

---

# Estimations d'erreur pour les problèmes de contact unilatéral avec frottement

François Louf — Jean-Pierre Pelle — Jean-Philippe Combe

*Laboratoire de Mécanique et Technologie  
ENS Cachan / CNRS / Université Paris 6  
61, avenue du Président Wilson  
F-94230 Cachan  
louf@lmt.ens-cachan.fr*

---

*RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous proposons un estimateur d'erreur pour les problèmes de contact unilatéral avec frottement, en statique. L'utilisation de la notion de bipotentiel pour formuler la relation de comportement sur la zone de contact conduit de façon très naturelle à la construction d'un estimateur en relation de comportement pour ce type de problèmes. La mise en œuvre est détaillée dans le cas du contact de deux solides élastiques et différents exemples d'application à des problèmes bidimensionnels sont présentés. Enfin, un indicateur d'erreur permettant d'apprécier la qualité de la résolution approchée du problème non linéaire est proposé.*

*ABSTRACT. In this paper, we present an error estimator for contact problems involving friction. The use of a bipotential in order to formulate the constitutive relation on the contact zone leads to a very straightforward construction of a constitutive relation error estimator for these problems. The implementation is detailed in the case of two elastic bodies and some 2D-examples are presented. An error indicator allowing to estimate the quality of the numerical solution of the non linear problem is presented.*

*MOTS-CLÉS : contact, frottement, bipotentiel, erreur en relation de comportement, éléments finis.*

*KEYWORDS: contact, friction, bipotential, error in constitutive relation, finite element computation.*

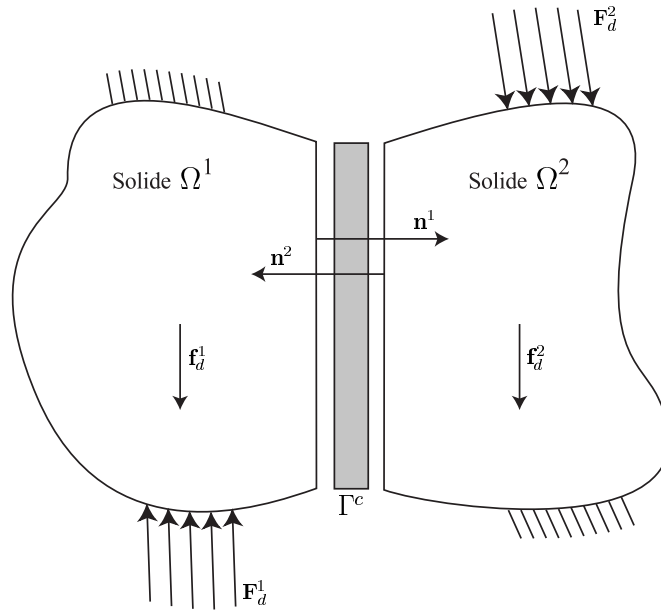
---

## 1. Introduction

La simulation numérique des problèmes de contact unilatéral avec frottement utilise, le plus souvent, des algorithmes itératifs et une discrétisation en espace de type éléments finis. Pour l'utilisateur, il importe de pouvoir quantifier les erreurs inhérentes à l'utilisation de l'ensemble de ces approximations numériques. L'objet de ce papier est de proposer et de mettre en œuvre un estimateur d'erreur en relation de comportement pour ce type de simulations. Pour les problèmes linéaires, plusieurs démarches permettent de construire des estimateurs d'erreur de discrétisation :

- la méthode de l'erreur en relation de comportement associée à des techniques adaptées de construction de champs admissibles [LAD 75, LAD 91] ;
- l'utilisation des résidus d'équilibre [BAB 78] ;
- l'utilisation de techniques de lissage [BOR 98, ZIE 87].

Une synthèse de ces différentes méthodes peut être trouvée dans [ODE 97] et [LAD 01]. Pour les problèmes non linéaires et, notamment pour les non-linéarités de type contact, très peu de travaux existent. Dans le cas du non-frottement, le concept d'erreur en relation de comportement a permis de construire un premier estimateur d'erreur [COO 99a, COO 99b]. Le travail proposé ici prolonge, dans le cas du frottement, les précédents travaux réalisés au LMT-Cachan. Dans la deuxième section, nous rappelons la formulation du problème étudié : contact avec frottement de deux solides élastiques en petites perturbations. Cette formulation utilise une modélisation spécifique de la zone de contact en tant qu'entité mécanique à part entière comportant ses propres variables, ses liaisons cinématiques, ses équations d'équilibre et sa relation de comportement. En particulier, cette relation de comportement est écrite en utilisant un bipotentiel [SAX 92] qui joue un rôle central dans la définition de l'erreur en relation de comportement. L'extension de l'estimateur en relation de comportement dans le cas du frottement de Coulomb est présentée à la section 3. Section 4, nous présentons la technique itérative utilisée pour obtenir une approximation de la solution. Cette technique utilise une discrétisation en espace de type éléments finis et un algorithme de type point fixe pour traiter le problème non linéaire. Les méthodes de construction des champs admissibles nécessaires à la mise en œuvre de l'estimateur en relation de comportement sont détaillées à la section 5. Des exemples d'application sont présentés et discutés section 6. Pour terminer, nous montrons comment le concept d'erreur en relation de comportement permet de bâtir facilement un indicateur d'erreur pour apprécier la qualité de la résolution approchée du problème du point fixe et donc de séparer dans l'erreur globale la part de l'erreur due à cette résolution approchée de celle due à la discrétisation en espace. Une telle séparation est indispensable pour élaborer des méthodes robustes d'adaptation des calculs.



**Figure 1.** Notations

## 2. Le problème de référence

### 2.1. Notations

On considère ici le problème de deux solides élastiques  $\Omega^1$  et  $\Omega^2$  en contact unilatéral sur une interface  $\Gamma^c$  (figure 1). On supposera que le contact est du type frottement sec (loi de Coulomb). La partie  $\partial\Omega^l - \Gamma^c$  de la frontière de chaque solide est supposée composée d'une partie  $\partial_1\Omega^l$  où le champ de déplacement est imposé nul et une partie  $\partial_2\Omega^l$  où les efforts appliqués  $\mathbf{F}_d^l$  sont donnés. En outre, sur chaque solide est appliquée une densité volumique de force  $\mathbf{f}_d^l$  donnée. On note  $\mathbf{K}^l$  l'opérateur de Hooke de  $\Omega^l$ .

### 2.2. Modélisation du contact

Afin de faciliter la définition d'une erreur en relation de comportement, il est utile de considérer l'interface  $\Gamma^c$  comme une entité mécanique à part entière. Elle assure la transmission des déplacements et des efforts de part et d'autre de  $\Gamma^c$  et elle est munie de sa propre relation de comportement. Orientons  $\Gamma^c$  par le choix du vecteur normal unité, par exemple :  $\mathbf{n}^c = \mathbf{n}^1$ . Introduisons sur l'interface les grandeurs mécaniques  $\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \mathbf{F}^1, \mathbf{F}^2$  et  $\mathbf{F}^c$  représentant deux champs de déplacement (déplacements de part

et d'autre de l'interface), deux champs de densité surfacique de force (efforts transmis à  $\Omega^1$  et à  $\Omega^2$ ) et un champ de densité surfacique de force « intérieur »  $\mathbf{F}^c$  définis sur  $\Gamma^c$ . L'équilibre de l'interface se traduira par :

$$\mathbf{F}^c = -\mathbf{F}^1 \text{ et } \mathbf{F}^c = \mathbf{F}^2$$

Introduisons le saut de déplacement qui, pour l'interface, joue un rôle analogue à une déformation :

$$\mathbf{w}^c = \mathbf{w}^2 - \mathbf{w}^1$$

Pour tout vecteur  $\mathbf{v}$ , posons :

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^c \text{ et } \mathbf{v}_t = \mathbf{v} - v_n \mathbf{n}^c$$

Dans le cas statique, la relation de comportement de type frottement sec peut être formulée en force-déplacement de la façon suivante [DUV 72] :

$$\begin{aligned} w_n^c \geq 0 \quad F_n^c \geq 0 \quad F_n^c w_n^c = 0 \\ \|\mathbf{F}_t^c\| \leq \mu F_n^c \quad \mathbf{w}_t^c \wedge \mathbf{F}_t^c = 0 \quad \mathbf{w}_t^c \cdot \mathbf{F}_t^c \leq 0 \end{aligned} \quad [1]$$

où  $\mu$  désigne le coefficient de frottement.

