
Quelques problèmes non linéaires liés aux écoulements en lubrification et leur résolution par éléments finis

Benyebka Bou-Saïd

*Laboratoire de Mécanique des Contacts
INSA 20 Avenue A. Einstein F-69621 Villeurbanne Cedex
bousaid@lmc.insa-lyon.fr*

RÉSUMÉ. Un mécanisme lubrifié est défini par le contact de deux corps solides en mouvement, soumis à une charge et séparés par un film fluide. Les surfaces des deux solides sont caractérisées dans le voisinage du contact par leurs géométries et leurs cinématiques. Les propriétés intrinsèques du lubrifiant, la cinématique et/ou la géométrie du contact peuvent faire apparaître des particularités dans l'écoulement telles que la turbulence, un échauffement important ou une réaction du fluide due à ses propriétés rhéologiques. Des travaux importants ont permis de développer des outils mathématiques nécessaires à la détermination des différents champs : pression, température, contraintes. Ceci nécessite alors la résolution d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui n'admettent pas de solutions analytiques raisonnables. Il est nécessaire par conséquent d'utiliser des méthodes numériques qui fournissent des solutions approchées aux problèmes posés. Nous présentons dans cet article l'application des éléments finis à trois types d'écoulements souvent rencontrés dans des applications pratiques : le régime turbulent et inertiel, le régime thermohydrodynamique et les écoulements non newtoniens. Le traitement par éléments finis est présenté et des exemples d'applications sont donnés.

ABSTRACT. A lubricated mechanism is defined as the contact of two bodies in relative motion or not, loaded and separated by a fluid film. Solids are characterised by geometry and kinematic conditions in the contact zone. Lubricant properties, contact geometry and kinematic conditions can introduce flow particularities such as turbulence, overheating and fluid reactions due to its rheological properties. Numerous works allow the development of mathematical theories which are necessary to determine the following different fields :pressure, temperature and stress. Thus we have to solve a set of non-linear partial derivative equations which have no rigorous analytical solutions. Consequently the use of numerical methods is necessary. We present in this paper the application of the Finite Element Method to three particular flow types usually found in practical applications : turbulence with inertia, thermohydrodynamic and non-Newtonian. The treatment with FEM is presented as well as some examples of practical applications.

MOTS-CLÉS : lubrification, non-linéarité, éléments finis.

KEYWORDS: Lubrication, non linearities, finite elements.

1. Introduction

La méthode des éléments finis est une procédure d'approximation pour résoudre des équations aux dérivées partielles de type généralement elliptique ou parabolique dans le domaine de la physique mathématique ou de l'ingénieur. Cette méthode consiste en la subdivision du domaine de résolution en éléments (triangles, quadrangles etc.) et utilise une théorie d'approximation du problème posé sur chaque élément. Une discrétisation géométrique est réalisée sur le domaine et les équations sont approchées sur chaque élément. Partant d'un principe variationnel ou de la méthode des résidus pondérés les équations gouvernant le problème sont ainsi transformées en équations locales sur chaque élément. Ces équations sont ensuite assemblées pour former un ensemble d'équations soit différentielles soit algébriques avec la prise en compte d'une manière appropriée des conditions aux limites du problème. Les inconnues dites nodales sont obtenues à partir de la résolution de ce système. La méthode des éléments finis a été développée originellement par des ingénieurs dans les années 1950 afin d'analyser le comportement des structures d'avion. Turner *et al.* (1956) ont présenté un premier article sur ce sujet suivis par Clough (1960) et Argyris (1963) et d'autres ensuite. L'application des éléments finis à des problèmes en dehors du domaine de la mécanique des structures comme la mécanique des fluides et l'électromagnétisme a été présentée pour la première fois par Zienkiewicz et Cheung (1965). Oden (1972) a lui aussi largement contribué à l'utilisation de cette méthode numérique pour une classe très large de problèmes non linéaires en mécanique du solide. Cette méthode ayant acquis de la maturité dans diverses applications le concept de l'équilibre des forces a été remplacé par des arguments théoriques plus solides basés sur le principe variationnel et la méthode de Rayleigh-Ritz (Rayleigh, 1877, Ritz, 1909). D'importantes contributions dans le domaine du développement mathématique pour les éléments finis sont dues à Babuska et Aziz (1972), Carlet et Raviart (1972), Aubin (1972), Strang et Fix (1973), Oden et Reddy (1976) et Lions et Magenes (1972). Néanmoins dans le domaine de la lubrification les premiers articles n'apparaissent qu'en 1960 une époque où les analystes admettent la généralité de la méthode des éléments finis et ceci grâce au principe variationnel.

