

---

# La méthode des éléments finis en lubrification

## Une revue bibliographique

**Benyebka Bou-Saïd**

*Laboratoire de Mécanique des Contacts  
INSA 20 Avenue A. Einstein 69621  
F-Villeurbanne Cedex  
bousaid@lmc.insa-lyon.fr*

---

*RÉSUMÉ. Cet article présente une revue bibliographique des travaux les plus significatifs réalisés dans le domaine de la lubrification lorsque des non-linéarités apparaissent telles que les effets d'inertie, de turbulence, thermiques ou non newtoniens et leurs traitements par la méthode des éléments finis.*

*ABSTRACT. This paper deals with the review of the most important publications on the finite element modelling of lubricated mechanisms where flow particularities such as turbulence, overheating and fluid reactions due to its rheological properties appear. There are presented chronologically and discussed. Numerous mathematical developments and numerical simulations have performed until now. Nevertheless a lot of questions are still open such as cavitation and stress overshoot.*

*MOTS-CLÉS : lubrification, non-linéarité, éléments finis, bibliographie.*

*KEYWORDS: Lubrication, non linearities, finite elements.review.*

---

## 1. Introduction

La méthode des éléments finis est une procédure d'approximation pour résoudre des équations aux dérivées partielles de type généralement elliptique ou parabolique dans le domaine de la physique mathématique ou de l'ingénieur. Cette méthode consiste en la subdivision du domaine de résolution en éléments (triangles, quadrangles, etc.) et utilise une théorie d'approximation du problème posé sur chaque élément. Une discrétisation géométrique est réalisée sur le domaine et les équations sont approximées sur chaque élément. Partant d'un principe variationnel ou de la méthode des résidus pondérés, les équations gouvernant le problème sont ainsi transformées en équations locales sur chaque élément. Ces équations sont ensuite assemblées pour former un ensemble d'équations, soit différentielles, soit algébriques, avec la prise en compte d'une manière appropriée des conditions aux limites du problème. Les inconnues dites nodales sont obtenues à partir de la résolution de ce système. La méthode des éléments finis a été développée originellement par des ingénieurs dans les années 1950 afin d'analyser le comportement des structures d'avion. Turner *et al.* (1956) ont présenté un premier article sur ce sujet suivis par Clough (1960) et Argyris (1963) et d'autres ensuite.

L'application des éléments finis à des problèmes en dehors du domaine de la mécanique des structures comme la mécanique des fluides et l'électromagnétisme a été présentée pour la première fois par Zienkiewicz et Cheung (1965). Oden (1972) a lui aussi largement contribué à l'utilisation de cette méthode numérique pour une classe très large de problèmes non linéaires en mécanique du solide. Cette méthode ayant acquis de la maturité dans diverses applications le concept de l'équilibre des forces a été remplacé par des arguments théoriques plus solides basés sur le principe variationnel et la méthode de Rayleigh-Ritz (Rayleigh, 1877, Ritz, 1909). D'importantes contributions dans le domaine du développement mathématique pour les éléments finis sont dues à Babuska et Aziz (1972), Carlet et Raviart (1972), Aubin (1972), Strang et Fix (1973), Oden et Reddy (1976) et Lions et Magenes (1972). Néanmoins dans le domaine de la lubrification les premiers articles n'apparaissent qu'en 1960 une époque où les analystes admettent la généralité de la méthode des éléments finis et ceci grâce au principe variationnel. Nous présentons par la suite dans un premier temps une revue bibliographique sur les non-linéarités qui peuvent apparaître en lubrification et dans un deuxième temps quelques références d'auteurs ayant contribué à la résolution de ce type de problèmes par la méthode des éléments finis.

## 2. Non-linéarités liées à la turbulence, aux effets d'inertie et aux effets thermiques

Les méthodes courantes d'analyse des performances de mécanismes lubrifiés fonctionnant à haute vitesse en régime turbulent sont en général basées exclusivement sur des modèles phénoménologiques de turbulence. Les exemples les

plus représentatifs sont les travaux de Constantinescu [CON 59], [CON 62], [CON1 70, CON2 70, CON 74, CON 75], [HIR 74] et Chou et Saibel [CHO 59], qui axent leurs travaux sur le principe de longueur de mélange de Prandtl. [NG 64] et [NG 65] utilisent le principe de loi de paroi proposé par Reichardt [REI 56]. Une excellente bibliographie de ces premiers travaux dans le domaine est réalisée par Saibel et Macken [SAI 74], Taylor et Dowson [TAY 74], Dowson, Godet et Taylor [DOW 77] et Szeri [SZE 80]. [BUR 74, KIN 77, CON 82] représentent les travaux les plus significatifs entre les années 70 et 80 dans ce domaine. D'autres travaux sont présentés dans [CHO 86]. Tous ces développements sont basés essentiellement sur des principes de longueur de mélange. D'autres modèles plus élaborés furent proposés par la suite. Un premier exemple est donné par Ho et Vohr [HO 74] qui utilisent pour la première fois un modèle de turbulence à une équation. Dans ce cas la viscosité turbulente est déterminée à partir de l'énergie cinétique de la turbulence. Pour obtenir ce modèle les auteurs utilisent une équation algébrique donnée pour définir la longueur de mélange de la turbulence. Cette équation fut remise en cause plus tard par Launder et Leschziner [LAU 78] qui montrent qu'elle ne peut décrire d'une manière satisfaisante les effets d'échelle des longueurs de mélange. Ils proposent une théorie pour les paliers de butée, basée sur un modèle à deux équations le modèle k- $\epsilon$  développé par Jones et Launder [JON 72, JON 73]. Les résultats obtenus à l'aide de ce modèle sont d'une manière générale plus proches de l'expérience que ceux fournis par les modèles phénoménologiques ou à une équation. Néanmoins le modèle k- $\epsilon$  utilisé dans [LAU 78] ne prend pas en compte les effets dus à la différence des contraintes normales de turbulence ainsi que les effets thermiques.

