
Modélisation de la rupture et de la reformation des films lubrifiants dans les contacts élastohydrodynamiques

Dominique Bonneau — Mohamed Hajjam

Laboratoire de Mécanique des Solides – UMR CNRS 6610

4, Avenue de Varsovie

F-16021 Angoulême

dbonneau@iutang.univ-poitiers.fr

hajjam@iutang.univ-poitiers.fr

RÉSUMÉ. L'algorithme présenté permet l'analyse fine du problème de rupture et de reformation des films lubrifiants lors du fonctionnement des mécanismes réels. Basé sur le modèle de JFO, il inclut la formulation Elastohydrodynamique et s'appuie sur une discrétisation par éléments finis. Il a été validé par comparaison avec des travaux récents. Il permet de déterminer les zones actives et inactives des films lubrifiants pour des conditions de fonctionnement non stationnaires. Les résultats montrent notamment une grande finesse dans la définition des frontières de séparation (ou de cavitation) du film. Comme le montrent quelques exemples, le problème complexe de la lubrification EHD des paliers de tête de bielle peut être traité avec précision. L'analyse des champs d'épaisseur, de pression et de remplissage permet d'optimiser les paramètres de dimensionnement des différents éléments du palier et de contrôler le bon fonctionnement des dispositifs d'alimentation en lubrifiant.

ABSTRACT. The presented algorithm allows accurate analysis of film breakdown and reforming during the working of actual devices. This algorithm includes ElastHydroDynamic formulation and is based on the JFO model and Finite Element discretization. It has been validated through a comparison with recent published studies. Active and non active film zones are determined for non stationary working conditions. Presented results finely show the shape of rupture boundaries. A sample of plots demonstrates the efficiency of the algorithms for solving the complex problem of big end connecting rod bearing EHD lubrication. The analysis of thickness, pressure and filling rate fields allows the optimisation of each bearing element size as well as the lubricant feeding device good working.

MOTS-CLÉS : équation de Reynolds, éléments finis, lubrification élastohydrodynamique, cavitation, palier, bielle.

KEYWORDS: Reynolds equation, finite element, elastohydrodynamic lubrication, cavitation, bearing, connecting rod.

1. Introduction

Pour résoudre un problème de lubrification Elasto-hydrodynamique (EHD) isotherme d'un palier soumis à un chargement dynamique, il est nécessaire de déterminer le champ de pression et l'épaisseur du film lubrifiant à chaque instant du fonctionnement. Ceci impose la résolution simultanée de deux équations : l'une décrit l'épaisseur du film fluide, en tenant compte des déformations élastiques et des défauts des surfaces ; l'autre est l'équation de Reynolds qui définit le comportement hydrodynamique du film lubrifiant.

Ce type de problème est fortement non linéaire. En effet, la pression déforme les solides, qui modifient à leur tour l'épaisseur du film lubrifiant, paramètre qui intervient au cube dans l'équation de Reynolds.

La non stationnarité du chargement, dû au fait que la charge varie en module et en intensité au cours du temps, engendre deux difficultés supplémentaires :

- la trajectoire de l'arbre dans l'alésage est inconnue ; elle est fonction de la charge appliquée sur l'arbre et de la vitesse de rotation de ce dernier ;
- le phénomène de rupture et de reformation du film lubrifiant est transitoire. Les étendues des zones actives et inactives varient en fonction des conditions de chargement, de vitesse et d'alimentation.

Ce dernier phénomène de rupture et de reformation du film montre que des conditions qui assurent la conservation du débit doivent être prises en compte pour une meilleure modélisation de la lubrification. En effet, tous les travaux publiés s'accordent pour constater qu'un mauvais contrôle du processus d'alimentation en lubrifiant est à l'origine de l'effondrement de l'épaisseur et la cause principale d'avarie par contact des surfaces. Dans les zones inactives, encore appelées zones de rupture, le film fluide perd sa continuité soit par séparation des lignes de courant lorsque les zones inactives sont en communication avec le milieu ambiant soit par changement de phase (cavitation) lorsque la pression devient inférieure à la pression de vapeur saturante. Dans les deux cas, la zone considérée est occupée par un mélange liquide-gaz dont la masse volumique varie de manière spatio-temporelle.

Les phénomènes physiques qui accompagnent la rupture et la reformation du film fluide sont très bien identifiés depuis les travaux de Jacobson et Floberg [JAC 57] et Olsson [OLS 74] (modèle de JFO). Il n'en est pas de même pour leur mise en équations et leur résolution. Une analyse bibliographique récente réalisée par Optasanu et Bonneau [OPT 00] montre que, malgré la très grande diversité des algorithmes proposés, numériques et/ou analytiques, pour prédire la rupture et la reformation des films lubrifiants tout en gérant la conservation du débit massique dans le cas des paliers soumis à des chargements dynamiques, cette prédiction reste encore très délicate à cause de la difficulté de mise en œuvre des modèles proposés.

En 1981 Elrod [ELR 81] a proposé un modèle basé sur la compressibilité variable du lubrifiant et du mélange gazeux dans les zones inactives, qui a montré

son efficacité dans une discrétisation par différences finies. Il a fallu dix ans pour voir une transposition de ce modèle dans une discrétisation par éléments finis par Kumar et Booker [KUM 91]. En 1995 Bonneau et Guines [BON 95] ont utilisé un algorithme de Murty [MUR 74] modifié et la méthode des éléments finis pour l'étude d'un palier de tête de bielle soumis à un chargement dynamique. Ils ont développé un algorithme qui assure la conservation du débit massique au passage des frontières de rupture et de reformation du film lubrifiant. En 1995, Boedo et Booker [BOE 95] ont étudié la séparation de plaques parallèles circulaires et rectangulaires dans le cas d'une vitesse de séparation constante. Ils ont repris l'algorithme développé par Kumar et Booker et ont étudié l'influence de la finesse du maillage. Les résultats obtenus sont en accord avec ceux donnés par le modèle de JFO pour les plaques circulaires et présentent des oscillations pour les plaques rectangulaires.

L'algorithme développé par la suite assure une gestion de la rupture et de la reformation des films lubrifiants dans les contacts élastohydrodynamiques. Il satisfait la conservation du débit massique en respectant le modèle de JFO. Cet algorithme utilise la méthode des éléments finis, qui permet de traiter facilement les domaines à géométrie complexe et de s'affranchir des discontinuités éventuelles de l'épaisseur du film, comme par exemple pour les paliers à chevrons [BON 93] ou les butées à rainures [BON 94]. Afin de valider l'algorithme développé, un cas unidimensionnel de plaques parallèles circulaires dans un mouvement d'écrasement pur (squeeze), puis celui des plaques rectangulaires déjà traité par Boedo et Booker sont considérés. Quelques résultats concernant l'étude de la lubrification élastohydrodynamique d'un palier tête de bielle soumis à un chargement dynamique sont par la suite présentés et analysés.

2. Hypothèses et mise en équations

L'équation de base utilisée en lubrification est l'équation des films minces visqueux. Elle est déduite de la théorie des milieux continus, en tenant compte de quelques hypothèses propres aux problèmes de lubrification. Les hypothèses généralement acceptées pour la modélisation théorique de la lubrification sont les suivantes :

- l'épaisseur du film est faible devant son étendue,
- la courbure des surfaces peut être négligée,
- le fluide est newtonien,
- les forces d'inertie et de pesanteur sont négligeables,
- l'écoulement est laminaire.

En prenant pour hypothèses un régime isotherme, un lubrifiant isovisqueux, l'équation généralisée de la mécanique des films minces visqueux se réduit alors à l'équation de Reynolds qui, dans un repère cartésien, prend la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6\rho(U_1 - U_2) \frac{\partial h}{\partial x} + 6\rho(W_1 - W_2) \frac{\partial h}{\partial z} + 6h \frac{\partial}{\partial x} [\rho(U_1 + U_2)] + 6h \frac{\partial}{\partial z} [\rho(W_1 + W_2)] + 12\rho V_2 + 12h \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad [1]$$

où U_1 , U_2 , V_2 , W_1 et W_2 sont les vitesses des surfaces 1 et 2 selon les axes x , y et z , h l'épaisseur du film, p la pression hydrodynamique et μ la viscosité dynamique du lubrifiant.

