{P_0}, \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

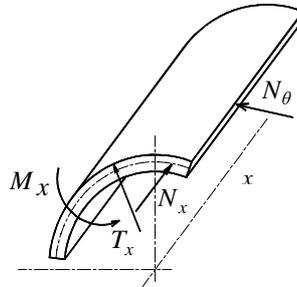
$P_0$  et  $P'_0$  représentent respectivement la pression au niveau de la base et au sommet de la coque.



**Figure 2.** Pressions uniforme, hydrostatique et trapézoïdale

#### 4. Equilibre de la coque

On considère que la loi de conservation des normales, retenue dans ce travail, est valable tant en domaine plastique qu'élastique (Massonet, 47). Dans le cas d'une coque cylindrique soumise à une pression interne, les éléments de réduction qui ne sont pas nuls du fait de la symétrie sont représentés dans la figure 3 (Save, 72).



**Figure 3.** Contraintes généralisées

Les contraintes généralisées sont donc :

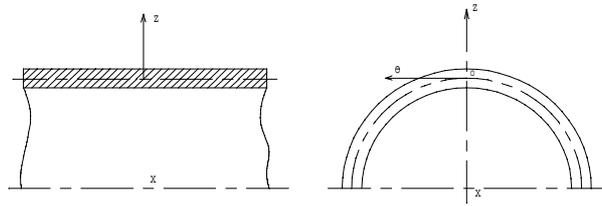
– le moment de flexion :

$$M_x = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_x \cdot z \cdot dz \quad [3]$$

– L'effort normal circonférentiel :

$$N_{\theta} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma_{\theta} . dz \quad [4]$$

$\sigma_x$  et  $\sigma_{\theta}$  sont respectivement les contraintes normale et circonférentielle,  $e$  est l'épaisseur de la coque.



**Figure 4.** Section d'une coque cylindrique

En tenant compte du fait que l'effort normal axial  $N_x$  est nul, l'équilibre se traduit par les deux équations suivantes :

$$\frac{dT_x}{dX} + \frac{N_{\theta}}{R} = P_0 . F(x) \quad [5]$$

$$\frac{dM_x}{dX} = T_x \quad [6]$$

En éliminant  $T_x$  entre les deux équations précédentes, l'équilibre de la coque est exprimé par une seule équation qui ne fait intervenir que le moment de flexion  $M_x$  et l'effort normal circonférentiel  $N_{\theta}$  :

$$\frac{d^2 M_x}{dX^2} + \frac{N_{\theta}}{R} = P_0 . F(X) \quad [7]$$

Dans la suite, on utilise les variables non dimensionnelles suivantes :

$$n_{\theta} = \frac{N_{\theta}}{N_p}, \quad m_x = \frac{M_x}{M_p}, \quad r = \frac{R}{L}, \quad x = \frac{X}{L}, \quad r_i = \frac{e_1}{e_i} \quad [8]$$

où  $M_p$  et  $N_p$  sont respectivement le moment de flexion et l'effort normal plastiques par unité de longueur.

$$M_p = \frac{\sigma_0 e^2}{4} \quad [9]$$

et 
$$N_p = \sigma_0 e \quad [10]$$

$\sigma_0$  est la limite élastique du matériau utilisé.

En fonction des variables adimensionnelles précédentes, l'équation d'équilibre (7) s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 m_x}{dx^2} + \alpha^2 (n_\theta - P.F(x)) = 0 \quad [11]$$

où  $\alpha$  est un paramètre adimensionnel qui fait intervenir toutes les caractéristiques géométriques de la coque, à savoir sa longueur, son rayon moyen et son épaisseur. Il est appelé paramètre géométrique et il est donné par la relation suivante :

$$\alpha = \frac{2L}{\sqrt{Re}} \quad [12]$$

$P$  est la pression adimensionnelle : 
$$P = \frac{P_0 R}{\sigma_0 e} \quad [13]$$

Elle représente l'inconnue du problème adimensionnel.

### 5. Puissance de dissipation et puissance des efforts extérieurs

La puissance de dissipation dans un élément de la surface moyenne, de longueurs longitudinale et circonférentielle unitaires (puissance spécifique de dissipation), dans le cas de la coque non sollicitée axialement, est :

$$D_{\text{int}} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} (\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \sigma_\theta \dot{\epsilon}_\theta) dz \quad [14]$$

où  $\sigma_x$  et  $\sigma_\theta$  sont les contraintes longitudinale et circonférentielle,  $\dot{\epsilon}_x$  et  $\dot{\epsilon}_\theta$  sont respectivement les vitesses de déformation qui leur sont associées.

$$\dot{\varepsilon}_x = -z \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} \quad [15]$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = -\frac{\dot{w}}{R} \quad [16]$$

$\dot{w}$  est la vitesse de déplacement transversal (selon l'axe  $(o, \vec{z})$ ).

La puissance de dissipation devient donc :

$$D_{\text{int}} = M_x \dot{K}_x + N_\theta \dot{\varepsilon}_\theta \quad [17]$$

où  $\dot{K}_x$  est la vitesse de courbure :

$$\dot{K}_x = -\frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} \quad [18]$$

La dissipation interne spécifique s'écrit en utilisant les grandeurs adimensionnelles définies ci-dessus sous la forme suivante :

$$D_{\text{int}} = \frac{N_p L^2}{R} d_{\text{int}} \quad [19]$$

où  $d_{\text{int}}$  est la dissipation interne adimensionnelle :

$$d_{\text{int}} = \int_{x_1}^{x_2} (m_x \dot{k}_x + n_\theta \dot{\varepsilon}_\theta) dx \quad [20]$$

avec 
$$\dot{k}_x = \frac{1}{\alpha^2} \frac{d^2 \dot{w}}{dx^2} \quad [21]$$

et 
$$\dot{\varepsilon}_\theta = \dot{w}$$

Dans le cas où la coque est soumise uniquement à une pression interne, la puissance des efforts extérieurs par unité de longueur s'écrit, en fonction des variables adimensionnelles, sous la forme suivante :

$$D_{\text{ext}} = \frac{N_p L^2}{R} d_{\text{ext}} \quad [22]$$

$d_{\text{ext}}$  est la puissance des efforts extérieurs adimensionnelle.

