
Calculs en élastoplasticité par une technique de minimisation

Christian Cornuault

*Dassault Aviation
78, Quai Marcel Dassault
F-92210 Saint-Cloud*

RÉSUMÉ. Nous présentons dans cet article une méthode numérique originale développée pour le calcul d'éléments structuraux soumis à de grands déplacements et à comportement élastoplastique, permettant l'étude à la fois du flambage plastique et du post-flambage. L'algorithme proposé, fondé sur une démarche implicite, résulte d'une formulation adéquate utilisant l'expression d'un potentiel défini à chaque pas de temps dont dérivent les équations d'équilibre et les lois d'évolution. Une méthode efficace de minimisation utilisant ce potentiel et un algorithme de « line search exact » permet une résolution rapide et l'obtention directe, en petits comme en grands déplacements, des chemins d'équilibre le long du trajet de chargement. Les performances de la méthode ont été testées par une mise en œuvre sur des cas de structures réelles avec comparaison entre résultats de calculs et mesures expérimentales, et ont ainsi été validées à un niveau industriel.

ABSTRACT. An original numerical method is presented, which was implemented for the structural analysis of components stressed in possibly both large displacements and plasticity domains, as it is the case for metallic panel plastic buckling or post-buckling. Thanks to a suitable formulation and implicit numerical schemes, one can exhibit a mechanical potential function, from which elastic plastic equilibrium equations and normality evolution laws are derived. Taking advantage of this potential function, an efficient numerical method, which involves minimisation by means of an exact line-search, was developed, thus enabling direct obtention of small and large displacement solutions, and, hence, direct obtention of plastic post buckled states as well as elastic ones. Validation and computation efficiency, industrially speaking, have already been proved through a several year current practice.

MOTS-CLÉS : matériaux métalliques, comportement élastoplastique, matériaux standard généralisés, grands déplacements, post-flambage, plaques et coques, minimisation, recherche linéaire.

KEYWORDS: Metallic materials, elastic plastic behaviour, generalised standard materials, large displacements, postbuckling, plates and shells, minimisation, line-search.

Notations

x vecteur des déplacements nodaux, dans les calculs par éléments finis

u déplacement d'un point courant m_o

ε tenseur des déformations de Green-Lagrange :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial m_o} \right)^t + \left(\frac{\partial u}{\partial m_o} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial m_o} \right)^t \left(\frac{\partial u}{\partial m_o} \right) \right]$$

σ tenseur des contraintes associées

F_{ext} vecteur des forces extérieures

H matrice de comportement élastique

ε_p tenseur des déformations plastiques

$\dot{\varepsilon}_p$ vitesses de déformation plastique

\dot{p} vitesse de déformation plastique scalaire équivalente :

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\varepsilon}_p^t \dot{\varepsilon}_p$$

p déformation plastique scalaire cumulée

z centre du domaine élastique (tenseur de contraintes)

γ paramètre fonction de p décrivant le mouvement du centre z

R rayon du domaine élastique (« limite élastique »)

S $S = \sigma - z$

A_d déviateur du tenseur A

s contrainte équivalente de Misès de S :

$$s = J_2(S) = \sqrt{\frac{3}{2} S_d^t S_d}$$

Φ potentiel viscoplastique

$\langle a \rangle$: $\langle a \rangle = a$ si $a > 0$, $= 0$ sinon

1. Introduction

Nous formalisons et complétons ici des résultats obtenus il y a déjà quelques années ([COR 87], [COR 88]), au cours de développements du logiciel ELFINI de Dassault Aviation. L'objectif était de fournir un outil de calcul efficace pour l'analyse de la tenue structurale des éléments métalliques travaillant dans le domaine plastique, qu'il s'agisse de pièces massives soumises au matage, aussi bien que d'éléments minces, âmes, voiles ou revêtements, susceptibles de flamber plastiquement ou de plastifier après flambage.

Une approche la plus robuste possible a été recherchée, qui permette également de contourner de façon agréable les défauts majeurs de l'analyse élastoplastique : mauvais conditionnement des matrices tangentes, convergence difficile, nécessité de procéder par incréments très petits, nombreuses factorisations, maintien sur la surface limite délicat, incertitude permanente entre charge et décharge, etc. (voir [NAY 71], [OWE 80], [ZIE 82], [COR 85]).

Les succès obtenus auparavant pour la résolution des équilibres en post-flambement des structures composites élastiques, grâce à la mise en place d'un algorithme de minimisation de l'énergie potentielle totale par une technique de line-search exact [PET 83], [PET 85], [COR 87], ont naturellement conduit à explorer et étendre cette voie.

En fait, le cadre mathématique ([HIL 50], [GER 73], [LEM 85], [STO 87]) établi au cours de ces dernières décennies pour décrire les phénomènes de plasticité et de viscoplasticité conforte cette approche. En premier lieu, le concept de normalité associé à un potentiel de dissipation pour les matériaux standard généralisés, et l'hypothèse d'existence d'une énergie potentielle, en constituent le fondement. Par ailleurs, les résultats en termes de principes variationnels ([HIL 50], [STO 88]) et d'analyse de la stabilité ([HIL 58], [POT 78], [HUT 74], [NQS 84], [NQS 88], [STO 87]) posent les jalons fondamentaux pour la construction de la méthode.

Nous nous attachons dans cette présentation à décrire les étapes de la construction du potentiel utilisé. Quelques éléments essentiels aux calculs par éléments finis de plaques ou de coques sont donnés, et la technique de résolution des équilibres par minimisation à l'aide d'un line-search est exposée. Nous terminons par des exemples d'application qui montrent l'efficacité et la pertinence de la méthode.

2. Cinématique

Nous fixons tout d'abord le cadre de la formulation retenue. Pour les éléments métalliques des avions, dans leur domaine d'utilisation, les déformations restent petites. Aussi nous sommes-nous limités au domaine des petites déformations. Une formulation Lagrangienne totale, où les grandeurs sont référencées par rapport à la

position initiale, est choisie. On rappelle que, dans ce cadre, le 2nd tenseur de contraintes de Piola-Kirchhoff σ , associé aux déformations de Green-Lagrange ε , est assimilable au tenseur de Cauchy dans un repère corotationnel. De même, $\dot{\varepsilon}$ s'identifie au taux de déformation D dans ce même repère corotationnel. En outre, l'hypothèse de partition des déformations, et des taux de déformation, élastiques et plastiques, s'applique :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p, \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_p$$

3. Comportement du matériau et potentiels thermodynamiques

Dans un premier temps, on dégage les équations liées au comportement du matériau.

L'hypothèse fondamentale est l'existence d'une énergie potentielle [NQS 84] et le point-clé réside dans l'écriture de ce potentiel en se focalisant sur des matériaux standard généralisés [HAL 75]. Pour y parvenir, on se sert naturellement de l'énergie libre, mais en lui donnant une forme incrémentale.

On se concentre plus particulièrement sur les alliages d'aluminium légers (séries 2000, 7000...), de titane et les aciers utilisés classiquement sur les cellules d'avion. Dans le domaine plastique, ces matériaux métalliques ont un écrouissage positif que l'on peut, en première approximation, représenter par un écrouissage cinématique linéaire. Une meilleure modélisation est obtenue en y superposant un écrouissage isotrope, et l'on peut rendre compte plus précisément d'autres effets (cyclage de chargements...) en introduisant un écrouissage cinématique non linéaire.

On pourrait se contenter d'une description purement élastoplastique avec des variables internes d'écrouissage cinématique et isotrope. Néanmoins, un modèle viscoplastique est plus général car il laisse la possibilité de simuler des effets de vitesse dans certaines applications et, comme on le verra, est également efficace, d'un point de vue numérique pour les phénomènes élastoplastiques.

Le formalisme de J. Lemaître et J.-L. Chaboche [LEM 85] est adopté. Nous renvoyons à ces auteurs pour des développements plus détaillés.

3.1. *Energie libre*

En suivant ces idées, on est conduit à écrire l'énergie libre sous la forme :

$$w = w_i + w_b$$

$$w_i = \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_p)^t H (\varepsilon - \varepsilon_p) \quad \text{étant l'énergie élastique interne emmagasinée, et}$$

$$.w_b = \frac{1}{3} a^t C a + k(p) \quad \begin{array}{l} \text{étant l'énergie bloquée dans le système, } k \\ \text{fonction scalaire de } p, C \text{ matrice analogue à une} \\ \text{matricée de comportement.} \end{array}$$

et où a représente la variable interne cinématique et p la déformation plastique cumulée. Ces deux variables suffisent pour décrire le type d'érouissage précédemment évoqué.

