

---

# Remaillage en grandes déformations

## Applications à la mise en forme de structures 2D

Houman Borouchaki<sup>\*,\*\*</sup> — Abdelhakim Cherouat<sup>\*</sup>

Khemais Saanouni<sup>\*</sup> — Patrick Laug<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Université de Technologie de Troyes, GSM-LASMIS  
BP 2060, F-10010 Troyes cedex

{houman.borouchaki,abdelhakim.cherouat,khemais.saanouni}@utt.fr

<sup>\*\*</sup> INRIA, Projet GAMMA  
BP 105, F-78153 Rocquencourt cedex  
patrick.laug@inria.fr

---

**RÉSUMÉ.** Le calcul des structures en grandes déformations élastoplastiques par la méthode des éléments finis nécessite de recourir à des remaillages fréquents du domaine de calcul au cours de la résolution. En effet, la fiabilité et la performance d'un tel calcul dépendent fortement de l'évolution géométrique et physique du domaine de résolution. Cet article présente les différentes étapes nécessaires au remaillage d'une structure mécanique au cours de grandes déformations plastiques avec endommagement. Ces étapes sont constituées essentiellement des estimateurs d'erreur à caractère géométrique et physique. La méthode proposée a été intégrée dans un environnement de calcul utilisant le code ABAQUS et quelques exemples numériques viennent illustrer son efficacité dans le cas des transformations finies avec endommagement.

**ABSTRACT.** The analysis of the mechanical structures using Finite Element Method in the framework of large elastoplastic strain, needs frequent remeshing of the deformed domain during the computation. Indeed, the remeshing is due to the large geometrical distortion of finite elements or the adaptation to the physical behavior of the solution. This paper gives the necessary steps to remesh the mechanical structure during the large elastoplastic deformation with damage. These steps are essentially constituted by geometrical and physical error estimates. The proposed method is integrated in the ABAQUS computational code and some numerical examples show the efficiency of our method in the case of finite transformations with damage.

**MOTS-CLÉS :** grandes déformations, plasticité, endommagement, mise en forme, maillage adaptatif, estimateurs d'erreur.

**KEYWORDS:** large deformations, plasticity, damage, forming process, adaptive meshing, error estimates.

---

## 1. Introduction

La mécanique non linéaire des solides et des structures a pour objet la modélisation et le calcul des structures à fortes non-linéarités géométriques (transformations finies, contact unilatéral évolutif, etc.) et matérielles (plasticité, viscoplasticité, écrouissage, endommagement, etc.). L'objectif est de simuler numériquement le comportement d'un objet mécanique (structure) soumis à diverses sollicitations thermomécaniques plus ou moins complexes afin d'améliorer sa tenue (durée de vie), voire d'optimiser le procédé même de fabrication de l'objet. La fiabilité et la performance d'une telle simulation repose sur celles des outils théoriques (relations constitutives représentant les phénomènes physiques), numériques (algorithmes d'intégration des EDO, schémas de résolution des systèmes non linéaires, etc.) et géométriques (représentation géométrique de l'objet, discrétisation en éléments finis ou maillage, remaillage et maillage adaptatif en cours de la simulation).

Les aspects théoriques (modèles de plasticité avec endommagement [GEL 85], [LEM 88], [LEM 92], [BEN 94], [GEL 98]) et numériques (algorithmiques) ont été largement développés depuis fort longtemps, et plusieurs outils plus ou moins performants ont été proposés [CRI 94], [LAD 96], [SIM 98], [FOU 92]. Pour les aspects géométriques, la représentation (2D et 3D) d'objets ainsi que leur discrétisation initiale par éléments finis ont fait également l'objet de grands efforts de développements (voir [GEO 97] et [FRE 99] pour une synthèse). Quant aux remaillages et aux maillages adaptatifs, nécessaires aux problèmes fortement non linéaires, ils sont en plein développement et les solutions proposées ne sont pas encore tout à fait satisfaisantes (cf. [DUM 95], [HOM 96], [COR 96] entre autres). Mentionnons que la principale difficulté réside dans le fait qu'en grandes déformations la géométrie du domaine est variable et ne peut être définie d'une manière explicite.

Dans cet article, on s'intéresse au problème de remaillage d'une structure subissant de grandes déformations plastiques avec endommagement. On présente un schéma général constitué de plusieurs étapes nécessaires à une représentation presque optimale du domaine au cours de l'évolution. Ces étapes sont essentiellement divisées en deux catégories : définition et rediscrétisation de la frontière de la pièce, et remaillage adaptatif de la pièce. On montrera que, dans les deux cas, on peut définir une carte de taille associée aux éléments du maillage permettant de gouverner le procédé de remaillage. La première carte représente le respect de la géométrie sous-jacente à la frontière du domaine déformé, et la deuxième permet d'augmenter la précision de la solution physique recherchée. En supposant que la déformation totale soit effectuée par des incréments de déformation suffisamment petits, le remaillage peut éventuellement être appliqué à chaque itération.

Dans la section 2, on présente le schéma général du remaillage. Dans la section 3, on propose, dans un premier temps, une méthode pour définir d'une manière analytique la frontière du domaine en cours de déformation. Puis, en se basant sur une estimation d'erreur géométrique de la discrétisation en cours de la frontière, on donne un algorithme pour la rediscrétisation adaptative de cette frontière. Dans la section

4, on introduit une estimation *a posteriori* d'erreur de la solution physique cherchée (ici la déformation plastique ou l'endommagement), permettant de gouverner le remaillage adapté du domaine à cette solution par une méthode classique d'adaptation de maillage, la h-méthode. Dans la section 5, on applique le schéma proposé à la résolution d'un problème de découpage d'une tôle mince et d'un problème de forgeage d'une pièce massive. Enfin, dans la section 6, on conclut avec quelques perspectives sur les travaux effectués.

## 2. Schéma général de remaillage

On considère une pièce modélisée par un domaine de calcul  $\Omega$  défini à partir de sa frontière  $\Gamma$ . On suppose que cette dernière est donnée sous une forme discrète continue d'un ensemble de segments droits en deux dimensions ou d'un ensemble de triangles plats en trois dimensions. Cet ensemble constitue un maillage initial  $\mathcal{T}(\Gamma)$  de la frontière du domaine  $\Gamma$ . La définition analytique de cette frontière permet l'obtention de cette géométrie discrète initiale et s'avère inutile pour les différents remaillages du domaine, dans la mesure où la géométrie du domaine varie d'une manière non négligeable au cours du calcul. De plus, on suppose que la déformation finale est obtenue itérativement par pas de « petites » déformations (ce qui est le cas dans le cadre d'un schéma d'intégration explicite pour la résolution du problème). Le remaillage est éventuellement appliqué après chaque incrément de déformation selon le schéma suivant :

- définition de la nouvelle géométrie  $\mathcal{G}(\Gamma)$  après déformation,
- estimation d'erreur géométrique (écart entre la nouvelle géométrie  $\mathcal{G}(\Gamma)$  et la discrétisation courante  $\mathcal{T}(\Gamma)$ ) de la frontière, définition d'une carte de taille géométrique  $\mathcal{H}_G(\Gamma)$  servant à gouverner la rediscrétisation de la frontière  $\Gamma$ ,
- estimation d'erreur physique (écart entre la solution physique  $\mathcal{S}(\Omega)$  obtenue sur  $\Omega$  et une solution idéale « lisse » considérée comme la solution de référence), définition d'une carte de taille physique  $\mathcal{H}_F(\Omega)$  servant à gouverner le remaillage du domaine  $\Omega$ ,
- intersection des cartes  $\mathcal{H}_G(\Gamma)$  et  $\mathcal{H}_F(\Omega)$ ,
- rediscrétisation éventuelle  $\tilde{\mathcal{T}}(\Gamma)$  de la frontière du domaine,
- remaillage éventuel  $\tilde{\mathcal{T}}(\Omega)$  du domaine.

**Définition de  $\mathcal{G}(\Gamma)$ .** Deux types de déformations de la géométrie de la pièce sont considérés : déformations libres et liées. Le premier type concerne les déformations dues à des contraintes mécaniques (par exemple des conditions d'équilibre), librement dans l'espace. Dans ce cas, la nouvelle géométrie de la pièce après déformation est uniquement définie par la nouvelle position des nœuds frontaliers ainsi que leurs connexions. Quant au deuxième type, il s'agit des déformations figées par contact avec un second domaine dont la géométrie est fixe (outil supposé rigide ou indéformable). Dans ce cas, la pièce prend la forme géométrique de l'outil et donc sa nouvelle géométrie après déformation est celle de l'outil. La nouvelle position ainsi que la normale

à la surface en chaque nœud frontalier étant ainsi définies, un schéma d'interpolation d'ordre 1 (interpolant les positions et les normales) est utilisé pour définir la nouvelle géométrie  $\mathcal{G}(\Gamma)$  de la pièce.