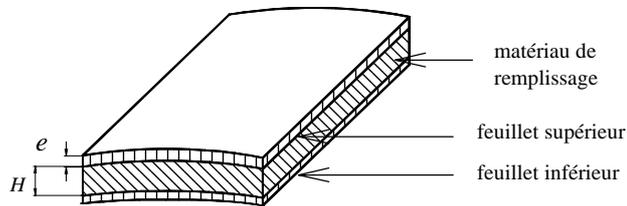
$$d_{ext} = \int_{x_1}^{x_2} P.F(x).\dot{w}(x).dx \quad [23]$$

## 6. Conditions de plasticité

Les critères de plasticité que nous avons adoptés pour l'analyse plastique de la structure sont le critère de la coque sandwich de von Mises (Save, 72), le critère de Tresca connu dans le cas des coques cylindriques sous le nom de l'hexagone de Hodge (Hogde, 63) et le critère rectangulaire dit également critère des interactions limitées.

### 6.1. Critère de von Mises

Nous considérons que la coque est constituée d'un matériau « Sandwich idéal » (fig.5), constitué de deux feuillets métalliques d'épaisseur  $e$  et de limite élastique  $\sigma_0$  séparés par un matériau de remplissage d'épaisseur  $H$  qui ne résiste ni à la flexion ni à l'extension mais empêche tout écrasement de la section. Les contraintes sont considérées comme uniformément réparties sur les feuillets du fait de leur faible épaisseur. Le noyau ne reçoit que l'effort tranchant  $T_x$  auquel il est supposé infiniment résistant.



**Figure 5.** Section de la coque Sandwich

Dans un tronçon  $j$ , dont l'épaisseur des deux feuillets est  $e_j$ , les contraintes généralisées sont :

$$N_{\theta}^j = \frac{e_j}{2} (\sigma_{\theta e} + \sigma_{\theta i}) \quad [24]$$

$$M_x^j = \frac{e_j H}{4} (\sigma_{xe} - \sigma_{xi}) \quad [25]$$

$\sigma_{\theta e}$  et  $\sigma_{xe}$  sont respectivement les contraintes circonférentielle et longitudinale dans le feuillet extérieur,  $\sigma_{\theta i}$  et  $\sigma_{xi}$  sont respectivement celles dans le feuillet intérieur.

En rapportant  $N_{\theta}^j$  et  $M_X^j$  respectivement à l'effort normal et au moment de flexion plastiques du tronçon le plus épais notés, respectivement  $N_1^p$  et  $M_1^p$ , on obtient :

$$n_{\theta j} = \frac{N_{\theta j}}{N_1^p} = \frac{1}{r_j} \frac{(\sigma_{\theta e} + \sigma_{\theta i})}{2\sigma_0} \quad [26]$$

$$m_{xj} = \frac{M_{xj}}{M_1^p} = \frac{1}{r_j} \frac{(\sigma_{xi} - \sigma_{xe})}{2\sigma_0} \quad [27]$$

$n_{\theta j}$  est l'effort normal circonférentiel et  $m_{xj}$  le moment de flexion adimensionnels relatifs au tronçon  $j$ .

La condition de plasticité dans le cas d'une coque sandwich à un seul tronçon est donnée par l'inégalité suivante (Save, 72) :

$$\frac{3}{4} m_x^2 + n_{\theta}^2 \leq 1 \quad [28]$$

Dans le cas d'une coque à plusieurs tronçons, il est plus commode d'écrire cette condition dans le plan des contraintes généralisées  $m_{x1}$  et  $n_{\theta 1}$  relatives au tronçon le plus épais. Pour cette raison on introduit le moment plastique réduit :

$$m_j^p = \frac{M_j^p}{M_1^p} \quad [29]$$

et l'effort normal plastique réduit :

$$n_j^p = \frac{N_j^p}{N_1^p} \quad [30]$$

$M_j^p$  et  $N_j^p$  sont respectivement le moment plastique et l'effort normal plastique relatifs au tronçon  $j$  :

$$M_j^p = \frac{\sigma_0 e_j^2}{4} \quad [31]$$

et 
$$N_j^p = \sigma_0 e_j \quad [32]$$

On en déduit l'expression de  $m_j^p$  et  $n_j^p$  :

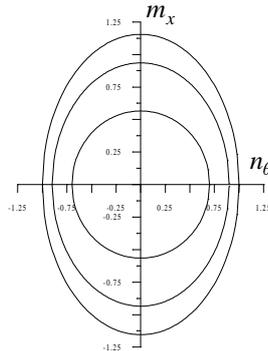
$$m_j^p = \frac{1}{r_j^2} \quad [33]$$

$$n_j^p = \frac{1}{r_j} \quad [34]$$

Nous avons écrit la condition de plasticité de von Mises dans le cas d'une coque à plusieurs tronçons sous la forme suivante :

$$\frac{3r_j^2}{4} m_x^2 + n_\theta^2 \leq \frac{1}{r_j^2} \quad [35]$$

Elle est représentée, dans le plan des contraintes généralisées, par des ellipses inscrites les unes dans les autres comme le montre la figure ci-dessous.



**Figure 6.** Condition de plasticité de von Mises pour la coque à plusieurs tronçons

### 6.2. Condition de plasticité de Tresca

La condition de plasticité de Tresca exprimée en état plan de contraintes en fonction des contraintes principales  $\sigma_x$  et  $\sigma_\theta$  est :

$$\text{Max} [|\sigma_x|, |\sigma_\theta|, |\sigma_x - \sigma_\theta|] - \sigma_0 \leq 0 \quad [36]$$

où  $\sigma_0$  est la limite élastique du matériau utilisé.

En tenant compte de l'hypothèse des coques minces, l'application du théorème de l'adaptation des réactions permet d'écrire cette condition en fonction des

contraintes généralisées  $m_x$  et  $n_\theta$  (Save, 61). Elle est représentée par un hexagone appelé « hexagone de Hodge » (Hodge, 63).

Dans le cas d'une coque à plusieurs tronçons, cette condition est donnée par les six inéquations adimensionnelles suivantes :

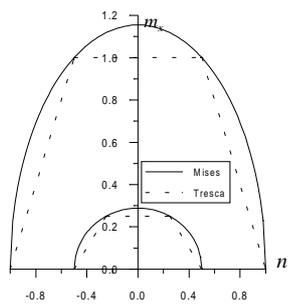
$$\text{pour } \frac{1}{2r_j} \leq n_\theta \leq \frac{1}{r_j} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}m_x + \frac{1}{r_j}n_\theta \leq \frac{1}{r_j^2}, \\ \frac{1}{2}m_x + \frac{1}{r_j}n_\theta \leq \frac{1}{r_j^2}. \end{array} \right. \quad [37]$$

$$\text{pour } -\frac{1}{r_j} \leq n_\theta \leq -\frac{1}{2r_j} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}m_x - \frac{1}{r_j}n_\theta \leq \frac{1}{r_j^2}, \\ -\frac{1}{2}m_x - \frac{1}{r_j}n_\theta \leq \frac{1}{r_j^2}. \end{array} \right. \quad [38]$$

$$\text{pour } -\frac{1}{2r_j} \leq n_\theta \leq \frac{1}{2r_j} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_x \leq \frac{1}{r_j^2}, \\ -m_x \leq \frac{1}{r_j^2}. \end{array} \right. \quad [39]$$

L'effort tranchant  $t_x$  ne figure pas dans la condition de plasticité par ce qu'il représente une réaction ou une contrainte généralisée passive (Washzu, 74).