Actuellement parmi les différentes théories existantes celle qui paraît la moins approchée est basée sur un principe multi-équations et des équations de transport en contraintes. Les équations de la dynamique des contraintes turbulentes sont développées directement à partir des équations de Navier-Stokes. Parmi les auteurs qui ont développé et testé ces modèles on peut citer Rotta [ROT 51], Daly et Harlow [DAL 70], Hanjalic et Launder [HAN 72, HAN 76], Lumley et Khajeh-Nouri [LUM 74], Launder, Reece et Rodi [LUA 75], Rodi [ROD 78], Lumley [LUM1 80, LUM2 80] et Bradshaw *et al.* [BRA 81]. Plus récemment, sur la base d'arguments thermodynamiques et d'une solution itérative des équations de transport en contraintes, Ahmadi *et al.* [AHM 84, BUS 87] ont établi un modèle de turbulence à deux équations. Ce modèle prend en compte les effets des contraintes normales [AHM 85] ainsi que les effets thermiques [BUS 87].

Néanmoins, l'obtention de résultats essentiellement numériques à partir des modèles à une ou deux équations est difficile et, en régime de lubrification isotherme, l'attrait de ces modèles par rapport à ceux basés sur des concepts phénoménologiques est minime [SZE 87].

Un autre type de non-linéarité dans les écoulements peut apparaître lorsque par exemple les vitesses des parois sont élevées, les épaisseurs de film importantes ou la viscosité cinématique du fluide faible. Dans ce cas les forces d'inertie ne sont plus

négligeables devant les forces de viscosité et il est nécessaire d'en tenir compte pour prédire correctement les performances des mécanismes. La modélisation des effets d'inertie dans les écoulements a fait l'objet de nombreux travaux. Nous citerons essentiellement ceux de Slezkin et Targ [SLE 46] qui inclut ces effets liés à l'épaisseur du film en intégrant les équations du mouvement ; de Kahlert [KAH 48] qui introduit des perturbations au niveau du champ de vitesses ; perturbations considérées comme des corrections dues aux forces d'inertie ; de Milne [MIL 59] qui utilise une fonction de courant pour résoudre les équations de continuité et de mouvement et de Constantinescu [CON 70] qui propose une méthode permettant de prendre en compte ces effets aussi bien en régime laminaire que turbulent. C'est à partir de cette dernière étude que Tichy *et al.* [TIC 70, MOD 78] élaborent un modèle en modifiant l'hypothèse simplificatrice d'un profil de vitesse parabolique utilisé par Constantinescu. Les travaux expérimentaux de Chaomleffel [CHA 81] ont montré que pour évaluer les effets d'inertie dus à une discontinuité géométrique le modèle de Constantinescu est suffisant.

Les théories classiques de la lubrification prédisent les performances des mécanismes en supposant que la viscosité du lubrifiant est constante et uniforme dans le film. Le comportement de ces mécanismes est alors dépendant de la valeur de cette viscosité. Si cette viscosité devient fortement fonction de la température ces théories ne sont plus raisonnablement applicables. Dans certains cas l'accroissement de température est non-négligeable mais reste néanmoins modéré. Le concept de viscosité effective est alors suffisant pour l'analyse du mécanisme, concept introduit pour la première fois par Raimondi et Boyd en 1958 [RAI 58]. Sous conditions sévères de fonctionnement, les effets thermiques deviennent si significatifs que le concept de viscosité effective ne peut plus être utilisé et pour obtenir la répartition de température dans le mécanisme l'utilisation de la théorie thermohydrodynamique s'avère nécessaire. L'importance des effets thermiques dans les paliers a été notée en premier par Fogg [FOG 46], Cope [COP 49], Zienkiewicz [ZIE 57], Dowson et Hudson [DOW 63], Hann et Kettleborough [HAH 69], Ezzat et Rohde [EZZ 73], Safar et Széri [SAF 74] et Hugues et Osterle [HUG 58]. Des analyses complètes dans le cas des paliers lisses sont données récemment par Lund, Tonnesen et Hansen [LUN1 84, LUN2 84], Jeng *et al.* [JEN 86] et Boncompain [FER 83], Ferron [FER 82], Fillon et Frêne [BON 84, BON 86]. Ces études montrent que les équations de base utiles pour résoudre un problème thermohydrodynamique sont bien établies et que seules les conditions aux limites et la modélisation des phénomènes de cavitation et de recirculation du lubrifiant dans le cas de géométrie fermée peuvent poser des problèmes.

On peut noter ainsi au travers de cette revue bibliographique que les modèles théoriques élaborés pour la prise en compte de la turbulence, des effets d'inertie ou des effets thermiques dans les domaines courants d'application sont représentatifs. Néanmoins la résolution de ces équations pour certaines géométries particulières ou certaines conditions de fonctionnement posent souvent des problèmes. Dans cette optique, il est intéressant de se focaliser sur la modélisation numérique du problème.

### **2.1. Traitement numérique**

Pour un problème donné, la première étape pour la détermination d'une solution consiste à définir des équations régissant ce problème ainsi que les conditions aux limites appropriées au problème physique traité. Une difficulté majeure à cet égard, mise à part la résolution des équations choisies, réside dans leur aptitude à représenter fidèlement les conditions réelles. Conservant à l'esprit cette première difficulté et les approximations qui en découlent, la seconde est la résolution de ces équations. Dans le cadre de la plupart des études, les équations sont connues ou choisies parmi un certain nombre de modèles existants ainsi que les conditions aux limites. Ces équations n'admettent pas de solutions analytiques et celles obtenues par développement sont à caractère trop restrictif pour être souvent utilisables. L'utilisation de méthodes numériques s'avère nécessaire pour la résolution de ces équations. La technique des différences finies est la méthode la plus utilisée et présente l'avantage d'avoir une longue histoire, couronnée de démonstrations rigoureuses de convergence; elle mène souvent à des équations algébriques de forme plus ou moins simples. Néanmoins, lorsque les conditions aux limites du problème deviennent complexes ou que la géométrie présente des discontinuités on perd beaucoup dans la simplicité de mise en œuvre. Les développements numériques effectués par cette technique sont souvent trop spécifiques et les tentatives de généralisation difficiles à réaliser. La méthode des éléments frontières n'a été que récemment utilisée dans les problèmes de lubrification [ING 87]. Elle présente beaucoup d'avantages quant aux problèmes de régularité du contour du domaine et des fonctions d'approximations. Cependant, la définition de la normale au contour peut amener des singularités dans le cas des discontinuités géométriques et un traitement spécial doit être effectué [BRE 82]. Par ailleurs cette méthode perd tout son attrait lorsque les problèmes sont non linéaires puisqu'il y a nécessité de discrétiser tout le domaine.