**Définition des cartes de taille  $\mathcal{H}_G(\Gamma)$  et  $\mathcal{H}_F(\Omega)$ .** Pour estimer l'écart entre la nouvelle géométrie et la discrétisation courante de la frontière, on examine localement en chaque nœud frontalier si la taille des éléments adjacents est proportionnelle (suivant un facteur spécifié) au rayon minimal de courbure de la nouvelle géométrie (cf. [LAU 96] et [BOR 99]). Formellement, ceci consiste à définir une carte de taille  $\mathcal{H}_G(\Gamma)$  (proportionnelle au rayon de courbure de  $\mathcal{G}(\Gamma)$ ) associée aux nœuds de  $\mathcal{T}(\Gamma)$  et à vérifier que le maillage  $\mathcal{T}(\Gamma)$  respecte cette carte de taille  $\mathcal{H}_G(\Gamma)$ . De même, comme on verra plus loin (cf. section 4), l'écart entre la solution physique obtenue par le calcul et la solution exacte peut être quantifié en fonction des tailles des éléments du maillage. Formellement, on détermine une carte de taille  $\mathcal{H}_F(\Omega)$  associée aux nœuds de  $\mathcal{T}(\Omega)$  et on vérifie que  $\mathcal{T}(\Omega)$  respecte la carte de taille  $\mathcal{H}_F(\Omega)$ .

**Génération de  $\tilde{\mathcal{T}}(\Gamma)$  et  $\tilde{\mathcal{T}}(\Omega)$ .** À partir des deux cartes de taille  $\mathcal{H}_G(\Gamma)$  et  $\mathcal{H}_F(\Omega)$ , une carte de taille  $\mathcal{H}(\Omega)$ , intersection des deux premières, est définie (qui consiste à considérer la plus petite des tailles définies dans  $\mathcal{H}_G(\Gamma)$  et  $\mathcal{H}_F(\Gamma)$ , où  $\mathcal{H}_F(\Gamma)$  est la restriction de la carte  $\mathcal{H}_F(\Omega)$  à la frontière  $\Gamma$  et  $\Omega$ ). Cette nouvelle carte permet de gouverner le remaillage adapté de la pièce qui comprend deux phases, la rediscrétisation de la frontière et le remaillage de la pièce s'appuyant sur cette discrétisation. La rediscrétisation de la frontière consiste à optimiser  $\mathcal{T}(\Gamma)$  jusqu'à ce qu'il respecte la carte de taille  $\mathcal{H}(\Omega)$ . Le remaillage de la pièce est alors entièrement généré, à partir de la rediscrétisation de la frontière, suivant une méthode classique de h-adaptation basée sur une approche combinée frontale-Delaunay.

Dans la suite, on développe ces différentes étapes intervenant dans le schéma général de remaillage proposé.

### 3. Définition et remaillage de la frontière du domaine

Pour remailler la frontière du domaine, deux approches peuvent être considérées suivant la prise en compte de l'outil. Dans la première, le remaillage de la pièce est gouverné uniquement par la forme courante de la pièce indépendamment de la forme de l'outil, tandis que dans la seconde, la pièce est remaillée en fonction de la forme de l'outil. Dans cette section, on propose une méthode basée sur la seconde approche.

Comme indiqué dans la section précédente, la nouvelle géométrie du domaine est définie suivant un schéma d'interpolation d'ordre 1 à partir du maillage  $\mathcal{T}(\Gamma)$  de la frontière du domaine  $\Gamma$ . La position de chaque nœud de  $\mathcal{T}(\Gamma)$  étant fixée par le calcul, il nous reste à déterminer la normale à la surface en chaque nœud. Dans le cas d'un nœud libre (suivant une déformation libre), la normale est approchée par une moyenne pondérée des normales unitaires des éléments adjacents. Dans le cas d'un nœud lié, la normale est celle du point correspondant en contact de l'outil. Dans la suite, on donne quelques indications sur l'identification des nœuds liés de la pièce (en contact

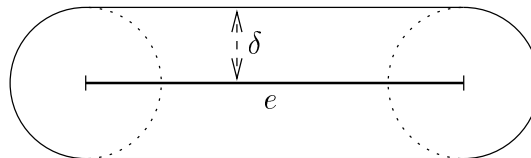
avec l'outil) ainsi que le schéma interpolant utilisé pour l'obtention de la nouvelle géométrie  $\mathcal{G}(\Gamma)$  et on rappelle les grandes lignes du remaillage de  $\mathcal{G}(\Gamma)$ .

### 3.1. Identification des nœuds liés

L'idée consiste à identifier *a priori* les nœuds de la pièce qui vont être en contact avec l'outil (si le pas de déplacement est appliqué à l'outil) en considérant la distance de Hausdorff de la pièce à l'outil. En 2D, ceci consiste à associer à chaque arête de la discrétisation de la pièce et de l'outil, une région centrée en cette arête, et à examiner les intersections éventuelles entre les régions associées à la pièce et celles associées à l'outil. Un nœud de la pièce est alors classé lié s'il appartient à l'une des régions associées à l'outil ou si un nœud de l'outil appartient à l'une des régions associées à la pièce contenant ce nœud. Formellement, la région  $\mathcal{R}_\delta(e)$  associée à l'arête  $e$  est définie par :

$$\mathcal{R}_\delta(e) = \{X \in R^2, d(X, e) \leq \delta\}$$

où  $d(X, e)$  est la distance de  $X$  à  $e$  et  $\delta$  est le pas de déplacement de l'outil. Dans le cas où la projection orthogonale de  $X$  sur la droite support de l'arête  $e$  se trouve à l'intérieur de  $e$ , alors la distance  $d(X, e)$  est égale à la distance de  $X$  à son projeté et, dans le cas contraire,  $d(X, e)$  est égale à la plus petite distance de  $X$  aux extrémités de  $e$ . Ainsi, géométriquement, cette région est la réunion de deux demi-disques de rayon  $\delta$  centrés aux extrémités de  $e$  et de deux rectangles de base  $e$  et de hauteur  $\delta$  s'appuyant sur  $e$  (voir Figure 1).



**Figure 1.** L'enveloppe de Hausdorff autour du segment  $e$

### 3.2. Schéma interpolant d'ordre 1

La géométrie (après déformation) de la pièce peut être définie de deux façons, soit en conservant la géométrie avant la déformation, soit en définissant une nouvelle géométrie « plus lisse ». Dans le premier cas, la nouvelle géométrie est définie par la discrétisation courante de la frontière et les nouveaux nœuds du remaillage de la pièce vont être placés sur les éléments de cette discrétisation. Dans le second cas, la nouvelle géométrie est définie en deux (resp. trois) dimensions par une courbe (resp. surface) lisse interpolant les nœuds et/ou autres caractéristiques géométriques de la discrétisation courante de la frontière. Les nouveaux nœuds sont alors placés sur cette

nouvelle géométrie lisse. L'avantage de cette seconde approche (qui paraît plus lourde) est que la géométrie de la pièce reste lisse au cours de sa déformation.

Pour définir la nouvelle géométrie dans cette seconde approche, on utilise le schéma interpolant d'ordre 1 proposé par Walton et Meek [WAL 96]. Il consiste, en deux dimensions, à associer à chaque segment de  $\mathcal{T}(\Gamma)$  une cubique de Bézier passant par les extrémités et interpolant les normales aux extrémités. Soient  $e = AB$  un segment de  $\mathcal{T}(\Gamma)$ ,  $\nu(A)$  et  $\nu(B)$  les normales unitaires respectivement en  $A$  et  $B$ , alors la cubique interpolante d'ordre 1 de Bézier associée à  $e$  est définie comme :

$$A B_0^3(t) + A' B_1^3(t) + B' B_2^3(t) + B B_3^3(t)$$

où  $t$  parcourt  $[0, 1]$ ,  $B_i^3(t) = C_n^i t^i (1-t)^{3-i}$  et

$$A' = A + (6B - 6A - 2\|\overrightarrow{AB}\| \gamma_1 \nu(A) + \|\overrightarrow{AB}\| \gamma_2 \nu(B)) / 18$$

$$B' = B - (6B - 6A + \|\overrightarrow{AB}\| \gamma_1 \nu(A) - 2\|\overrightarrow{AB}\| \gamma_2 \nu(B)) / 18$$

où  $\gamma_1 = 6(2a_0 + a a_1) / (4 - a^2)$ ,  $\gamma_2 = 6(2a_1 + a a_0) / (4 - a^2)$  avec  $a = \nu(A) \cdot \nu(B)$ ,  $a_0 = \nu(A) \cdot \overrightarrow{AB}$  et  $a_1 = \nu(B) \cdot \overrightarrow{AB}$ . En trois dimensions, de la même manière dans un premier temps, un réseau de segments courbes associé aux arêtes des éléments de  $\mathcal{T}(\Gamma)$  est défini, puis des carreaux de Gregory s'appuyant sur ces segments sont déterminés de manière à respecter la continuité des plans tangents transverses d'un élément à ses éléments adjacents.