Dans le cas d'une coque à plusieurs tronçons la condition de plasticité de Hodge est représentée par plusieurs hexagones inscrits les uns dans les autres.



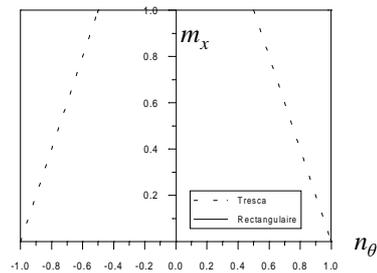
**Figure 7.** Comparaison des conditions de Hodge et de von Mises pour la coque à plusieurs tronçons

### 6.3. Critère de plasticité rectangulaire

Les conditions de plasticité linéaires présentent beaucoup d'intérêt du point de vue calcul. Leur utilisation permet, quelquefois, d'aboutir à des solutions de type analytique ou semi-analytique (Chwala, 69), (Bideq, 96). Mais lorsque la surface de charge présente plusieurs facettes, la recherche d'une solution analytique devient difficile à cause du nombre important de régimes plastiques envisageables. Pour cette raison, on utilise souvent une condition de plasticité linéaire simplifiée telle que la condition rectangulaire. Cette condition est formée par le rectangle circonscrit à l'hexagone de Hodge. Elle a l'avantage de ne pas comporter trop de facettes. La conséquence d'une telle simplification se traduit par une surestimation de la valeur de la charge limite. Dans le cas d'une coque à plusieurs tronçons, la condition de plasticité rectangulaire est définie par les inéquations suivantes :

$$-\frac{1}{r_j} \leq n_\theta^j \leq \frac{1}{r_j} \quad [40]$$

$$-\frac{1}{r_j^2} \leq m_x^j \leq \frac{1}{r_j^2} \quad [41]$$



**Figure 8.** Comparaison de la condition rectangulaire et l'hexagone de Hodge

## 7. Méthode cinématique de l'analyse limite

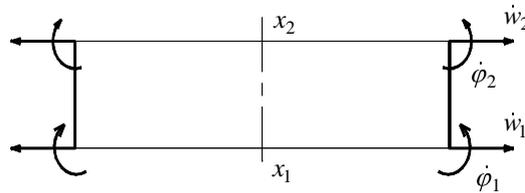
La méthode cinématique de l'analyse limite est basée sur le théorème de la borne inférieure : « Les valeurs  $P_+$  du paramètre de charge correspondant aux mécanismes de ruine licites (cinématiquement et plastiquement admissibles) admettent une borne inférieure qui est la charge limite  $P$  ». Pour générer ce champ de vitesses de déplacement cinématiquement admissible on a utilisé des éléments finis cylindriques compatibles.

### 7.1. Élément fini cylindrique compatible

Dans le cas d'une coque mince cylindrique soumise à un chargement axisymétrique, tout point de la coque se déplace dans le plan méridien qui le contient. En l'absence d'effort normal axial, la vitesse de déplacement de chaque point est complètement définie par sa composante radiale  $\dot{w}$  et sa vitesse de rotation  $\dot{\phi}$  dans le plan  $(o, x, r)$ .

Ces deux variables constituent les connecteurs de l'élément fini cylindrique compatible (fig. 9). Le vecteur vitesse de déplacement est donc :

$$\{q\}^T = [\dot{w}_1 \quad \dot{\phi}_1 \quad \dot{w}_2 \quad \dot{\phi}_2] \quad [42]$$



**Figure 9.** Élément fini cylindrique compatible à quatre degrés de liberté

L'approximation du champ des vitesses de déplacement généralisées est faite par un polynôme du troisième degré :

$$\dot{w}(x) = d_1 + d_2x + d_3x^2 + d_4x^3 \quad [43]$$

$$\dot{\phi}(x) = \frac{d\dot{w}}{dx} = d_2 + 2d_3x + 3d_4x^2 \quad [44]$$

$d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  et  $d_4$  sont des paramètres arbitraires.

On peut écrire le vecteur vitesse de déplacement  $\{\dot{U}\} = \begin{Bmatrix} \dot{w} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix}$  sous la forme suivante :

$$\{\dot{U}\} = [B]\{d\} \quad [45]$$

avec

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \quad [46]$$

$\{d\}$  est un système de paramètres arbitraires :

$$\{d\}^T = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4] \quad [47]$$

Le vecteur vitesses de déplacement généralisées devient alors :

$$\{q\} = [C]\{d\} \quad [48]$$

où  $[C]$  est une matrice de connexion donnée par :

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} \quad [49]$$

Quant aux vitesses de déformation  $\{\dot{\varepsilon}\}$ , elles s'écrivent en fonction de  $\{d\}$  sous la forme suivante :

$$\{\dot{\varepsilon}\} = [M]\{d\}, \quad [50]$$

avec

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\alpha^2} & \frac{6x}{\alpha^2} \end{bmatrix} \quad [51]$$

## 7.2. La loi de normalité

Dans le cas de la coque non sollicitée axialement, et pour la condition de plasticité de von Mises, la fonction de charge est la suivante :

$$f(m_x, n_\theta) = \frac{3r_j^2}{4} m_x^2 + n_\theta^2 - \frac{1}{r_j^2} = 0 \quad [52]$$

La loi de normalité permet d'exprimer les vitesses de déformation généralisées en fonction de  $f$ . La vitesse de déformation circonférentielle  $\dot{\varepsilon}_\theta$  est :

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \dot{\lambda} \frac{\partial f(m_x, n_\theta)}{\partial n_\theta} \quad [53]$$

d'où

$$n_\theta = \frac{\dot{\varepsilon}_\theta}{2\dot{\lambda}} \quad [54]$$

La vitesse de courbure  $\dot{k}_x$  est :

$$\dot{k}_x = \dot{\lambda} \frac{\partial f(m_x, n_\theta)}{\partial m_x} \quad [55]$$

d'où 
$$m_x = \frac{2\dot{k}_x}{3\dot{\lambda}r_j^2} \quad [56]$$

$\dot{\lambda}$  est l'intensité des vitesses de déformation.