### **2.2. Quelques références**

Nous présentons ici d'une manière chronologique quelques travaux significatifs dans le domaine du traitement des non-linéarités induites par les effets d'inertie, de turbulence ou des effets thermiques. Suganami et Szeri [SUG 79] en 1979 proposent un modèle thermohydrodynamique pour les écoulements films minces valable aussi bien en régime laminaire que turbulent. La turbulence est traduite par le concept « eddy diffusivity » en se basant sur les travaux de Ng et Pan. L'écoulement est considéré comme une perturbation de l'écoulement de Couette. Dans ce modèle l'équation de l'énergie dans le film tient compte de la conduction suivant la direction de la vitesse ce qui permet de traiter, dans le cadre des paliers, des cas à fortes excentricités lorsqu'il y a apparition d'écoulements inverses. Les équations de base sont traitées par éléments finis et une bonne corrélation avec l'expérience est constatée. En 1983, Knight et Barrett [KNI 83] proposent une solution approchée

pour l'étude des paliers multilobes avec prise en compte des effets thermiques. Une hypothèse de distribution axiale de pression sous forme polynomiale permet une modélisation du problème par éléments finis en unidimensionnel sans perte de précision par rapport à une étude bidimensionnelle. Une bonne concordance est obtenue avec les travaux expérimentaux de Tonnesen et Hansen. Dans le cadre de l'étude des écoulements en régime turbulent Hashimoto *et al.* [HAS 84] présentent en 1984 une étude théorique et expérimentale sur les paliers elliptiques. L'équation de l'écoulement est résolue par une méthode semi-analytique par éléments finis et permet d'accéder aux caractéristiques statiques et dynamiques du palier en fonction du nombre de Reynolds. Ils montrent entre autres que la turbulence augmente la zone de stabilité de ce type de palier. En 1986, San Andres et Vance [SAN 71] publient un article sur l'influence des effets d'inertie sur les performances d'un palier amortisseur. Ils montrent par la Méthode des Eléments Finis (FEM) que l'amortissement ainsi que les coefficients de masse ajoutés restent invariants pour des nombres de Reynolds allant jusqu'à 10. En 1988, Bou-Saïd *et al.* [BOU 89] présentent une étude théorique et expérimentale sur les paliers hybrides. La résolution numérique est faite par éléments finis et un nouvel élément d'approximation ( Hermite semi- $C^1$  ) est présenté. Les avantages de l'utilisation de ce nouveau type d'élément en lubrification sont discutés. Enfin en 1995, Hill *et al.* [HIL 95] proposent d'utiliser la méthode de résidus pondérés pour résoudre les équations de base d'un écoulement dans un palier hybride avec prise en compte des effets d'inertie dans le film. Une méthode frontale est utilisée pour résorber les non-linéarités dues aux effets convectifs. Paranjpe et Han [PAR 95] présentent des travaux relatifs à une analyse dynamique des paliers en régime thermohydrodynamique avec une attention particulière aux phénomènes de cavitation. En 1998, Shi et Wang [SHI1 98, SHI2 98], proposent une approche mixte pour traiter les paliers lisses en régime thermohydrodynamiques en présence de contacts localisés entre aspérités. Une étude paramétrique pour des paliers de type Herringbone est réalisée par Zorkelback et al en 1998 [ZOR 98]. Enfin très récemment en 1999 Garnier *et al.* [GAR 99] proposent une analyse thermo-élasto-hydrodynamique complète d'un palier de tête de bielle pour un moteur à quatre cylindres en ligne. Dans la même année Cahouët *et al.* [CAH 99] traitent un problème de formage hydrodynamique en utilisant une approche de type contrôle optimal. Ces références illustrent bien l'importance qu'ont pris les éléments finis et leur utilité pour le traitement de problèmes complets et souvent complexes.

### 3. Effets non newtoniens en lubrification

L'élaboration de la théorie des films minces apparait en 1886 avec le modèle mathématique établi par Reynolds [REY 86] connu sous le nom d'équation de Reynolds. La résolution de cette équation permet d'accéder à la distribution du champ de pression dans un contact lubrifié et ainsi à ses caractéristiques de fonctionnement. Une des hypothèses émise par Reynolds est que le lubrifiant

possède un comportement newtonien, c'est-à-dire que la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse dans l'épaisseur du film. Depuis une vingtaine d'années, l'apparition dans l'industrie de produits lubrifiants de composition complexe, tels que les graisses, les bitumes, les lubrifiants additivés de polymères, etc., rend caduque l'hypothèse de fluide newtonien pour décrire le comportement rhéologique de ces produits. En effet, compte tenu des sollicitations de plus en plus sévères qui sont imposées à ces lubrifiants leurs réponses ne peuvent plus être modélisées par une loi de type visqueux linéaire. Cette constatation rend l'équation de Reynolds inutilisable dans ce cadre. De nombreux auteurs se sont penchés sur le problème de la caractérisation, soit théorique, soit expérimentale, de ces effets non newtoniens. Nous citons essentiellement et chronologiquement les travaux des auteurs suivants : Okrent [OKR 61], Tanner [TAN 69], Tao et Philippoff [TAO 67], Harnoy et Hanin [HAR 74], Swamy *et al.* [SWA 75], Harnoy et Philippoff [HAR 76], Harnoy [HAR 78], [TIC 78], Nicolas [NIC 79], Tayal *et al.* [TAY 82], Dien et Elrod [DIE 83], Hutton *et al.* [HUT 84], François [FRA 87] et Derdouri *et al.* [DER 89] dans le domaine des paliers. D'une manière plus générale, [EHR 93] dans le cas d'un problème transitoire il n'y a pas de réel consensus pour caractériser la réponse du fluide, les modèles proposés étant souvent en contradiction avec l'expérience. Bien qu'il soit généralement admis que l'effet fluidifiant joue un rôle important dans la diminution de la force de frottement, il n'y a pas à l'heure actuelle d'explication commune sur le comment de l'influence de l'élasticité du lubrifiant sur l'augmentation de l'épaisseur du film dans un contact.