Utilisons la démarche de [SAX 92] et introduisons la fonction :

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{F}) = \chi_B(\mathbf{v}) + \chi_{C(\mu)}(\mathbf{F}) + \mu F_n \|\mathbf{v}_t\|$$

où  $\chi_B$  et  $\chi_{C(\mu)}$  sont les fonctions indicatrices des convexes :

$$\begin{aligned} B &= \{\mathbf{v} / v_n \leq 0\} \\ C(\mu) &= \{\mathbf{F} / F_n \geq 0 \text{ et } \|\mathbf{F}_t\| \leq \mu F_n\} \end{aligned}$$

On peut trouver dans [SAX 92] la démonstration détaillée des propriétés de  $b$  et notamment que  $b(\mathbf{v}, \mathbf{F})$  est un bipotentiel, c'est-à-dire que :

- pour  $\mathbf{v}$  fixé,  $b(\mathbf{v}, \mathbf{F})$  est convexe en  $\mathbf{F}$ ,
- pour  $\mathbf{F}$  fixé,  $b(\mathbf{v}, \mathbf{F})$  est convexe en  $\mathbf{v}$ ,
- pour tout  $\mathbf{v}$  et pour tout  $\mathbf{F}$  :

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{F}) - \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \geq 0 \quad [2]$$

Alors, la relation de comportement [1] est équivalente à la condition :

$$b(-\mathbf{w}^c, \mathbf{F}^c) + \mathbf{w}^c \cdot \mathbf{F}^c = 0$$

### 2.3. Formulation du problème

Le problème du contact unilatéral peut donc être formulé de la façon suivante : trouver  $(\mathbf{u}^1, \boldsymbol{\sigma}^1)$  défini sur  $\Omega^1$ ,  $(\mathbf{u}^2, \boldsymbol{\sigma}^2)$  défini sur  $\Omega^2$  et  $(\mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \mathbf{F}^c, \mathbf{F}^1, \mathbf{F}^2)$  défini sur  $\Gamma^c$  vérifiant :

– les liaisons cinématiques :

$$\mathbf{u}_{|\partial_1\Omega^1}^1 = 0, \quad \mathbf{u}_{|\partial_1\Omega^2}^2 = 0, \quad \mathbf{u}_{|\Gamma^c}^1 = \mathbf{w}^1, \quad \mathbf{u}_{|\Gamma^c}^2 = \mathbf{w}^2 \quad [3]$$

– les équations d'équilibre :

pour  $l = 1, 2, \forall \mathbf{u}^*$  nul sur  $\partial_1\Omega^l$  :

$$\int_{\Omega^l} Tr[\boldsymbol{\sigma}^l \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^*)] d\Omega = \int_{\Omega^l} \mathbf{f}_d^l \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2\Omega^l} \mathbf{F}_d^l \cdot \mathbf{u}^* dS + \int_{\Gamma^c} \mathbf{F}^l \cdot \mathbf{u}^* dS \quad [4]$$

sur  $\Gamma^c$  :

$$\mathbf{F}^c = -\mathbf{F}^1 = \mathbf{F}^2 \quad [5]$$

– les relations de comportement :

$$\text{pour } l = 1, 2, \quad \boldsymbol{\sigma}^l = \mathbf{K}^l \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^l) \quad [6]$$

$$\text{sur } \Gamma^c, \quad b(-\mathbf{w}^c, \mathbf{F}^c) + \mathbf{w}^c \cdot \mathbf{F}^c = 0 \quad [7]$$

### 3. Erreur en relation de comportement

La démarche de l'erreur en relation de comportement repose sur le partitionnement des équations précédentes en deux groupes :

- les conditions d'admissibilité (équations [3], [4] et [5]),
- les relations de comportement (équations [6] et [7]).

En pratique, les relations de comportement sont souvent les moins fiables de toutes les équations du modèle de référence. Aussi, il est naturel de considérer des solutions approchées qui vérifient exactement les conditions d'admissibilité et de quantifier leur qualité par la façon dont les relations de comportement sont vérifiées. On est ainsi conduit à introduire la définition suivante :

Définition

On dit que les champs :

$$s_{Ad} = (\hat{\mathbf{u}}^1, \hat{\boldsymbol{\sigma}}^1, \hat{\mathbf{u}}^2, \hat{\boldsymbol{\sigma}}^2, \hat{\mathbf{w}}^1, \hat{\mathbf{w}}^2, \hat{\mathbf{F}}^c, \hat{\mathbf{F}}^1, \hat{\mathbf{F}}^2) \quad [8]$$

sont admissibles s'ils vérifient les équations d'admissibilité [3], [4] et [5].

On peut alors définir une mesure d'erreur en relation de comportement par :

$$e_{RdC}^2(s_{Ad}) = \sum_{i=1}^2 \|\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^l - \mathbf{K}^l \boldsymbol{\epsilon}(\widehat{\mathbf{u}}^l)\|_{\Omega^l}^2 + 2 \int_{\Gamma^c} [b(-\widehat{\mathbf{w}}^c, \widehat{\mathbf{F}}^c) + \widehat{\mathbf{w}}^c \cdot \widehat{\mathbf{F}}^c] ds \quad [9]$$

Compte tenu des propriétés du bipotentiel, cette mesure d'erreur  $e_{RdC}(s_{Ad})$  est nulle si et seulement si  $s_{Ad}$  vérifie les relations de comportement [6] et [7], c'est-à-dire si et seulement si  $s_{Ad}$  est solution du problème de référence. A cette erreur absolue  $e_{RdC}(s_{Ad})$ , on associe une erreur relative :

$$\epsilon_{RdC}(s_{Ad}) = e_{RdC}(s_{Ad})/D \quad [10]$$

avec :

$$D^2 = \sum_{i=1}^2 \|\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^l + \mathbf{K}^l \boldsymbol{\epsilon}(\widehat{\mathbf{u}}^l)\|_{\Omega^l}^2 + 2 \int_{\Gamma^c} b(-\widehat{\mathbf{w}}^c, \widehat{\mathbf{F}}^c) ds$$

REMARQUE. – Dans le cas du non-frottement :  $\mu = 0$ , le bipotentiel devient :

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{F}) = \chi_B(\mathbf{v}) + \chi_{C(0)}(\mathbf{F})$$

avec  $C(0) = \{\mathbf{F}/F_n \geq 0 \text{ et } \mathbf{F}_t = 0\}$ .

On retrouve dans ce cas une formulation plus classique de la relation de comportement [7] à l'aide d'un couple de potentiels conjugués et l'inégalité [2] est alors la classique inégalité de Legendre-Fenchel. On retrouve donc la mesure d'erreur introduite dans [COO 99a] dans le cas du non-frottement. Rappelons que la présence du coefficient 2 devant l'intégrale sur  $\Gamma^c$  permet, dans le cas du non-frottement, d'établir un lien entre l'erreur en relation de comportement et les erreurs en solution [COO 99a] :

$$e_{RdC}^2(s_{Ad}) \geq \sum_{i=1}^2 \|\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^l - \boldsymbol{\sigma}_{ex}^l\|_{\Omega^l}^2$$

#### 4. Résolution numérique du problème de référence

Pour simplifier, nous allons présenter la méthode utilisée dans le cas d'un solide élastique en contact avec un obstacle rigide ; ce cas particulier correspond au cas où la rigidité de  $\Omega^2$  est très grande devant celle de  $\Omega^1$ . L'extension au cas général ne pose pas de difficulté. Afin d'alléger les notations, on omettra dans cette section l'indice supérieur 1.