En remplaçant dans 52  $n_\theta$  et  $m_x$  par leurs valeurs données par 54 et 56 on obtient :

$$\dot{\lambda} = r_j \sqrt{\frac{\dot{k}_x^2}{3r_j^2} + \frac{\dot{\epsilon}_\theta^2}{4}} \quad [57]$$

L'énergie de dissipation peut donc être exprimée seulement en fonction des vitesses de déformation généralisées :

$$d_{\text{int}}^i = \frac{2}{r_j} \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\dot{k}_x^2}{3} + \frac{\dot{\epsilon}_\theta^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} dx \quad [58]$$

ou sous une forme matricielle :

$$d_{\text{int}}^i = \frac{2}{r_j} \int_{x_1}^{x_2} \left[ \{\epsilon\}^T [N] \{\epsilon\} \right]^{\frac{1}{2}} dx \quad [59]$$

$\{\epsilon\}$  est le vecteur des déformations généralisées :

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_\theta \\ \dot{k}_x \end{Bmatrix} \quad [60]$$

En fonction du vecteur des vitesses de déplacement elle devient :

$$d_{\text{int}}^i = \frac{2}{r_j} \int_{x_1}^{x_2} (\{q\}^T [K] \{q\})^{\frac{1}{2}} dx \quad [61]$$

avec 
$$[K] = [C]^{-T} [M]^T [N] [M] [C]^{-1} \quad [62]$$

et 
$$[C]^{-T} = \left( [C]^{-1} \right)^T \quad [63]$$

$[C]^{-1}$  est donnée par :

$$[C]^{-1} = \frac{1}{\delta^3} \begin{bmatrix} -x_2^2(3x_1 - x_2) & -x_1x_2^2(x_2 - x_1) & x_1^2(3x_2 - x_1) & -x_2x_1^2(x_2 - x_1) \\ 6x_1x_2 & x_2(x_2 + 2x_1)(x_2 - x_1) & -6x_1x_2 & x_1(x_1 + 2x_2)(x_2 - x_1) \\ -3(x_1 + x_2) & -(x_1 + 2x_2)(x_2 - x_1) & 3(x_1 + x_2) & -(2x_1 + x_2)(x_2 - x_1) \\ 2 & (x_2 - x_1) & -2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad [64]$$

avec  $\delta = x_2 - x_1$

Pour l'intégration numérique de l'expression 61 nous avons utilisé la méthode de Gauss qui s'avère bien adaptée à ce cas (Noujier, 87). Dans les exemples numériques de cet article, le nombre de points de Gauss est égal à 8.

L'équation (23) relative à la puissance des efforts extérieurs est reprise dans ce paragraphe dans le but de l'exprimer en fonction du vecteur des vitesses de déplacement  $\{q\}$ .

$$d_{ext}^i = \int_{x_1}^{x_2} P.F(x).\dot{w}(x).dx \quad [65]$$

Exprimons tout d'abord,  $\dot{w}(x)$  en fonction du vecteur des paramètres arbitraires  $\{d\}$ .

$$\dot{w}(x) = [H]\{d\} \quad [66]$$

avec :

$$[H] = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \quad [67]$$

La puissance des efforts extérieurs prend donc la forme suivante :

$$d_{ext}^i = \int_{x_1}^{x_2} P.F(x).[H][C]^{-1}\{q\}.dx \quad [68]$$

$P$ ,  $[C]^{-1}$  et  $\{q\}$  sont indépendants de l'intégrand  $x$ , on peut donc les faire sortir de l'intégrale :

$$d_{ext}^j = P.[G][C]^{-1}\{q\} \quad [69]$$

avec

$$[G] = \int_{x_1}^{x_2} F(x).[H].dx \quad [70]$$

ou en introduisant le vecteur des forces généralisées  $[g]$  :

$$d_{ext}^j = [g]\{q\} \quad [71]$$

$$\text{où :} \quad [g] = P[G][C]^{-1} \quad [72]$$

L'assemblage des éléments finis se fait par sommation des puissances, interne d'une part, et externe d'autre part, sur tous les éléments.

$$d_{int} = \sum_{i=1}^N d_{int}^i \quad [73]$$

$$\text{et} \quad d_{ext} = \sum_{i=1}^N d_{ext}^i \quad [74]$$

### 7.3. Application du théorème cinématique

Par application du théorème de la borne inférieure, la formulation cinématique aboutit à un problème de programmation mathématique de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } P = \frac{d_{int}}{d_{ext}}, \\ \text{Sous la condition } d_{ext} > 0. \end{array} \right. \quad [75]$$

Ce problème relève de la programmation mathématique non linéaire du fait que la fonction objectif est non linéaire.

Sachant que les vitesses de déformation plastiques sont définies à un facteur près, on adoptera la formulation modifiée suivante (Nguyen, 85) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } d_{int}, \\ \text{Sous la condition } d_{ext} \geq 1. \end{array} \right. \quad [76]$$

Le facteur limite de charge est donné par :

$$P = \frac{d_{int}}{d_{ext}}. \quad [77]$$

Le problème de programmation mathématique précédent a été résolu par l'algorithme MINOS (Murtagh, 87). La méthode d'optimisation utilisée est celle du gradient réduit (Wolfe, 63). Cette méthode est reconnue la plus efficace dans le cas d'un problème où la fonction objectif est non linéaire tandis que les contraintes sont linéaires.

## 8. Méthode statique de l'analyse limite

La méthode statique de l'analyse limite est basée sur le théorème de la borne supérieure : « les valeurs  $P_-$  du paramètre de charge correspondant aux états de contraintes licites (statiquement et plastiquement admissibles) admettent une borne supérieure qui est la charge limite  $P$  ».

### 8.1. Discrétisation du champ de contraintes

L'approche statique passe par une discrétisation en éléments finis d'équilibre. Le champ de contraintes  $\{\sigma\}$  doit être statiquement et plastiquement admissible. Dans ce genre d'éléments, le champ de contrainte est supposé décomposable en deux parties (Morelle, 83).

$$\{\sigma\} = [M_1]\{a_1\} + [M_2]\{a_2\} \quad [78]$$

où  $[M_1]\{a_1\}$  est un champ qui satisfait l'équation d'équilibre homogène 7 et  $[M_2]\{a_2\}$  est un champ qui doit équilibrer les forces de surface imposées.