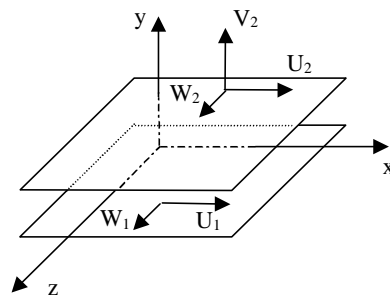


Figure 1. Modèle du film lubrifiant en repère cartésien

La figure 1 présente le repère utilisé et les vitesses des surfaces qui délimitent le film lubrifiant. Lorsque les vitesses W_1 et W_2 sont égales à zéro, la vitesse V_2 peut être exprimée par $V_2 = \partial h / \partial t$. Si on considère le repère de la figure 1, où l'origine O est liée à la surface 2 le long de Ox et à la surface 1 le long de Oy , l'équation de Reynolds [1] pour un fluide incompressible devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = U \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \quad [2]$$

avec $U = U_1 + U_2$.

L'équation [2] doit être vérifiée pour les zones actives (zones sous pression). Pour les zones inactives (dites zones en cavitation), l'équation [1] se réduit à [3] puisque la pression qui y règne est constante (égale à la pression de vapeur saturante p_{cav}).

$$U \frac{\partial \rho h}{\partial x} + 2 \frac{\partial \rho h}{\partial t} = 0 \quad [3]$$

où ρ représente la masse volumique du mélange lubrifiant-gaz dû à la rupture du film lubrifiant. En définissant le remplissage r par

$$r = \frac{\rho h}{\rho_0}$$

où ρ_0 est la masse volumique du lubrifiant, on obtient :

$$U \frac{\partial r}{\partial x} + 2 \frac{\partial r}{\partial t} = 0 \quad [4]$$

Afin de traiter simultanément les équations [2] et [4], on les regroupe en une seule en utilisant une variable universelle nommée D .

C'est dans les zones actives que la pression s'établit et que l'équilibre avec la charge appliquée se réalise. Dans les zones inactives il y aura conservation du débit massique. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} F \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial D}{\partial x} \right) + F \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial D}{\partial y} \right) \\ = U \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} + (1-F) \left(U \frac{\partial D}{\partial x} + 2 \frac{\partial D}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad [5]$$

- pour les zones actives :

$$\begin{cases} D = p \\ F = 1 \end{cases} \quad [6]$$

En considérant la pression de cavitation comme pression de référence, on aura $D \geq 0$ dans les zones actives.

- pour les zones inactives :

$$\begin{cases} D = r - h \\ F = 0 \end{cases} \quad [7]$$

Comme la masse volumique du mélange dans les zones inactives est toujours inférieure à ρ_0 , on aura $D < 0$.

Pour tout point du film, on devra vérifier la compatibilité entre le signe de D et l'état supposé, actif ou inactif, du film en ce point.

3. Conditions aux limites

Les conditions aux limites utilisées pour la résolution de cette équation de Reynolds modifiée sont basées sur la séparation des zones actives et inactives.

Soit le domaine d'étude proposé sur la figure 2. Il comprend une zone inactive Ω_0 et une zone active Ω séparées par une frontière $\partial\Omega$. Pour une même ordonnée y , on aura un point de rupture situé à x_r et un autre de reformation situé à x_f .

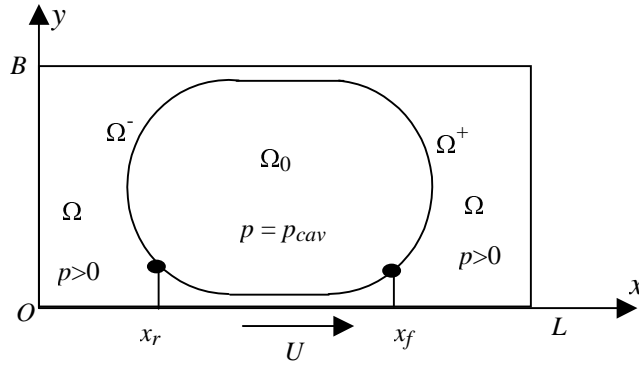


Figure 2. *Domaine d'étude : Ω_0 zone inactive et Ω zone active*

Les conditions aux limites que doit satisfaire l'équation de Reynolds modifiée sont :

- sur les frontières extérieures ($z = 0$ et $y = B$) :

$$p = p_0 \text{ donc } D = p_0 \text{ où } p_0 \text{ représente la pression extérieure ambiante,}$$

- sur les frontières $x = 0$ et $x = L$, :

$D_{x=0} = D_{x=L}$ (continuité de la fonction D), dans le cas d'un palier développé, ou $D = p_0$ dans le cas d'un blochet,

- sur la frontière de rupture (ou de cavitation) :

$$p = p_{cav} ; \left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_{(x,y)=(x_r,y_r)}^- = 0$$

Ces deux conditions sont désignées « conditions de Reynolds ». De plus, on doit avoir la conservation du débit massique :

$$\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \Big|_{x_r}^- + (r-h) \Big|_{x_r}^+ - \frac{2(r-h)}{U} \Big|_{x_r}^+ V(\Omega^-) = 0$$

ou encore, en raison de la deuxième condition de Reynolds :

$$(r-h) \Big|_{x_r}^+ - \frac{2(r-h)}{U} \Big|_{x_r}^+ V(\Omega^-) = 0$$

– sur la frontière de reformation Ω^+ :

$$p = p_{\text{cav}}$$

et conservation du débit massique :

$$\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \Big|_{x_f}^+ + (r-h) \Big|_{x_f}^- - \frac{2(r-h)}{U} \Big|_{x_f}^- V(\Omega^+) = 0$$

$V(\Omega^-)$ et $V(\Omega^+)$ sont respectivement les vitesses de frontière de rupture et de reformation du film lubrifiant.

4. Formulation éléments finis du problème EHD

D'une manière générale, les équations d'un problème EHD sont l'équation de Reynolds et les équations d'équilibre de la charge. L'action de la pression sur les surfaces élastiques qui délimitent le film lubrifiant se traduit par la déformation de celles-ci. L'épaisseur h du film doit donc être déterminée simultanément à la pression. La non connaissance *a priori* de la localisation des zones actives et inactives du film conduit donc à la définition de deux problèmes distincts qui seront résolus alternativement :

problème 1 : l'épaisseur du film est connue : on recherche les frontières des zones actives et inactives ;

problème 2 : les zones actives et inactives sont connues : on recherche le champ de pression et le champ d'épaisseur qui vérifient l'équation de Reynolds et les équations de l'élasticité.

Ces deux problèmes peuvent s'insérer dans un problème plus général dans le cas non stationnaire ; ils devront dans ce cas être résolus à chaque pas de temps.

La solution du problème 1 est donnée par la résolution de l'équation de Reynolds modifiée [5]. Le problème 2 sera résolu en considérant l'équation de Reynolds [2] et les relations reliant l'épaisseur du film à la pression. En raison de la similitude entre

ces équations, les développements qui conduisent à la discrétisation par la méthode des éléments finis sont principalement présentés pour l'équation de Reynolds modifiée.

Considérons la forme intégrale

$$E^*(D) = \int_{\Omega} W^* F \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial D}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h^3}{6\mu} \frac{\partial D}{\partial y} \right) + \left(U \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) - (1-F) \left(U \frac{\partial D}{\partial x} + 2 \frac{\partial D}{\partial t} \right) \right) d\Omega \quad [8]$$

où W^* est une fonction suffisamment différentiable définie sur Ω .