Une étude récente que nous avons menée [BOU 96] indique qu'il est nécessaire pour les lubrifiants additivés de comprendre le phénomène de déformation des polymères dans le solvant afin d'établir une loi de comportement représentative et réaliste. Une analyse microstructurale est utile pour obtenir une caractérisation correcte des propriétés des lubrifiants et reproduire ainsi certains phénomènes observés tels que les surmodulations de contraintes ou l'apparition d'ondes de cisaillement dans certains cas de fonctionnement où les particules fluides sont soumises à des grandes et rapides déformations. Dans le cadre de la lubrification hydrodynamique en régime stationnaire, un modèle qui peut être représentatif du comportement du lubrifiant dans le contact est le modèle de Maxwell. Il permet d'introduire une composante élastique due à l'existence de polymères dans le fluide et un terme visqueux linéaire ou non. D'une manière générale les différents modèles rhéologiques peuvent être classés en deux groupes.

#### *Les lois définies explicites*

Les équations représentatives de ce type de lois peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\tau_{ij} = \mu(\mathbf{P}, \mathbf{T}, \dot{\gamma}_{ij}, \dots) \cdot \dot{\gamma}_{ij}$$

L'utilisation de ce type de modèle permet d'accéder aux caractéristiques principales d'un contact lubrifié par la résolution des équations classiques de la

mécanique des films minces. La non-linéarité du modèle rhéologique est exprimée par les variations de la viscosité apparente introduite dans les équations de Navier-Stokes ou dans l'équation de Reynolds.

*Les lois définies implicites*

Dans ce cas, les contraintes de cisaillement ne peuvent plus être exprimées d'une manière aisée en fonction de  $\dot{\gamma}_{ij}$ . En général ce type de lois peut s'écrire de la manière suivante :

$$\dot{\gamma}_{ij} = C_1 \frac{d\tau_{ij}}{dt} + C_2 \cdot \tau_{ij}$$

Les fonctions C1 et C2 peuvent dépendre du taux des déformations  $\dot{\gamma}_{ij}$ , de la contrainte de cisaillement  $\tau_{ij}$ , de la température, de la pression ou d'un seuil exprimé par une contrainte caractérisant l'écoulement du fluide. Les modèles rhéologiques représentés par cette équation ne permettent plus l'utilisation des équations de Navier-Stokes ou de Reynolds. Une modification des ces équations ou l'élaboration de nouvelles équations s'impose afin de tenir compte de la forme différentielle de ces lois de comportement. Il est à rappeler que dans le cadre de la lubrification hydrodynamique, en régime établi, on néglige dans ce type de lois l'influence des contraintes normales [NAJ 89]. La dérivée totale  $d\tau_{ij}/dt$  peut être exprimée de trois manières différentes :

- La dérivée de Jauman qui tient compte de l'effet de rotation de la particule fluide. Cette dérivée a été utilisée lorsque les contraintes sont référencées à un repère fixe.
- Lorsque les déformations dans le fluide sont importantes, la dérivée de Jauman est insuffisante et doit contenir des termes supplémentaires. On utilise alors la dérivée d'Oldroyd.
- Si les déformations élastiques du lubrifiant sont petites, la dérivée  $d\tau_{ij}/dt$  est approchée par la dérivée intrinsèque.

Afin d'intégrer ces lois de comportement dans la mécanique des films minces, deux approches sont possibles :

- la première consiste en la résolution directe et simultanée des équations de base de la mécanique des films minces non newtoniens ;
- la seconde en la résolution d'une équation généralisée des films minces non newtoniens.

### **3.1. Traitement numérique**

La méthode des éléments finis de par son avantage de structure modulaire est souvent choisie pour le traitement numérique des équations citées ci-dessus. Deux

types de formulations intégrales peuvent être utilisées. La forme intégrale faible obtenue sur l'équation généralisée des films minces non newtoniens constitue la base de la méthode dite indirecte. La forme intégrale de type mixte peut être appliquée dans le cadre de la lubrification film mince. Son utilisation est plus lourde mais présente l'avantage de rendre plus commode la prise en compte des modèles rhéologiques présentant un seuil d'écoulement.

### 3.2. *Quelques références*

Comme dans la première partie nous citons dans un ordre chronologique des travaux présentant l'utilisation de la MEF pour la résolution d'écoulements présentant des non-linéarités dues aux effets non newtoniens. En 1983, Singh *et al.* [SIN 83] présentent l'analyse d'un palier à trois lobes par la MEF. Les relations entre contraintes et taux de déformations sont de type cubique. Les équations de Navier-Stokes et de continuité sont résolues par éléments finis par la méthode de Galerkin. Les auteurs montrent que la charge ainsi que le couple de frottement diminuent avec l'accroissement du caractère non linéaire de la loi rhéologique. Bourgin et Gay en 1984 [BOU 84] utilisent aussi une loi cubique pour relier les contraintes et les taux de déformations. Une méthode du gradient leur permet d'accéder aux performances d'un palier de longueur finie. Dans la même année Beris *et al.* [BER 84] étudient l'écoulement entre deux cylindres coaxiaux. Cinq lois constitutives sont testées. Elles sont obtenues en tant que limites du modèle de Giesekus. Une comparaison des résultats obtenus à des solutions exactes données à partir des modèles newtoniens, du second ordre ou de Maxwell corotationnel s'avèrent satisfaisante. Bourgin *et al.* en 1985 [BOU 85] utilisent une loi de type Rabinowitsch et une technique de contrôle optimal liée à la MEF pour étudier les performances d'un patin. En 1991, Goyal et Sinhasan [GOY 91] présentent une étude élastohydrodynamique d'un palier à deux lobes. Les équations de Navier-Stokes et de continuité sont résolues par la MEF. Les caractéristiques statiques et dynamiques sont ainsi obtenues pour différentes lois de comportement. Lin *et al.* en 1992 [LIN 92] proposent une équation de Reynolds modifiée pour tenir compte de lois de comportement de type puissance. Les lubrifiants peuvent être pseudo-plastiques, newtoniens ou dilatants. Une bonne concordance est obtenue dans le cas des paliers lisses comparativement aux différences finies. En 1993, Bou-Saïd et Najji [NAJ 93] présentent pour la première fois l'étude des performances statiques et dynamiques de paliers et de butées à partir d'un modèle mixte qui permet d'utiliser des lois de comportement de type implicite. A partir de résultats obtenus par la MEF ces auteurs montrent que dans certaines conditions de fonctionnement la zone d'instabilité de ces systèmes mécaniques est accrue due à l'élasticité du lubrifiant. Très récemment en 2001 Wang *et al.* [WAN 01] analysent les performances d'un palier lisse en régime hydrodynamique à l'aide d'un fluide de type Carreau et une prise en compte de la rugosité par le biais de « flows factors ».