Dans un problème de lubrification la première étape pour la détermination des caractéristiques de fonctionnement (statiques ou réactions dynamiques) consiste à définir les équations régissant le problème posé ainsi que les conditions aux limites appropriées au contexte physique traité. Une difficulté majeure à cet égard mis à part la résolution des équations choisies, réside dans leur aptitude à représenter la physique réelle du problème. Conservant à l'esprit cette première difficulté et les approximations qui en découlent, la seconde difficulté est la résolution de ces équations. Dans le cadre de l'étude des écoulements en film mince présentant des non-linéarités telles que la turbulence, les effets d'inertie, les effets thermiques ou les effets non newtoniens de nombreux modèles existent et sont considérés comme représentatifs [CON 59, CON 62, CON 70, CHO 59, NG 64, NG 65, BOU 93]. L'utilisation de méthodes numériques s'avère nécessaire pour la résolution des

équations issues de ces modèles et plusieurs techniques sont possibles : différences finies, éléments finis ou éléments frontières. Lorsque des discontinuités existent que ce soit au niveau de la géométrie ou des propriétés de champ la méthode des éléments finis s'avère très souvent bien adaptée [BOU 85]. Nous présentons en deux parties le traitement par éléments finis d'écoulements particuliers souvent rencontrés dans les domaines courants d'application.

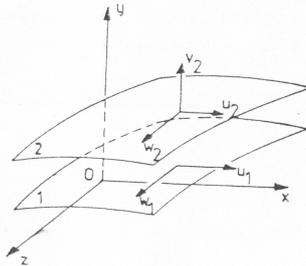


Figure 1. Système d'axes

2. Ecoulement turbulent et effets d'inertie au niveau des discontinuités géométriques

Les méthodes courantes d'analyse des performances de mécanismes lubrifiés fonctionnant à haute vitesse et lubrifiés à l'aide d'un fluide de faible viscosité sont en général basées sur des modèles phénoménologiques de turbulence utilisant des principes de longueur de mélange [BOU 93]. En supposant que les effets d'inertie sont négligeables lorsque les variations de section sont continues les équations établies par Ng et Pan [NG 65], Constantinescu [CON 75] ou Burton [BUR 74] issues de considérations purement empiriques peuvent être utilisées lorsque les nombres de Reynolds n'excèdent pas 100 000. En utilisant le référentiel donné figure 1 l'équation qui régit l'écoulement s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} (h^3 G_x \frac{\partial p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z} (h^3 G_z \frac{\partial p}{\partial z}) = \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \tag{1}$$

avec $G_x = 1. / (12. + 0.0136 R_e^{0.9})$

$$R_e = \rho \frac{Uh}{\mu} \quad \text{pour un écoulement de type Couette dominant} \tag{2}$$

ρ masse volumique du fluide, U vitesse linéaire de la paroi, h épaisseur caractéristique et μ viscosité dynamique du fluide.

R_{ep} représente le nombre de Reynolds local basé sur la vitesse du fluide induite par les gradients de pression [BOU 85].

$$G_z = 1. / (12. + 0.0043 R_e^{0.96})$$

$$G_x = G_z = G = \frac{6.8}{R_{ep}^{0.681}} \text{ pour un écoulement de type Poiseuille dominant. } [3]$$

Cette équation non inéaire de type elliptique ne possède pas de fonctionnelle associée [BOU 85]. On peut appliquer la méthode de Galerkin pour obtenir une équation intégrale :

$$W(P) = \int_D \langle \delta P \rangle \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(h^3 G_x \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^3 G_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \mu \frac{U}{2} \frac{\partial h}{\partial x} \right\} dV = 0 \quad [4]$$

D est le domaine de résolution globalement représenté sur la figure 2. La frontière Γ de D peut être considérée comme l'union des frontières suivantes :