#### 4.1. Formulation variationnelle

Le problème de contact unilatéral avec frottement peut être formulé à l'aide d'une inéquation variationnelle [DUV 72, RAO 88] :  
trouver le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  tel que :

$$\mathbf{u} \in \mathbf{U} = \left\{ \mathbf{u} \in [H^1(\Omega)] \quad / \quad \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial_1 \Omega \quad \text{et} \quad \mathbf{u} \in B \right\}$$

et, pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$  :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) + J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - J(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

avec :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \text{Tr}[\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \mathbf{K} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})] d\Omega \\ J(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \int_{\Gamma^c} \mu |F_n(\mathbf{v})| \| \mathbf{w}_t \| d\Gamma \quad \text{et} \quad F_n(\mathbf{v}) = [\mathbf{K} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \mathbf{n}^c]_n \\ L(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_d \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{F}_d \cdot \mathbf{v} dS \end{aligned}$$

#### 4.2. Méthode de point fixe

Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre ce type de problèmes : méthode de pénalisation, de point fixe... Nous utiliserons ici celle du point fixe développée dans [RAO 88]. Dans son principe, elle peut être décrite de la façon suivante :

– initialisation : choix d'une fonction  $g^0$ , définie sur  $\Gamma^c$  qui représente un seuil limite de glissement-adhérence,

– itération courante : résolution d'un problème de contact unilatéral de type Tresca pour un seuil  $g^k$  fixé :

trouver  $\mathbf{u}^{k+1} \in \mathbf{U}$  tel que, pour tout  $\mathbf{v} \in \mathbf{U}$  :

$$a(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v} - \mathbf{u}^{k+1}) + \tilde{J}(g^k, \mathbf{v}) - \tilde{J}(g^k, \mathbf{u}^{k+1}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}^{k+1})$$

avec :

$$\tilde{J}(g^k, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma^c} g^k \| \mathbf{v}_t \| d\Gamma$$

ce qui correspond à une relation de comportement sur la zone  $\Gamma^c$  de contact de la forme :

$$\| \mathbf{F}_t^{c, k+1} \| \leq g^k$$

avec :

$$\begin{aligned} \text{si} \quad \| \mathbf{F}_t^{c, k+1} \| < g^k & \text{ alors } \| \mathbf{w}_t^{c, k+1} \| = 0 \\ \text{si} \quad \| \mathbf{F}_t^{c, k+1} \| = g^k & \text{ alors } \mathbf{w}_t^{c, k+1} = -\lambda \mathbf{F}_t^{c, k+1} \quad (\lambda \geq 0) \end{aligned}$$

Ce problème de Tresca est équivalent à celui de minimisation sous contraintes convexes :

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \left[ \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \tilde{J}(g^k, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \right] \quad [11]$$

La résolution s'effectue comme pour un problème de contact unilatéral sans frottement en introduisant, par exemple, des multiplicateurs de Lagrange. La nouvelle fonction seuil glissement-adhérence  $g^{k+1}$  est alors définie de la façon suivante :

– si en  $M \in \Gamma^c : \mathbf{w}_t^{c,k+1} = 0$  et  $\| \mathbf{F}_t^{c,k+1} \| < \mu | F_n^{c,k+1} |$  alors :

$$g^{k+1} = \| \mathbf{F}_t^{c,k+1} \|$$

– si en  $M \in \Gamma^c : \mathbf{w}_t^{c,k+1} = 0$  et  $\| \mathbf{F}_t^{c,k+1} \| \geq \mu | F_n^{c,k+1} |$ , ou si  $\mathbf{w}_t^{c,k+1} \neq 0$  alors :

$$g^{k+1} = \mu | F_n^{c,k+1} |$$

On arrête les itérations lorsque  $g^{k+1}$  est suffisamment proche de  $g^k$ .

### 4.3. Problème discrétisé

En pratique, les problèmes précédents sont résolus de façon approchée par une méthode d'éléments finis en déplacement. Les champs de déplacement sont donc recherchés de la forme :

$$\mathbf{u}_h^l = \sum_{n=1}^N N_n^l(M) \mathbf{u}_n^l$$

où les  $N_n^l(M)$  sont les fonctions de forme de la discrétisation éléments finis et les  $\mathbf{u}_n^l(M)$  les déplacements aux nœuds.

Les éléments finis utilisés sont des triangles à trois nœuds et lorsque l'on traite le contact entre deux solides élastiques, nous supposons, pour simplifier, que les maillages utilisés sont compatibles. Pour un nœud  $k$  situé sur  $\Gamma^c$ , on a donc :

$$N_k^1 \Big|_{\Gamma^c} = N_k^2 \Big|_{\Gamma^c}$$

Ces restrictions à  $\Gamma^c$  des fonctions de base seront donc simplement notées  $N_k$ . Pour le cas de maillages incompatibles, on pourra se reporter à [COO 99b].

La condition de non-pénétration  $w_n^c \geq 0$ , qui constitue la contrainte d'optimisation du problème [11] peut être discrétisée de différentes façons :

– traitement local en chaque nœud de  $\Gamma^c$  :

Notons  $\{1, 2, \dots, p\}$  les nœuds situés sur  $\Gamma^c$ . La condition  $\mathbf{w}^c \in B$  est traduite sur le champ éléments finis en chaque nœud  $k$  de  $\Gamma^c$  par :

$$w_n^c(k) \geq 0 \quad [12]$$



Numériquement, la condition [12] est traitée à l'aide de multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda_h(k)$  qui représentent une discrétisation de  $F_n^c$  sur  $\Gamma^c$ . Ces multiplicateurs vérifient :

$$[\mathbf{M}^c \mathbf{\Lambda}_h]_k \geq 0$$

où l'on a posé :

$$\mathbf{\Lambda}_h = [\Lambda_h(1) \quad \Lambda_h(2) \quad \dots \quad \Lambda_h(p)]^T$$

$$\mathbf{M}^c = [M_{kq}^c] \text{ avec } M_{kq}^c = \int_{\Gamma^c} N_k N_q d\Gamma$$

– traitement par une condition globale en moyenne sur  $\Gamma^c$  :

Dans ce cas, la condition  $\mathbf{w}^c \in B$  est traduite sur le champ éléments finis par :

$$\int_{\Gamma^c} w_n^c(k) N_k d\Gamma \geq 0 \quad [13]$$

pour toute fonction de base  $N_k$  associée à un nœud de  $\Gamma^c$ . Numériquement, la condition [13] est aussi traitée par des multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda_h(k)$  représentant une discrétisation de  $F_n^c$  sur  $\Gamma^c$  et ils vérifient, pour tout nœud  $k$  de  $\Gamma^c$  :

$$\Lambda_h(k) \geq 0$$

Par contre, ici,  $w_n^c$  vérifie seulement :

$$\mathbf{M}^c \mathbf{w}_n^c \geq 0 \text{ avec } \mathbf{w}_n^c = \sum_{k=1}^p N_k w_n^c(k)$$

La solution numérique peut donc correspondre à une légère interpénétration sur  $\Gamma^c$ .

Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter, par exemple, à [COO 99b] et à [HIL 98].