Une intégration par parties de certains termes, puis l'addition d'intégrales complémentaires définies sur les frontières de transition entre zones actives et inactives permettent, d'une part, de réduire l'ordre de dérivabilité des fonctions (formulation faible) et d'autre part, de rendre naturelles les conditions aux limites de rupture et de reformation du film (voir annexe I) nécessaires au traitement du problème 1 :

$$E(D) = \int_{\Omega} \left(F \frac{h^3}{6\mu} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial D}{\partial y} \right) + W \left(U \frac{\partial h}{\partial x} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right) + (1-F) U D \frac{\partial W}{\partial x} \right) d\Omega - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} 2(1-F) W D d\Omega \quad [9]$$

Afin de ne pas faire apparaître les termes complémentaires de l'intégration par parties, les fonctions W sont choisies nulles sur la frontière $\partial\Omega$.

La solution du problème 1 est obtenue en recherchant les fonctions D qui satisfont aux conditions aux limites sur les frontières extérieures $\partial\Omega$ du film et telles que $E(D) = 0$. La résolution de l'équation $E(D) = 0$ permettra d'obtenir la localisation des zones actives et inactives du film.

Discrétisation des équations de Reynolds et de Reynolds modifiée

Les études publiées sur le problème EHD ont établi dans ce contexte la supériorité des éléments quadratiques à 8 nœuds [MCI 88]. Le domaine Ω est donc divisé en n_e éléments finis isoparamétriques à huit nœuds. Le caractère particulier de l'équation de Reynolds modifiée, lorsqu'elle s'applique aux zones inactives (l'équation [3] est hyperbolique), rend nécessaire l'usage d'éléments linéaires à quatre nœuds pour sa discrétisation. Chaque élément à 8 nœuds est donc subdivisé en quatre éléments quadrangulaires à quatre nœuds. Selon qu'il s'agit du problème 1

ou 2, la discrétisation fera appel à l'un ou l'autre maillage, la valeur des paramètres au nœud central étant éventuellement obtenue par interpolation.

Les fonctions d'interpolation N choisies, linéaires ou quadratiques selon le cas, permettent d'interpoler à la fois les variables géométriques et les différents paramètres. Dans le cas du problème 1, l'intégrale [9] évaluée au nœud j d'un élément Ω_e s'écrit :

$$\begin{aligned}
 E_j(\Omega_e) = & \sum_{m=1}^{npg} \left(\frac{h_m^3}{6\mu} \sum_{k=1}^{nne} \left(\frac{\partial W_{mj}}{\partial x} \frac{\partial N_{mk}}{\partial x} + \frac{\partial W_{mj}}{\partial y} \frac{\partial N_{mk}}{\partial y} \right) F_k D_k \right. \\
 & + W_{mj} \left(U \frac{\partial h_m}{\partial x} + 2 \frac{h_m(t) - h_m(t - \Delta t)}{\Delta t} \right) + \sum_{k=1}^{nne} \frac{\partial W_{mj}}{\partial x} N_{mk} (1 - F_k) D_k \\
 & \left. - 2 \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^{nne} W_{mj} N_{mk} \left((1 - F_k(t)) D_k(t) - (1 - F_k(t - \Delta t)) D_k(t - \Delta t) \right) \right) \Delta \Omega_m
 \end{aligned} \tag{10}$$

où m est l'un des n_{pg} (en général 2×2 en raison de la présence de h^3 dans les expressions à intégrer) points de Gauss sur cet élément et nne le nombre de nœuds par élément (8 ou 4). W_{mj} est la fonction de pondération relative au nœud j et N_{mk} est la fonction d'interpolation relative au nœud k appartenant à Ω_e ; elles sont évaluées au point de Gauss m . F_k représente l'état du nœud k et prend la valeur 1 s'il est dans une zone active et 0 dans le cas contraire. Lorsque la totalité des nœuds de l'élément Ω_e est en zone active, l'élément est dit actif et dans ce cas les fonctions d'interpolation sont choisies comme fonctions de pondération. Dans le cas contraire, en raison du caractère hyperbolique de l'équation à résoudre, les fonctions de pondération sont des fonctions polynomiales décentrées vers l'amont relativement à la vitesse U de la surface inférieure [ZIN 77].

La sommation de l'ensemble des équations [10] écrites sur chacun des n_e éléments du domaine Ω conduit à un système d'équations algébriques linéaires en D , qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$R = [M] D + B = 0$$

R et D sont respectivement les vecteurs résidus de l'équation de Reynolds modifiée et de la variable universelle D . Soit n le nombre total de nœuds définis sur le domaine étudié Ω . La matrice $[M]$ est de rang n ; un terme M_{jk} s'écrit :

$$\begin{aligned}
 M_{jk} = & \sum_{n=1}^{ne} \sum_{m=1}^{npg} \left(\frac{h_m^3}{6\mu} \sum_{k=1}^{nne} \left(\frac{\partial N_{mj}}{\partial x} \frac{\partial N_{mk}}{\partial x} + \frac{\partial N_{mj}}{\partial y} \frac{\partial N_{mk}}{\partial y} \right) F_k \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^{nne} \frac{\partial N_{mj}}{\partial x} N_{mk} (1 - F_k) - 2 \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^{nne} N_{mj} N_{mk} \left((1 - F_k(t)) \right) \right) \Delta \Omega_m
 \end{aligned}$$

B représente le second membre de l'équation de Reynolds modifiée. Le terme B_j a pour expression :

$$B_j = \sum_{n=1}^{ne} \sum_{m=1}^{npg} \left(N_{mj} \left(U \frac{\partial h_m}{\partial x} + 2 \frac{h_m(t) - h_m(t - \Delta t)}{\Delta t} \right) + 2 \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=1}^{nne} N_{mj} N_{mk} ((1 - F_k(t - \Delta t)) D_k(t - \Delta t)) \right) \Delta \Omega_m$$

Lorsque le problème à résoudre est du type 2, le domaine d'intégration est restreint aux zones actives pour lesquelles on a $F_k = 1$. L'expression de [10] se réduit alors à :

$$E_j(\Omega_e) = \sum_{m=1}^{npg} \left(\frac{h_m^3}{6\mu} \sum_{k=1}^{nne} \left(\frac{\partial N_{mj}}{\partial x} \frac{\partial N_{mk}}{\partial x} + \frac{\partial N_{mj}}{\partial y} \frac{\partial N_{mk}}{\partial y} \right) p_k + N_{mj} \left(U \frac{\partial h_m}{\partial x} + 2 \frac{h_m(t) - h_m(t - \Delta t)}{\Delta t} \right) \right) \Delta \Omega_m \quad [11]$$

En raison de l'élasticité des surfaces, l'épaisseur h dépend de p :

$$h_m = \sum_{k=1}^{nne} N_{mk} h_k = \sum_{k=1}^{nne} N_{mk} \sum_{i=1}^n C_{ki} p_i$$

où C est une matrice de compliance dont l'expression est développée annexe I. Dans ce cas, les équations [11] sont non linéaires en p . Leur résolution fait appel à un processus de Newton-Raphson dont la matrice jacobienne est dérivée de la relation [11].

Alors que pour le problème de type 1, la matrice M a une structure en « bande » où seuls les termes situés à proximité de la diagonale sont non nuls, il n'en n'est plus de même pour la matrice jacobienne des problèmes de type 2, puisque l'épaisseur en chaque nœud dépend de la pression en tous les nœuds. Un stockage en colonne n'est pas utile dans ce cas, mais le domaine d'intégration étant réduit aux seules zones actives, la dimension du système à résoudre s'en trouve fortement diminuée. Afin de réduire les temps de calcul lors du processus de Newton-Raphson, la matrice jacobienne triangularisée est conservée tant que le taux de convergence reste suffisant. Pour les problèmes non stationnaires, le choix du pas de temps doit être en adéquation avec le cycle de fonctionnement du mécanisme étudié.

5. Algorithme numérique

L'algorithme général est une extension de celui proposé par Bonneau *et al.* [BON 95]. Il est présenté ci-dessous pour un problème EHD non stationnaire.

Lecture des données : géométrie, matrice de compliance, viscosité, vitesse, ...