### 3.3. Remaillage de la frontière

La nouvelle géométrie  $\mathcal{G}(\Gamma)$  étant bien définie, on associe à chaque sommet  $v$  de  $\mathcal{T}(\Gamma)$  la taille  $h_G(v) = \alpha \rho(v)$  où  $\rho(v)$  est le rayon minimal de courbure en  $v$ , et  $\alpha$  un réel dépendant de l'écart géométrique toléré. Ces tailles constituent ainsi une carte de taille  $\mathcal{H}_G(\Gamma)$  associée aux sommets de  $\mathcal{T}(\Gamma)$ . Le remaillage de  $\Gamma$  consiste à « optimiser » d'une manière itérative le maillage  $\mathcal{T}(\Gamma)$ , par découpage des arêtes trop longues et par élimination des arêtes trop courtes. Soit  $e = AB$  une arête de  $\mathcal{T}(\Gamma)$ , la longueur normalisée  $l_{\mathcal{H}_G}(e)$  de l'arête  $e$  par rapport à la carte de taille  $\mathcal{H}_G(\Gamma)$  est définie comme :

$$l_{\mathcal{H}_G}(e) = \|\overrightarrow{AB}\| \int_0^1 \frac{1}{h_G(A + t\overrightarrow{AB})} dt$$

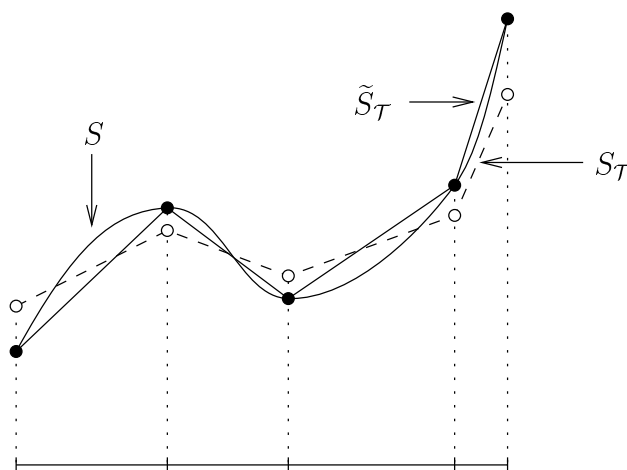
où  $\|\overrightarrow{AB}\|$  est la longueur euclidienne de l'arête  $AB$  et  $h_G(A + t\overrightarrow{AB})$ , la taille géométrique souhaitée au point  $A + t\overrightarrow{AB}$  de  $AB$ . L'arête  $AB$  est jugée trop longue si  $l_{\mathcal{H}_G}(AB) \gg 1$  et trop courte si  $l_{\mathcal{H}_G}(AB) \ll 1$ . Le découpage d'une arête consiste à insérer un ou plusieurs nœuds sur la géométrie sous-jacente à l'arête dans le maillage  $\mathcal{T}(\Gamma)$ , et l'élimination d'une arête consiste à fusionner ses extrémités. Les détails de ces procédures sont décrites dans [BOR 99].

#### 4. Remaillage adaptatif du domaine

Le remaillage adaptatif du domaine est basé sur l'estimation *a posteriori* d'erreur, qui a fait l'objet de plusieurs études (voir par exemple [AIN 97], [FOR 00] et [LAD 01] pour une synthèse). Dans ce papier, on considère une estimation d'erreur *a posteriori* basée sur l'erreur d'interpolation.

Considérons la solution physique  $S_{\mathcal{T}}$  associée au maillage  $\mathcal{T}(\Omega)$  de  $\Omega$  obtenue (via le calcul par éléments finis) après déformation. Désignons par  $S$  la solution exacte. Le problème consiste dans un premier temps à calculer l'écart  $e_{\mathcal{T}} = S - S_{\mathcal{T}}$  entre  $S$  et  $S_{\mathcal{T}}$  représentant l'erreur sous-jacente à la solution obtenue par éléments finis, puis en déduire (en général par une majoration de cet écart) un autre maillage  $\mathcal{T}'(\Omega)$  tel que l'écart estimé entre  $S$  et la solution  $S_{\mathcal{T}'}$  obtenue de nouveau par éléments finis sur le maillage  $\mathcal{T}'(\Omega)$  soit borné par un seuil donné. Plusieurs points sont à préciser :

- comment quantifier l'écart  $e_{\mathcal{T}}$  entre  $S$  et  $S_{\mathcal{T}}$ ,
- comment utiliser cette dernière information pour construire un nouveau maillage sur lequel l'écart entre la solution par éléments finis correspondante et la solution exacte est borné par un seuil donné.



**Figure 2.** Solutions  $S_{\mathcal{T}}$ ,  $S$  et  $\tilde{S}_{\mathcal{T}}$

La solution  $S_{\mathcal{T}}$  obtenue par éléments finis n'est pas interpolante (la solution obtenue aux nœuds de  $\mathcal{T}$  ne coïncide pas avec la valeur exacte de  $S$  en ces nœuds). De plus, pour tout élément du maillage, on ne peut garantir que la solution  $S_{\mathcal{T}}$  coïncide avec la valeur exacte de  $S$  en au moins un point de l'élément. Il paraît donc difficile de quantifier explicitement l'écart  $e_{\mathcal{T}}$ . Cependant, l'étude directe de cet écart a fait l'objet de plusieurs travaux [VER 96]. Mais, dans le cas général, sa quantification reste un problème ouvert. Par suite, d'autres approches indirectes ont été proposées pour quantifier ou plutôt majorer cet écart. Désignons par  $\tilde{S}_{\mathcal{T}}$ , l'interpolé de  $S$  par le maillage

$\mathcal{T}$  (qui est une fonction linéaire ou quadratique par morceau suivant le degré des éléments de  $\mathcal{T}$ , voir Figure 2) et par  $\tilde{e}_{\mathcal{T}}$  l'écart  $S - \tilde{S}_{\mathcal{T}}$  entre  $S$  et  $\tilde{S}_{\mathcal{T}}$ , appelée l'erreur d'interpolation sur  $S$  suivant  $\mathcal{T}$ . Pour pouvoir quantifier l'écart  $e_{\mathcal{T}}$ , on suppose que la relation suivante est vérifiée :

$$\|e_{\mathcal{T}}\| \leq C \|\tilde{e}_{\mathcal{T}}\|$$

où  $\|\cdot\|$  est une norme et  $C$  une constante indépendante de  $\mathcal{T}$ . En d'autres termes, on suppose que l'erreur par éléments finis est majorée par l'erreur par interpolation. Ceci permet alors de simplifier le problème d'origine en considérant le problème suivant : étant donnée, suivant un maillage  $\mathcal{T}$ , une interpolation  $\tilde{S}_{\mathcal{T}}$  de  $S$ , construire un autre maillage  $\mathcal{T}'(\Omega)$  sur lequel l'erreur d'interpolation est bornée par un seuil donné. Comme  $\tilde{S}_{\mathcal{T}}$  peut être vu comme une représentation "discrète" de  $S$ , le problème se réduit alors à une caractérisation des maillages sur lesquels l'erreur d'interpolation est bornée par le seuil. Ce problème a fait l'objet de plusieurs études (cf. [BER 99]), et dans la plupart, l'examen d'une "mesure" de l'erreur d'interpolation permet d'obtenir des contraintes liées aux éléments du maillage. Dans le cadre des méthodes d'adaptation de maillages, on s'intéresse particulièrement aux h-méthodes ou adaptations en taille pour lesquelles des contraintes en termes de tailles d'éléments sont spécifiées.

L'erreur d'interpolation permet notamment de quantifier le degré de "régularité" de la solution physique  $S$ . En d'autres termes, on cherche à construire un nouveau maillage de  $\Omega$  sur lequel la solution serait la plus « lisse » possible. Pour cela, on suppose que  $\mathcal{T}(\Omega)$  est composé d'éléments triangulaires linéaires (à trois nœuds) et on propose deux méthodes. La première est basée sur la courbure de la surface solution et la seconde, sur la déformation locale de cette surface. Pour simplifier, les méthodes seront décrites en deux dimensions et peuvent être généralisées en trois dimensions.