## 5. Mise en œuvre de la mesure d'erreur

La solution approchée du problème de référence obtenue par la méthode décrite à la section précédente n'est pas, en général, admissible au sens de la définition [8]. Pour mettre en œuvre l'erreur en relation de comportement [9] (ou [10]), il est donc nécessaire de reconstruire à partir de la solution approchée une solution admissible :

$$s_{Ad} = (\hat{\mathbf{u}}^1, \hat{\boldsymbol{\sigma}}^1, \hat{\mathbf{u}}^2, \hat{\boldsymbol{\sigma}}^2, \hat{\mathbf{w}}^1, \hat{\mathbf{w}}^2, \hat{\mathbf{F}}^c, \hat{\mathbf{F}}^1, \hat{\mathbf{F}}^2)$$

Par rapport aux techniques de construction de champs admissibles développées en élasticité linéaire [LAD 91], la seule différence est qu'il faut construire ces champs de façon que :

$$\hat{w}_n^c = \hat{w}_n^2 - \hat{w}_n^1 \geq 0 \quad [14]$$

$$\hat{F}_n^c \geq 0 \quad [15]$$

$$\| \hat{\mathbf{F}}_t^c \| \leq \mu | \hat{F}_n^c | \quad [16]$$

sinon, le bipotentiel  $b(-\widehat{\mathbf{w}}^c, \widehat{\mathbf{F}}^c)$  devient infini et, dans ces conditions, la mesure d'erreur  $e_{RdC}(s_{Ad})$  est totalement inconsistante.

Les techniques utilisées pour respecter les contraintes [14] et [15], qui dépendent de la façon dont la condition de non-pénétration est discrétisée, sont décrites en détail dans [COO 99b] dans le cas du non-frottement. Dans le cas du frottement, il est nécessaire de compléter ces techniques afin de respecter aussi la contrainte [16]. Les grandes lignes de ces méthodes sont données ci-dessous.

### 5.1. Construction des champs de déplacement admissibles

Introduisons les traces sur  $\Gamma^c$  des champs éléments finis  $\mathbf{u}_h^l : \mathbf{u}_h^l|_{\Gamma^c} = \mathbf{w}_h^l$ . Distinguons deux cas selon le traitement de la condition de non-pénétration :

– traitement local de la condition de non-pénétration.

Dans ce cas, les  $\mathbf{w}_h^l$  vérifient la condition de non-pénétration [14] :

$$w_{hn}^c = w_{hn}^2 - w_{hn}^1 \geq 0$$

On choisit donc :

$$\widehat{\mathbf{u}}^l = \mathbf{u}_h^l \text{ et } \widehat{\mathbf{w}}^l = \mathbf{w}_h^l$$

– traitement global de la condition de non-pénétration.

Dans ce cas, la condition [14] n'est pas rigoureusement vérifiée par les champs éléments finis. Pour les nœuds situés sur  $\Gamma^c$ , on définit les parties normales par ( $E^l$  désigne le module de Young du solide  $\Omega^l$ ) :

$$\widehat{w}_n^1(k) = w_{hn}^1(k) + \frac{E^2}{E^1 + E^2} \text{inf} [w_{hn}^c(k), 0]$$

$$\widehat{w}_n^2(k) = w_{hn}^2(k) - \frac{E^1}{E^1 + E^2} \text{inf} [w_{hn}^c(k), 0]$$

ce qui entraîne :  $\widehat{w}_n^c = \widehat{w}_n^2 - \widehat{w}_n^1 \geq 0$

Pour les parties tangentielles, on pose :  $\widehat{\mathbf{w}}_t^l(k) = \mathbf{w}_{ht}^l(k)$  ( $l = 1, 2$ ).

Pour les nœuds situés sur  $\Gamma^c$ , on pose :  $\widehat{\mathbf{u}}^l = \mathbf{w}_h^l$  ( $l = 1, 2$ ) et pour les autres nœuds, on prend simplement :  $\widehat{\mathbf{u}}^l = \mathbf{u}_h^l$  ( $l = 1, 2$ ).

Par interpolation linéaire sur les éléments, les champs  $\widehat{\mathbf{u}}^l$  sont ainsi complètement définis.

### 5.2. Construction des densités d'effort sur la zone de contact $\Gamma^c$

Lorsque l'on arrête l'algorithme du point fixe, les forces nodales généralisées vérifient sur  $\Gamma^c$  :

$$\mathbf{F}_h^c(k) = \mathbf{F}_h^2(k) = -\mathbf{F}_h^1(k) \text{ et } \|\mathbf{F}_{ht}^c(k)\| \leq \mu |F_{hn}^c(k)|$$

On peut alors reconstruire des densités continues et linéaires par morceaux de la forme :

$$\tilde{\mathbf{F}}_h^c = \sum_{k=1}^p N_k \tilde{\mathbf{F}}_h^c(k)$$

les  $\tilde{\mathbf{F}}_h^c(k)$  étant déterminés en résolvant le système linéaire :

$$\mathbf{M}^c \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_h^c(1) \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{F}}_h^c(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_h^c(1) \\ \vdots \\ \mathbf{F}_h^c(p) \end{bmatrix}$$

Afin de vérifier les conditions [15] et [16], on choisit :

$$\hat{F}_n^c = \sup[\tilde{F}_{hn}^c, 0]$$

et :

$$\hat{\mathbf{F}}_t^c = \frac{\tilde{\mathbf{F}}_{ht}^c}{\|\tilde{\mathbf{F}}_{ht}^c\|} \inf[\|\tilde{\mathbf{F}}_{ht}^c\|, \mu |\tilde{F}_{hn}^c|]$$

et l'on impose alors :

$$\hat{\mathbf{F}}^2 = \hat{\mathbf{F}}^c \text{ et } \hat{\mathbf{F}}^1 = -\hat{\mathbf{F}}^c \quad [17]$$

### 5.3. Construction des champs de contrainte admissibles

Avec les efforts définis par [17], on effectue une résolution approchée de [5] par éléments finis. On résout donc les deux problèmes d'élasticité en déplacement :

pour  $l = (1, 2)$ , trouver  $\tilde{\mathbf{u}}_h^l$  nul sur  $\partial_1 \Omega^l$  et de type éléments finis tel que,  $\forall \mathbf{u}_h^*$  nul sur  $\partial_1 \Omega^l$  et de type éléments finis :

$$\int_{\Omega^l} Tr[\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_h^l) \mathbf{K}^l \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_h^*)] d\Omega = \int_{\Omega^l} \mathbf{f}_d^l \cdot \mathbf{u}_h^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^l} \mathbf{F}_d^l \cdot \mathbf{u}_h^* dS + \int_{\Gamma^c} \hat{\mathbf{F}}^l \cdot \mathbf{u}_h^* dS$$

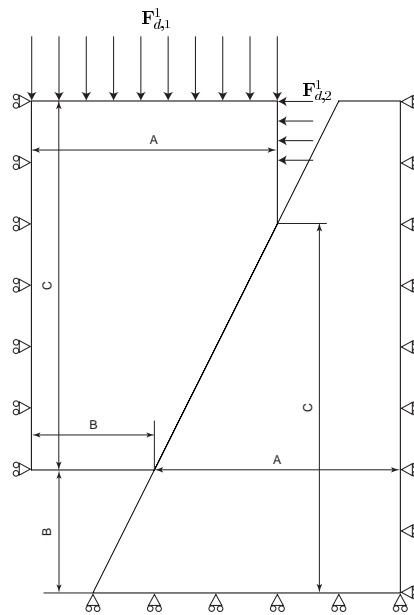
On obtient ainsi les champs de contraintes  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h^l = \mathbf{K}^l \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_h^l)$  qui sur chaque domaine  $\Omega^l$  sont en équilibre au sens faible des éléments finis avec les charges  $\mathbf{f}_d^l$ ,  $\mathbf{F}_d^l$  et  $\hat{\mathbf{F}}^l$ . La construction des champs  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^l$  est alors effectuée par les techniques développées pour les problèmes d'élasticité [LAD 91].