L'équation 78 s'écrit aussi sous la forme condensée suivante :

$$\{\sigma\} = [M]\{a\} \quad [79]$$

où  $[M] = [M_1 \quad M_2]$  [80]

et  $\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$  [81]

Dans le cas d'une coque cylindrique axisymétrique non sollicitée axialement, les seules composantes du vecteur contraintes généralisées qui contribuent à l'équilibre de la coque sont l'effort normal circonférentiel  $n_\theta$  et le moment de flexion  $m_x$ , on a donc :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} n_\theta \\ m_x \end{Bmatrix} \quad [82]$$

La construction de l'élément d'équilibre se fait directement à partir des équations d'équilibre. Pour construire la matrice  $[M]$  définie par la relation 80 et puisque  $a_1$  est arbitraire, on admet l'hypothèse suivante :

$$n_\theta = a_1 \quad [83]$$

La substitution de  $a_1$  à  $n_\theta$  dans l'équation d'équilibre 7 permet d'intégrer cette dernière par rapport à  $x$ .  $a_2$  et  $a_3$  sont deux autres constantes fournies par cette intégration. On obtient ainsi, dans le cas d'un chargement trapézoïdal :

$$\{\sigma\} = [M]\{a\} \quad [84]$$

et

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ P \end{Bmatrix} \quad [85]$$

La charge limite  $P$  est prise comme quatrième composante du vecteur  $\{a\}$ .

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha^2 x^2}{2} & x & 1 & \alpha^2 \left( \frac{x^2}{2} + (\lambda - 1) \frac{x^3}{6} \right) \end{bmatrix}. \quad [86]$$

## 8.2. Discrétisation des forces généralisées

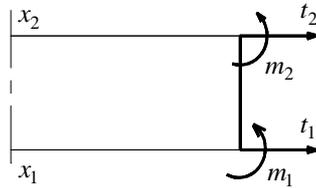
Un système de forces généralisées est fixé sur les nœuds de l'élément (fig. 10) de telle manière que la continuité des tractions de surface soit satisfaite (Nguyen, 85). Dans le cas d'une coque cylindrique non sollicitée axialement cette continuité est assurée par le moment de flexion  $m_x$  et l'effort tranchant  $t_x$ . On prendra comme vecteur des forces généralisées le vecteur  $\{g\}$  tel que :

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} t_1 \\ m_1 \\ t_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} \quad [87]$$

Une matrice de connexion  $[C]$  permet d'exprimer  $\{g\}$  en fonction de  $\{a\}$  :

$$\{g\} = [C]\{a\} \quad [88]$$

$$[C] = \begin{bmatrix} -\alpha^2 x_1 & 1 & 0 & \alpha^2 \left[ x_1 - \frac{(\lambda - 1)}{2} x_1^2 \right] \\ -\alpha^2 \frac{x_1^2}{2} & x_1 & 1 & \alpha^2 \left[ \frac{x_1^2}{2} - \frac{(\lambda - 1)}{6} x_1^3 \right] \\ -\alpha^2 x_2 & 1 & 0 & \alpha^2 \left[ x_2 - \frac{(\lambda - 1)}{2} x_2^2 \right] \\ -\alpha^2 \frac{x_2^2}{2} & x_2 & 1 & \alpha^2 \left[ \frac{x_2^2}{2} - \frac{(\lambda - 1)}{6} x_2^3 \right] \end{bmatrix} \quad [89]$$



**Figure 10.** *Élément fini cylindrique d'équilibre*

### 8.3. Discrétisation de la condition de plasticité

La formulation statique impose que le champ de contraintes soit licite, c'est-à-dire statiquement admissible (vérifiant les équations d'équilibre et les conditions aux limites) et plastiquement admissible (satisfaisant la condition de plasticité). Pour la formulation éléments finis il est donc nécessaire de discrétiser la condition de plasticité utilisée.

#### 8.3.1. Condition de Von Mises

L'expression 35 peut aussi s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\{\sigma\}^T \cdot [D] \cdot \{\sigma\} \leq \frac{1}{r_j^2} \quad [90]$$

avec 
$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3r_j^2/4 \end{bmatrix} \quad [91]$$

En remplaçant  $\{\sigma\}$  par sa valeur donnée par 84 on obtient l'expression de la condition de plasticité en fonction de  $\{a\}$ .

$$\{a\}^T \cdot [K] \cdot \{a\} \leq \frac{1}{r_j^2} \quad [92]$$

où 
$$[K] = [M]^T [D] [M] \quad [93]$$

#### 8.3.2. Condition de plasticité de Tresca

On convient d'écrire les relations 37 à 39 sous la forme condensée suivante :

$$[N] \cdot \{\sigma\} \leq \{b\} \quad [94]$$

avec 
$$[N]^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_j} & -\frac{1}{r_j} & -\frac{1}{r_j} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad [95]$$

ou en fonction du vecteur  $\{a\}$  :

$$[K]\{a\} \leq \{b\} \quad [96]$$

avec 
$$[K] = [N][M] \quad [97]$$

et 
$$\{b\}^T = \frac{1}{r_j^2} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \quad [98]$$

### 8.3.3. Condition de plasticité rectangulaire

Les inéquations 40 et 41 peuvent être écrites sous la forme de la relation 96 avec :

$$[N]^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{r_j} & 0 & -\frac{1}{r_j} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad [99]$$

et 
$$\{b\} = \frac{1}{r_j^2} [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \quad [100]$$

## 8.4. Application du théorème statique

L'application du théorème de la borne supérieure conduit à la résolution de deux types de problèmes de programmation mathématique selon le type de la condition de plasticité utilisée. En effet, dans le cas de la condition de plasticité non linéaire de von Mises, l'application de ce théorème conduit à un problème qui relève de la programmation non linéaire formulé de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } P, \\ \text{Sous les conditions suivantes :} \\ \{g\} - [C]\{a\} = 0, \\ \{a\}^T [K]\{a\} \leq \frac{1}{r_j^2}. \end{array} \right. \quad [101]$$

Les deux contraintes du problème précédent traduisent respectivement l'équilibre et la condition de plasticité, ainsi on est sûr que le champ de contraintes est tout à fait licite.  $[K]$  est une matrice globale obtenue par assemblage des matrices élémentaires données par 93.

Le problème 101 est un problème de programmation mathématique non linéaire convexe que nous avons résolu en utilisant la méthode du gradient réduit (Wolfe, 63) implantée dans le code Minos (Murtagh, 87).

Dans le cas où la condition de plasticité est linéaire, le problème à résoudre est un problème de programmation mathématique linéaire qui se présente sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } P, \\ \text{Sous les conditions suivantes:} \\ \{g\} - [C]\{a\} = 0, \\ [K]\{a\} \leq \{b\}. \end{array} \right. \quad [102]$$

$[K]$  est obtenue par assemblage de 97.