Initialisation du problème : calcul de $h(x,y)$ et du premier champ de pression

Pour chaque pas de temps

Tant que partition(Ω), épaisseur h , pression p non stables

Tant que partition(Ω) est non stable

Problème de type 1 :

Calcul de D (équation de Reynolds modifiée)

Mise à jour de la partition :

Si $D < 0$ le nœud est éventuellement passé à l'état inactif

Si $D \geq 0$ le nœud est éventuellement passé à l'état actif

Fin

Tant que les résidus(h,p) $> \varepsilon$ (méthode de Newton-Raphson)

Calcul des résidus des équations (Reynolds et charge appliquée)

*Si le taux de convergence est insuffisant calcul et triangularisation
du Jacobien*

Résolution du système obtenu

*Correction de la pression p et des paramètres de déplacement rigide
(excentricité ou épaisseur minimale)*

Calcul de la déformée élastique h_e

Modification de l'épaisseur du film h

Fin

Fin

Ecriture des résultats : pression, épaisseur du film, débit, puissance, ...

Fin

Fin de l'algorithme

Pour chaque pas de temps, la recherche de la partition du domaine en zones actives et inactives se fait par la résolution successive de problèmes de type 1 et 2 jusqu'à convergence. La convergence de ce processus nécessite parfois une réduction du pas de temps initialement choisi. La convergence pour les problèmes de type 1 ou 2 peut être délicate et requiert des algorithmes associant à la procédure de Newton-Raphson des techniques adaptatives de sous relaxation.

6. Validations et applications

6.1. Cas de l'écrasement pur (squeeze) du film lubrifiant (problème de type 1)

Soient deux plaques parallèles de forme carrée disposées comme le montre la figure 3.

La loi de variation de l'épaisseur h du film est donnée par :

$$h(t) = h_0 - h_1 \cos(\omega t)$$

où h_0 est l'épaisseur moyenne du film à $x = 0$ et h_1 l'amplitude des oscillations de pulsation ω .

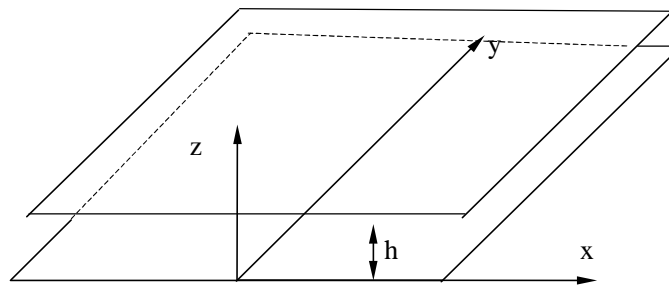


Figure 3. Géométrie des plaques oscillantes

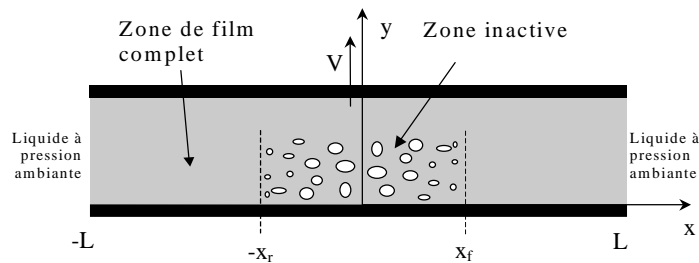


Figure 4. Vue en coupe des plaques, zones de rupture et de reformation du film lubrifiant d'après [OPT 00]

Les plaques sont considérées submergées dans un bain de lubrifiant. Lors du rapprochement des plaques, la pression à l'intérieur du film monte et le liquide est repoussé vers l'extérieur. Lors de l'éloignement des plaques, la pression chute et, au milieu des plaques, elle atteint la pression de vapeur saturante. Alors, le film lubrifiant commence à se rompre par évaporation locale dans la masse du liquide et

par dégazage des gaz dissous. Ce mécanisme a été très bien décrit par Optasanu et Bonneau [OPT 00] qui ont analysé en détail la zone inactive. Les frontières du film et les différentes zones sont schématisées sur la figure 4. L et x_f sont respectivement la frontière extérieure du film (vers la pression ambiante) et la frontière de la zone de cavitation. L est la demi-largeur des plaques. x_f varie dans le temps et peut être frontière de rupture ou frontière de reformation du film.

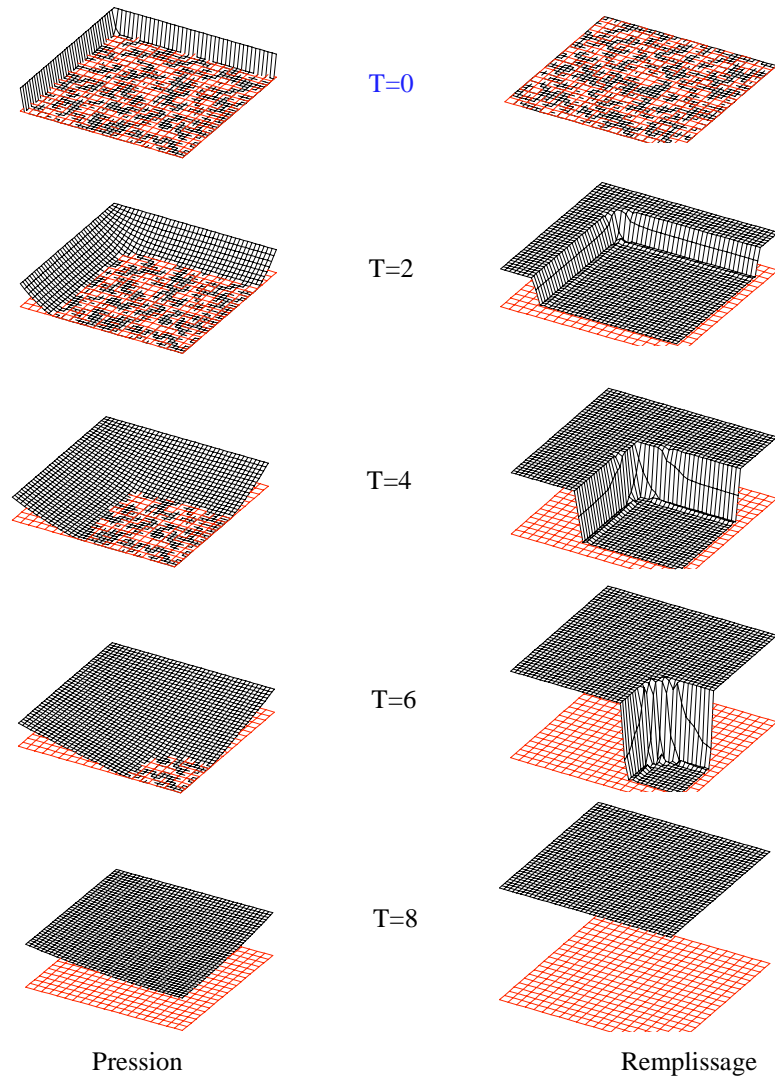


Figure 5. Evolution de la pression et du remplissage au cours du temps

Boedo et Booker [BOE 95] ont étudié la séparation de plaques parallèles circulaires et carrées dans le cas d'une vitesse de séparation constante, mais aussi le problème des plaques oscillantes circulaires. Pour une comparaison avec leurs résultats, les deux cas ont été calculés avec les mêmes données. La figure 5 montre l'évolution des champs d'épaisseur et de remplissage lorsque les plaques (de forme carrée dont un quart est représenté) s'écartent. Une zone de cavitation apparaît dans la partie centrale, s'étend très rapidement entre les instants 0 et 2 puis se comble progressivement et enfin disparaît entre l'instant 2 et 8. La figure 6 montre plus précisément l'évolution de la position de la frontière de cavitation dans le cas de deux plaques circulaires. Les résultats obtenus sont comparés à ceux de Boedo et Booker. Les temps de remplissage ainsi que les étendues maximales de la zone de cavitation sont identiques, quel que soit le cas (plaques carrées ou circulaires oscillantes).