Les variables d'état étant ε (ou X), ε_p , a , p , les forces thermodynamiques associées sont :

$$.\sigma = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_e} = H(\varepsilon - \varepsilon_p) = -\frac{\partial w}{\partial \varepsilon_p} \quad (\text{Contraintes})$$

$$.z = \frac{\partial w}{\partial a} = \frac{\partial w_b}{\partial a} = \frac{2}{3} C a \quad (\text{Centre du domaine élastique})$$

$$.R = \frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial k}{\partial p} = R(p) \quad (\text{Rayon du domaine élastique})$$

Ces relations fournissent les lois de comportement, et l'on retiendra que w est une énergie potentielle associée aux variables d'état ([LEM 85], [NQS 88]).

3.2. Evaluation de l'énergie libre à l'aide des incréments des variables

On peut, en supposant un processus incrémental, récrire l'expression de l'énergie libre.

A partir d'un état précédent $x_o, \varepsilon_{p_o}, a_o, p_o$, les variables peuvent s'écrire :
 $x = x_o + \Delta x, \varepsilon_p = \varepsilon_{p_o} + \Delta \varepsilon_p, a = a_o + \Delta a, p = p_o + \Delta p$
 et pour des érouissages cinématique et isotrope pouvant s'exprimer de façon linéaire, w peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} .w &= w_i + w_b \\ &= \frac{1}{2} (\varepsilon - \varepsilon_{p_o})^t H (\varepsilon - \varepsilon_{p_o}) + w_{b_o} \\ &\quad - \left[(\sigma^t \Delta \varepsilon_p - z^t \Delta a - R \Delta p) + \frac{1}{3} \Delta a^t C \Delta a + \frac{1}{2} h \Delta p^2 + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_p^t H \Delta \varepsilon_p \right] \end{aligned} \quad [1]$$

où σ, z, R correspondent au nouvel état.

C'est cette forme d'écriture qui sera exploitée par la suite et que l'on gardera à l'esprit.

3.3. Potentiel de dissipation et lois d'évolution

Par ailleurs, pour déterminer les incréments des variables d'état, il est nécessaire d'en connaître des lois d'évolution.

En vue de disposer de ces lois d'évolution, on introduit un potentiel de dissipation sous la forme ([LEM 85]) :

$$\Phi = \Phi(\sigma, z, R, T)$$

On peut alors écrire avec les lois de normalité des matériaux standard généralisés, qui correspondent à la dissipation maximale de Hill, et qui entraînent la vérification du 2nd Principe de la thermodynamique :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_p &= \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial R} \\ \dot{a} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned}$$

Dans ces expressions, on particularise maintenant Φ en lui donnant une forme [LEM 85] qui convient, sous conditions isothermes, pour l'écroutissage cinématique et isotrope des matériaux métalliques obéissant au critère de Von Misès, ce que l'on admet pour les matériaux métalliques envisagés ici.

$$\Phi = \left(\frac{\langle s - R \rangle}{K} \right)^{n+1} \left(\frac{K}{n+1} \right) \quad (\text{Potentiel viscoplastique})$$

On sait que l'on peut alors, en plus, éliminer « a » et se ramener de façon explicite à :

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}}{s} S_d \quad S_d \text{ étant le déviateur de } S = \sigma - z$$

$$\dot{p} = \left(\frac{\langle s - R \rangle}{K} \right)^n$$

$$\dot{z} = \frac{2}{3} C \dot{\epsilon}_p - \gamma \dot{p} z$$

où $\gamma = \gamma(p)$ est un paramètre servant à décrire l'évolution de z , centre du domaine élastique.

Ce modèle est suffisamment général car il permet à la fois de simuler les évolutions du domaine élastique en jouant sur les fonctions $\gamma(p)$ et $R(p)$, et à la fois de simuler un comportement en vitesse à l'aide des paramètres K et n .

4. Equations mécaniques et énergie potentielle

On va, à présent, caractériser les équilibres quasi statiques d'une structure composée de matériaux métalliques relevant du domaine de comportement étudié, en se posant le problème de la détermination d'équilibres stables. On se place dans le cadre d'une résolution par la méthode des éléments finis.

Obtenues à partir du principe des travaux virtuels, on écrit les équations d'équilibre classiques [ZIE 82], en y incorporant les équations liées au comportement du matériau. Puis on montrera que toutes les inconnues autres que les déplacements nodaux x peuvent successivement s'éliminer et que la connaissance de l'équilibre peut s'exprimer en fonction des inconnues de déplacements uniquement. On exhibera alors une énergie potentielle dont la minimisation redonne ces mêmes équations tout en assurant la stabilité des équilibres.

4.1. Equilibre viscoplastique

F_{ext} et le vecteur des forces extérieures appliquées à la structure. Si x désigne le vecteur des déplacements nodaux inconnus, l'opérateur $[\partial\varepsilon/\partial x]$ représente l'opérateur des dérivées des déformations totales par rapport aux déplacements dans l'expression des forces intérieures $F_{\text{int}} = \int [\partial\varepsilon/\partial x]^t \sigma dv$ ([OWE 80], [ZIE 82]).

Dans le cadre de la viscoplasticité, le problème est formulé en fonction du temps, en faisant intervenir les vitesses des déformations plastiques. Si les effets dynamiques sont négligés, à chaque instant la structure est en équilibre quasi statique, et l'ensemble des équations régissant l'évolution s'écrit :

Equation d'équilibre :

$$\int [\partial\varepsilon/\partial x]^t \sigma dv = F_{\text{ext}}$$

Lois de comportement :

$$\sigma = H(\varepsilon - \varepsilon_p)$$

$$\cdot S = \sigma - z$$

$$\cdot R = R(p)$$

Lois d'évolution :

$$\cdot \Phi = \left(\frac{\langle s - R \rangle}{K} \right)^{n+1} \left(\frac{K}{n+1} \right) \quad (\text{Potentiel viscoplastique})$$

$$\cdot \dot{\epsilon}_p = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}}{s} S_d \quad (\text{Vitesses de déformations plastiques})$$

$$\cdot \dot{p} = \left(\frac{\langle s - R \rangle}{K} \right)^n \quad (\text{Vitesse de déformation plastique scalaire équivalente})$$

$$\cdot \dot{z} = \frac{2}{3} C \dot{\epsilon}_p - \gamma \dot{p} z \quad (\text{Centre du domaine élastique})$$

Les inconnues du problème sont : x, \cdot

Il n'y a pas de condition d'inégalité : on est constamment sur une iso potentielle. Dans le cas d'un équilibre statique on a nécessairement :

$$\dot{\epsilon}_p = 0, \Phi = 0, s = J_2(S) = R$$

Si l'on ne s'intéresse qu'aux solutions élastoplastiques, sans chercher à connaître précisément les états transitoires viscoplastiques, le choix du coefficient $n = 1$ est suffisant. Les équilibres élastoplastiques peuvent s'obtenir comme états stationnaires pour $\dot{\epsilon}_p = 0$.

REMARQUE. – On peut, tout aussi bien, écrire les équations d'équilibre statique avec les lois de comportement élastoplastique correspondantes. Elles sont similaires :

$$\int \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right]^t \sigma dv = F_{\text{ext}}$$

$$\cdot \sigma = H(\epsilon - \epsilon_p) \quad (\text{Comportement élastique})$$

$$\cdot J_2(S) \leq R \quad (\text{Critère de Misès})$$

$$\cdot S = \sigma - z$$

$$\cdot R = R(p) \quad (\text{Limite du domaine élastique})$$

$$\dot{d}\varepsilon_p = S_d d\lambda \quad (\text{Ecoulement plastique}), \lambda \text{ étant le multiplicateur plastique}$$

$$\dot{d}z = \frac{2}{3} C d\varepsilon_p - \gamma z dp \quad (\text{Centre du domaine élastique})$$

Néanmoins, il s'agit alors d'équations non linéaires soumises à des inégalités fortement non linéaires. La résolution nécessite des opérateurs tangents coûteux. En outre, la contrainte d'inégalité n'étant pas forcément respectée, une procédure artificielle de projection des contraintes sur la surface limite de plasticité est à employer ([NAY 71], [OWE 80], [ZIE 82]). Comme il a été dit précédemment, la qualité numérique des algorithmes qui en découlent est insuffisante pour traiter de façon saine les grands déplacements. C'est pourquoi nous préférons un modèle viscoplastique, même pour traiter l'élastoplasticité.