L'avantage de l'utilisation de la programmation mathématique linéaire réside dans sa rapidité et son efficacité. Elle présente aussi l'avantage d'être facile à programmer et à utiliser. De nombreux travaux ont contribué à l'amélioration de cette méthode, notamment pour résoudre les problèmes de dégénérescence des solutions (Bland, 77). Dans ce travail la méthode d'optimisation linéaire utilisée est celle du simplexe proposée par Dantzig (Dantzig, 63).

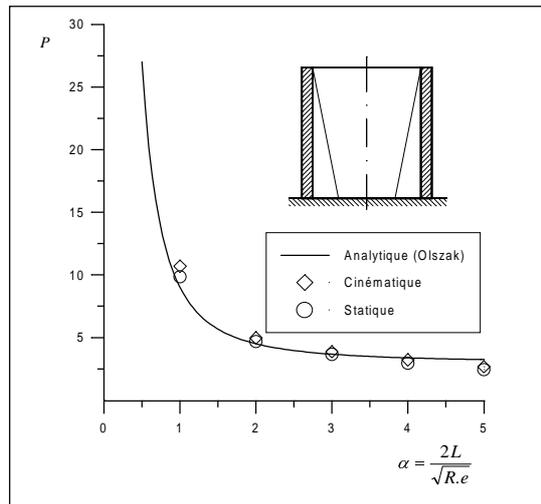
## 9. Résultats numériques

### 9.1. Etude de la coque à un seul tronçon

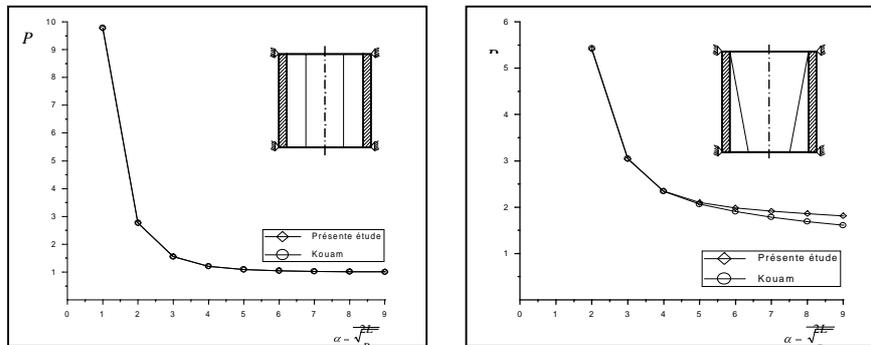
Une solution analytique est proposée par Olszak et ses collaborateurs dans le cas d'une coque cylindrique orthotrope soumise à une pression hydrostatique (Olszak, 59). La coque est encadrée au niveau de la base et libre au sommet. Cette solution est valable seulement dans le cas des coques courtes ( $\alpha^2 \leq 17.1$ ). Le mécanisme de ruine est constitué d'un cercle plastique qui se produit au niveau de l'encastrement. Les résultats obtenus par les méthodes cinématique et statique sont en parfaite concordance avec la solution analytique comme on peut le constater sur la figure 11.

Une autre solution, numérique cette fois-ci, est proposée par Kouam (Kouam, 83). Elle concerne le cas d'une coque simplement appuyée des deux bords soumise à un chargement uniforme et à une pression hydrostatique. L'auteur a utilisé une méthode

de minimisation basée sur l'algorithme de Newton. La coque est discrétisée en éléments finis cylindriques compatibles.



**Figure 11.** Comparaison de la solution analytique et des solutions numériques obtenues par les méthodes cinématique et statique dans le cas de la coque encastrée-libre à un seul tronçon soumise à un chargement hydrostatique

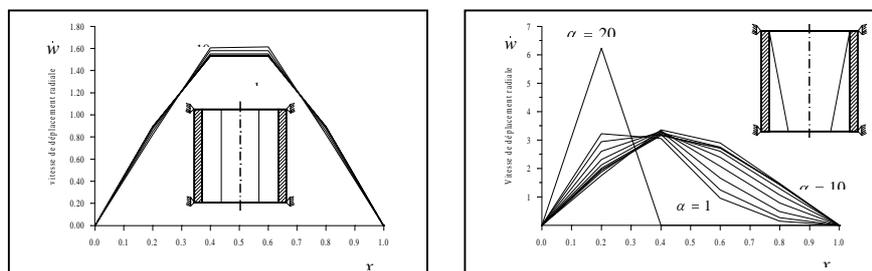


**Figure 12.** Comparaison de la borne supérieure de la charge limite avec celle obtenue par Kouam (Kouam, 83)

La figure 12 représente la variation du facteur limite de charge  $P$  en fonction de la géométrie de la coque. La valeur de la charge limite subit une chute rapide pour

$1 \leq \alpha \leq 4$  (coques courtes). Au-delà d'une certaine valeur ( $\alpha > 4$ ) la charge limite est peu sensible à la géométrie, c'est le cas des coques élancées.

La figure 13 représente le champ des vitesses de déplacement radiales à l'amorce de l'écoulement plastique en fonction de l'abscisse  $x$  pour différentes valeurs du paramètre géométrique  $\alpha$ . On constate que dans le cas d'une coque cylindrique bi-appuyée à un seul tronçon soumise à une pression uniforme, la ruine totale se produit par la formation d'un cercle plastique au milieu de la coque. Ceci est dû à la symétrie du chargement et des conditions aux limites de part et d'autre de la coque.