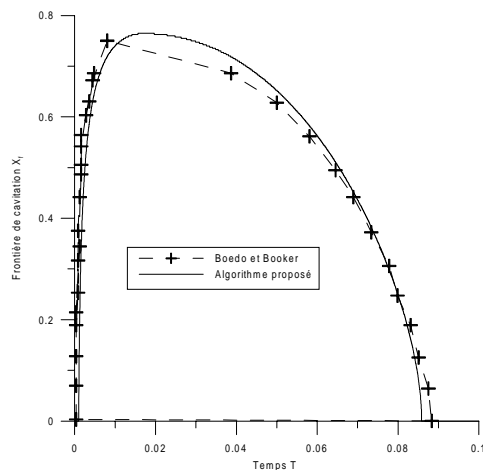


Figure 6. Evolution de la frontière de cavitation pour des plaques circulaires oscillantes

Dans le cas des plaques circulaires oscillantes (problème axisymétrique), la solution dépend fortement de la discrétisation du temps et moins de celle de l'espace. En effet, un nombre d'éléments linéiques à 3 nœuds de l'ordre de 100 est suffisant, mais un pas de temps de l'ordre $10^{-5} T$ (T est la période), est indispensable pour l'obtention d'une solution régulière de la frontière de cavitation. On constate aussi que ce choix est nécessaire si l'on veut suivre le phénomène même dans les zones à faible variation de la vitesse des frontières qui séparent les zones actives et inactives.

La discrétisation de l'espace et du temps influe sur d'autres grandeurs, telles que le débit le long de l'axe de symétrie $x = 0$ et le remplissage au centre des plaques

carrées. Les résultats donnés par le présent modèle sont conformes à ceux présentés par Boedo et Booker, avec cependant des oscillations moins marquées pour des discrétisations de l'espace du même ordre. A titre d'exemple, la figure 7 montre l'influence que peut avoir le choix de la discrétisation sur le débit Q ; ce choix ne doit pas être seulement dicté par la réduction du temps de calcul et par conséquent de la taille de la matrice jacobienne. Ce choix de la discrétisation doit être guidé par la géométrie du mécanisme ainsi que par sa cinématique. En effet, un maillage grossier allonge la durée du phénomène alors qu'un pas de temps large produit l'effet contraire.

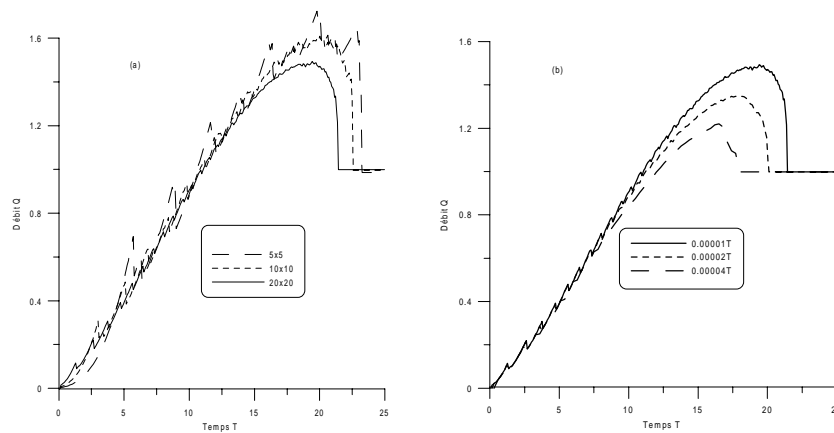


Figure 7. Influence de la discrétisation sur le débit Q le long de l'axe $x=0$
(a) maillage variable, $\Delta t = 10^{-5} T$; (b) pas de temps variable, maillage 20×20

6.2. Lubrification EHD d'un palier de tête de bielle (problèmes couplés de type 1 et 2)

Les paliers de tête de bielle des moteurs thermiques ont toujours été l'objet d'une grande attention de la part des constructeurs. Ils sont soumis à des actions mécaniques de forte amplitude, travaillent dans des conditions thermiques sévères et doivent cependant être d'une fiabilité à toute épreuve. Les outils numériques développés progressivement au cours des deux dernières décennies permettent maintenant d'en prévoir précisément le fonctionnement du point de vue de la lubrification. Ce paragraphe présente quelques résultats obtenus pour une bielle de moteur de formule F1 qui représente un cas de fonctionnement extrême.

La figure 11 montre la bielle étudiée et le maillage en éléments tétraédriques réalisé pour l'obtention de la matrice de compliance. En raison de la symétrie, seule une demi-bielle est maillée avec 13 388 éléments et 3 876 nœuds. Le maillage surfacique de l'alésage comporte 464 éléments triangulaires et 295 nœuds.

Les goujons d'assemblage ont été maillés avec précision : on notera en particulier la présence d'un jeu entre ceux-ci et leur logement (puits de vis) au niveau du plan de joint entre le corps de bielle et son chapeau. On pourra ainsi mettre en évidence la faiblesse de la zone située en arrière du coussinet à ce niveau.

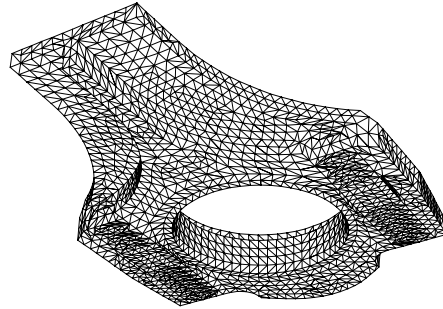


Figure 11. Maillage d'une bielle de moteur F1

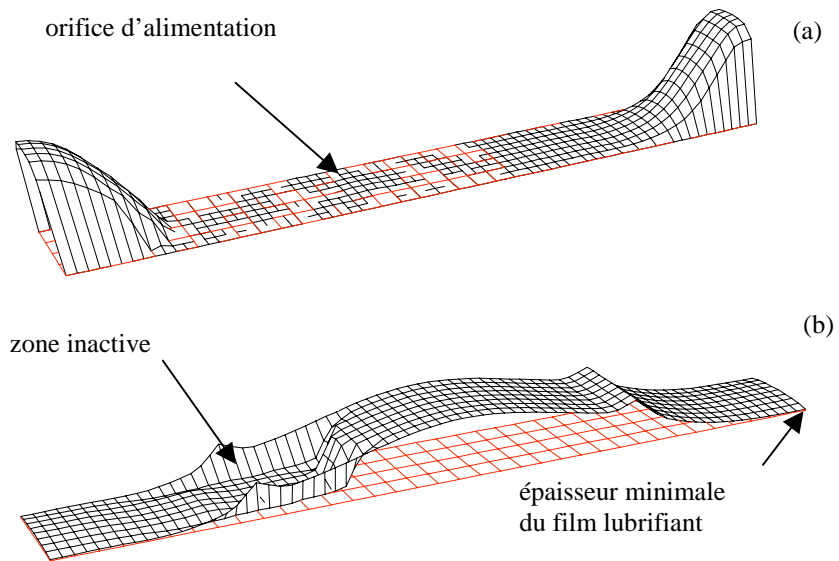


Figure 12. Champ de pression p (a) et de remplissage r (b) à l'angle de vilebrequin 180°

La figure 12 représente les champs de pression p et de remplissage r obtenus à l'angle de vilebrequin 180° qui correspond au moment de l'explosion, pour une fréquence de rotation de 16 000 rev/min. La charge (34 600 N) est orientée vers la tige de bielle (partie située au niveau de la coupure du palier développé). Cette partie, relativement rigide, se déforme peu et le champ de pression reste localisé. La pression atteint 125 MPa. Le graphe de remplissage fait apparaître une zone inactive située en avant de l'orifice d'alimentation qui débouche dans la surface inférieure mobile. Celui-ci joue donc parfaitement son rôle puisqu'en arrière, c'est-à-dire après son passage, le film est à nouveau rempli. L'épaisseur minimale du film est inférieure de $0,9 \mu\text{m}$ et se situe sur les côtés du coussinet dans la zone renforcée du corps de bielle.