4.2. Expression des équations d'équilibre

On montre que la connaissance de l'équilibre peut s'exprimer en fonction des inconnues de déplacements uniquement. Pour ce faire, on procède à l'élimination des autres inconnues en deux temps.

4.2.1. Discrétisation dans le temps : expression et élimination de ε_p , z , \dot{z}

Le problème étant posé en fonction du temps, il est nécessaire d'introduire un schéma d'intégration.

Le **schéma implicite** suivant est adopté. Pour $t = t_o + \Delta t$:

$$\dot{\Delta}\varepsilon_p = \left[(1-\alpha) \dot{\varepsilon}_{p_o} + \alpha \dot{\varepsilon}_p \right] \Delta t$$

$$\dot{z} = z_o + \left[(1-\alpha) \dot{z}_o + \alpha \dot{z} \right] \Delta t$$

avec :

$$\dot{\varepsilon}_{p_o} = \dot{\varepsilon}_p(t_o), \dot{\varepsilon}_p = \dot{\varepsilon}_p(t)$$

$$\dot{z}_o = \dot{z}(t_o), \dot{z} = \dot{z}(t)$$

$$0 < \alpha < 1$$

On constate aisément que :

$$\dot{z} = \frac{2}{3} C \dot{\epsilon}_p - \gamma \dot{p} (z_o + [(1-\alpha) \dot{z}_o + \alpha \dot{z}] \Delta t)$$

$$\text{soit, sachant que } \dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\epsilon}_p^t \dot{\epsilon}_p, \quad \dot{z} = \dot{z}(\dot{\epsilon}_p)$$

et on en déduit que $z = z(\dot{\epsilon}_p)$ et que ϵ_p , z et \dot{z} s'expriment en fonction de.

Les **équations d'équilibre** s'écrivent alors :

$$\int \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right]^t \sigma \, dv = F_{\text{ext}}$$

$$\sigma = H(\epsilon - \tilde{\epsilon}_{po} - \dot{\epsilon}_p \alpha \Delta t)$$

$$S = \sigma - z$$

$$z = z(\dot{\epsilon}_p)$$

$$R = R(p)$$

$$\dot{\epsilon}_p = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}$$

en ayant posé :

$$\tilde{\epsilon}_{po} = \epsilon_{po} + (1-\alpha) \dot{\epsilon}_{po} \Delta t$$

$$\tilde{z}_o = z_o + (1-\alpha) \dot{z}_o \Delta t$$

Les inconnues qui subsistent alors, pour passer d'un pas de temps au pas de temps suivant, sont :

$$x \text{ et } \dot{\epsilon}_p$$

Par rapport à un calcul élastique, les $\dot{\epsilon}_p$ sont des degrés de liberté supplémentaires.

Les équations d'équilibre peuvent également s'écrire dans le cas dynamique, sans difficulté particulière, à l'aide de schémas d'intégration dans le temps pour les variables x .

4.2.2. *Elimination des vitesses de déformation plastique*

L'existence de la relation implicite $\dot{\varepsilon}_p = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}$ avec $\Phi = \Phi(x, \dot{\varepsilon}_p)$ implique qu'il est théoriquement possible d'éliminer.

En pratique, on actualisera la loi de comportement à écrouissage isotrope et cinématique sous la forme "linéarisée" suivante :

$$R(p) = R_o + h\Delta p = \tilde{R}_o + h \dot{p} \alpha \Delta t$$

$$\dot{z}(\dot{\varepsilon}_p) = \frac{2}{3} C \dot{\varepsilon}_p \text{ et } z = \tilde{z}_o + \frac{2}{3} C \dot{\varepsilon}_p \alpha \Delta t$$

$$\text{avec } \frac{2}{3} C = \left[\frac{\partial z}{\partial \dot{\varepsilon}_p} \right] \text{ et } h = \frac{\partial R}{\partial p}$$

Ainsi fait, les relations :

$$\dot{p} = \left(\frac{\langle s - R \rangle}{K} \right)^n \iff s = K \dot{p}^{\frac{1}{n}} + R$$

$$\dot{\varepsilon}_p = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}}{s} S_d$$

$$\sigma = H(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_{p0} - \dot{\varepsilon}_p \alpha \Delta t)$$

fournissent une équation scalaire en \dot{p} qui permet effectivement l'élimination des. Les calculs sont détaillés en annexe.

Le fait de pouvoir effectuer cette élimination autorise quelques commentaires :

- le calcul des $\dot{\varepsilon}_p$ en fonction des déplacements nodaux, équivaut à une condensation statique des degrés de liberté supplémentaires ;
- les ε_p étant exprimés de façon exacte, les équations de la loi de comportement sont satisfaites exactement, et l'approximation au 1er ordre, utilisée par de nombreux auteurs ([OWE 80], [HUG 78], [ZIE 82]) :

$$\dot{\varepsilon}_p(x_{i+1}) = \dot{\varepsilon}_p(x_i) + \left[\frac{\partial \dot{\varepsilon}_p}{\partial \sigma} \right] \Delta \sigma$$

devient inutile, ainsi que le stockage des contraintes qui lui est nécessaire.

En outre, la pratique montre que l'expression exacte des $\dot{\varepsilon}_p$, dans un processus itératif, gomme un certain nombre d'itérations qui sont dues à une expression approchée.

Enfin, ayant éliminé toutes les variables liées au comportement viscoplastique, **les seules inconnues qui subsistent dans les équations d'équilibre sont les variables de déplacement x .**

4.3. *Energie potentielle totale*

Maintenant, en suivant l'hypothèse d'existence d'une énergie potentielle ([NQS 84]) et en partant de la forme [1] donnée à l'énergie libre au paragraphe 3.2, on cherche à exprimer une énergie potentielle mécanique totale, afin de profiter des propriétés de stabilité des solutions obtenues par sa minimisation.

Ce faisant, pour une loi de comportement à écrouissages isotrope et cinématique « linéarisée » et pour un pas de temps donné, on met en évidence le potentiel suivant :

$$W^* = W_{el} - W_p - F_{ext}^t X$$

avec :

$$. W_{el} = \frac{1}{2} \int (\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_{po})^t H (\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_{po}) dv$$

$$. W_p = W_p [\sigma(x, \dot{\varepsilon}_p), z(\dot{a}), R(\dot{p}), \dot{\varepsilon}_p, \dot{a}, \dot{p}]$$

$$= \alpha \Delta t \int \left[\Phi + \frac{1}{3} \dot{a}^t C \dot{a} \alpha \Delta t + \frac{1}{2} h \dot{p}^2 \alpha \Delta t + \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_p H \dot{\varepsilon}_p \alpha \Delta t \right] dv \quad [2]$$

$.W_{el}$ représente une énergie élastique interne, où les déformations plastiques sont figées à la valeur :

$$\tilde{\varepsilon}_{po} = \varepsilon_{po} + (1 - \alpha) \dot{\varepsilon}_{po} \Delta t$$

$. W_p$ représente une énergie potentielle de dissipation au cours du pas de temps.

$. W_l = W_{el} - W_p$ est l'énergie libre effectivement emmagasinée.

Les états d'équilibre stables rendent cette énergie potentielle minimale et l'on va souligner certaines propriétés.

4.3.1. *Minimisation par rapport aux inconnues $x, \dot{\epsilon}_p, \dot{a}, \dot{p}$.*

On revient tout d'abord à la formulation par rapport à l'ensemble des inconnues.

Min W^* :

$x, \dot{\epsilon}_p$

\dot{a}, \dot{p} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^*}{\partial x} &= \int \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right]^t H \left(\epsilon - \tilde{\epsilon}_{po} - \alpha \Delta t \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \right) dv - F_{\text{ext}} = 0 \\ \frac{\partial W^*}{\partial \dot{\epsilon}_p} &= 0 \iff \dot{\epsilon}_p = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \\ \frac{\partial W^*}{\partial \dot{a}} &= 0 \iff \dot{a} = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial W^*}{\partial \dot{p}} &= 0 \iff \dot{p} = - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \end{aligned} \quad [3]$$

Avec les deux premières équations, on retrouve bien l'équation d'équilibre.

On note que la partie de la minimisation par rapport aux variables viscoplastiques rend la partie « potentiel de dissipation » maximale :

$$\begin{aligned} \text{Min } W^* &\iff \text{Max } W_p \\ \dot{\epsilon}_p, \dot{a}, \dot{p} &\quad \dot{\epsilon}_p, \dot{a}, \dot{p} \end{aligned} \quad [4]$$

Et ceci s'exprime directement sous la forme des lois d'évolution associées à la règle de normalité.