**Erreur basée sur la courbure.** Considérons l'interpolé linéaire  $\tilde{S}_{\mathcal{T}}$  de  $S$  suivant le maillage  $\mathcal{T}(\Omega)$  composé d'éléments triangulaires. Pour estimer l'erreur d'interpolation  $\tilde{e}_{\mathcal{T}}$ , on peut se baser sur le hessien de la solution  $S$  (voir par exemple, [BOR 01a] et [AZE 91]). En effet, pour un élément  $K$  de  $\mathcal{T}(\Omega)$ , en considérant la norme  $L_{\infty}$  de l'erreur d'interpolation  $\tilde{e}_{\mathcal{T}}(K)$  sur  $K$ , on montre que (cf. [BOR 01a]) :

$$\|\tilde{e}_{\mathcal{T}}(K)\| \leq \frac{2}{9} M(K) h^2(K),$$

où  $h(K)$  est la longueur de l'arête la plus grande de  $K$  (i.e. le diamètre de  $K$ ) et

$$M(K) = \max_{x \in K} \left( \max_{\|\vec{v}\|=1} |\langle \vec{v}, H_S(x) \vec{v} \rangle| \right).$$

avec  $H_S$ , le hessien de  $S$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désignant le produit scalaire usuel. Dans un cadre isotrope,  $M(K)$  représente la plus grande des valeurs propres des matrices  $|H_S|(x)$  (valeur absolue de  $H_S$ ) où  $x$  parcourt  $K$ . Pour que la relation  $\tilde{e}_{\mathcal{T}}(K) \leq \epsilon$  soit vérifiée, il suffit alors que l'on ait :

$$h(K) \leq \sqrt{\frac{\epsilon}{M(K)}}.$$



En pratique  $H_S$  est approché par le hessien de  $\tilde{S}_{\mathcal{T}}$ , (la solution obtenue à partir du calcul par éléments finis) et la constante  $M(K)$  est approchée par la plus grande des valeurs propres de la valeur absolue du hessien  $H_S$  aux extrémités de  $K$ .

Afin de minimiser aussi l'écart entre les plans tangents à la solution interpolante et ceux de la solution exacte, il convient de considérer les courbures géométriques de la surface cartésienne décrivant la solution. Pour cela, dans un premier temps, en chaque nœud de cette surface, on détermine la normale (et donc le gradient) par une moyenne pondérée de la normale unitaire aux éléments adjacents. Puis, dans le repère local (composé du plan tangent et la normale) associé à chaque nœud, on construit une quadrique centrée au nœud et passant au mieux par les nœuds adjacents. Ensuite, on approche localement le hessien par celui de cette quadrique (les détails de cette construction sont données dans [HAM 93]). Connaissant le gradient et le hessien de la solution aux nœuds de  $\mathcal{T}(\Omega)$ , on associe à chaque nœud  $(w, S(w))$  de la surface  $(\mathcal{T}(\Omega), S_{\mathcal{T}})$  la taille  $\beta \rho(w, S(w))$  dans le plan tangent à la surface en  $(w, S(w))$ , où  $\rho(w, S(w))$  est le rayon de courbure minimal au point  $(w, S(w))$  de la surface solution (dépendant du gradient et du hessien discret ainsi obtenus) et  $\beta$  un réel dépendant de l'écart physique toléré. Cette contrainte en taille décrit un cercle centré en  $(w, S(w))$  et de rayon  $\beta \rho(w, S(w))$  dans le plan tangent à la surface  $(\mathcal{T}(\Omega), S_{\mathcal{T}})$  en  $(w, S(w))$ . En projetant ce cercle dans le plan du domaine  $\Omega$  on obtient généralement une ellipse, et en considérant le plus grand cercle contenu dans cette ellipse on obtient la contrainte en taille définie au nœud  $w$  de  $\Omega$ . On en déduit ainsi une carte de taille  $\mathcal{H}_F(\Omega)$  associée aux sommets de  $\mathcal{T}(\Omega)$ .

**Erreur basée sur la déformation locale.** La carte précédente caractérise la déformation locale de la surface cartésienne sous-jacente à la solution. Cette déformation peut être quantifiée plus simplement en considérant le hessien suivant la normale à la surface (c'est-à-dire la seconde forme fondamentale de la surface). Soit  $P$  un sommet de la surface solution. Localement, au voisinage de  $P$ , cette surface admet une représentation paramétrique  $\phi(u, v)$ ,  $(u, v)$  étant les paramètres, avec  $P = \phi(0, 0)$ . En appliquant le développement de Taylor à l'ordre 2 à  $\phi$  au voisinage de  $P$ , on obtient :

$$\phi(u, v) = \phi(0, 0) + \phi'_u u + \phi'_v v + \frac{1}{2} (\phi''_{uu} u^2 + 2 \phi''_{uv} u v + \phi''_{vv} v^2) + o(u^2 + v^2) e$$

où  $e = (1, 1, 1)$ . Si  $\nu(P)$  désigne la normale à la surface en  $P$ , alors la quantité  $\langle \nu(P), (\phi(u, v) - \phi(0, 0)) \rangle$  ( $\langle \cdot, \cdot \rangle$  étant le produit scalaire) représentant l'écart du point  $\phi(u, v)$  au plan tangent en  $P$  et s'écrivant comme :

$$\frac{1}{2} (\langle \nu(P), \phi''_{uu} \rangle u^2 + 2 \langle \nu(P), \phi''_{uv} \rangle u v + \langle \nu(P), \phi''_{vv} \rangle v^2) + o(u^2 + v^2)$$

est donc proportionnelle à la seconde forme fondamentale de la surface pour  $u^2 + v^2$  assez petit.

Ainsi, pour mesurer la déformation locale de la surface (dans un cadre isotrope), il suffit de considérer pour chaque nœud de la surface l'écart maximal des nœuds adjacents au plan tangent en ce nœud à la surface. On définit donc la taille en chaque

nœud de  $\mathcal{T}(\Omega)$  comme étant inversement proportionnelle à cet écart. Formellement, la taille associée à un nœud  $w$  de  $\mathcal{T}(\Omega)$  s'écrit comme

$$h_F(w) = \frac{\beta}{\varepsilon(w, S(w))}$$

où  $\varepsilon(w, S(w))$  désigne ce nouvel écart.

Contrairement au cas du remaillage de la frontière, pour remailler le domaine on peut appliquer une méthode (de type combinée frontale-Delaunay) de reconstruction complète de maillage du domaine adapté à un champ de taille donné, à partir d'un maillage donné de la frontière du domaine. Les différentes étapes d'un tel remaillage (décrites en détail dans [BOR 00] et [BOR 01b]) sont schématisées ainsi :

- création du maillage du domaine sans points internes (en utilisant le noyau classique de Delaunay),
- insertion des points internes d'une manière itérative afin d'obtenir des arêtes d'éléments de longueur normalisée égale à l'unité par rapport à la carte de taille  $\mathcal{H}_F(\Omega)$ , si  $AB$  représente une arête d'un élément du maillage alors  $AB$  vérifie

$$1 = \|\vec{AB}\| \int_0^1 \frac{1}{h_F(A + t\vec{AB})} dt,$$

- optimisation en forme des éléments par bascules d'arêtes et bougés de points.

REMARQUE. Dans le procédé de remaillage, on a supposé que le maillage obtenu par le remaillage de la frontière respecte la carte physique  $\mathcal{H}_F(\Omega)$ . Dans le cas contraire, le remaillage de la frontière doit prendre en compte la carte physique  $\mathcal{H}_F(\Omega)$  restreinte à la frontière (dans ce cas, on considère la plus petite des tailles parmi les deux tailles géométrique et physique).

## 5. Applications

Pour illustrer la méthode proposée, nous considérons deux exemples en 2D. Le premier concerne le découpage d'une tôle mince avec des outils à grand angle de découpage afin de mettre en évidence la nécessité du procédé de remaillage. Le deuxième exemple concerne le forgeage d'un cylindre en déformation plane. Dans les deux cas, la pièce subit des grandes déformations plastiques et nécessite des remaillages fréquents. Avant de présenter les exemples, on rappelle les équations mécaniques permettant de gouverner les procédés.

### 5.1. Formulation du problème élastoplastique endommageable

Le domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$  est supposée élastoplastique isotrope homogène et isotherme. L'hypothèse des petites déformations élastiques  $\varepsilon_{ij}^e$  et des grandes déformations plastiques de taux  $D_{ij}^p$  est utilisée. On suppose le domaine  $\Omega$  soumis à des

efforts surfaciques  $\bar{F}_i(x, t)$  sur  $\Gamma_F$  et à des déplacements  $\bar{u}_i$  sur  $\Gamma_u$  avec  $\Gamma_F \cup \Gamma_u = \Gamma$  et  $\Gamma_F \cap \Gamma_u = \emptyset$  (les forces volumiques étant négligées). Le problème posé est la détermination en tout point  $\underline{x}$  de  $\Omega$  et à tout instant  $t \in [0, T]$  des champs de déplacements  $u_i$ , de déformation totale  $\varepsilon_{ij}$ , de déformation plastique  $\varepsilon_{ij}^p$ , de contraintes  $\sigma_{ij}$ , d'écroissage cinématique  $(\alpha_{ij}, X_{ij})$  et d'écroissage isotrope  $(r, R)$ . L'ensemble de ces champs doit alors vérifier (voir [SAA 94], [SAA 00a], [SAA 00b], [SAA 01a] pour de plus amples détails) :

– les équations d'équilibre quasi-statiques :

$$\operatorname{div} \sigma_{ij} = 0 \text{ dans } \Omega \quad [1]$$

– les équations cinématiques :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad}(\dot{u}_i) + \operatorname{grad}(\dot{u}_i)^T) \quad [2]$$