REMARQUE. – L'estimateur d'erreur en relation de comportement  $e_{RdC}(s_{Ad})$  ainsi construit prend en compte toutes les erreurs de discrétisation introduites par la méthode approchée de résolution :

- les erreurs de discrétisation en espace de type éléments finis,
- les erreurs dues à la méthode itérative du point fixe.

## 6. Exemples

### 6.1. Un premier exemple



**Figure 2.** Premier cas test

Cet exemple, décrit sur la figure 2, concerne le contact unilatéral avec frottement de deux solides élastiques. La discrétisation éléments finis utilise des maillages compatibles représentés sur la figure 3. Les données sont :

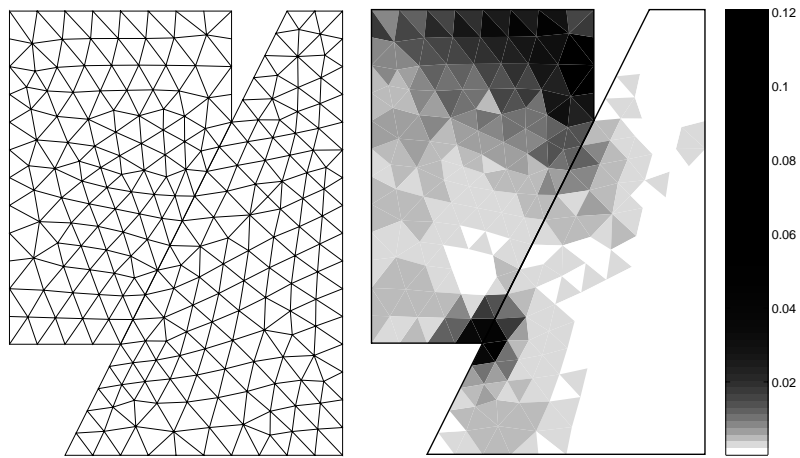
$$\begin{array}{lll}
 A = 40 \text{ mm} & B = 20 \text{ mm} & C = 60 \text{ mm} \\
 \nu^1 = 0,38 & \nu^2 = 0,38 & \mu = 0,1 \\
 E^1 = 2\,400 \text{ MPa} & E^2 = 2\,400 \text{ MPa} & \\
 \| \mathbf{F}_{d,1}^1 \| = 0,1 \text{ MPa} & \| \mathbf{F}_{d,2}^1 \| = 1 \text{ MPa} & 
 \end{array}$$

L'erreur obtenue sur ce problème, 29 %, est importante car le maillage utilisé est relativement grossier. Afin d'améliorer, la qualité de la solution numérique obtenue, appliquons les techniques d'adaptation des maillages développées en élasticité [COO 99a, LAD 91, LAD 01]. Ces techniques ont pour objectif, à partir de l'analyse des résultats obtenus sur un premier calcul, de déterminer les tailles des éléments d'un maillage optimal, c'est-à-dire d'un maillage qui permette de respecter la précision désirée tout en minimisant le nombre d'éléments du maillage. Fixons une précision à

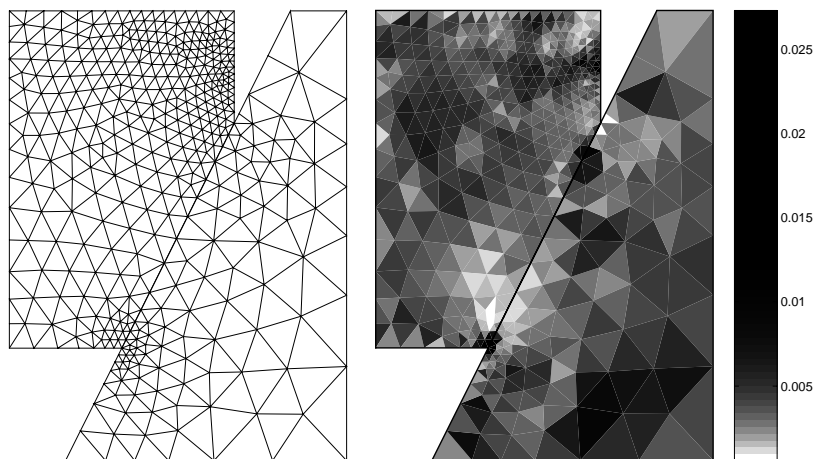
atteindre :  $\epsilon_0 = 5 \%$ . Pour chaque étape de l'optimisation, nous donnons sur les figures 3, 4 et 5 le maillage et la carte des contributions locales à l'erreur globale  $\epsilon_E$  définies par :

$$\epsilon_E^2 = \frac{\|\hat{\varphi}^1 - \mathbf{K}^1 \boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}}^1)\|_E^2 + 2 \int_{\partial E \cap \Gamma^c} b(-\hat{\mathbf{w}}^c, \hat{\mathbf{F}}^c) + \hat{\mathbf{w}}^c \cdot \hat{\mathbf{F}}^c ds}{D}$$

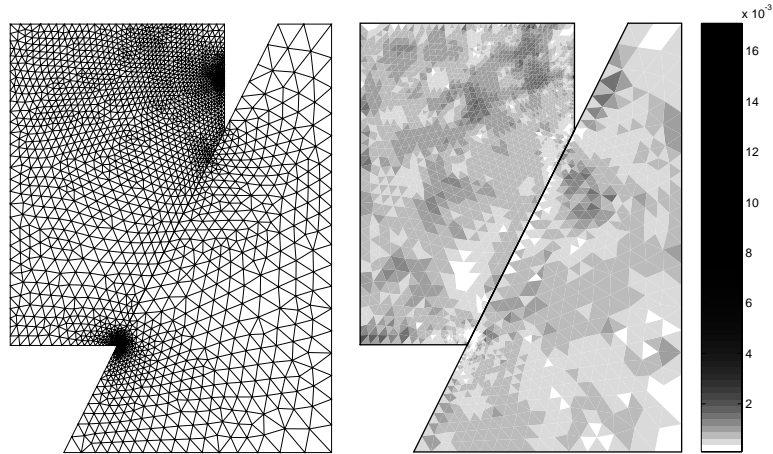
En deux étapes d'optimisation (figures 4 et 5), on atteint sans difficulté la précision désirée.



**Figure 3.** *Maillage initial : 430 éléments - 29 % d'erreur*



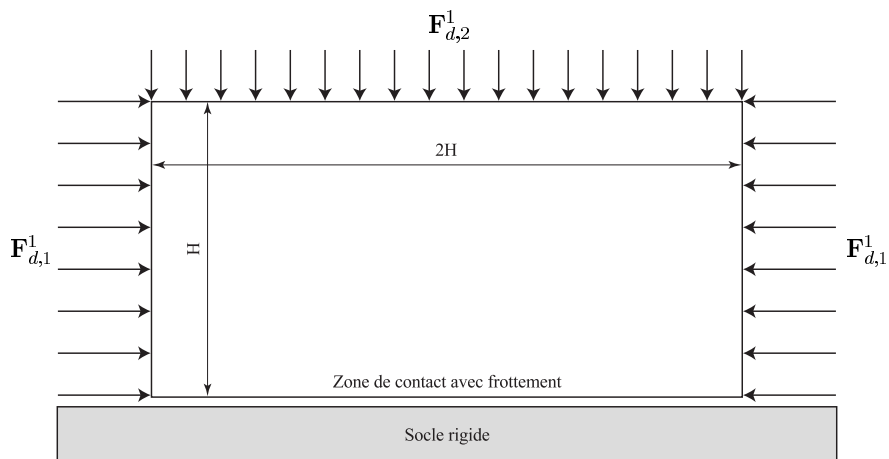
**Figure 4.** *Premier étape d'optimisation : 767 éléments - 13 % d'erreur*



**Figure 5.** Deuxième étape d'optimisation : 4 475 éléments - 5,5 % d'erreur

### 6.2. Un deuxième exemple

Ce deuxième exemple est un cas test classique dans les problèmes de contact [COM 88, RAO 88]. Il s'agit d'un bloc en compression biaxiale en contact unilatéral avec frottement sur l'une de ses faces avec un socle rigide (figure 6). Cet exemple permet d'obtenir sur  $\Gamma^c$  une zone de décollement, une de glissement et une autre d'adhérence.