La figure 13 représente les champs d'épaisseur h , de pression p et de remplissage r obtenus à l'angle de vilebrequin 0° . A cet instant, la charge appliquée (45900 N) est orientée vers le chapeau de bielle (partie centrale des graphes représentés en palier développé) et le déforme fortement, conduisant à des épaisseurs de film de l'ordre du μm sur toute la surface du chapeau. Le graphe de remplissage fait apparaître deux zones inactives situées dans les régions de dépinçage (chanfreins réalisés au niveau du plan de joint pour des raisons technologiques), ainsi qu'une troisième plus étendue dans la région de divergence du film. L'épaisseur minimale du film est inférieure à $0,1 \mu\text{m}$ et se situe sur les côtés du coussinet dans la zone affaiblie par la présence des puits de vis. A cet endroit, on note des pics de pression atteignant 170 MPa. Un contact entre les surfaces est probable dans ces régions.

7. Conclusion

L'algorithme présenté, basé d'une part, sur le modèle de JFO pour la prise en compte des phénomènes de rupture et de reformation des films lubrifiants et d'autre part, sur une discrétisation des équations par la méthode des éléments finis, permet une analyse précise de la lubrification élastohydrodynamique des mécanismes. Cet algorithme a été validé par une comparaison avec les résultats obtenus avec d'autres modèles pour le problème de la séparation ou de l'oscillation de deux plaques, de formes carrées ou circulaires immergées dans le lubrifiant. Les résultats obtenus sont en bon accord et montrent une grande finesse dans la définition du contour de la zone en cavitation. Quelques résultats présentés concernant un palier de tête de bielle de moteur F1 illustrent la capacité du logiciel développé pour l'optimisation des paramètres de dimensionnement et d'alimentation en lubrifiant, même pour des conditions sévères de fonctionnement.

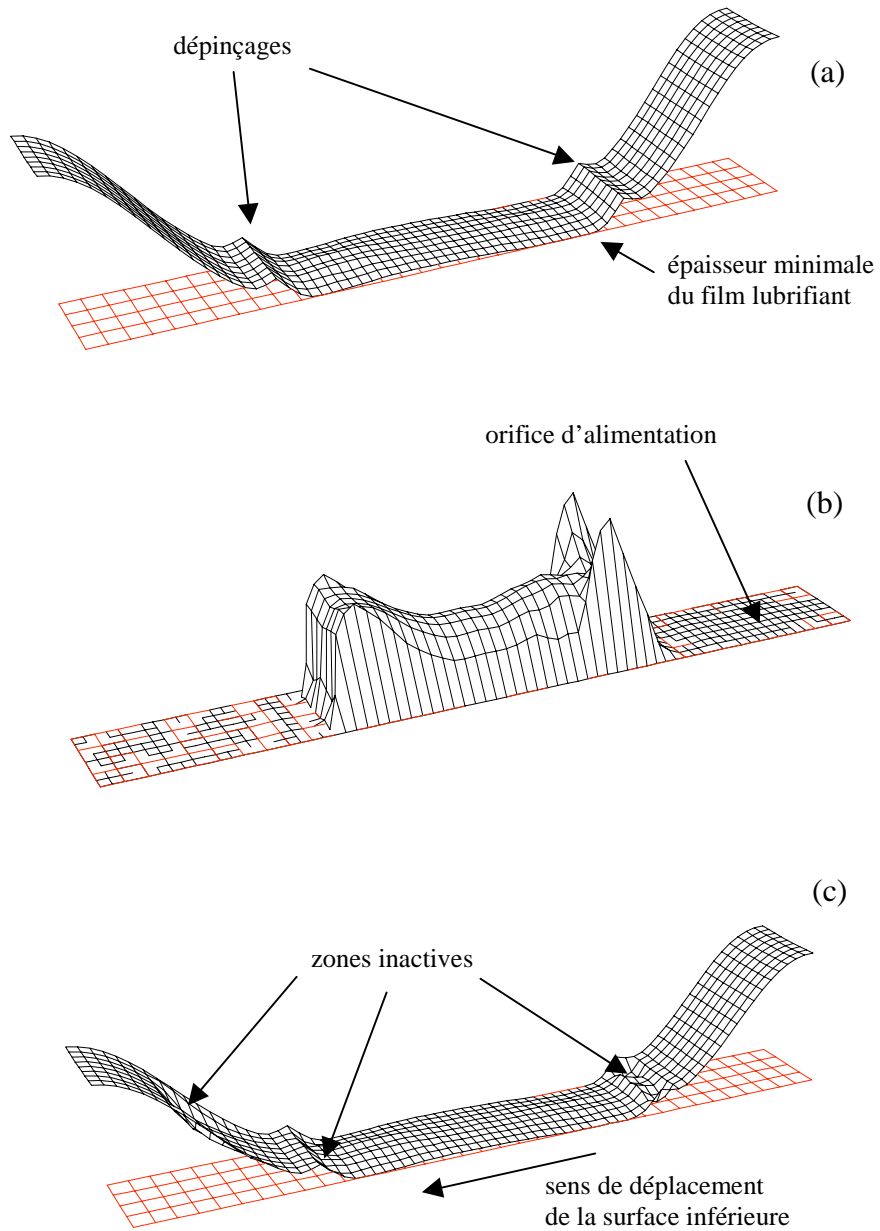


Figure 13. Champ d'épaisseur h (a), de pression p (b) et de remplissage r (c) à l'angle de vilebrequin 0°

8. Bibliographie

- [BOE 95] BOEDO S., BOOKER, J. F., « Cavitation in Normal Separation of Square and Circular Plates », *ASME Journal of Tribology*, vol. 117, 1995, p. 403-410.
- [BON 93] BONNEAU D., HUITRIC J., TOURNERIE B., « Finite Element Analysis of Grooved Thrust Bearings and Grooved Gas Face Seals » *ASME Journal of Tribology*, vol. 115, 1993, p. 348-354.
- [BON 94] BONNEAU D., ABSI J., « Analysis of Aerodynamic Journal Bearings with Small Number of Herringbone Grooves by Finite Element Method » *ASME Journal of Tribology*, vol. 116, 1994, p. 698-704.
- [BON 95] BONNEAU D., GUINES D., FRENE J., TOPLOSKY J., « EHD Analysis, Including Structural Inertia Effects and Mass-Conserving Cavitation Model » *ASME Journal of Tribology*, vol. 117, 1995, p. 540-547.
- [ELR 81] ELROD H.G., « A Cavitation Algorithm », *ASME Journal of Lubrication Technology*, vol. 103, 1981, p. 350-354.
- [JAC 57] JACOBSON B., FLOBERG L., « The finite Journal Bearing Considering Vaporisation », *Chalmers Tekniska Hoegskolas Hmndlingar*, vol. 190, 1957, p. 1-116.
- [KUM 91] KUMAR A., BOOKER J. F., « A Finite Element Cavitation Algorithm », *ASME Journal of Tribology*, vol. 113, 1991, p. 276-286.
- [MCI 88] MCIVOR J. D. C., FENNER D. N. , « An Evaluation of Eight-Node Quadrilateral Elements for the Analysis of Dynamically Loaded Hydrodynamic Journal Bearing », *Proc. Inst. Mech. Engrs*, vol. 202, n° C2, 1988, p. 95-101.
- [MUR 74] MURTY K.G., « Note on a Bard-Type Scheme for Solving the Complementarity Problems », *Opsearch*, vol.11, 1974, p. 123-130.
- [OLS 74] OLSSON K., « On Hydrodynamic Lubrication with Special Reference to Nonstationary Cavitation », *Chalmers University of Technology, Goteborg*. 1974.
- [OPT 00] OPTASANU V., BONNEAU D., « Finite Element Mass-Conserving Cavitation Algorithm in Pure Squeeze Motion. Validation - Application to a Connecting-Rod Small End Bearing, », *ASME Journal of Tribology*, vol. 122 , 1999, p. 162-169.
- [ZIN 77] ZIENKIEWICZ O.C., *The Finite Element Method*, Mc Graw-Hill Book Co., London, 1977.