– les relations de comportements :

$$D_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + D_{ij}^p \quad [3]$$

$$D_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{\delta}}{\sqrt{1-D}} \frac{S_{ij} - X_{ij}}{\|\sigma_{ij} - X_{ij}\|} \quad [4]$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \operatorname{tr}(\sigma_{ij}) \delta_{ij} \quad \sigma_{ij} = (\lambda \operatorname{tr}(\varepsilon_{ij}^e) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^e + \sigma_{ij}^0) (1-D) \quad [5]$$

$$X_{ij} = \frac{2}{3} c \alpha_{ij} (1-D) \quad \dot{\alpha}_{ij} = D_{ij}^p - a \dot{\delta} \alpha_{ij} \quad [6]$$

$$R = Q r (1-D) \quad \dot{r} = \frac{\dot{\delta}}{\sqrt{1-D}} (1 - b r \sqrt{1-D}) \quad [7]$$

$$Y = \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{tr}(\varepsilon_{ij}^e))^2 + \mu \operatorname{tr}(\varepsilon_{ij}^e{}^2) + \frac{1}{3} c \alpha_{ij} \alpha_{ij} + \frac{1}{2} Q r^2 \quad [8]$$

$$\dot{D} = \left\langle \frac{Y}{S} \right\rangle^s \frac{\dot{\delta}}{(1-D)^\beta}$$

$$f = \frac{\|\sigma_{ij} - X_{ij}\| - R}{\sqrt{1-D}} - \sigma_y \quad [9]$$

– les conditions initiales :

$$u_i(\underline{x}, 0) = u_i(\underline{x})$$

$$\sigma_{ij}(\underline{x}, 0) = \sigma_{ij}^0(\underline{x})$$

$$X_{ij}(\underline{x}, 0) = X_{ij}^0(\underline{x})$$

$$R(\underline{x}, 0) = R^0(\underline{x})$$

– les conditions aux limites :

$$\sigma_{ij}(\underline{x}, t) n_j = \overline{F}_i(\underline{x}, t) \text{ sur } \Gamma_F$$

$$u_i(\underline{x}, t) = \overline{u}_i(\underline{x}, t) \text{ sur } \Gamma_u$$

où  $D_{ij}$  (respectivement  $D_{ij}^p$ ) est le taux eulérien des déformations totales (respectivement plastiques),  $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$  est le taux des petites déformations élastiques. Les constantes réelles  $\lambda$ ,  $\mu$  (élasticité),  $c$ ,  $a$  (écrouissage cinématique) et  $Q$ ,  $b$  (écrouissage isotrope),  $\sigma_y$  (contrainte d'écoulement) et  $S$ ,  $s$ ,  $\beta$  (endommagement) sont des caractéristiques physiques de  $\Omega$  qui sont connues.

Le multiplicateur plastique  $\dot{\delta}$  est donné par la condition de consistance  $\dot{f} = 0$  avec  $\dot{\delta} \geq 0$ ,  $f\dot{\delta} \leq 0$ ,  $\dot{\delta}f = 0$ . Les dérivées par rapport au temps sont des dérivées rotationnelles garantissant l'objectivité des relations de comportement (cf. [DOG 89]).

La norme  $\|\sigma_{ij} - X_{ij}\|$  est définie dans l'espace des contraintes par :

$$\|\sigma_{ij} - X_{ij}\| = \sqrt{\frac{3}{2} (S_{ij} - X_{ij}) (S_{ij} - X_{ij})}. \quad [10]$$

De même, on définit dans l'espace des déformations plastiques une norme similaire :

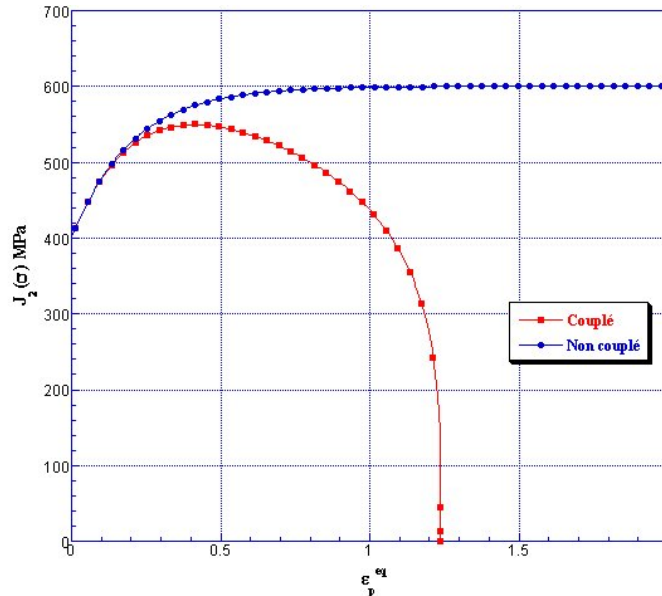
$$\dot{\varepsilon}_p^{eq} = \sqrt{\frac{2}{3} D_{ij}^p D_{ij}^p} = \frac{\dot{\delta}}{1 - D}. \quad [11]$$

Le matériau traité est supposé élastoplastique isotrope, isotherme à écrouissage isotrope non linéaire et à endommagement ductile isotrope. Ses caractéristiques mécaniques sont :  $E = 200000$  MPa,  $\nu = 0,3$ ,  $\sigma_y = 400$  MPa,  $Q = 1000$ ,  $b = 5$ ,  $S = 50$ ,  $s = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $a = c = 0$  (pas d'écrouissage cinématique).

La figure 3 montre la réponse contrainte-déformation d'un tel matériau dans les deux cas, couplé et non couplé. On note que, sans couplage, la contrainte de Cauchy se sature pour  $\sigma_{max} = 600$  MPa et  $\varepsilon_p^{eq} = 100$  %. Dans le cas couplé, la rupture intervient à 122 % de  $\varepsilon_p^{eq}$  et la contrainte max est de 550 MPa.

## 5.2. Aspects numériques

Le problème aux valeurs initiales et aux limites ci-dessus est résolu numériquement par la méthode des éléments finis en déplacement. La discrétisation spatiale est basée sur la forme faible du principe des puissances virtuelles en vitesse de déplacement. La discrétisation temporelle est de type différences finies. Le schéma de résolution globale (équilibre) est itératif implicite de Newton-Raphson déjà disponible dans ABAQUS/STD. Une routine utilisateur (UMAT) a été implémentée pour l'intégration locale des équations de comportement (équations (4) à (9)) avec un schéma implicite de type asymptotique. Une matrice tangente consistante associée à la réduction du



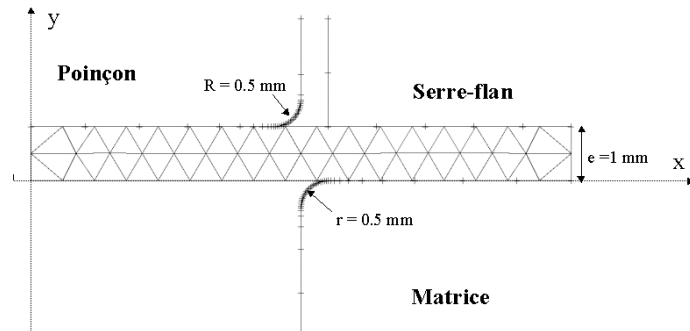
**Figure 3.** Réponse contraintes/déformations en un point matériel

nombre des équations a été utilisée. L'ensemble de ces aspects sont traités en détail dans [SAA 01a] ou [HAM 00].

Dans les deux exemples traités, la structure est maillée avec des éléments linéaires triangulaires à trois nœuds (en déformation plane). Ce choix est justifié par l'utilisation de maillages adaptés dans les zones fortement non linéaires afin de capter une solution réaliste (il est à noter que l'utilisation des éléments quadratiques ne change rien au principe de la méthodologie employée).

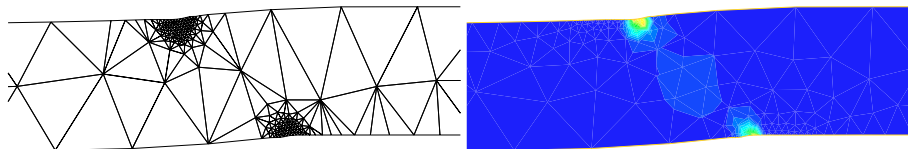
### 5.3. Exemple du découpage d'une tôle mince

On considère le découpage d'une tôle axisymétrique d'épaisseur 1 mm par des outils rigides de découpe (le poinçon, la matrice et le serre-flan) dont la géométrie est présentée sur la figure 4. Un rayon relativement important (0,5 mm) est imposé au niveau des angles de découpe (permettant ainsi d'amorcer et de propager plus lentement la fissure de la tôle et provoquer le recours au remaillage avant la rupture). L'utilisation de rayons faibles (entre 0,01 et 0,1 mm) schématisant des outils non usés (neufs) ne pose aucun problème (cf. [HAM 00] et [SAA 00a]). Cependant, dans ce cas, la déformation plastique et l'endommagement sont concentrés dans des zones d'épaisseur tellement faible que l'adaptation de maillage serait confuse. Pour effectuer le découpage, l'hypothèse des déformations planes est retenue, ce qui permet de traiter un problème plan avec une symétrie autour de l'axe du poinçon.