On peut apporter l'interprétation suivante : l'énergie dissipée plastiquement pour atteindre l'état d'équilibre stable réel, par rapport à une évolution qui aurait été purement élastique, est maximale.

4.3.2. *Minimisation par rapport aux inconnues x*

En fait, pour la mise en œuvre numérique, la forme intéressante est celle où l'on a réalisé toutes les éliminations précédemment décrites et où il ne reste plus que les inconnues de déplacements.

Comme \dot{a} et \dot{p} s'écrivent en fonction de $\dot{\epsilon}_p$, lui-même fonction de x , on peut écrire :

$$W_p = \alpha \Delta t \int \left[\Phi + \frac{1}{2} (C + h) \alpha \Delta t \dot{p}(x)^2 + \frac{1}{2} \dot{\epsilon}_p(x)^t H \dot{\epsilon}_p(x) \alpha \Delta t \right] dv \quad [5]$$

Où, cette fois-ci, $\dot{\epsilon}_p$ et \dot{p} sont, non plus des variables inconnues indépendantes, mais des fonctions des déplacements nodaux x .

Afin de ne pas surcharger l'écriture, nous continuerons dans la suite à écrire $\dot{\epsilon}_p$ et, mais signifiant de façon sous-entendue $\dot{\epsilon}_p(x)$ et $\dot{p}(x)$.

$$\text{Min } W^* : \frac{\partial W^*}{\partial x} = \int \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right]^t \sigma dv - F_{\text{ext}} = 0$$

x

$$\text{avec : } \sigma = H(\epsilon - \tilde{\epsilon}_{p_0} - \dot{\epsilon}_p \alpha \Delta t)$$

$$\text{et } \dot{\epsilon}_p = \dot{\epsilon}_p(x) \quad [6]$$

On parvient alors au résultat essentiel escompté pour la formulation choisie :

La résolution du problème se ramène à la minimisation du potentiel non linéaire W^* par rapport aux déplacements x des nœuds, ceci moyennant l'élimination des inconnues.

4.3.3. Commentaires

Les équations d'équilibre dérivant d'un potentiel, pour des conditions initiales et un chargement extérieur (x_0 , ϵ_{p_0} , $\dot{\epsilon}_{p_0}$, R_0 , z_0 et F_{ext}) fixés, la solution ne dépend pas de l'« histoire » au cours du pas de temps, mais correspond à un minimum du potentiel.

Le potentiel a initialement été « exhibé » directement sous la forme [5], ([COR 87], [COR 88]). L'explication à partir des considérations du paragraphe 3 (expression [1]) est plus récente.

Sous cette même forme, ce principe variationnel est analogue au potentiel de Hodge et Prager, et au potentiel de Greenberg ([HIL 50]) ou de façon plus générale aux potentiels en vitesses ([HAL 75], [STO 87]). En fait, on a pu passer à un potentiel en variables d'état totales, et non plus en vitesses, en faisant intervenir le schéma d'intégration.

On retiendra que cette expression de l'énergie potentielle totale permet à la fois :

- la définition des forces thermodynamiques σ , z , R associées aux variables d'état,
- l'écriture des équations d'équilibre par sa minimisation ([3], [6]),

– et en outre, l'écriture des lois d'évolution associées à la règle de normalité en rendant explicite le caractère maximal du terme lié à la dissipation [4].

5. Eléments de flexion

Avant d'aborder l'algorithme de résolution, il faut, de façon succincte, préciser comment est mise en place cette formulation dans la programmation des éléments finis, en particulier pour les éléments de plaques ou de coques.

5.1. Modélisation du comportement plastique en flexion

La modélisation 3D des éléments minces dimensionnés par la plasticité, étant d'une lourdeur d'utilisation et d'un coût prohibitifs, l'emploi d'éléments finis de type plaque ou coque est indispensable.

L'élaboration de ces éléments a été effectuée de la façon suivante, avec le minimum d'hypothèses restrictives ; les déformations totales ε sont supposées rester linéaires dans l'épaisseur.

L'intégration du comportement à travers l'épaisseur est effectuée numériquement avec des points d'intégration judicieusement choisis, ce qui autorise une répartition des déformations plastiques et des contraintes, quelconque dans l'épaisseur.

Tout en évaluant correctement l'intégrale des fonctions concernées (flux et moments résultants, inerties, rigidités...) avec le minimum de points d'intégration, le problème est alors de représenter de façon précise les contraintes sur chacune des faces de la plaque. Cette condition est essentielle pour simuler correctement l'entrée en plasticité, laquelle s'initie sur une des faces.

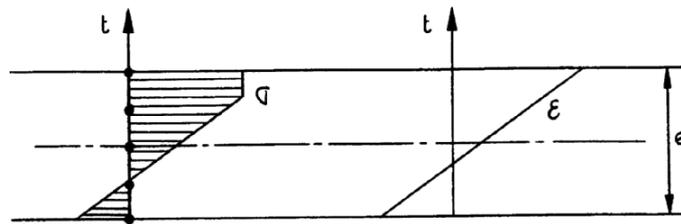


Figure 1. Champ de déformations à travers l'épaisseur et points d'intégration

L'utilisation de points d'intégration de Gauss ne convient pas : on aboutit, de façon évidente, à une surestimation des charges provoquant l'entrée dans le domaine plastique, et par suite, des efforts internes et de la rigidité de la plaque, puisqu'il faut « attendre » que le point le plus proche d'une surface externe plastifie. Une simulation correcte ne peut être obtenue qu'avec deux des points situés exactement sur les faces externes. Nous choisissons d'effectuer l'intégration numérique sur des points équi-répartis dans l'épaisseur (points d'intégration de Newton-Cotes), avec les poids d'intégration qui conviennent.

5.2. Programmation des éléments finis

Les entrées du module correspondant à l'élément étant :

- la géométrie de l'élément,
 - les caractéristiques du matériau,
 - l'état initial issu du pas de temps précédent ($\epsilon_{po}, \dot{\epsilon}_{po}, R_o, z_o, \dot{z}_o$)
- les déplacements x courants.

La programmation, pour chaque itération courante, s'organise ainsi :

- une intégration classique est menée sur la surface moyenne (par points de Gauss) ;
- pour chaque point de la surface moyenne considéré, une intégration dans l'épaisseur est effectuée avec le calcul séquentiel des grandeurs suivantes :
 - déformations totales ϵ
 - vitesse de déformation plastique scalaire
 - (résolution de l'équation en \dot{p})
 - $s, S, R(\dot{p})$
 - vitesses de déformation plastique : $\dot{\epsilon}_p = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}}{s} S_d$
 - déformations plastiques : $\epsilon_p = \tilde{\epsilon}_{po} + \left[(1 - \alpha) \dot{\epsilon}_{po} + \alpha \dot{\epsilon}_p \right] \Delta t$
 - centre du domaine élastique : $z = z(\dot{\epsilon}_p)$
 - contraintes : $\sigma = S + z$
 - potentiel W^*
 - forces intérieures : $F_{int} = \int \left[\frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right]^t \sigma dv = \frac{\partial W^*}{\partial x}$
 - matrice de rigidité « élastique tangente » K_{el} (voir algorithme de résolution).

Les calculs de F_{int} , K_{el} ne sont menés que si nécessaires.

Les $\dot{\epsilon}_p$ étant constamment calculés en fonction des déplacements x , ils ne sont stockés qu'une fois la convergence obtenue, et sont donc « numériquement réversibles » au cours du pas de temps. Ceci évite à l'algorithme de se perdre et de diverger lorsque l'estimation des $\dot{\epsilon}_p$ déduite des premières itérations est erronée, phénomène courant habituellement.

6. Algorithme de résolution par minimisation du potentiel W^*

A ce stade, tous les ingrédients sont réunis pour effectuer numériquement la résolution des équations d'équilibre :

$$F_{\text{ext}} - F_{\text{int}} = 0$$

par minimisation du potentiel W^* .