Comme pour le cas des écoulements présentant des non-linéarités dues aux effets inertiels, de turbulence ou thermiques, ces quelques références montrent l'importance accrue de l'utilisation de la MEF pour résoudre des problèmes d'écoulement de fluide à rhéologie complexe.

#### 4. Conclusion

Cette revue bibliographique a permis de présenter d'une part les travaux les plus importants dans le domaine de la modélisation des écoulements particuliers qui possèdent de fortes non-linéarités telles que les effets d'inertie, de turbulence, les effets thermiques et non newtoniens et d'autre part le traitement des modèles établis par la méthode des éléments finis. D'une manière générale dans le cas d'applications courantes ces modèles sont assez représentatifs. Néanmoins restent en suspens un certain nombre de questions. Comment modéliser correctement un écoulement dissipatif turbulent présentant des effets d'inertie dans le film ? Dans le cas d'un écoulement thermohydrodynamique que se passe-t-il dans les zones de cavitation et de formation du film lubrifiant ? Par ailleurs dans le cas des films non newtoniens il s'avère que les modèles proposés sont souvent en contradiction avec l'expérience. Par exemple il n'y a pas à l'heure actuelle de modélisation communément admise permettant d'expliquer l'influence de l'élasticité sur l'augmentation de l'épaisseur du film dans un contact. Les travaux à caractère numérique sur ces divers sujets ont montré la part de plus en plus importante de l'utilisation de la méthode des éléments finis en lubrification. Pour traiter des discontinuités géométriques ou de champ, il a été prouvé la robustesse de cette méthode comparée à celles des différences finies ou des éléments frontières.

#### 5. Bibliographie

- [AHM 84] AHMADI, G., « On Thermodynamics of Turbulence », *Bull. American Phys. Soc.*, vol. 29, 1984, p. 1529.
- [AHM 85] AHMADI, G. AND BUSNAINA, A.A., « A Turbulence Model Consistent with the Second Law of Thermodynamics », *Bull. American Phys. Soc.*, vol. 30, 1985, p. 1692.
- [BER 84] BERIS, A.N., AMSTRONG, R.C., BROWN, R.A., « Finite element calculation of viscoelastic flow in a journal bearing: part I. Small eccentricities », *Journal of Non Newtonian Fluid Mech.*, vol. 16, n° 1-2, sept. 1984.
- [BON 84] BONCOMPAIN, R., Les Paliers Lisses en Régime Thermohydrodynamique. Aspects Théoriques et Expérimentaux, Thèse de Doctorat-ès-Sciences, l'Université de Poitiers, novembre 1984.
- [BON 86] BONCOMPAIN, R., FILLON, M., FRENE, « Analysis of thermal effects in hydrodynamic bearings », *ASME, J.O.T.*, Vol 108, 1986, pp. 219-224.

- [BOU 84] BOURGIN, P., GAY, B., « Determination of the load capacity of a finite width journal bearing by a finite element method in the case of a non-newtonian lubricant », *Journal of Tribology, Trans. ASME*, vol. 106, n° 2, Apr. 1984, pp. 285-290.
- [BOU 85] BOURGIN, P., FRANÇOIS, J.M., GAY, B., « Numerical modelling of viscous non-newtonian effects in lubricating systems », *Int. J. Numer. Methods Fluids*, vol. 5, n° 9, Sep. 1985, pp. 831-845.
- [BOU 89] BOU-SAÏD, B., CHAOMLEFFEL, J.P., « Hybrid journal bearings: Theoretical and experimental results », *ASME J.O.T.*, April 1989, Vol. 111 pp. 265-269.
- [BOU 96] BOU-SAÏD, B., EHRET, P. « Boundary Element Method for Transient Viscoelastic Flow: The MPPT Model », *Trib. Trans.*, vol. 39, n° 2, pp. 314-321, 1996.
- [BRA 81] BRADSHAW, P., CEBECI, T. AND WHITELAW, J.H., « *Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow* », Academic press, 1981.
- [BRE 82] BREBBIA, C.A., « Boundary Element Methods in Engineering », *Proceedings of the Fourth International Seminar*, Southampton, England, September 1982, pp. 1-649.
- [BUR 74] BURTON, R.A., « Approximation in Turbulent Film Analysis », *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Series F*, vol. 96, 1974, p. 103.
- [BUS 87] BUSNAINA, A.A., AHMADI, G. AND CHOWDHURY, S.J., « A Two-Equation Turbulence Model Consistent with the Second law of Thermodynamics », *AIAA J.* vol. 25, 1987, pp. 1543-1544.
- [CAH 99] CAHOÛËT V., BAILLET L., MEURISSE M.H., BOU-SAÏD B. , « Direct and indirect approaches of the plasto-hydrodynamic lubrication problem. Application to an industrial ironing process », *ASME J.O.T.*, July 1999, Vol. 121, n° 3, pp.523-528.
- [CHA 81] CHAOMLEFFEL, J.P. « Influence des forces d'inertie en lubrification hybride », Thèse de Dr.-Ingénieur, INSA Lyon, 1981.
- [CHO 59] CHOU, V.T., SAIBEL, E., « The Effect of Turbulence on Slider Bearing Lubrication », *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, series E*, vol. 26, vol. 80, 1959, p. 122.
- [CHO 86] CHOWDHURY, S.J., AHMADI, G., « Thermohydrodynamic Analysis of Wide Thrust Bearings Operating in Turbulent Inertia FLOW Regimes », *Report n° MIE-138*, Clarkson University, Potsdam, N.Y., 1986.
- [CON 59] CONSTANTINESCU, V.N., « On Turbulent Lubrication », *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 173, 1959, p. 881.
- [CON 62] CONSTANTINESCU, V.N., « Analysis of Bearings Operating in the Turbulent Regime », *Journal of Basic Engng. Trans., ASME, series D*, vol. 84, 1962, p. 139.
- [CON1 70] CONSTANTINESCU, V.N., « On the Influence of Inertia Forces in Turbulent and Laminar Self-Acting Films », *Journal of Lubrication Technology, Trans., ASME, series F*, vol. 92, 1970, p. 473.
- [CON2 70] CONSTANTINESCU, V.N., PAN, C.H., SMALLEY, A.J., VOHR, J.H., « Lubrication Phenomena in a Film of Low Kinematic Viscosity », *Revue Roumaine Sc. Mech. Appl.*, Tome 15, n° 2, pp. 479-509, 1970.