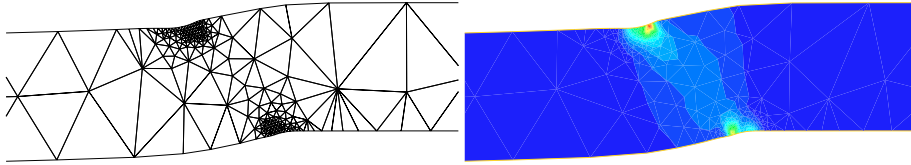
**Figure 4.** Configuration initiale du procédé de découpage

La figure 4 montre le maillage initial de la pièce en contact avec les outils. Les figures 5 à 10 montrent les remaillages adaptés aux champs d'endommagement de la pièce ainsi que les isovaleurs associées correspondant à différents déplacements  $d$  du poinçon (les zones rouges désignant les régions les plus endommagées). On constate sur ces images que les zones de contact avec les outils (adaptation géométrique) ainsi que les zones de localisation de l'endommagement (adaptation physique) sont raffinées. La courbe de la figure 11 montre les efforts de découpage en fonction de l'avancée du poinçon. On remarque que la tôle est complètement découpée pour un déplacement du poinçon de 0,43 mm et a nécessité un effort maximum de 360 N environ. La zone totalement endommagée à la dernière itération d'adaptation montre la trajectoire de la découpe (chemin de la zone endommagée).

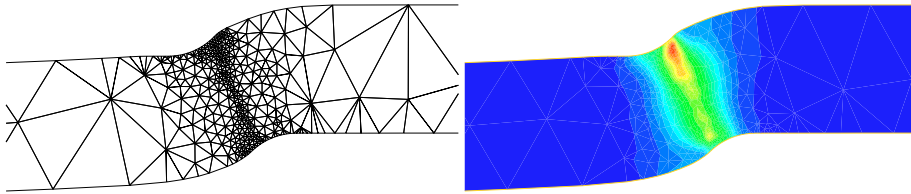


**Figure 5.** Remaillage et endommagement à  $d = 0,1$  mm

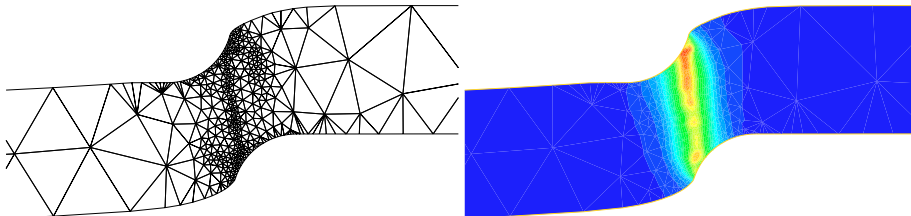
La figure 12 (à gauche) montre la solution  $P^1$  obtenue par éléments finis représentant l'endommagement à la dernière itération de calcul (correspondant à un pas de déplacement  $d = 0,58$  mm). On constate que l'endommagement maximal est localisé suivant une ligne de forte courbure (forte concentration). La figure 12 (à droite) montre, à la même étape de calcul, la surface représentant les déformations plastiques équivalentes obtenues par remaillage adaptatif par rapport à ce dernier champ. Ces déformations sont localisées suivant une ligne dont la courbure est moins importante que celle



**Figure 6.** Remaillage et endommagement à  $d = 0,16$  mm

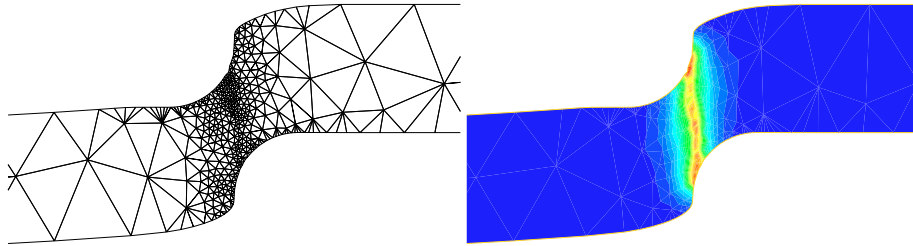


**Figure 7.** Remaillage et endommagement à  $d = 0,26$  mm

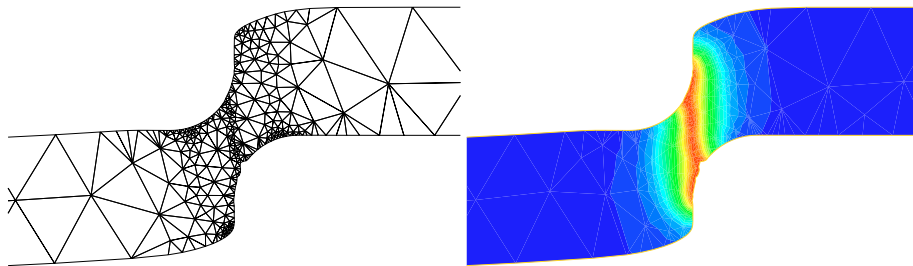


**Figure 8.** Remaillage et endommagement à  $d = 0,34$  mm

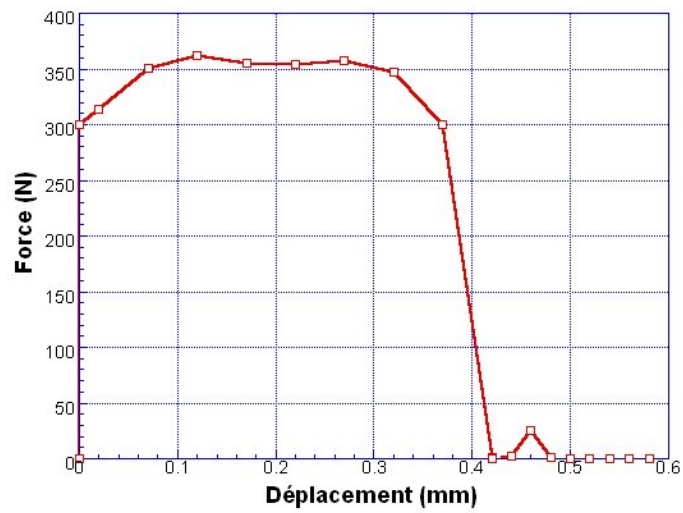
obtenue avec une adaptation sur le champ d'endommagement. Ce résultat montre clairement que l'endommagement localise plus fortement que la déformation plastique cumulée conformément au caractère très localisant de l'endommagement. En effet, dans cette formulation locale, la localisation de l'endommagement se produit toujours dans une « rangée » d'éléments et dépend donc fortement de la finesse du maillage. C'est un problème bien connu inhérent au couplage comportement-endommagement [DEB 99]. Pour remédier à cet inconvénient, une formulation non locale (ou du gra-



**Figure 9.** Remaillage et endommagement à  $d = 0,42$  mm



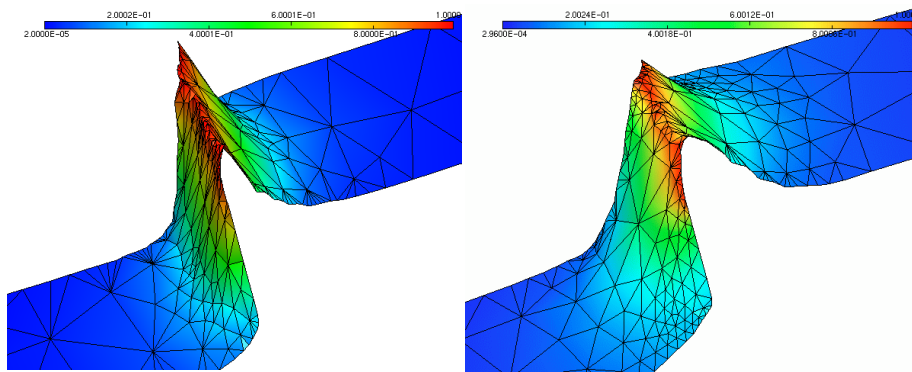
**Figure 10.** Remaillage et endommagement à  $d = 0,58$  mm



**Figure 11.** Courbe efforts/déplacements en découpe



dient supérieur) est nécessaire [GAN 00]. Concernant cet aspect, sans donner plus de détails (voir [SAA 01b]), nous concluons que l'adaptation de maillage sur le champ d'endommagement qui reste très singulier (voir Figure 12 à gauche) n'est pas pleinement efficace dans le cadre de cette formulation locale. Il est donc préférable (dans ce cadre) d'appliquer l'adaptation sur la déformation plastique cumulée moins singulière (voir Figure 12 à droite) comme dans l'exemple suivant. Notons que la déformation plastique cumulée est affectée par l'endommagement comme le montre l'équation (4).