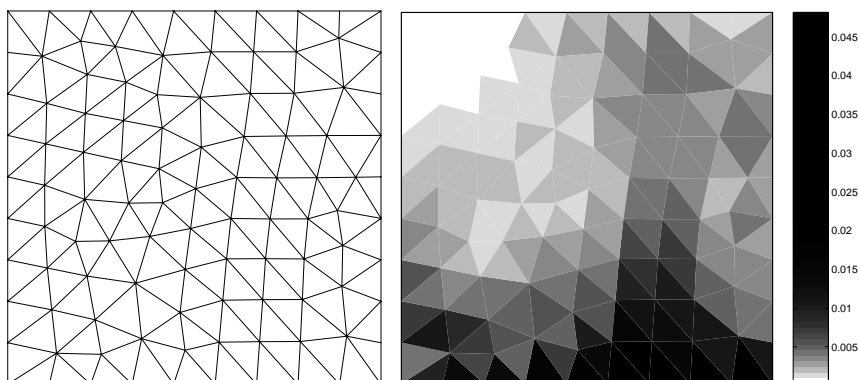


**Figure 6.** Second cas test

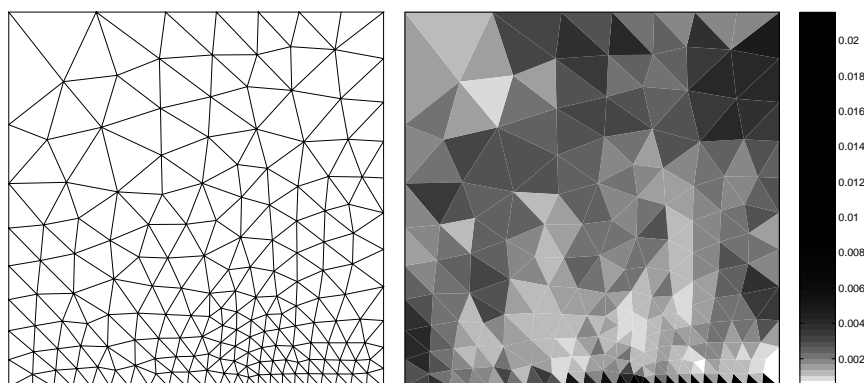
Les données sont :

$$\begin{aligned}
 H &= 40 \text{ mm} & \mu &= 1 & \nu^1 &= 0,2 \\
 E^1 &= 130\,000 \text{ MPa} & \|\mathbf{F}_{d,1}^1\| &= 100 \text{ MPa} & \|\mathbf{F}_{d,2}^1\| &= 50 \text{ MPa}
 \end{aligned}$$

Compte tenu des symétries, seule une moitié du bloc sera maillée.



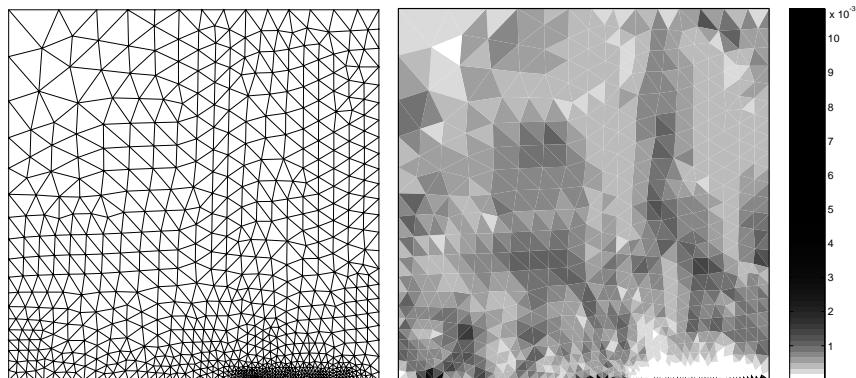
**Figure 7.** Maillage initial : 170 éléments - 10,5 % d'erreur



**Figure 8.** Premier remaillage : 337 éléments - 7,3 % d'erreur pour 5 % souhaitée

Effectuons un premier calcul avec un maillage grossier comportant 170 éléments (figure 7). L'erreur obtenue est :  $\epsilon = 10,5\%$ . Effectuons une première étape d'adaptation du maillage pour une erreur imposée de 5 %. On obtient (figure 8) un maillage de 337 éléments pour une erreur calculée de 7,3 %. Ce premier résultat n'est pas

excellent. Effectuons une deuxième étape d'adaptation pour, cette fois, une erreur imposée de 2,5 %. On obtient (figure 9) un maillage comportant 1 506 éléments et une erreur de 7 %. Cette fois, le résultat est franchement mauvais : le nombre d'élément a été multiplié par plus de 4 et l'erreur n'a pratiquement pas été améliorée !



**Figure 9.** *Second remaillage : 1 506 éléments - 7 % d'erreur pour 2,5 % souhaitée*

Cet exemple met clairement en évidence que la seule adaptation du maillage peut être totalement insuffisante pour améliorer la qualité des simulations numériques en présence de contact unilatéral.

## 7. Indicateur d'erreur en itération

### 7.1. Définition et propriétés

Le concept d'erreur en relation de comportement permet aussi de construire un indicateur d'erreur permettant d'apprécier la qualité des itérations effectuées dans la méthode du point fixe, et donc, dans une certaine mesure, d'évaluer sa contribution à l'erreur globale  $e_{RdC}$ . Considérons pour cela le problème discrétisé en espace par une méthode éléments finis (en pratique des triangles à trois nœuds) :

trouver  $(\mathbf{u}_h^1, \boldsymbol{\sigma}_h^1)$  défini sur  $\Omega^1$ ,  $(\mathbf{u}_h^2, \boldsymbol{\sigma}_h^2)$  défini sur  $\Omega^2$  et  $(\mathbf{w}_h^1, \mathbf{w}_h^2, \mathbf{F}_h^c, \mathbf{F}_h^1, \mathbf{F}_h^2)$  défini sur  $\Gamma^c$  vérifiant :

– les liaisons cinématiques :  
 $\mathbf{u}_h^1$  et  $\mathbf{u}_h^2$  sont de type éléments finis et :

$$\mathbf{u}_h^1|_{\partial_1\Omega^1} = 0, \quad \mathbf{u}_h^2|_{\partial_1\Omega^2} = 0, \quad \mathbf{u}_h^1|_{\Gamma^c} = \mathbf{w}_h^1, \quad \mathbf{u}_h^2|_{\Gamma^c} = \mathbf{w}_h^2 \quad [18]$$



– les équations d'équilibre au sens faible des éléments finis :  
pour  $l = 1, 2, \forall \mathbf{u}_h^*$  nul sur  $\partial_1 \Omega^l$  :

$$\int_{\Omega^l} Tr[\boldsymbol{\sigma}_h^l \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_h^*)] d\Omega = \int_{\Omega^l} \mathbf{f}_d^l \cdot \mathbf{u}_h^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^l} \mathbf{F}_d^l \cdot \mathbf{u}_h^* dS + \int_{\Gamma^c} \mathbf{F}_h^l \cdot \mathbf{u}_h^* dS \quad [19]$$

sur  $\Gamma^c$  :

$$\mathbf{F}_h^c = -\mathbf{F}_h^1 = \mathbf{F}_h^2 \quad [20]$$

– les relations de comportement :

$$\text{pour } l = 1, 2 \quad \boldsymbol{\sigma}_h^l = \mathbf{K}^l \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_h^l) \quad [21]$$

$$b(-\mathbf{w}_h^c, \mathbf{F}_h^c) + \mathbf{w}_h^c \cdot \mathbf{F}_h^c = 0 \quad [22]$$