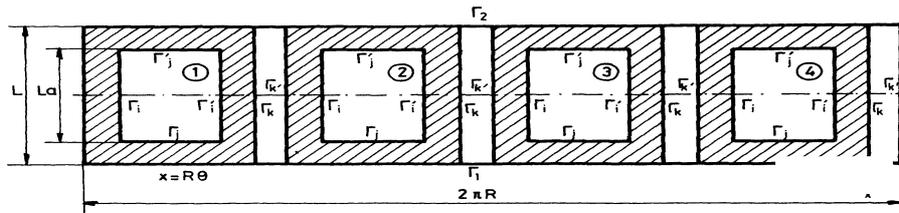


Figure 2. Domaine de résolution

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \sum_{i=1}^{Na} (\Gamma_i + \Gamma_i' + \Gamma_j + \Gamma_j' + \Gamma_k + \Gamma_k') \quad [5]$$

où Na est le nombre de poches ou alvéoles d'alimentation. Les conditions aux limites peuvent être donc de type Neumann ou Dirichlet.

Une intégration par parties permet d'une part d'affaiblir le problème et d'autre part d'introduire les conditions aux limites naturelles du problème. Cette équation devient :

$$W(P) = - \int_D \left(h^3 G_x \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta P) + h^3 G_z \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} (\delta P) \right) dx dy + \int_D \mu U \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\delta P) dx dz$$

$$\begin{aligned}
 & + \int \sum_{i,i'} (\Gamma_i U \Gamma_{i'}) \left(h^3 G_x \frac{\partial p}{\partial x} - \mu U \frac{h}{2} \right) \delta P \, dz \\
 & + \int \sum_{j,j'} (\Gamma_j U \Gamma_{j'}) h^3 G_z \frac{\partial p}{\partial z} \delta P \, dx = 0
 \end{aligned} \quad [6]$$

L'élément d'approximation utilisé est de type Hermite semi C^1 [BOU 85]. Les inconnues nodales sont la pression et ses dérivées permettant de mieux traiter les non-linéarités introduites par la turbulence.

2.1. Conditions aux limites

Les conditions aux limites de type Dirichlet permettent d'annuler les intégrales de contour où sont appliquées ces conditions. Pour les poches ou alvéoles (ai), on a (figure 2) :

$$\Gamma_{a_i} = \Gamma_i + \Gamma_{i'} + \Gamma_j + \Gamma_{j'}$$

Le débit sortant doit être égal à celui fourni par le système d'alimentation :

$$\begin{aligned}
 & \int_{(\Gamma_i U \Gamma_{i'})} \left(h^3 G_x \frac{\partial P}{\partial x} - \mu u \frac{h}{2} \right) dz + \int_{(\Gamma_j U \Gamma_{j'})} h^3 G_z \frac{\partial P}{\partial z} dx \\
 & = \mu K_{a_i} (P_s - P_{a_i})^n
 \end{aligned} \quad [7]$$

où K_{a_i} et n sont définis par le système d'alimentation [BOU 85]. De part la discontinuité géométrique un saut de pression existe à la frontière (effets d'inertie) [BOU 85]. La condition au limite en débit doit être traitée de manière itérative .

2.2. Résolution

La discrétisation par éléments finis conduit à la résolution d'un système non linéaire de type :

$$[K] \{P\} = \{F_v\} + \{F_s\}$$

avec

[K]	matrice globale fluidité
{P}	pression dans le domaine D
{F _v }	débit dû aux effets Couette
{F _s }	débit sortant du mécanisme (débit de fuite)

Les coefficients G_x et G_z dépendent des dérivées de la pression. Un processus itératif est nécessaire pour obtenir la solution.

2.3. Exemple – Palier hybride

Les caractéristiques de fonctionnement sont les suivantes (figure 3) :

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| – diamètre | $D = 80 \text{ mm}$ |
| – longueur | $L = 80 \text{ mm}$ |
| – nombre d'alvéoles | $n = 3$ |
| – amplitude angulaire de l'alvéole | $\gamma = 90^\circ$ |
| – longueur de l'alvéole | $La = 50 \text{ mm}$ |
| – profondeur de l'alvéole | $H = 10 \text{ mm}$ |
| – jeu radial | $C = 0.125 \text{ mm}$ |
| – viscosité du lubrifiant | $\mu = 0.001 \text{ mm}^2/\text{s}$ |
| – densité du lubrifiant | $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ |
| – pression d'alimentation | $P_s = 0.4 \text{ Mpa}$ |

De l'eau à 20°C est délivrée par une pompe à travers un orifice de 4.1 mm de diamètre.