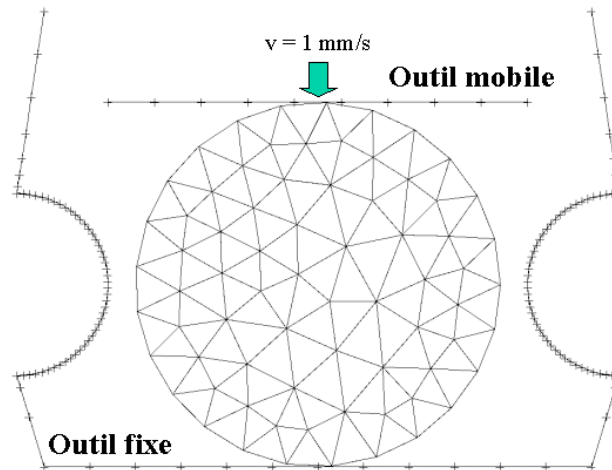


**Figure 12.** Surfaces des endommagements et des déformations plastiques à l'instant final

#### 5.4. Exemple du forgeage 2D d'une pièce massive

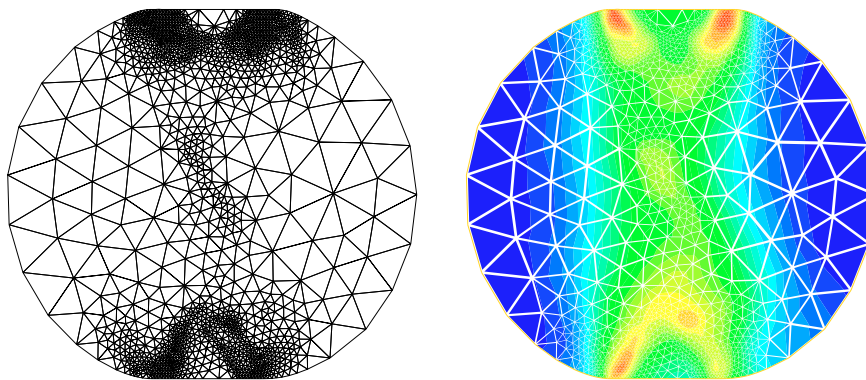
On considère un cylindre de diamètre 40 mm infiniment long simplement posé dans une excavation et pressé par un plan infiniment long et rigide le long de sa géométrie supérieure (cf. figure 13). On considère les mêmes hypothèses de déformation que dans l'exemple précédent, le forgeage étant donc gouverné par les mêmes équations mécaniques. Les outils supposés rigides sont composés d'une part, du plan mobile par l'intermédiaire duquel s'exercent les déplacements imposés et, d'autre part, du contour fixe de l'excavation. Le cylindre est pressé par le plan mobile qui tend à l'aplatir et viendra toucher les deux embouts demi-cylindriques de l'outil fixe. Ce procédé de forgeage transforme le cylindre initialement circulaire en une poutre épaisse ayant la forme d'un rail de chemin de fer.

La figure 13 montre le maillage initial de la pièce en contact avec les outils (la discrétisation du contour de la pièce est relativement plus fine dans les zones de contact). Les figures 14 à 20 montrent les remaillages adaptés aux déformations plastiques cumulées de la pièce ainsi que les isovaleurs associées correspondant à différents déplacements  $d$  du plan mobile (les zones rouges désignant les régions dont la déformation plastique est maximale). Sur ces maillages, on constate le raffinement du maillage,

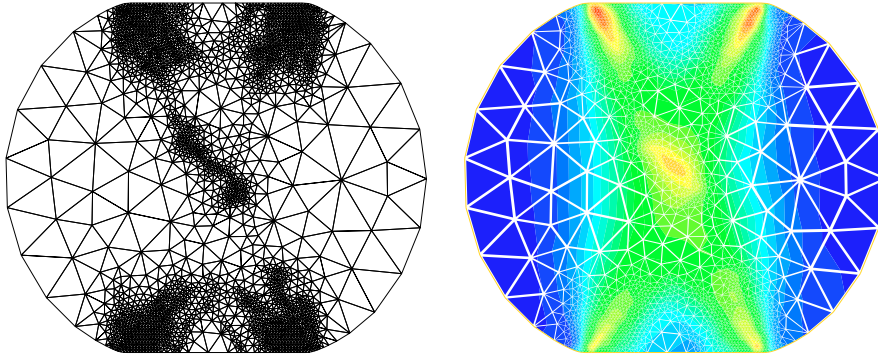


**Figure 13.** Configuration initiale du procédé de forgeage

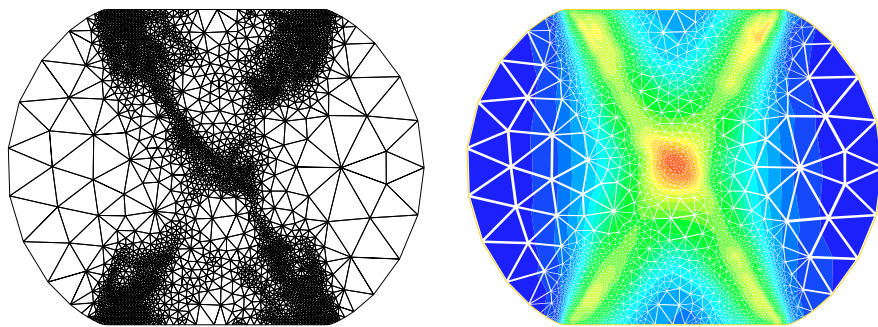
d'une part au niveau des zones de contact avec les outils (adaptation géométrique) et, d'autre part, au niveau des zones plastiques localisées (adaptation physique). La localisation de l'écoulement plastique se fait selon la fameuse « croix du forgeron » fréquemment constatée lors des expérimentations [MIE 91]. Les zones rouges indiquent respectivement une déformation plastique maximale de l'ordre de 8 % ( $d = 2\text{mm}$ ), 15,6 % ( $d = 4\text{mm}$ ), 30,1 % ( $d = 6\text{mm}$ ), 40 % ( $d = 8\text{mm}$ ), 100 % ( $d = 11\text{mm}$ ), 105 % ( $d = 13\text{mm}$ ), 110 % ( $d = 15\text{mm}$ ).



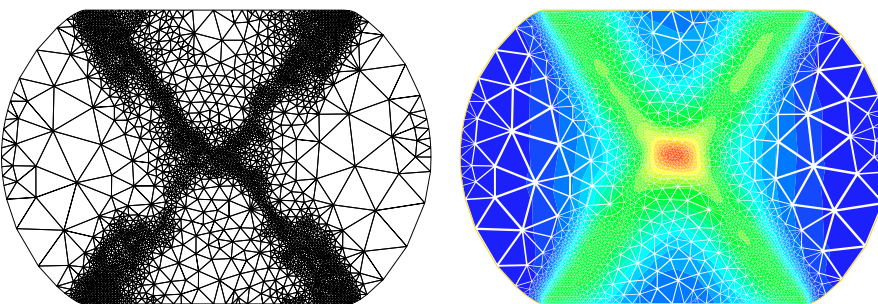
**Figure 14.** Remaillage et déformations plastiques à  $d = 2\text{ mm}$



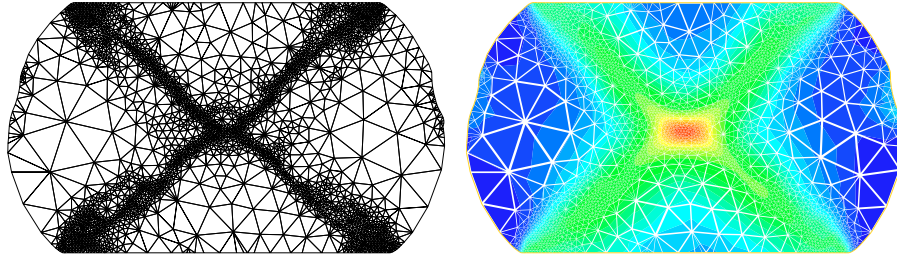
**Figure 15.** Remaillage et déformations plastiques à  $d = 4 \text{ mm}$



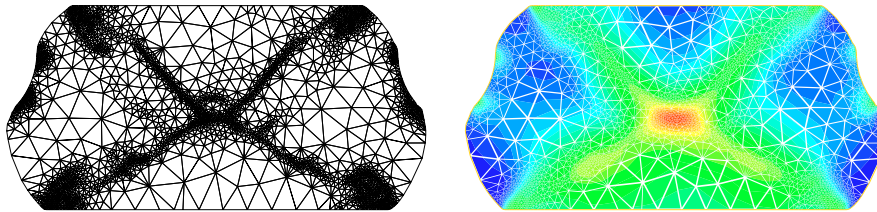
**Figure 16.** Remaillage et déformations plastiques à  $d = 6 \text{ mm}$