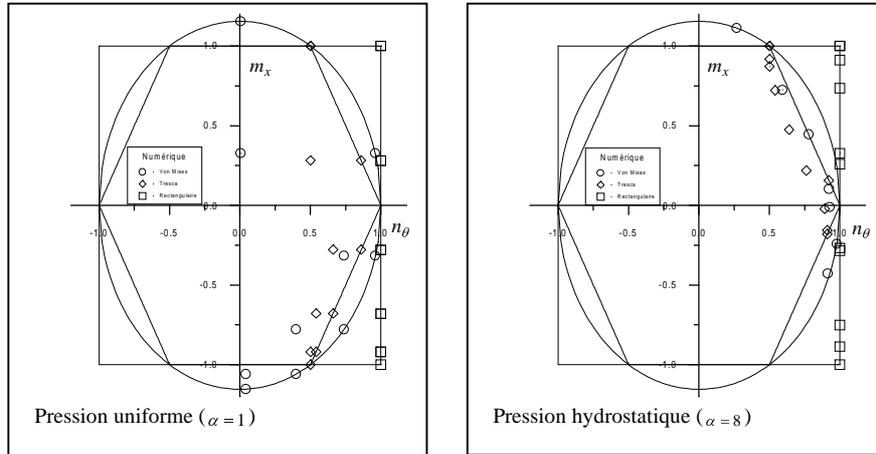


**Figure 13.** Mécanisme de ruine pour la coque bi-appuyée dans le cas d'une pression uniforme et hydrostatique

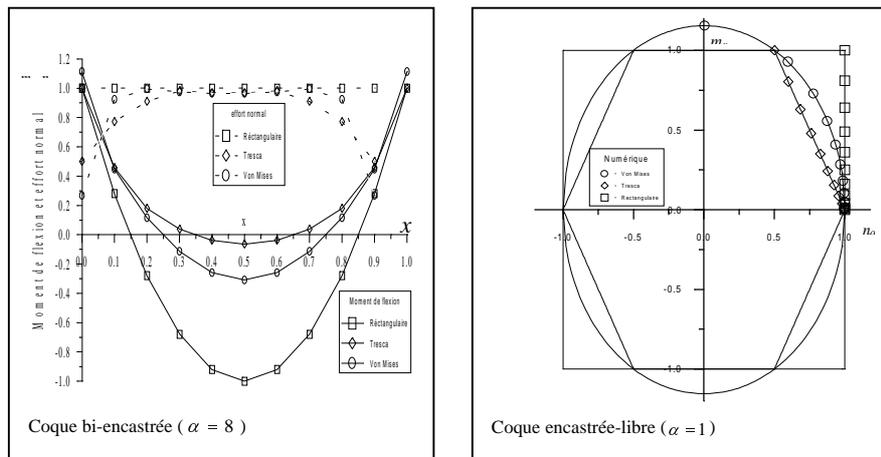
Le chargement hydrostatique introduit une non-symétrie dans le champ des vitesses de déplacement. L'intensité de ce dernier devient plus importante dans la partie inférieure de la coque. Pour des petites valeurs de  $\alpha$ , le mécanisme de ruine est constitué d'un cercle plastique qui apparaît au milieu de la coque et qui a tendance à se déplacer vers la partie inférieure de la structure. Lorsque la valeur de  $\alpha$  devient importante, le mécanisme de ruine change de nature : deux cercles plastiques apparaissent dans la partie inférieure de la coque tandis que la partie supérieure reste complètement rigide.

L'utilisation d'un élément fini d'équilibre permet de tracer les profils plastiques afin de situer l'état de contraintes de la structure sur la courbe d'écoulement. Ce qui permet de déceler les sections plastifiées et de déduire le mécanisme de ruine. La figure 14 montre quelques exemples de profils plastiques dans le cas de la coque bi-appuyée.

La figure 15 permet de comparer les digrammes des moments et la variation de l'effort normal obtenus en utilisant les différentes conditions de plasticité. Le profil plastique montre que toutes les sections de la structure sont plastifiées.



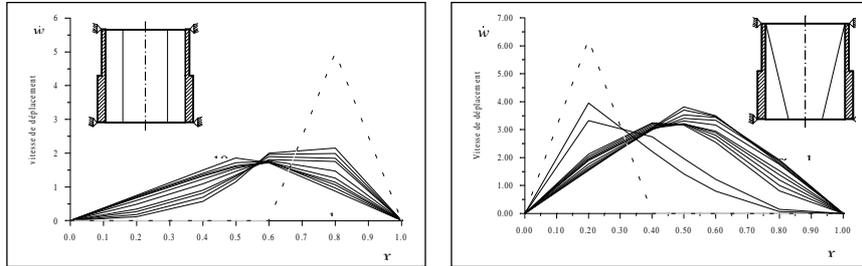
**Figure 14.** Profils plastiques pour la coque bi-appuyée pour les différentes conditions de plasticité



**Figure 15.** Contraintes et profils plastiques dans le cas d'une coque soumise à une pression uniforme pour les trois conditions de plasticité

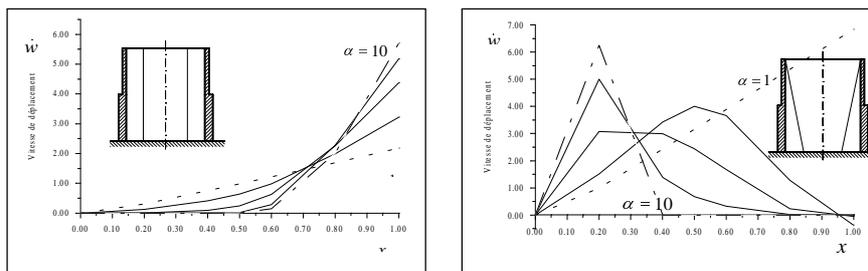
**9.2. Etude de la coque à deux tronçons**

Les exemples qui suivent concernent une coque à deux tronçons dont les caractéristiques géométriques sont les suivantes :  $\frac{e_2}{e_1} = 0.5$  et  $\chi = 0.5$ .

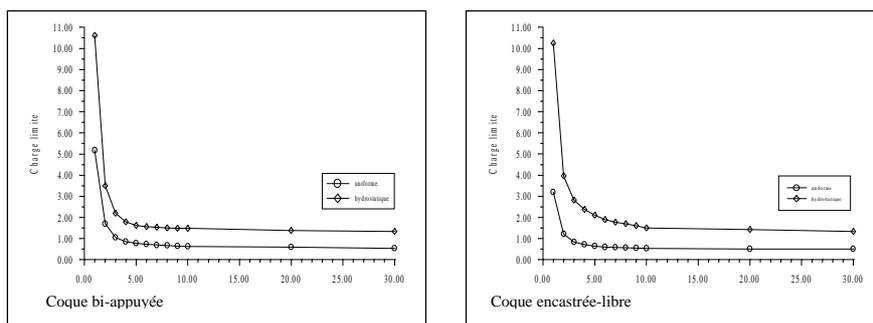


**Figure 16.** Mécanismes de ruine pour la coque bi-appuyée à deux tronçons sous chargement uniforme et hydrostatique

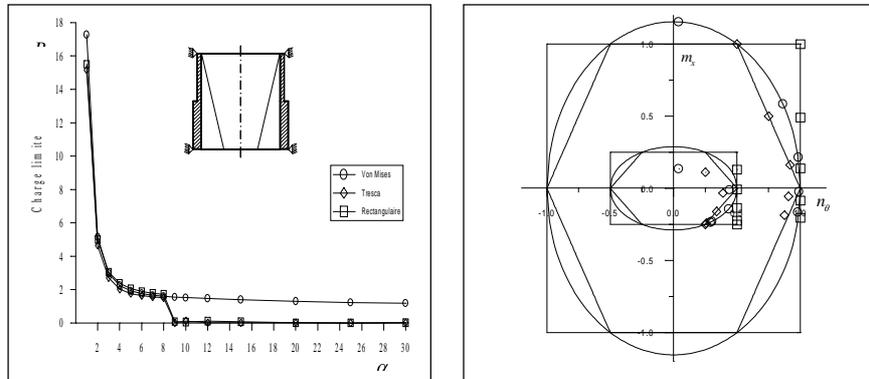
La figure 16 montre la diversité des mécanismes de ruine. Ils dépendent de la géométrie de la coque et du type de chargement auquel elle est soumise.