Annexe I : calcul de la matrice de compliance d'un contact EHD

Lorsque les surfaces qui délimitent le film lubrifiant appartiennent à des solides élastiques, leur déformation intervient dans l'expression de l'épaisseur du film. La résolution de l'équation de Reynolds est obtenue grâce à la méthode des éléments finis. Le film est maillé en nnq éléments isoparamétriques à huit nœuds. Pour un nœud i de ce maillage, l'épaisseur h_i s'exprime comme suit.

$$h_i = h_i^* + d_i^1 + d_i^2$$

où h_i^* représente l'épaisseur nominale du film et d_i^1 et d_i^2 les déformées élastiques des parois 1 et 2 qui délimitent le film. L'épaisseur nominale intègre des données géométriques constantes comme le jeu radial et les dépinçages dans le cas d'un palier, ainsi que des paramètres variables comme les composantes de l'excentricité. Les déformées élastiques des deux parois peuvent être regroupées dans un seul paramètre et s'expriment en fonction des pressions aux nœuds du maillage en éléments quadrangulaires du film :

$$h_i = h_i^* + \sum_{j=1}^{mq} C_{ij} p_j$$

où C représente la somme des matrices de compliance des surfaces.

Les maillages tridimensionnels fournis par les mailleurs automatiques des logiciels de calcul des structures (Ansys, Abaqus, Algor, ...) sont en général constitués d'éléments tétraédriques linéaires (4 nœuds) ou quadratiques (10 nœuds). Les maillages des surfaces qui délimitent le film seront constitués d'éléments triangulaires à 3 ou 6 nœuds, en général différents d'une surface à l'autre et sans relation particulière avec le maillage en éléments à 8 nœuds du film.

Considérons un élément Ω^Q du maillage du film et un élément Ω^T – triangle à 3 nœuds dans les développements qui suivent - du maillage de l'une des surfaces (figure A1-1).

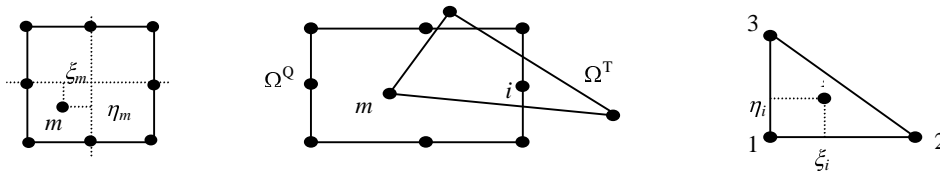


Figure A1-1. *Correspondance entre maillages*

La déformée au nœud i de Ω^Q contenu dans Ω^T s'écrit en fonction des déformées aux 3 nœuds de l'élément Ω^T

$$d_i = \sum_{k=1}^3 N_k^T(\xi_i, \eta_i) d_k$$

où N_k^T est la fonction d'interpolation relative au nœud k du triangle et ξ_i et η_i les coordonnées paramétriques du nœud i dans le triangle.

Soit S_{kl} le déplacement normal à la paroi au nœud k résultant d'une force unitaire normale à la paroi appliquée au nœud l de cette même surface. Le déplacement élastique au nœud k s'écrit :

$$d_k = \sum_{l=1}^{nnt} S_{kl} f_l$$

où nnt est le nombre de nœuds du maillage de la paroi considérée en éléments triangulaires et f_l représente la force nodale appliquée au nœud l obtenue par intégration du champ de pression :

$$f_l = \sum_{e=1}^{net} \left(\sum_{pg} \sum_{m=1}^3 N_l^T N_m^T p_m d\Omega_e \right)$$

Les fonctions d'interpolation N^T sont évaluées aux points de Gauss pg des net éléments du maillage en triangles. La pression au nœud m du maillage en triangle est obtenue par interpolation des pressions aux nœuds j de l'élément Ω^Q du maillage du film qui contient le nœud m :

$$p_m = \sum_{j=1}^8 N_j^Q(\xi_m, \eta_m) p_j$$

où N_j^Q est la fonction d'interpolation quadratique relative au nœud j du quadrangle et ξ_m et η_m les coordonnées paramétriques du nœud m dans le quadrangle.

En combinant les relations précédentes, on obtient l'expression de la déformée au nœud i :

$$d_i = \sum_{k=1}^3 N_k^T(\xi_i, \eta_i) \sum_{l=1}^{nnt} S_{kl} \sum_{e=1}^{net} \left(\sum_{pg} \sum_{m=1}^3 N_l^T N_m^T \sum_{j=1}^8 N_j^Q(\xi_m, \eta_m) p_j d\Omega_e \right)$$

et la matrice de compliance de la paroi considérée :

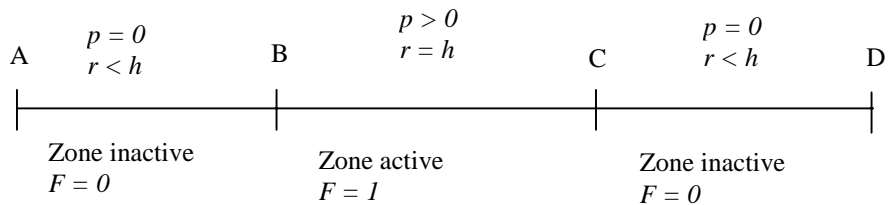
$$C_{ij} = \sum_{k=1}^3 N_k^T(\xi_i, \eta_i) \sum_{l=1}^{nnt} S_{kl} \sum_{e=1}^{net} \left(\sum_{pg} \sum_{m=1}^3 N_l^T N_m^T N_j^Q(\xi_m, \eta_m) d\Omega_e \right) \quad [\text{A1-1}]$$

Les matrices C de chaque paroi sont obtenues indépendamment l'une de l'autre. Pour la paroi considérée, on obtient tout d'abord la matrice S en utilisant des logiciels standard de calcul des structures. Pour ceci, une charge unitaire normale est appliquée successivement en chacun des nœuds de la structure appartenant à la paroi du film et les déplacements normaux en chaque nœud de cette paroi sont calculés.

Puis, pour chaque nœud du maillage en éléments triangulaires d'une paroi, on détermine le numéro du nœud du maillage du film qui le contient ainsi que ses coordonnées paramétriques dans cet élément. De même, pour chaque nœud du maillage du film, on détermine le numéro du nœud du maillage en éléments triangulaires qui le contient ainsi que ses coordonnées paramétriques. La matrice de compliance C est alors calculée avec la relation [A1-1]. On procède de même pour la seconde paroi.

Annexe II : modélisation d'un film lubrifiant mono-dimensionnel

Soit un domaine [AD] composé de zones active et inactives comme le montre la figure 1 suivante :



Dans la zone active, l'équation à résoudre est l'équation de Reynolds ci-dessous :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \right) - \frac{dh}{dx} - \frac{2}{U} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad [\text{A2-1}]$$

Dans la zone inactive, il faut résoudre l'équation donnant la conservation du débit :

$$\frac{d(\rho h)}{dx} + \frac{2}{U} \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0$$

On modifie cette équation pour faire apparaître le remplissage r donné par :

$$r = \frac{\rho h}{\rho_0}$$

avec ρ la masse volumique du mélange liquide-gaz et ρ_0 la masse volumique du lubrifiant. La nouvelle expression de l'équation [A2-2] est donc :

$$\frac{dr}{dx} + \frac{2}{U} \frac{\partial r}{\partial t} = 0 \quad [\text{A2-2}]$$

Afin de pouvoir traiter les équations [A2-1] et [A2-2] simultanément, on les regroupe en utilisant la fonction F , qui dépend de x et de t , telle que :

$$\begin{cases} F = g(x, t) \\ F = 1 \text{ (zone active)} \\ F = 0 \text{ (zone inactive)} \end{cases}$$

ce qui conduit à :

$$\int_A^D \left[FN \frac{d}{dx} \left(F \frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \right) - N \left(\frac{dh}{dx} + \frac{2}{U} \frac{\partial h}{\partial t} \right) + (1-F) N_1 \left(\frac{dr}{dx} + \frac{2}{U} \frac{\partial r}{\partial t} \right) \right] dx + N_i (CAL)_i = 0$$

Les conditions aux limites (CAL) pour le domaine AD sont :

- condition de reformation du film lubrifiant :

$$\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \Big|_{B^+} + (r-h)_{B^-} - \frac{2(r-h)}{U} \Big|_{B(t)} (\dot{B}) = 0$$

- condition de rupture du film lubrifiant :

$$\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \Big|_{C^-} + (r-h)_{C^+} - \frac{2(r-h)}{U} \Big|_{C(t)} (\dot{C}) = 0$$

avec \dot{B} et \dot{C} les vitesses respectives des frontières B et C .