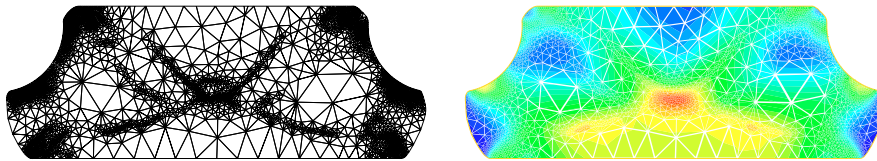
**Figure 17.** Remaillage et déformations plastiques à  $d = 8 \text{ mm}$



**Figure 18.** Remaillage et déformations plastiques à  $d = 11$  mm



**Figure 19.** Remaillage et déformations plastiques à  $d = 13$  mm



**Figure 20.** Remaillage et déformations plastiques à  $d = 15$  mm

## 6. Conclusions et perspectives

Les différentes étapes nécessaires au remaillage du domaine de calcul en grandes déformations élastoplastiques avec endommagement ont été présentées. Elles sont gouvernées notamment par des estimateurs d'erreur à caractère géométrique et physique. Une implémentation dans un environnement de calcul utilisant le code ABAQUS en deux dimensions a permis de valider la méthode proposée. En particulier, l'application de cette procédure de remaillage à des modèles de comportement élasto-

plastiques avec endommagement a permis la prévision des zones endommagées (fissures macroscopiques) dans les procédés de mise en forme. Cependant, il est constaté que l'adaptation basée sur le champ d'endommagement n'est envisageable que dans le cadre d'une formulation non locale ou d'une formulation du gradient supérieur. Cette dernière étude est en cours de développement et fera l'objet de communications ultérieures.

La généralisation en trois dimensions nécessite dans un premier temps le remaillage adaptatif de la surface de la pièce déformable, puis le remaillage adaptatif volumique de la pièce respectant une carte de taille. Ces aspects sont également en cours de développement.

REMERCIEMENTS. Les auteurs remercient la région Champagne-Ardenne (en particulier le pôle mécanique matériaux) pour le soutien et l'aide financière apportée à ce travail.

## 7. Bibliographie

- [AIN 97] AINSWORTH M., ODEN J.T., « A posteriori error estimation in finite element analysis », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 142, 1997, p. 1-88.
- [AZE 91] D'AZEVEDO E.F., SIMPSON B., « On optimal triangular meshes for minimizing the gradient error », *Numer. Math.*, vol. 59, 1991, p. 321-348.
- [BEN 94] BEN HATIRA F., FORSTER C.H., SAANOUNI K., « Prediction of anelastic flow localization in finite elastoplasticity with damage », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 3, n° 1, 1994, p. 27-56.
- [BER 99] BERZINS M., « Mesh Quality : A Function of Geometry, Error Estimates or Both ? », *Engineering with Computers*, vol. 15, 1999, p. 236-247.
- [BOR 99] BOROUCAKI H., FREY P.J., « Maillage géométrique de surfaces », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 8, n° 1, 1999, p. 47-75.
- [BOR 00] BOROUCAKI H., GEORGE P.L., « Quality mesh generation », *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 328, Série II b, 2000, p. 505-518.
- [BOR 01a] BOROUCAKI H., CHAPPELLE D., GEORGE P.L., LAUG P., FREY P.J., « Estimateurs d'erreur géométriques et adaptation de maillage », Chapitre 9 in *Maillage et adaptation (sous la direction de P.L. George), traité Mécanique et Ingénierie des Matériaux, méthodes numériques*, Hermès, 2001, p. 279-310.
- [BOR 01b] BOROUCAKI H., « La marche unité », Chapitre 4 in *Maillage et adaptation (sous la direction de P.L. George), traité Mécanique et Ingénierie des Matériaux, méthodes numériques*, Hermès, 2001, p. 139-171.
- [COR 96] COOREVITS P., DUMEAU J.P., PELLE J.P., « Analyses éléments finis adaptatives pour les structures tridimensionnelles en élasticité », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 5, n° 3, 1996, p. 341-373.
- [CRI 94] CRISFIELD M.A., « Non-linear F.E. Analysis of Solids and Structures, Tome I and II », John Wiley and Sons, 1994.

- [DEB 99] DE BORST R., PAMAIN J., GEERS M.G.D., « On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis », *Europ. J. Mech. A / solids*, vol. 18, 1999, p. 939-962.
- [DOG 89] DOGUI A., « Plasticité anisotrope en grandes déformations », Thèse de doctorat d'Etat, Université Claude Bernard, Lyon I, 1989.
- [DUM 95] DUMEAU J.P., « Contrôle et adaptation des maillages 3D : Applications à l'automatisation des calculs », Thèse de doctorat, E.N.S. Cachan, France, 1995.
- [FOR 00] FORTIN M. (COORD.), « Estimation a posteriori et adaptation de maillages », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 9, n° 4, 2000, p. 369-504.
- [FOU 92] FOURMENT L., « Estimation d'erreurs et maillage adaptatif pour la simulation numérique de procédés de mise en forme », Thèse de l'école des Mines de Paris, CEMEF, Sophia-Antipolis, 1992.
- [FRE 99] FREY P.J., GEORGE P.L., « Maillage. Applications aux éléments finis », Hermès, Paris, France, 1999.
- [GAN 00] GANGHOFFER J.F., DE BORST R., « A new framework in nonlocal mechanics », *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 38, 2000, p. 453-486.
- [GEL 85] GELIN J.C., OUDIN J., RAVALARD Y., « An Imposed Finite Element Method for the analysis of Damage and Ductile Fracture in Cold Metal Forming Processes », *Annals of the CIRP*, vol. 34, n° 1, 1985, p. 209-213.
- [GEL 98] GELIN J.C., « Modelling of damage in metal forming processes », *J. Mater. Proc. Tech.*, vol. 80-81, n° 0, 1998, p. 24-32.
- [GEO 97] GEORGE P.L., BOROUCHE H., « Triangulation de Delaunay et Maillage. Applications aux éléments finis », Hermès, Paris, France, 1997.
- [HAM 93] HAMANN B., « Curvature approximation for triangulated surfaces », *Computing Suppl.*, vol. 8, 1993, p. 139-153.
- [HAM 00] HAMMI Y., « Simulation numérique de l'endommagement dans les procédés de mise en forme », Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2000.
- [HOM 96] HOMSI M., MORANÇAY L., ROELANDT J.M., « Techniques de remaillage appliquées au découpage des métaux », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 5, n° 3, 1996, p. 297-321.
- [LAD 96] LADEVEZE P., « Mécanique non-linéaire des structures », Hermès, Paris, France, 1996.
- [LAD 01] LADEVEZE P., PELLE J.P., « La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire, études en mécanique des matériaux et des structures », Hermès, Paris, France, 2001.
- [LAU 96] LAUG P., BOROUCHE H., GEORGE P.L., « Discrétisation adaptative des courbes », *Revue internationale de CFAO et d'informatique graphique*, vol. 11, n° 6, 1996, p. 617-634.
- [LEM 88] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., « Mécanique des matériaux solides », Edition Dunod, 1988.
- [LEM 92] LEMAITRE J., « A course on damage Mechanic », Springer Verlag, 1994.
- [MIE 91] MIELNIK E.M., « Metalworking Science and Enginieerin », Mc Graw Hill, 1991.
- [SAA 94] SAANOUNI K., FORSTER C.H., BEN HATIRA F., « On the anelastic flow with damage », *Int. J. of Dammage Mechanics*, vol. 3, n° 2, 1994, p. 140-169.

- [SAA 00a] SAANOUNI K., NESNAS K., HAMMI Y., « Damage modelling in metal forming processes », *Int. J. of Damage Mechanics*, vol. 9, n° 2, 2000, p. 196-240.
- [SAA 00b] SAANOUNI K., HAMMI Y., « Numerical simulation of damage in metal forming processes », in *Continuous Damage and Fracture*, Editor A. Benallal, Elsevier, 2000, p. 353-363.
- [SAA 01a] SAANOUNI K., CHEROUAT A., HAMMI Y., « Numerical aspects of finite elastoplasticity with isotropic ductile damage for metal forming », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 10, n° 2-3-4, 2001, p. 327-351.
- [SAA 01b] SAANOUNI K. (GUEST EDITOR), « Numerical Modelling in Damage Mechanics, NUMEDAM'00 », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 10, n° 2-3-4, 2001.
- [SIM 98] SIMO J.C., HUGHES T.J.R., « Computational Inelasticity », Springer Verlag, 1998.
- [VER 96] VERFÜRTH R., « A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques », Wiley & Teubner, 1996.
- [WAL 96] WALTON D.J., MEEK D.S., « A triangular  $G^1$  patch from boundary curves », *Computer Aided Design*, vol. 28, n° 2, 1996, p. 113-123.