- [CON 74] CONSTANTINESCU, V.N. AND GALETUSE, S., « On the possibilities of Improving the Accuracy of the Evaluation of Inertia Forces in Laminar and Turbulent Films », *Journal of Lubrication Technology, Trans., ASME, Series F*, vol. 96, 1974, p. 69.
- [CON 75] CONSTANTINESCU, V.N., GALETUSE, S. AND KENNEDY, F., « On Comparison Between Lubrication Theory, Including Turbulence and Inertia Forces, and Some Existing Experimental Data », *Journal of Lubrication Technology, Trans., ASME, Series F*, vol. 97, 1975, p. 439.
- [CON 82] CONSTANTINESCU, V.N. AND GALETUSE, S., « Operating Characteristics of Journal Bearings in Turbulent Inertial Flow », *Journal of Lubrication Technology, Trans., ASME, Series F*, vol. 104, 1982, p. 173.
- [COP 49] COPE, W.F., « A Hydrodynamical Theory of Film Lubrication », *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, Vol. 197, 1949, p. 201.
- [DAL 70] DALY, B. AND HARLOW, F.H., « Turbulent Transport Modeling », *Phys. Fluids*, vol. 13, 1970, p. 2634.
- [DER 89] DERDOURI, A., CARREAU, P.J., « Non-Newtonian and Thermal Effects in Journal Bearings », *Trans. ASLE*, 1989, vol. 32, n° 2, p. 161.
- [DIE 83] DIEN, I.K., ELROD, H.G., « A Generalized Steady-State Reynolds Equation for Non-Newtonian Fluids with Application to Journal Bearings », *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME*, 1983, vol. 105.
- [DOW 63] DOWSON, D., HUDSON, J.D. « The thermohydro-dynamic analysis of the infinite slider bearing », *Lub., Wear Conv., I.M.E.*, pp. 31-42, 1963.
- [DOW 77] DOWSON, D., GODET, M. AND TAYLOR, C.M., « Superlaminar Flow in Bearings », *Mechanical Engineering publication Limited*, London, 1977.
- [EHR 93] EHRET, P., « Contribution à l'Etude du Comportement de Mécanismes Lubrifiés sous Chargements Transitoires », Thèse de Doctorat, INSA Lyon, 1993, n° 93 ISAL 0019.
- [EZZ 73] EZZAT, H.A., ROHDE, S.M., « A study of the thermo-hydrodynamic performance of finite slider bearings », *ASME J. of Lub. Tech.*, vol. 95, pp. 298-307, 1973.
- [FER 82] FERRON, J. AND FRENE, J., « Etude Thermohydrodynamique des Paliers Lisses, Résultats Expérimentaux », *Compte-rendu de fin d'étude d'une recherche financée par la DGRST - Décision d'aide n° 80-7-0657*, juillet 1982.
- [FER 83] FERRON, J. AND FRENE, J., BONCOMPAIN R., « A study of the thermohydrodynamic performance of a plain journal bearing . Comparison between theory and experiments », *ASME, J. of Lub. Tech.*, Vol 105, n° 3, July 1983 pp. 422-428.
- [FOG 46] FOGG, A., « Fluid Film Lubrication of parallel Thrust Surfaces », *Proc. I. Mech. E.*, London, vol. 155, 1946, p. 49.
- [FRA 87] FRANÇOIS, J.M., « Modélisation d'Écoulements en Film Mince de Fluides Non newtoniens, Application à la Prédiction des Caractéristiques de Fonctionnement des Mécanismes Lubrifiés », Thèse de Doctorat, Université Claude Bernard, Lyon I, 1987.
- [GAR 99] GARNIER T., BONNEAU D., GRETE C. « Three dimensional E.H.D behavior of the black /crankshaft assembly for a four cylinder inline automotive engine », *ASME J.O.T* October 1999, Vol. 121, pp. 721-730.