Cette minimisation est conduite itérativement, suivant un algorithme de descente semblable à celui déjà existant auparavant dans ELFINI pour les non-linéarités géométriques ([PET 83], [PET 85], [COR 88]). Les itérations consistent schématiquement en :

– le calcul d'une direction de descente à l'aide d'un opérateur de résolution $[K^{-1}]^*$ approchant la matrice de rigidité tangente (préconditionnement précisé dans le § 6.1) :

$$V = [K^{-1}]^* (F_{\text{ext}} - F_{\text{int}})$$

– la minimisation du potentiel le long de la direction de descente (Line-search) :

$$\begin{aligned} & \text{Min } W^*(x + \rho V) \\ & \rho \\ & (= \Rightarrow \frac{\partial W^*}{\partial \rho} = 0) \end{aligned}$$

– l'incrément des déplacements :

$$x = x + \rho V$$

6.1. Préconditionnement

Les lois de comportement anélastiques n'étant pas dérivables, le principe est d'utiliser non pas la matrice de rigidité tangente :

$$K_{tg} = \left[\frac{\partial W^*}{\partial x \partial x} \right]$$

mais une matrice de rigidité « élastique tangente »

$$K_{el} = \left[\frac{\partial W_{el}}{\partial x \partial x} \right]$$

c'est-à-dire le Hessien de la seule partie réversible du potentiel (à ϵ_p fixé, $w_{el} = w_i$). (En petits déplacements K_{el} est la matrice élastique linéaire).

Dans le cas de petits déplacements avec décharge complète, on résout alors un problème parfaitement linéaire en une seule itération, ce qui n'est pas possible si l'on utilise la matrice tangente. A chaque itération, l'inverse de la matrice est actualisé par la formule de BFGS ([GER 81]), qui rend cet opérateur de résolution sécant, approchant ainsi suffisamment bien la matrice tangente inverse pour éviter le trop grand nombre d'itérations des méthodes à matrice factorisée constante. De ce fait, le processus itératif est correctement initialisé, qu'il y ait charge ou décharge (locale ou non) de la structure :

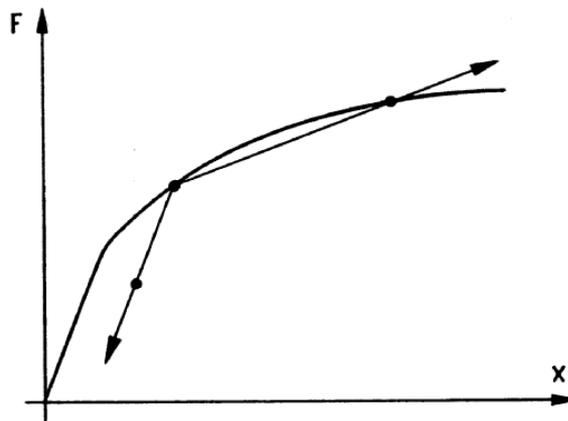


Figure 2. Préconditionnement par BFGS et situations de charge ou de décharge

6.2. Line-search

Alors que, dans le cas de l'élasticité, l'énergie potentielle totale est un polynôme du quatrième degré et que sa minimisation le long d'une direction V se réduit à la résolution d'une équation scalaire du troisième degré ([PET 83], [PET 85]), le line-search ne peut plus s'opérer de façon aussi pure dans le cas présent. En effet, le potentiel, de façon générale, ne s'exprime pas sous la forme d'un polynôme et son expression n'est connue que par morceaux.

On procèdera donc itérativement en retenant une méthode de développement limité. Il s'agit d'un Newton-Raphson « généralisé » à un ordre plus élevé. La linéarisation utilisée pour Newton-Raphson :

$$\frac{\partial W^*}{\partial \rho} = \frac{\partial W^*}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial^2 W^*}{\partial \rho^2} = 0$$

est remplacée par un développement limité d'ordre n ([DUR 71]) :

$$\frac{\partial W^*}{\partial \rho} = \frac{\partial W^*}{\partial \rho} + a_1 \rho + a_2 \rho^2 + \dots + a_n \rho^n = 0$$

L'ordre retenu est 3 nécessairement : on a à résoudre algébriquement une équation de degré n et n doit être impair pour toujours avoir au moins une solution. Le Line-Search consiste alors exactement en les mêmes opérations que pour l'élasticité (résolution d'une équation scalaire du 3ème degré), mais est itératif. Le calcul des coefficients dépend d'ailleurs du domaine, élastique ou plastique, où se situe chaque point de Gauss. Cette méthode s'est avérée la plus performante : deux ou trois itérations, en moyenne, suffisent et, par un choix adéquat de la racine, la solution est nécessairement un minimum. On note, de plus, que le calcul des différents coefficients demande très peu de mémoire, et est vectorisable par groupes d'éléments.

Cet algorithme généralise l'algorithme cité déjà existant pour l'élasticité, et dégénère exactement en ce dernier lorsqu'il n'y a pas entrée en plasticité.

7. Exemples d'applications

La méthode a été intégrée dans ELFINI depuis quelques années et validée expérimentalement ([COR 88], [PER 93]). Nous présentons quelques exemples significatifs du point de vue des phénomènes mis en jeu et des possibilités du programme :

– quelques cas académiques avec la comparaison à la littérature ([OWE 80], [BAT 86]), figure 3 ;

– des calculs plus complexes de structures aéronautiques sur les figures suivantes, avec les comparaisons à des résultats d’essais. Sont ainsi illustrés :

- des calculs d’entures boulonnées qui incluent la prise en compte du contact tôle-tôle, boulon-tôles et têtes-tôles ;

- la simulation du procédé de *cold-working* qui vise, par le passage d’un mandrin, à mettre en précontrainte de compression une zone trouée sensible à l’amorçage de fissure ;

- le calcul d’éléments en 2214 pouvant périr en post-flambage plastique ;

- l’obtention de champs de surcontraintes en préalable des analyses de fatigue, avec, en particulier, le calcul d’une éprouvette type attache de voilure de Mirage 2000, pour lequel la modélisation des contacts entre le tenon et la chape (en 2214) et l’axe en TA6V a été nécessaire. En gardant toujours à l’esprit que le paramètre important pour la taille et le coût des calculs est le nombre de d.d.l ;

- l’utilisation de super-éléments élastiques permet de réduire la zone non linéaire, le nombre total de degrés de liberté n’étant plus alors que d’environ 20 000. La simulation d’un cycle de chargement montre très bien que les concentrations de contraintes apparaissent en des zones différentes de celles issues d’un calcul élastique, que la localisation de ces zones bouge au cours du cycle et que les directions des surcontraintes évoluent tout au long de ce cycle.

Dans un certain nombre de ces exemples, on notera que le problème est évidemment compliqué par la résolution du contact, qui constitue en lui-même une non-linéarité, et non des moindres lorsque les deux phénomènes se trouvent couplés, même s’il ne s’agit que d’un contact élastique, sans frottement.

Sur les performances de l’algorithme, des caractéristiques générales peuvent être retenues :

– avec le paramètre $\alpha = 1$, le schéma implicite d’intégration dans le temps converge toujours, quelle que soit la valeur du pas de temps, sur une solution vérifiant, pour les états stationnaires, les lois de comportement élastoplastiques, ainsi que cela avait été montré dans [HUG78] ;

– dans ces mêmes conditions, l’algorithme converge toujours, même avec des changements de forme de la structure importants. On passe ainsi sans problème les grandes flèches et le flambage, de façon automatique ;

– pour un palier de chargement, **la solution élastoplastique** est directement obtenue avec **un pas de temps** très grand, et vérifie toutes les équations. Le choix de pas de temps plus petits n’est utile que si l’on s’intéresse à l’évolution au cours du temps. Par ailleurs, on s’assure du respect de l’histoire de chargements complexes en procédant par paliers de chargement, en pratique passer par les min et les max des chargements suffit ;

– dans le cas de petits déplacements, il n’y a pas de refactorisation de la matrice de rigidité, et, lorsque celle-ci fait le coût du calcul, on peut estimer à moins de **1,5 fois un calcul linéaire** le coût du calcul plastique d’un cas de charge ;

– dans le cas des grands déplacements, le nombre d'itérations et de refactorisations est conditionné par les changements de forme de la structure. Ces derniers sont de nature différente des changements de forme en élasticité.

On peut prévoir, en gros, un nombre **d'itérations qui peut aller jusqu'à 2 fois celui d'un calcul élastique**, pour un palier de chargement.

8. Conclusion

Par le biais d'une formulation adéquate et d'un schéma d'intégration implicite, on a pu exhiber une énergie potentielle mécanique. Les équations d'équilibre et les lois d'évolution associées au potentiel de dissipation choisi dérivent de cette énergie potentielle, en exprimant son caractère minimal. En particulier, les lois de normalité sont générées en écrivant explicitement que l'énergie dissipée plastiquement, par rapport à une évolution qui aurait été élastique, est maximale.