En tenant compte des spécificités de chaque zone, le développement des calculs conduit à :

$$\begin{aligned} & \int_A^B N_1 \left(\frac{dr}{dx} + \frac{2}{U} \frac{\partial r}{\partial t} \right) dx + \int_B^C N \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \right) - \frac{dh}{dx} - \frac{2}{U} \frac{\partial h}{\partial t} \right] dx + \int_C^D N_3 \left(\frac{dr}{dx} + \frac{2}{U} \frac{\partial r}{\partial t} \right) dx + \\ & N_4 \left[\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \Big|_{B^+} + (r-h)_{B^-} - \frac{2(r-h)}{U} \Big|_{B(t)} (\dot{B}) \right] \\ & + N_5 \left[\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \Big|_{C^-} + (r-h)_{C^+} - \frac{2(r-h)}{U} \Big|_{C(t)} (\dot{C}) \right] = 0 \end{aligned}$$

En séparant les termes sous le signe intégral, on a :

$$\begin{aligned}
& \int_A^B N_1 \frac{dr}{dx} dx + \int_A^B N_1 \frac{2}{U} \frac{\partial r}{\partial t} dx + \int_B^C N \frac{d}{dx} \left(\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \right) dx - \int_B^C N \frac{dh}{dx} dx - \int_B^C N \frac{2}{U} \frac{\partial h}{\partial t} dx \\
& + \int_C^D N_3 \frac{dr}{dx} dx + \int_C^D N_3 \frac{2}{U} \frac{\partial r}{\partial t} dx + N_4 \left[\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \right]_{B^+} + (r-h)_{B^+} - \frac{2(r-h)}{U} \Big|_{B(t)} \quad (\dot{B}) \\
& + N_5 \left[\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \right]_{C^-} + (r-h)_{C^-} - \frac{2(r-h)}{U} \Big|_{C(t)} \quad (\dot{C}) = 0
\end{aligned}$$

Afin de s'affranchir des conditions aux limites (CAL), on choisit convenablement les fonctions d'interpolation telles que :

$$N_I = N_3 = N$$

En tenant compte de toutes ces considérations, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
& - \int_A^B N \frac{d(r-h)}{dx} dx - \int_A^B N \frac{2}{U} \frac{\partial r}{\partial t} dx + \int_B^C N \frac{d}{dx} \left(\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \right) dx - \int_B^C N \frac{2}{U} \frac{\partial h}{\partial t} dx - \int_C^D N \frac{dr}{dx} dx \\
& - \int_C^D N \frac{2}{U} \frac{\partial r}{\partial t} dx - \int_A^D N \frac{dh}{dx} dx + N_4 \left[\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \right]_{B^+} + (r-h)_{B^+} - \frac{2(r-h)}{U} \Big|_{B(t)} \quad (\dot{B}) \\
& + N_5 \left[\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \right]_{C^-} + (r-h)_{C^-} - \frac{2(r-h)}{U} \Big|_{C(t)} \quad (\dot{C}) = 0 \quad \text{[A2-3]}
\end{aligned}$$

Les intégrations par parties suivantes :

$$\begin{aligned}
& - \int_A^B N \frac{d(r-h)}{dx} dx = \int_A^B (r-h) \frac{dN}{dx} dx - N(r-h) \Big|_{B^+} \\
& - \int_C^D N \frac{d(r-h)}{dx} dx = \int_C^D (r-h) \frac{dN}{dx} dx + N(r-h) \Big|_{C^+} \quad \text{[A2-4]} \\
& \int_B^C N \frac{d}{dx} \left(\frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \right) dx = - \int_B^C \frac{h^3}{6\mu U} \left(\frac{dN}{dx} \frac{dp}{dx} \right) dx + N \frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \Big|_{C^-} - N \frac{h^3}{6\mu U} \frac{dp}{dx} \Big|_{B^+}
\end{aligned}$$

et le traitement des termes transitoires font apparaître les conditions aux limites recherchées.

Ainsi, en regroupant certains termes et en utilisant la relation

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{b(t)}^{c(t)} f(x,t) dx \right) = \int_{b(t)}^{c(t)} \frac{\partial}{\partial t} (f(x,t)) dx + f(b(t),t) \dot{b}(t) - f(c(t),t) \dot{c}(t)$$

on aboutit à l'équation :

$$\begin{aligned}
& -\int_A^{B(t)} N \frac{2}{U} \frac{\partial r}{\partial t} dx - \int_{B(t)}^{C(t)} N \frac{2}{U} \frac{\partial h}{\partial t} dx - \int_{C(t)}^D N \frac{2}{U} \frac{\partial r}{\partial t} dx \\
& = -\int_A^D N \frac{2}{U} \frac{\partial h}{\partial t} dx - \int_A^{B(t)} N \frac{2}{U} \frac{\partial(r-h)}{\partial t} dx - dx \int_{C(t)}^D N \frac{2}{U} \frac{\partial(r-h)}{\partial t} dx \\
& = -\int_A^D N \frac{2}{U} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \int_A^{B(t)} N \frac{2}{U} (r-h) dx + N \frac{2}{U} (r-h) \Big|_{B(t)}^{(B)} \\
& \quad - \frac{\partial}{\partial t} \int_{C(t)}^D N \frac{2}{U} (r-h) dx - N \frac{2}{U} (r-h) \Big|_{C(t)}^{(C)} \quad [A2-5]
\end{aligned}$$

En combinant les équations [A2-3] ,[A2-4] et [A2-5] et en choisissant convenablement les fonctions N_4 et N_5 telles que $N_4 = N$ et $N_5 = -N$, toutes les conditions aux limites à satisfaire deviennent implicites. D'où la nouvelle équation :

$$\begin{aligned}
& \int_A^B (r-h) \frac{dN}{dx} dx - \int_A^D N \frac{dh}{dx} dx - \int_A^D N \frac{2}{U} \frac{\partial h}{\partial t} dx - \int_B^C \frac{h^3}{6\mu U} \frac{dN}{dx} \frac{dp}{dx} dx + \int_C^D (r-h) \frac{dN}{dx} dx - \\
& \frac{\partial}{\partial t} \int_A^{B(t)} N \frac{2}{U} (r-h) dx - \frac{\partial}{\partial t} \int_{C(t)}^D N \frac{2}{U} (r-h) dx = 0
\end{aligned}$$

Afin d'avoir une équation unique sur tout le domaine AD, quel que soit le type de la zone rencontrée (zone active ou inactive), on introduit une variable universelle D donnée par :

$$\begin{cases} D = p \text{ (zone active)} \\ D = r - h \text{ (zone inactive)} \end{cases}$$

d'où l'équation recherchée :

$$\int_A^D \left[(1-F)D \frac{dN}{dx} + N \frac{dh}{dx} + N \frac{2}{U} \frac{\partial h}{\partial t} + F \frac{h^3}{6\mu U} \frac{dN}{dx} \frac{dD}{dx} \right] dx - \frac{\partial}{\partial t} \int_A^D N \frac{2}{U} (1-F)D dx = 0$$

avec $F = 0$ pour les zones inactives et $F = 1$ pour les zones actives. Ces zones évoluent en fonction du temps.

Le traitement numérique du dernier terme de cette intégrale est évalué numériquement comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_A^D N(x) \frac{2}{U} (1 - F(x, t)) D(x, t) dx \\ \cong \frac{1}{\Delta t} \int_A^D N(x) \frac{2}{U} (D(x, t + \Delta t)(1 - F(x, t + \Delta t)) - D(x, t)(1 - F(x, t))) dx \end{aligned}$$

où Δt représente un pas de temps suffisamment petit.