- [GOY 91] GOYAL, K.C., SINHASAN, R., « Elastohydrodynamic studies of two-lobe journal bearings with non-newtonian lubricants », *Wear*, vol. 145, n° 2, May 1991, p. 329-345.
- [HAH 69] HAHN, E.J., KETTLEBOROUGH, G.F., « Solution for the pressure and the temperature in an infinite slider bearing of arbitrary profile », *ASME-JOLT*, pp. 445-452, 1969.
- [HAN 72] HANJALIC, K. AND LAUNDER, B.E., « A Reynolds Stress Model of Turbulence and Its Application to Thin Shear Flows », *J. Fluid Mech.*, vol. 52, 1972, p. 609.
- [HAN 76] HANJALIC, K. AND LAUNDER, B.E., « Contribution Towards a Reynolds-Stress Closure for Low Reynolds Number Turbulence », *J. Fluid. Mech.*, vol. 74, 1976, p. 593.
- [HAR 74] HARNOY, A., HANIN, M., « Second-Order, Elastico-Viscous Lubricants in Dynamically Loaded Bearings », *Trans. ASLE*, 1974, vol. 17, p. 166.
- [HAR 76] HARNOY, A., PHILIPPOFF, W., « Investigation of Elastico-Viscous hydrodynamic Lubrication of Sleeve Bearing », *Trans. ASLE*, 1976, vol. 19, p. 301.
- [HAR 78] HARNOY, A., « An Analysis of Stress Relaxation in Elastico-Viscous Fluid Lubrication of Journal Bearings », *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME*, 1978, Vol. 100, p. 287.
- [HAS 84] HASHIMOTO, H., WADA, S., TSUNODA, H., « Performance characteristics of elliptical journal bearings in turbulent flow regime », *Bull JSME*, vol. 27, n° 232, Oct. 1984, pp. 2265-2271.
- [HIL 95] HILL, D.L., BASKHARONE, E.A., SAN ANDRES, L., « Inertia effects in a hybrid bearing with a 45 degree entrance region », *ASME, Journal of Tribology*, vol. 117, n° 3, Jul. 1995, pp. 498-505.
- [HIR 74] HIRS, G.G., « A Systematic Study of Turbulent Film Flow », *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Series F*, vol. 96, 1974, p. 118.
- [HO 74] HO, MEIN-KAI AND VOHR, J.G., « Application of Energy Model of Turbulence to Calculation of Turbulent Films », *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, series F*, vol. 96, Special Issue on Turbulence, 1974, p. 95.
- [HUG 58] HUGUES, W.F., OSTERLE, F., « Temperature effects in journal bearing lubrication », *Trans. Am. Soc. Lubr. Engrgs.*, vol. 1, n° 1, 1958.
- [HUT 84] HUTTON, J.F., JACKSON, K.P., WILLIAMSON, B.P., « The Effects of Lubricant Rheology on the Performance of Journal Bearings », *Trans. ASLE*, 1984, vol. 29, p. 52.
- [ING 87] INGHAM, D.B., RITCHIE, J.A., TAYLOR, C.M., « The Boundary Element Method in Lubrication Analysis », *Fluid Film Lubrication - Osborne Reynolds Centenary. Proceedings of Leeds-Lyon Symposium*, 1987, p. 431-441.
- [JEN 86] JENG, M.C., ZHOU, G.R., SZERI, A.Z., *ASME, Journal of Tribology*, vol. 108, pp. 208-213, 1986.
- [JON 72] JONES, W.P. AND LUANDER, B.E., « The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence », *Int. J Heat and Mass Transfer*, vol. 15, 1972, p. 301.
- [JON 73] JONES, W.P. AND LAUNDER, B.E., « The Calculation of Low-Reynolds-Number Phenomena with a Two Equation Model of Turbulence », *Int. J. Heat and Mass Transfer*, vol. 16, 1973, p. 1189.

- [KAH 48] KAHLERT, W., « Der Einfluss der Tragheit Kräfte bei der Hydrodynamischen Schmiermittel-theorie », *Ingenieur Archiv.*, vol. 16, p. 321-342, 1948.
- [KIN 77] KING, K.F. AND TAYLOR, C.M., « An Estimation of the Effect of Fluid Inertia on the Performance of the Plane Inclined Slider Thrust Bearing with Particular Regard to Turbulent Lubrication », *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME*, vol. 99, 1977, p. 129.
- [KNI 83] KNIGHT, J.D., BARRETT, L.E., « Approximate solution technique for multilobe journal bearings including thermal effects with comparison to experiment », *Trans. ASLE*, vol. 26, n° 4, Oct. 1983, pp. 501-508.
- [LAU 78] LAUNDER, B.E. AND LESCHZINER, M.A., « Flow in Finite-Width Thrust Bearings Including Inertial Effects, II-Turbulent Flow », *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Series F*, vol. 100, 1978, p. 339.
- [LIN 92] LIN, X., SUN, M., « Finite element analysis of journal bearings in the case of non-newtonian lubricants », *Journal of Hydrodynamics*, vol. 4, n° 2, Apr 1992, p. 17-23.
- [LUA 75] LUANDER, B.E., REECE, G.J. AND RODI, W., « Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulent Closure », *J. Fluid Mech.*, vol. 68, 1975, p. 537.
- [LUM 74] LUMBLEY, J.L. AND KHAIJEH-NOURI, B., « Computation of Turbulent Transport », *Advances in Geophysics*, vol. A18, 1974, pp. 169-192.
- [LUM1, 80] LUMBLEY, J.L., « Computational Modeling of Turbulent Flows », Edited by W. Kollmann, Hemisphere Publishing Corp., 1980, p. 123.
- [LUM2,80] LUMBLEY, J.L., « Second Order Modeling of Turbulent Flows », Edited by W. Kollmann, Hemisphere Publishing Corp., 1980, p. 1.
- [LUN1, 84] LUND, J.W., TONNESEN, J., « An approximate analysis of the temperature conditions in a journal bearing », Part II, Application, *ASME-JOLT*, vol. 106, pp. 237-245, April 1984.
- [LUN2, 84] LUND, J.W., HANSEN, P.K., « An approximate analysis of the temperature conditions in a journal bearing », Part I, Theory, *ASME-JOLT*, vol. 106, p. 228-236, April 1984.
- [MIL 59] MILNE, A.A., « On the Effect of Lubricant Inertia in the Theory of Hydrodynamic Lubrication », *Journal of Basic Engineering, Trans. ASME*, vol. 81, n° 2, pp. 239-244, 1959.
- [MOD 78] MODEST, M.F., TICHY J.A., « Squeeze Film Flow in Arbitrary Shaped Journal Bearings Subject to Oscillations », *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME*, Vol. 100, n° 2, 1978, pp. 323-329.
- [NAJ 89] NAJJI, B., Effets non newtoniens dans les paliers : étude statique et dynamique par éléments finis, Thèse de Docteur d'Etat-ès-Sciences, Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Université Mohammed V Novembre 1989.
- [NAJ 93] NAJJI, B., BOU-SAÏD, B., « Mixed model to predict static and dynamic performances of slider and journal bearings lubricated with non-newtonian fluids », *AMD*, vol. 175, 1993, pp. 91-100.