En profitant de ce potentiel, et grâce à l'élimination des $\dot{\epsilon}_p$, une méthode efficace de minimisation par *line-search* itératif, mais exact (par opposition aux *line-search* où l'on donne une valeur approchée, voire fixe, du paramètre ρ du *line-search*), a été construite et permet l'obtention directe des solutions que ce soit en petits ou grands déplacements, couvrant ainsi le post flambage élastique ou plastique.

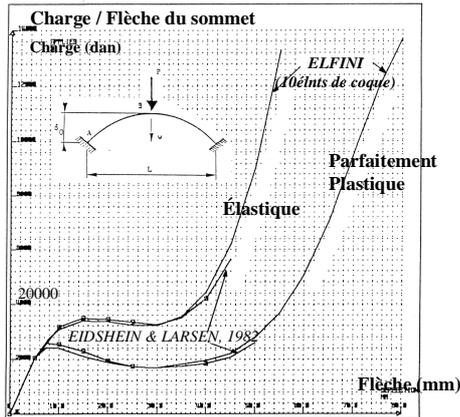
Cette méthode généralise l'algorithme qui avait déjà été développé pour le non linéaire géométrique élastique, et opérait par la technique du *line-search*, et en hérite des propriétés de robustesse et d'efficacité :

- une convergence assurée pour les problèmes bien posés,
- l'obtention d'un état d'équilibre stable (à énergie minimale),
- le franchissement des zones instables avec saut automatique d'un chemin d'équilibres stables vers un autre chemin d'équilibres stables, même dans des cas de snapthrough sévères,
- l'obtention directe de la solution au niveau de charge nominal, pour un palier de charge donné, sans la nécessité de suivre des chemins instables,
- des temps de calcul très réduits par rapport aux méthodes plus classiques (continuation, arc-length...).

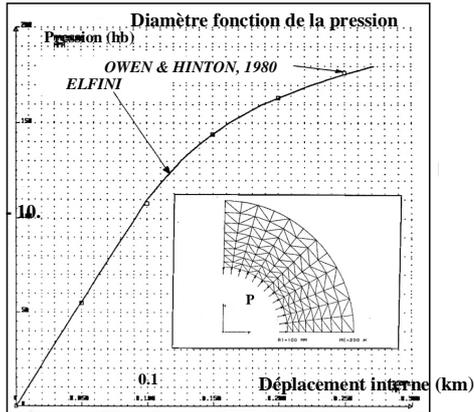
Intégré dans la branche non linéaire d'ELFINI, et validé sur nombre d'essais, cet outil est utilisé systématiquement chez Dassault Aviation pour l'analyse de la tenue structurale des éléments métalliques pouvant travailler dans le domaine plastique : les zones trouées chargées, ou les pièces massives soumises au matage, ou les éléments minces, âmes, voiles ou revêtements, susceptibles de flamber plastiquement ou de plastifier après flambage.

BENCHMARKS de la LITTÉRATURE

Calculs élastoplastiques



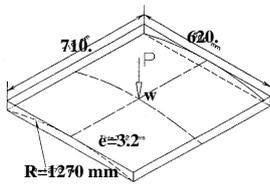
Snapthrough d'une arche appuyée sous une charge ponctuelle.



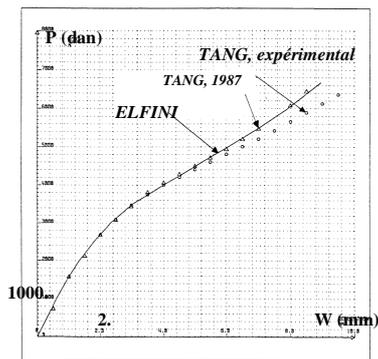
Cylindre sous pression interne.

01-DV-039

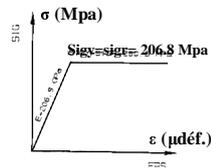
TEST dit du TOIT SOUMIS à une CHARGE en son CENTRE



Toit courbe encastré soumis à une charge ponctuelle en son centre



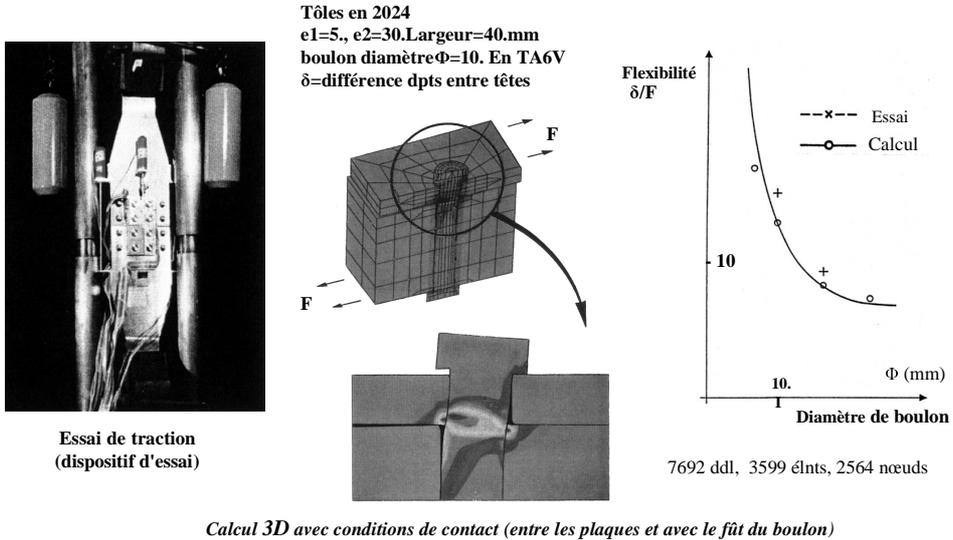
Charge / Flèche au centre



Matériaux élastique, puis parfaitement plastique.

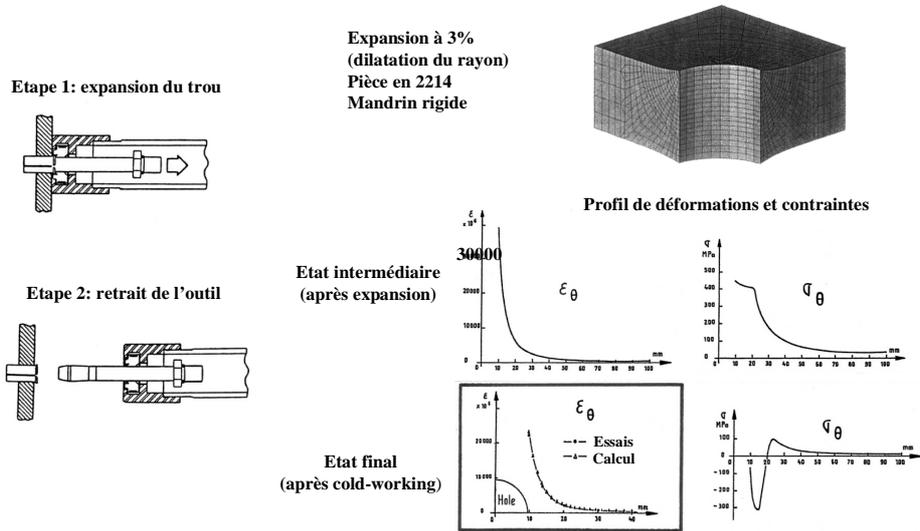
Figure 3. Quelques comparaisons à des cas de la littérature

SOUPLESSE DES FIXATIONS BOULONNEES



01-DV-039

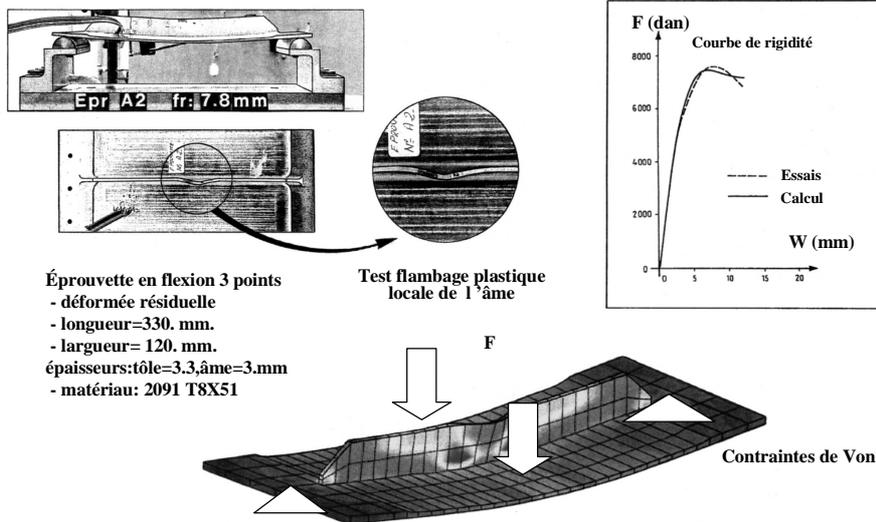
SIMULATION du PROCÉDE (BOEING) de COLD WORKING