Alors, on dira que les champs :

$$s_{h,Ad} = (\hat{\mathbf{u}}_h^1, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^1, \hat{\mathbf{u}}_h^2, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^2, \hat{\mathbf{w}}_h^1, \hat{\mathbf{w}}_h^2, \hat{\mathbf{F}}_h^c, \hat{\mathbf{F}}_h^1, \hat{\mathbf{F}}_h^2)$$

sont h-admissibles s'ils vérifient [18], [19], [20]. Posons :

$$i^2(s_{h,Ad}) = \sum_{l=1}^2 \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^l - \mathbf{K}\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}}_h^l)\|_{\Omega^l}^2 + 2 \int_{\Gamma^c} b(-\hat{\mathbf{w}}_h^c, \hat{\mathbf{F}}_h^c) + \hat{\mathbf{w}}_h^c \cdot \hat{\mathbf{F}}_h^c ds$$

On a :  $i(s_{h,Ad}) = 0$  si et seulement si  $s_{h,Ad}$  est solution du problème [18] à [22]. La quantité  $i(s_{h,Ad})$  est donc un indicateur qui permet d'apprécier la qualité de la résolution, par la méthode du point fixe, du problème non linéaire discrétisé. Sa mise en œuvre est très simple ; en effet, à partir des champs introduits à la section 5, il suffit de choisir ( $l = 1, 2$ ) :

$$\hat{\mathbf{u}}_h^l = \hat{\mathbf{u}}^l ; \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^l = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^l ; \hat{\mathbf{F}}_h^l = \hat{\mathbf{F}}^l ; \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^l = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^l \text{ et } \hat{\mathbf{F}}_h^2 = \hat{\mathbf{F}}^c$$

De plus, on a la propriété :

Propriété

Si  $s_{Ad}$  est construit comme à la section 5 et  $s_{(h,Ad)}$  comme ci-dessus, on a :

$$i(s_{h,Ad}) \leq e_{RdC}(s_{Ad}) \quad [23]$$

Démonstration

Les champs  $(\hat{\mathbf{w}}^c, \hat{\mathbf{F}}^c)$  et  $(\hat{\mathbf{w}}_h^c, \hat{\mathbf{F}}_h^c)$  étant confondus sur  $\Gamma^c$ , on a :

$$e_{RdC}^2(s_{Ad}) - i^2(s_{h,Ad}) = \sum_{l=1}^2 [ \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^l - \mathbf{K}\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}}^l)\|_{\Omega^l}^2 - \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^l - \mathbf{K}\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}}_h^l)\|_{\Omega^l}^2 ]$$

puis, compte tenu du fait que  $\hat{\mathbf{u}}_h^l = \hat{\mathbf{u}}^l$ , on obtient :

$$\begin{aligned} e_{RdC}^2(s_{Ad}) - i^2(s_{h,Ad}) &= \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^l - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^l + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^l - \mathbf{K}\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}}^l)\|_{\Omega^l}^2 \\ &= \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^l - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^l\|_{\Omega^l}^2 + \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^l - \mathbf{K}\boldsymbol{\epsilon}(\hat{\mathbf{u}}_h^l)\|_{\Omega^l}^2 - \\ &\quad 2 \int_{\Omega} Tr[(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^l - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^l)\boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_h^l - \hat{\mathbf{u}}^l)] \end{aligned}$$

avec :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_h^l = \mathbf{K}^l \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\mathbf{u}}_h^l)$$

Les champs  $\tilde{\mathbf{u}}_h^l$  et  $\hat{\mathbf{u}}^l$  sont tous les deux admissibles et de type éléments finis ; la dernière intégrale est donc nulle. Finalement, on obtient :

$$e_{RdC}^2(s_{Ad}) - i^2(s_{h,Ad}) = \sum_{l=1}^2 \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^l - \hat{\boldsymbol{\sigma}}_h^l\|_{\Omega^l}^2 \geq 0$$

ce qui démontre la propriété [23].

### 7.2. Un premier exemple de mise en oeuvre

Reprenons l'exemple décrit sur la figure 6. La figure 10 donne les évolutions de  $e_{RdC}(s_{Ad})$  et  $i(s_{h,Ad})$  en fonction des itérations de l'algorithme du point fixe, pour le maillage donné sur la figure 11. On constate que l'inégalité [23] est numériquement vérifiée et que les évolutions de l'erreur et de l'indicateur sont très similaires. Sur la figure 12, on donne les évolutions de  $i(s_{h,Ad})$  pour quatre maillages de plus en plus raffinés comportant entre 910 et 14 954 éléments. L'indicateur d'erreur en itération semble relativement peu sensible à la finesse du maillage.

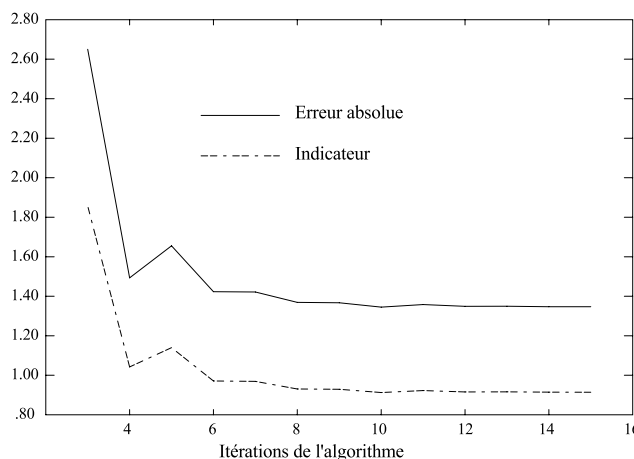
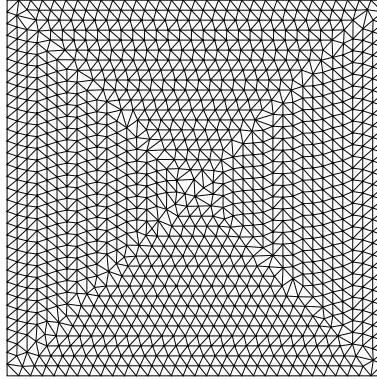
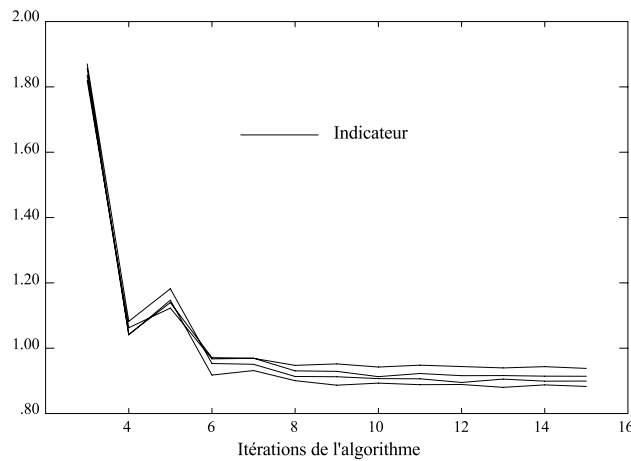


Figure 10. Evolution comparée de l'erreur et de l'indicateur



**Figure 11.** Maillage utilisé pour l'étude de l'indicateur : 2 362 éléments



**Figure 12.** Influence de la finesse du maillage sur l'indicateur

### 7.3. Lien avec l'adaptation des maillages

Evaluons l'indicateur d'erreur  $i(s_{h,Ad})$  sur les calculs présentés au paragraphe 6.1. Pour l'exemple de la figure 2 où l'adaptation des maillages fonctionne correctement, les résultats sont donnés dans le tableau 1. Pour l'exemple de la figure 6 où cette procédure est défailante, les résultats sont donnés dans le tableau 2.