- [NG 64] NG, C.W., « Fluid Dynamic Foundation of Turbulent Lubrication Theory », *A.S.L.E. Trans.*, vol. 7, 1964, p. 311.
- [NG 65] NG, C.W., PAN, C.W.T., « A Linearized Turbulent Lubrication Theory », *Journal of Basic Engng., Trans. ASME*, vol. 87, 1965, p. 675.
- [NIC 79] NICOLAS, D., « Les Régimes Non-Laminaire en Lubrification, Réduction du Frottement par Addition de Polymères », Thèse de Doctorat d'Etat, INSA Lyon, 1979, n° I-DE 7909.
- [OKR 61] OKRENT, E.H., « The Effect of Lubricant Viscosity and Composition on Engine Friction and Bearing Wear », *Trans. ASLE*, 1961, vol. 4, p. 97.
- [PAR 95] PARANJPE, T. HAN, « A transient thermohydrodynamic analysis including mass conservation cavitation for dynamically loaded journal bearing », *ASME, J.O.T.*, July 1995 Vol. 117 p. 369-378.
- [RAI 58] RAIMONDI, A.A., BOYD, J., *Trans. ASLE*, vol. 1, p. 159-209, 1958.
- [REI 56] REICHARDT, H., « Über die Geschwindigkeitsverteilung in einer gradlinigen turbulenten Couetteströmung », *ZAMM special supplement*, S 26, 1956.
- [REY 86] REYNOLDS, O., « On the Theory of Lubrication and its Application to M. Beauchamp Tower's Experiments », *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, 1886, A177, p. 157.
- [ROD 78] RODI, W., « Examples of Turbulence Models for Incompressible Flows », in *Advances in Applied Mechanics*, vol. 18, Edited by C-S Yih, Academic Press, 1978.
- [ROT 51] ROTTA, J., « Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz », *Zeitsch. für Physik*, vol. 129, 1951, p. 547.
- [SAF 74] SAFAR, Z., SZERI, A.Z., « Thermohydrodynamic lubrication in laminar and turbulent regimes », *ASME-JOLT*, vol. 96, n° 1, p. 48-57, 1974.
- [SAI 74] SAIBEL, E.A., MACKEN, N.A., « Nonlinear Behavior In Bearings : A Critical Review of the Literature », *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Series F*, vol. 96, 1974, p. 174.
- [SAN 71] SAN ANDRES, L.A., VANCE, J.M., « Effects of fluid inertia on finite-length squeeze-film dampers », *ASLE Transactions*, Vol 30, n° 3, 1971, pp. 384-393.
- [SHI 98] SHI F, Q. WANG, « A mixed T.E.H.D model for journal bearing conformal contacts- Part I: Model formulation and approximation of heat transfer considering asperity contact », *ASME J.O.T.*, April 1998, Vol. 120, pp. 198-205.
- [SHI 98] SHI F, Q. WANG, « A mixed T.E.H.D model for journal bearing conformal contacts- Part II: contact, film thickness and performance analysis », *ASME J.O.T.*, April 1998, Vol. 120 pp. 206-212.
- [SIN 83] SINGH, D.V., SINHASAN, R., TAYAL, S.P., « Analysis of three-lobe bearings having non-newtonian lubricants by a finite element method », *Trans. Can. Soc. Mech. Eng.*, vol. 7, n° 1, 1983, p. 7-11.
- [SLE 46] SLEZKIN, N.A., TARG, S.M., « L'équation généralisée de Reynolds », *C.R. Acad. Sc. de l'URSS*, vol. 54, n° 3, p. 205-208, 1946.
- [SUG 79] SUGANAMI, T., SZERI, A.Z., « Thermohydrodynamic analysis of journal bearings », *Trans. ASME, Journal of Lub. Tech.*, vol. 101, n° 1, Jan. 1979, pp. 21-27.

- [SWA 75] SWAMY, S.T., PRABHU, B.S., RAO, B.V., « Calculated Load Capacity of Non-Newtonian Lubricants in Finite Width Journal Bearings », *Wear*, 1975, Vol. 31, p. 277.
- [SZE 80] SZERI, A.Z., « *Tribology, Friction, Lubrication and Wear* », Hemisphere publishing corp., New-York, 1980.
- [SZE 87] SZERI, A.Z., « Some Extensions of the Lubrication Theory of Osborne Reynolds », *Journal of Tribology, Trans. ASME*, January 1987, vol. 109, pp. 21-39.
- [TAN 69] TANNER, R.I., « Increase of Bearings Loads Due to Large Normal Stress Differences in Viscoelastic Lubricants », *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, 1969, p. 634.
- [TAO 67] TAO, F.F., PHILIPPOFF, W., « Hydrodynamic Behavior of Viscoelastic Liquids in a Simulated Journal Bearing », *Trans. ASLE*, 1967, vol. 10, p. 302.
- [TAY 74] TAYLOR, C.M. AND DOWSON D., « Turbulent Lubrication Technology », *Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology, Series F*, vol. 96, 1974, p. 37.
- [TAY 82] TAYAL, S.P., SINHASAN, R., SINGH, O.V., « Analysis of Hydrodynamic Journal Bearings having Non-Newtonian Lubricants Using the Finite Element Method », *Trans. ASLE*, 1982, vol. 25, p. 410.
- [TIC 70] TICHY, J.A., WINER, W.O., « Inertial Considerations in Parallel Circular Squeeze Film Bearings », *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME*, 1970, pp. 588-592.
- [TIC 78] TICHY, J.A., WINER, W.O., « An Investigation into the Influence of Fluid Viscoelasticity in a Squeeze Film Bearing », *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME*, January 1978, vol. 100, pp. 57-64.
- [WAN 01] WANG P., KEITH T.G., VAIDYANATHAN K., « Combined surface roughness pattern and non-newtonian effects on the performance of dynamically loaded journal bearing », STLE preprint n° 01-TC-22.
- [ZIE 57] ZIENKIEWICZ, O.C., « Temperature distribution within lubricating films between parralel surfaces and its effect on the pressure developed », *Proc. Conf. Lub. Wear., I.M.E.*, pp. 135, 1957.
- [ZOR 98] ZORKELBACK N., ANDRES L.S., « F.E analysis of Herringbone groove journal bearings : a parametric study », *ASME J.O.T.*, April 1998, Vol. 120, pp. 234-240.