**Figure 17.** Mécanismes de ruine pour la coque encastrée-libre sous chargement uniforme et hydrostatique pour différentes géométries

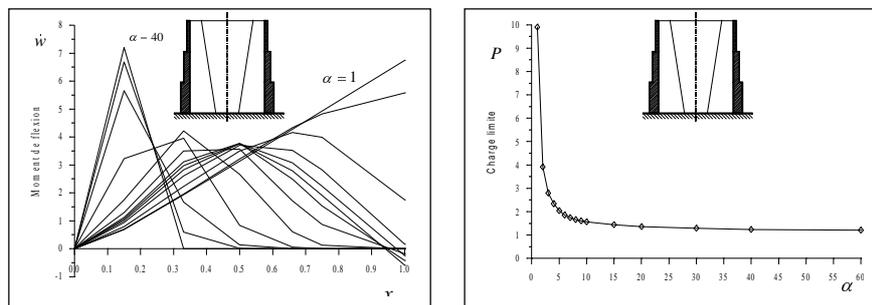


**Figure 18.** Effet du chargement et de la géométrie sur la borne supérieure de la charge limite



**Figure 19.** Borne inférieure de la charge limite et profils plastiques d'une coque à deux tronçons soumise à un chargement hydrostatique

### 9.3. Etude de la coque à trois tronçons



**Figure 20.** Mécanismes de ruine et borne supérieure de la charge limite d'une coque à trois tronçons soumise à un chargement hydrostatique

## 10. Conclusion

Les résultats obtenus par les deux méthodes de l'analyse limite développées dans cet article concordent parfaitement, comme le montrent les différents exemples. Outre l'obtention de la borne supérieure de la charge limite, la méthode cinématique permet de se faire une idée sur les mécanismes de ruine possibles. L'utilisation de la condition de von Mises dans cette méthode évite les problèmes de différentiabilité lors de l'application de la loi de normalité. La borne inférieure de la charge limite obtenue par la méthode statique est placée du côté de la sécurité de la structure.

L'utilisation d'une condition de plasticité linéaire aboutit à la résolution d'un problème de programmation mathématique linéaire, ce qui permet un gain considérable du point de vue temps de calcul. L'utilisation d'un élément fini cylindrique d'équilibre présente beaucoup d'avantages. En effet, elle permet de générer un champ de contraintes qui vérifie strictement les équations d'équilibre. Le moment de flexion et l'effort normal circonférentiel figurent tous les deux comme des variables effectives du problème, ce qui permet de tracer les profils plastiques et de déduire le mécanisme de ruine.

## 11. Bibliographie

- Charles A. and Greenberg H. J., Plastic collapse and linear programming, Preliminary Report Bull. Ann. Math. Soc., Nov 1951.
- Chwala U. S. and Biron A., Limit analysis of shells of revolution of arbitrary shape under pressure, Rapport N°1775, Lab. de Rech. et d'Essais de Matériaux, Ecole Polytechnique de Montréal, 1969.
- Bideq M., Kouam M., Bousshine L. et Kifani A., "Analyse limite des coques cylindriques sous chargement hydrostatique", Conf. Math. Appl et Sci. de l'Ing. *CIMASI'96*, 1996.
- Bland R. G., New finite pivoting rules for the simplex method, *Math. Ops. Res.*, 2, 1977.
- Dantzig G. B., *Linear Programming and extensions*, Princeton University Press, Princeton New York, 1963.
- Hodge Jr. P. G., *Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells*, Prentice Hall, New York, 1963.
- Hodge P. G., Belytschko T., "Numerical methods for the limit analysis of plates", *J. appl. Mech.* 35, pp 797-802, 1968.
- Kouam M., Contribution à l'analyse limite et au dimensionnement optimal des coques cylindriques, tome 1, Thèse de Doctorat en Sciences Appliquées, Faculté Polytechnique de Mons, Belgique, 1983.
- Lance R. H. et D. C. Koopman, Limit analysis of shells of revolution by linear programming, Dept. Theor. Appl. Mech. Cornell Univ., Ithaca, New York, Techn. Report NSF GK 681/1, 1964.
- Maier G., "A quadratic programming approach for certain classes of non-linear structural problems", *Meccanica* 3, p. 121-130, 1968.
- Morelle P. et Nguyen D. H., Etude numérique de l'adaptation plastique des coques de révolution par les éléments finis d'équilibre, *Ji. Mec. Théorique et Appliquée*, Vol 2 N° 4, 1983.
- Massonet C., « Faut-il introduire l'hypothèse de Bernoulli en résistance des matériaux ? » Bull. Soc. Poly. des sciences, Liège N° 12, 1947.
- Murtagh B. A., Saunders M. A., MINOS 5.1 Users Guide, Technical Report Sol 83-20R, Stanford University, 1987.

- Nguyen D. H., « Sur la plasticité et le calcul des états limites par éléments finis », *Collection des publications de la Faculté des Sciences Appliquées n° 98*, Liège, Belgique, 1985.
- Nougier J.P., *Méthodes de calcul numérique*, 3<sup>e</sup> édition, Masson, 1987.
- Olszak W., Sawczuk A., “Die Grenztragfähigkeit von zylindrischen Scalen bei verschiedenen Formen der Plastizitätsbedingung”, *Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae*, t. XXVI, n° 1-2, Budapest, 1959.
- Save M., “On yield conditions in generalized stresses”, *Quart. of Applied Math.*, 19, 3, 1961.
- Save M., Massonet Ch., *Calcul Plastique des Constructions*, Volume II, 2<sup>e</sup> édition, Centre Belgo-Luxembourgeois d'Information de l'Acier, Bruxelles , 1972.
- Washzu K., *Variational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon Press, Third edition, 1974.
- Wolfe P., “Methods of nonlinear programming: the reduced gradient method”, in: *Recent advances in mathematical programming*, McGraw Hill, New York, 1963.