01-DV-039

Figure 4. Calcul d'enture avec contact et simulation du procédé de cold-working

FLEXION d'un RAIDISSEUR METALLIQUE INTEGRE



AME de LONGERON en FLEXION 3 POINTS

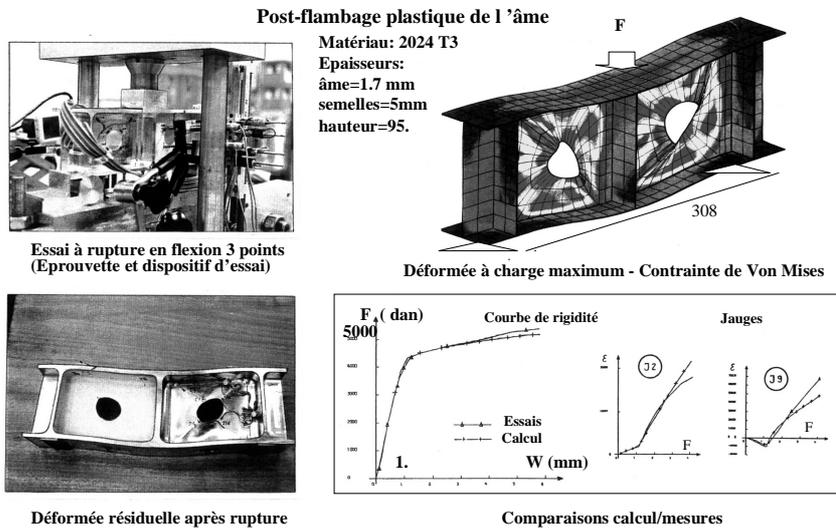
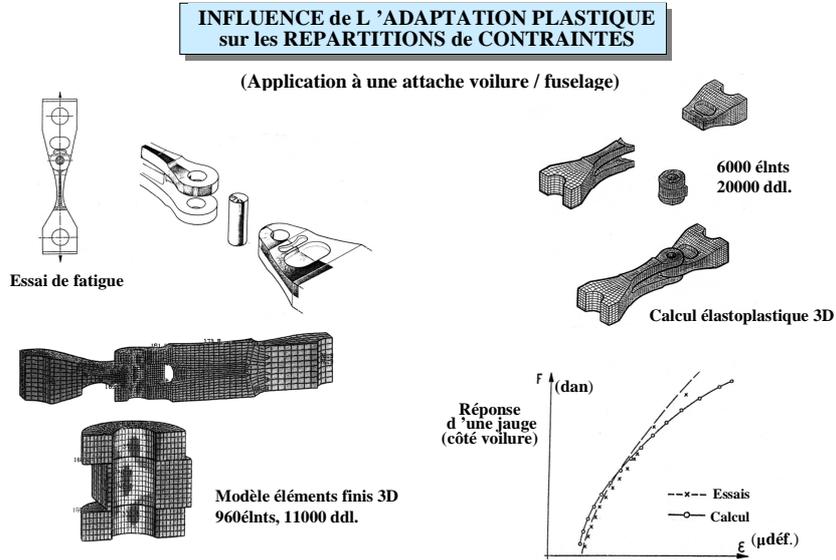


Figure 5. Flambage et post-flambage plastique d'un raidisseur intégré et d'une âme de nervure en 2024



PREDICTION des DUREES de VIE en SERVICE

Calculs des champs de contraintes locaux élastoplastiques

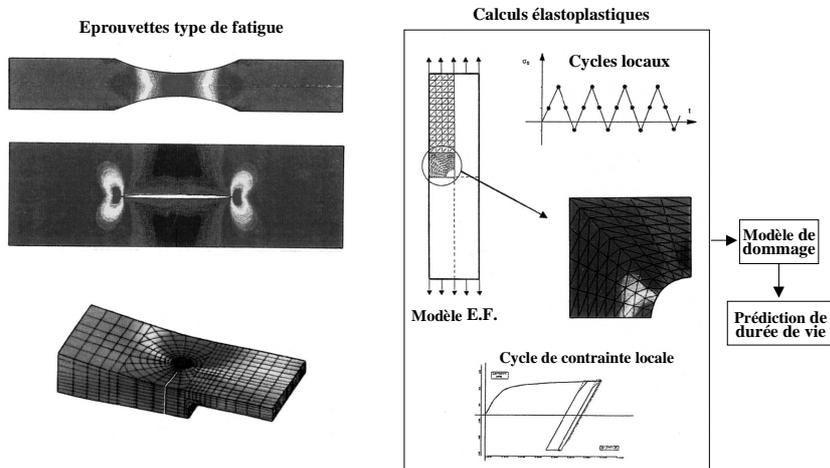


Figure 6. Détermination de surcontraintes pour les calculs de durée de vie en fatigue. Calcul type des concentrations de contraintes pour une attache de voilure de Mirage 2000.

9. Bibliographie

- [BAT 86] BATOZ J.L., DHATT G., 1986 "Plaques et coques par éléments finis, analyse linéaire et non linéaire", Institut pour la promotion des Sciences de l'Ingénieur, Paris, 2-4 juin 1986.
- [CHA 84] CHAN A.S.L., HSIAO K.M., 1984 "Nonlinear analysis using a reduced number of variables". *FENOMECH'84. Proceedings of the 3rd International conference on finite elements in nonlinear mechanics*. Stuttgart, West Germany, September 10-14, 1984. Editor J. ST. Doltsinis.
- [COM 91] COMBESCURE A., *Upon the different theories of plastic buckling: Elements of a choice; in buckling of shell structures, on land, in the sea and in the air*, Edited by J.F.Jullin, Elsevier Applied Science (1991) p. 448-457.
- [COR 85] CORNUAULT C., AMALBERT C. Influence du Cold-Working sur la durée de vie en fatigue et en propagation de crique. Marché STPA 83.95.020 lot 1. AMD-BA - NS 24107, 1985.
- [COR 86] CORNUAULT C., Post-flambage des structures composites, Marché STPA 84.95.019 lot 3. AMD-BA - NS 26256, 1986.
- [COR 87] CORNUAULT C., Analyse des Structures non linéaires. Méthodes et moyens de calcul en contact et plasticité, Marché STPA 84.95.019, BC n° 14, AMD-BA. 1987.
- [COR 87] CORNUAULT C., « Développements pour l'analyse de la tenue des structures travaillant en post-flambage ». *Calcul des structures et Intelligence artificielle*. vol. 1 1987. Publié par J.M. Fouet, P. Ladevèze, R. Ohayon. Pluralis 1987, p. 115-130.
- [COR 88] CORNUAULT C., « Mise en œuvre de Logiciels Performants pour l'analyse non linéaire en calcul de structures », *Calcul des structures et intelligence artificielle*, vol. 2, 1988, publié par J.M. Fouet, P. Ladeveze, R. Ohayon . Editions Pluralis. p. 73-92.
- [CRI 79] CRISFIELD M.A., "A fast modified Newton-Raphson iteration", *Comput. Meths. Appl. Engrg.* 20 (1979) 267-278.
- [CRI 80] CRISFIELD M.A., "Incremental/iterative solution procedures for nonlinear structural analysis", in: C. Taylor, E. Hinton and D.J.R. Owen, Eds. *Proc. Internat. Conf. on Numerical Methods for Nonlinear Problems*, Swansea, 1980, 261-290.
- [CRI 81] CRISFIELD M.A., "A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through"", *Comput. & Structures* 13, 1981, 55-62.
- [DUR 71] DURAND E., *Solutions numériques des équations algébriques*. Masson et Cie, 1971.
- [GER 73] GERMAIN P., *Cours de Mécanique des Milieux Continus*. Masson & Cie. 1973
- [GER 81] GÉRADIN M., IDELSOHN S., HOGGE M., "Computational strategies for the solution of large nonlinear problems via quasi-Newton methods". *Computers and Structures*, June 1981, vol. 3.
- [GRE 65] GREEN A.E., NAGHDI P.M., "A general theory of an elastic-plastic continuum", *Arch. Rat.Mech.Analy.* 18, 251-281, 1965.