Nombre d'éléments	$i(s_{h,Ad})$	$e_{RdC}(s_{Ad})$	$i(s_{h,Ad})/e_{RdC}(s_{Ad})$
120	0,005	0,2	2,5 %
769	0,005	0,09	5,6 %
4 475	0,0008	0,04	2,0 %

**Tableau 1.** Erreur et indicateur dans le cas où l'adaptation des maillages est correcte

Nombre d'éléments	$i(s_{h,Ad})$	$e_{RdC}(s_{Ad})$	$i(s_{h,Ad})/e_{RdC}(s_{Ad})$
170	1,1	2,1	52,3 %
337	0,9	1,5	60,0 %
1 506	0,9	1,4	64,3 %

**Tableau 2.** Erreur et indicateur dans le cas où l'adaptation des maillages est défaillante

Ces exemples montrent clairement que pour atteindre une précision donnée, la seule modification du maillage est efficace uniquement si les erreurs dues à la résolution approchée du problème du point fixe sont faibles devant l'erreur totale. Si  $i(s_{h,Ad})$  représente une part importante de l'erreur totale, pour améliorer la qualité des simulations, il faut aussi améliorer celle de la résolution du problème du point fixe.

**7.4. Une technique d'amélioration de la résolution du problème de point fixe**

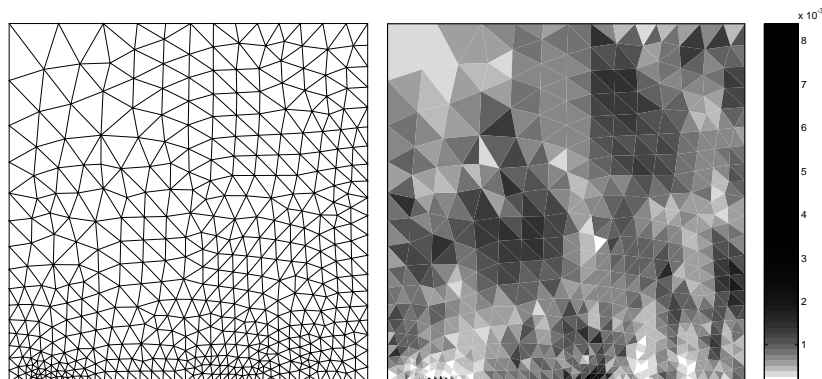
Une possibilité, pour améliorer cette résolution, est de modifier légèrement l'algorithme décrit au paragraphe 4.2. Dans cet algorithme, on arrête les itérations lorsque :

$$\frac{\sup_i |g^{k+1}(i) - g^k(i)|}{\sup_i g^k(i)} \leq \epsilon_{TOL}$$

où  $\epsilon_{TOL}$  est une tolérance fixée par l'utilisateur et où les bornes supérieures sont prises sur tous les nœuds de la zone de contact. Une fois ce test satisfait, l'amélioration proposée consiste à détecter, sur la zone de contact, les nœuds qui sont en adhérence, puis de faire une itération supplémentaire en imposant un déplacement tangentiel nul pour les nœuds ainsi détectés. En pratique, on impose :

$$w_t(i) = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\|w_t(i)\|}{\sup_k \|u(k)\|} \leq \epsilon_{adh}$$

où  $k$  désigne un nœud quelconque du maillage. Cette modification permet de diminuer sensiblement la valeur de  $i(s_{h,Ad})$  et par conséquent celle de  $e_{RdC}(s_{Ad})$ . Reprenons



**Figure 13.** Maillage obtenu avec la technique d'amélioration : 887 éléments - 2,8 % d'erreur

l'exemple d'adaptation de maillage correspondant au tableau 2 et appliquons cette technique à la fin de la première étape d'adaptation des calculs. L'indicateur est divisé par trois et l'erreur totale obtenue est maintenant de 4,5 % pour 5 % demandé. Effectuons, avec cette technique d'amélioration, une deuxième étape d'adaptation en demandant une erreur de 2,5 %. Là encore, l'indicateur diminue fortement et l'erreur obtenue est maintenant de 2,8 %, ce qui est tout à fait satisfaisant. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 3 et le maillage adapté sur la figure 13. Il est à noter que le gain obtenu est très important puisque ce maillage ne comporte que 887 éléments.

Nombre d'éléments	$i(s_{h,Ad})$	$e_{RdC}(s_{Ad})$	$\epsilon_{RdC}$	$\epsilon_{RdC}$ souhaitée
170	1,1	2,1	10,5 %	
337	0,3	0,9	4,5 %	5 %
887	0,2	0,6	2,8 %	2,5%

**Tableau 3.** Erreur et indicateur avec la technique d'amélioration

## 8. Conclusion

Dans ce papier, nous avons montré comment le concept d'erreur en relation de comportement permet de construire un estimateur d'erreur pour les problèmes de contact unilatéral avec frottement. Nous avons mis en œuvre cet estimateur dans le cas de problèmes 2D en statique. L'extension à des problèmes 3D ne comporte pas de difficulté de fond. Enfin, l'extension de ces travaux au cas d'une formulation en force-vitesse des lois de Coulomb avec prise en compte des termes d'accélération est en cours.

## 9. Bibliographie

- [BAB 78] BABUSKA I., RHEINBOLDT W.-C., « Error estimates for adaptive finite element computation », *SIAM J. Num. Anal.*, vol. 15,4, 1978, p. 736-754.
- [BOR 98] BORROOMAND B., ZIENKIEWICZ O.-C., « Recovery procedures in error estimation and adaptivity : adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour », *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, 1998, p. 383-410.
- [COM 88] COMBESURE A., MILLARD A., VERPEAUX P., « Numerical methods in CASTEM system for the treatment of contact problems involving friction », *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, vol. Special issue, Vol 1 to Vol 7, 1988, p. 249-261.
- [COO 99a] COOREVITS P., HILD P., PELLE J.-P., « Contrôle et adaptation des calculs éléments finis pour les problèmes de contact unilatéral », *Revue européenne des éléments finis*, vol. 8, 1999, p. 7-29.
- [COO 99b] COOREVITS P., HILD P., PELLE J.-P., « A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and nonmatching meshes », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 46, 1999, p. 157-176.
- [DUV 72] DUVAUT G., LIONS J., *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, 1972.
- [HIL 98] HILD P., « Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles », PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, 1998.
- [LAD 75] LADEVÈZE P., « Comparaison de modèles de milieux continus », PhD thesis, Université P. et M. Curie, 1975.
- [LAD 91] LADEVÈZE P., PELLE J.-P., ROUGEOT P., « Error estimation and mesh optimization for classical finite elements », *Engineering Computation*, vol. 8, 1991, p. 69-80.
- [LAD 01] LADEVÈZE P., PELLE J.-P., *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*, Hermes, à paraître, 2001.
- [ODE 97] ODEN M. A. J.-T., « A posteriori error estimation in finite element analysis », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 142, 1997, p. 1-88.
- [RAO 88] RAOUS M., CHABRAND L., LEBON F., « Numerical methods for frictional contact problems and applications », *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée*, vol. special issue, Vol 1 to Vol 7, 1988, p. 111-128.
- [SAX 92] DE SAXCÉ G., « Une généralisation de l'inégalité de Fenchel et ses applications aux lois constitutives », *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, vol. 314, 1992, p. 125-129.
- [ZIE 87] ZIENKIEWICZ O.-C., ZHU J.-Z., « A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, 1987, p. 337-357.