- [HAL 75] HALPHEN B., NGUYEN QUOC SON, « Sur les matériaux standard généralisés », *J. de Méca.*, 14, 1975, p. 39-63.
- [HIL 50] HILL. R., *The mathematical theory of plasticity*. Clarendon Press. Oxford, 1950.
- [HIL 58] HILL. R., "A general theory of uniqueness and stability of elastic plastic solids". *J. of Mech. Phys. Solids*, vol. 6, 1958. p. 236-249.
- [HUG 78] HUGHES T.R.J., TAYLOR R.L., "Unconditionnally stable algorithms for quasi-static Elasto/Visco-Plastic Finite Element Analysis". *Computers and Structures*. vol. 8 p. 169-173, 1978.
- [HUT 74] HUTCHINSON J.W., "Plastic buckling", *Adv. Appl.Mech.* vol. 14, 1974, p.67-144.
- [LAR 74] LARSEN P.K., POPOV E.P., "Large displacement analysis of viscoelastic shells of revolution", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* 3, 237-253 (1974).
- [LEM 85] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 1985.
- [MAR 75] MARTIN J.B., *Plasticity: Fundamentals and General Results*. The MIT Press. Massachussets U.S.A., 1975.
- [MEN 68] MENDELSON, *Plasticity: Theory and Application*. The Mac Millan Company, New York, 1968.
- [NAY 71] NAYAK. G.D., Plasticity and large deformation problems by finite element method, Ph. D. Thesis, Univ. of Wales, Swansea, 1971.
- [NQS 84] NGUYEN QUOC SON, « Bifurcation et stabilité des systèmes irréversibles obéissant au principe de dissipation maximale ». *Journal de Mécanique théorique et appliquée*. vol. 3, n° 1, 1984.
- [NQS 88] NGUYEN QUOC SON, *Topics in nonsmooth mechanics*. Chapter VI, "Quasi-static Evolution and Bifurcation Analysis in standard plasticity and fracture". Moreau, Panagiotopoulos, Strang, editors, 1988. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, p. 241-266.
- [OWE 80] OWEN D.R.J., HINTON, *Finite Elements in plasticity*. Pineridge Press, Swansea, U.K. 1980.
- [PER 93] PERCHERON T., CORNUAULT C., « Intégration de l'analyse élastoplastique dans la conception des structures aéronautiques ». *Actes du Colloque National en Calcul des Structures*, 11-14 mai 1993, Giens. Hermès, Paris, 1993. p. 220-237.
- [PET 83] PETIAU C., CORNUAULT.C., Document AMD-BA 22363 - Marché DRET 8034-262 Lot n° 3 - Recherche d'algorithmes performants pour le calcul des équilibres en post-flambement, 1981.
- [PET 83] PETIAU C., CORNUAULT C., "Algorithmes efficaces pour les calculs en post-flambement. Efficient algorithms for post buckling computation, *Proceedings of the sixth International Symposium on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*. Versailles France, December 12-16, 1983, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, VI R.Glowinski and J.L. Lions (Editors), Elsevier Science Publishers B.V. (North-Holland), INRIA, 1984. p. 355-379.

- [PET 85] PETIAU C., CORNUAULT C., « Algorithmes efficaces pour le calcul des équilibres post-flambement ». Actes du Troisième Colloque *Tendances Actuelles en Calcul de Structures*, Bastia, 6-8 novembre 1985, publiés par J.P. Grellier et G.M. Campel, Pluralis 1985, p. 109-127.
- [POT 78] POTTIER-FERRY M., « Bifurcation et stabilité pour des systèmes dérivant d'un potentiel », *J. mécanique*, vol. 17, p. 4, 1978.
- [SIM 92] SIMO J.C., LAURSEN T.A., "An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction". *Computers & Structures*, vol. 42, n° 1, p. 97-116, 1992.
- [STO 87] STOLZ C., Anélasticité et stabilité, Thèse de doctorat ès Sciences Mathématiques. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, juin 1987.
- [STO 88] STOLZ C., « Sur les équations générales de la dynamique des milieux continus anélastiques ». *C.R. Académie des Sciences*, Paris, t. 307, Série II, p. 1997-2000, 1988.
- [TAN 87] TANG S.C., "Analysis of springback in sheet forming operation", *In Advanced Technology of Plasticity*, p. 93-197, 1987.
- [ZIE 82] ZIENKIEWICZ O.C., *The Finite Element Method*. 3rd Edition, Mac Graw Hill, London, 1982.

Annexe : élimination des $\dot{\epsilon}_p$ et calcul des énergies potentielles

1) Cas mono dimensionnel :

$$\cdot \sigma - z = K \dot{p}^{\frac{1}{n}} + R \quad (\dot{p} = |\dot{\epsilon}_p|)$$

$$\cdot \sigma = E(\epsilon - \tilde{\epsilon}_{p0} - \dot{\epsilon}_p \alpha \Delta t)$$

$\dot{p} = |\dot{\epsilon}_p|$ est solution de :

$$\cdot \dot{p}(C + h + E) \alpha \Delta t + K \dot{p}^{\frac{1}{n}} = E(\epsilon - \tilde{\epsilon}_{p0}) - z_0 - R_0$$

soit pour $n = 1$:

$$\cdot \dot{p} = \frac{\langle E(\epsilon - \tilde{\epsilon}_{p0}) - z_0 - R_0 \rangle}{((C + h + E)\alpha \Delta t + K)}$$

Le potentiel est, dans ce cas précis, biquadratique en x , par morceaux :

$$W_1 = \frac{1}{2} \int E(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_{po})^2 dv - \frac{1}{2} \alpha \Delta t \int (K + (C + h + E) \alpha \Delta t) \dot{p}^2 dv$$

2) Cas tridimensionnel

\dot{p} est solution de :

$$(R_o + K\dot{p}^n + \dot{p}(C + h + 3G)\alpha\Delta t)^2 = \frac{3}{2} \theta^t \theta$$

$$\text{avec : } \theta = 2G(\varepsilon_d - \tilde{\varepsilon}_{po}) - \tilde{z}_o$$

$$\text{soit pour } n = 1 : \dot{p} = \frac{\langle \sqrt{\frac{3}{2}} \theta^t \theta - R_o \rangle}{K + (3G + C + h)\alpha\Delta t}$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \int (\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_{po})^t H(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}_{po})^t dv - \frac{1}{2} \alpha \Delta t \int [K + (C + h + 3G)\alpha\Delta t] \dot{p}^2 dv$$

Le cas des déformations planes s'en déduit aisément.

3) Contraintes planes :

\dot{p} est solution de :

$$1 = \frac{P_o^2}{\left[R_o + A\dot{p} \alpha \Delta t + K\dot{p}^{\frac{1}{n}} \right]^2} + \frac{3\tau_o^2}{\left[R_o + B\dot{p} \alpha \Delta t + K\dot{p}^{\frac{1}{n}} \right]^2}$$

en ayant posé :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, L = \frac{E}{2(1-\nu)}$$

$$A = L + C + h, B = 3G + C + h$$

$$P_o = L(\varepsilon_x + \varepsilon_y - \tilde{\varepsilon}_{pox} - \tilde{\varepsilon}_{poy}) - \tilde{z}_{ox} - \tilde{z}_{oy}$$

$$\tau_o^2 = \left[G(\epsilon_x - \epsilon_y - \tilde{\epsilon}_{pox} + \tilde{\epsilon}_{poy}) - (\tilde{z}_{ox} - \tilde{z}_{oy}) \right]^2 + \left[G(\epsilon_{xy} - \tilde{\epsilon}_{pox}) - \tilde{z}_{oxy} \right]^2$$

s, S, z, $\dot{\epsilon}_p$, puis σ s'obtiennent directement à partir de \dot{p} .

Pour $n = 1$, l'équation est du 4^e degré. Dans ce dernier cas, le potentiel s'écrit :

$$W_1 = \frac{1}{2} \int (\epsilon - \tilde{\epsilon}_{po})^t H(\epsilon - \tilde{\epsilon}_{po}) dv$$

$$- \frac{1}{2} \alpha \Delta t \int \left[K + (C + h + L \cos^2 \beta + 3G \sin^2 \beta) \alpha \Delta t \right] \dot{p}^2 dv$$

avec :

$$\cos \beta = \frac{P_o}{[s + (L + C) \dot{p} \alpha \Delta t]}$$

$$\sin \beta = \frac{\sqrt{3} \tau_o}{[s + (3G + C) \dot{p} \alpha \Delta t]}$$