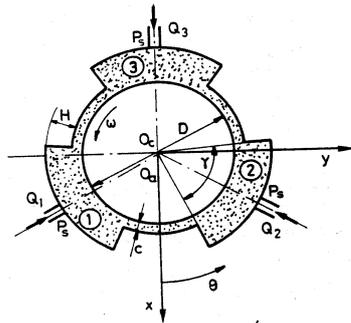


Figure 3. Palier hybride

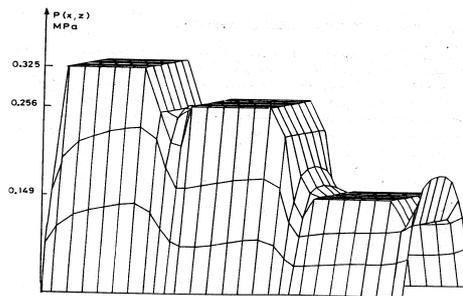


Figure 4. Distribution de pression $\bullet = 0.6$
 $N = 9000 \text{ trs/mn}$, $P_s = 0.4 \text{ Mpa}$

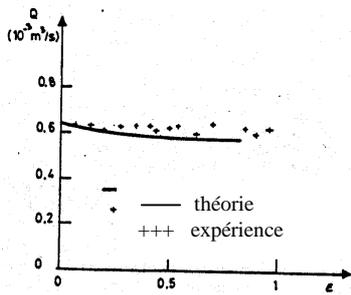


Figure 5. Variation du débit sans dimension en fonction de l'excentricité

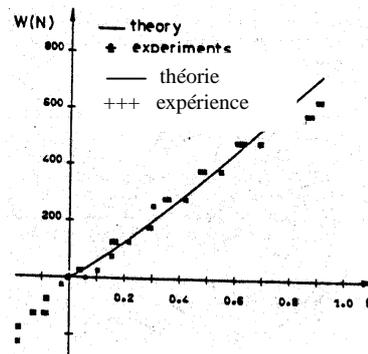


Figure 6. Variation de la charge en fonction de l'excentricité

Les figures 4, 5 et 6 représentent respectivement la distribution de pression pour un cas de fonctionnement donné ainsi qu'une comparaison théorie- expérience pour l'évolution de la charge et du débit de fuite en fonction de l'excentricité. Cette comparaison valide parfaitement l'approche numérique utilisée ainsi que les équations de base choisies pour modéliser l'écoulement.

3. Effets thermiques et effets non newtoniens

Les théories classiques de la lubrification prédisent les performances des mécanismes en supposant que la viscosité du lubrifiant est constante et uniforme dans le film. Le comportement de ces mécanismes est alors dépendant de la valeur de cette viscosité. Si cette viscosité devient fortement dépendante de la température ces théories ne sont plus raisonnablement applicables. Sous conditions sévères de fonctionnement, les effets thermiques sont si significatifs que le concept de viscosité effective n'est plus applicable. L'utilisation de la théorie thermohydrodynamique s'avère alors nécessaire. Une littérature abondante existe sur ce sujet [BOU 93]. Une autre hypothèse classique en lubrification émise par Reynolds en 1886 est que le fluide possède un comportement Newtonien c'est-à-dire que la contrainte de cisaillement est proportionnelle au gradient de vitesse dans l'épaisseur du film. L'apparition dans l'industrie de produits lubrifiants de composition complexe tels que les graisses, les bitumes, les lubrifiants additivés de polymères, rend caduque cette hypothèse. Compte tenu des sollicitations de plus en plus sévères qui sont imposées à ces lubrifiants leurs réponses ne peuvent être modélisées par une loi de type visqueux linéaire. De nombreux travaux ont été publiés sur cet aspect [EHR 91]. L'analyse thermohydrodynamique d'un contact lubrifié à l'aide d'un fluide non-Newtonien peut être décrite par les équations établies par Najji *et al.* [NAJ 89] :

- équation de Reynolds généralisée,
- équation de l'énergie dans le fluide

L'équation de comportement d'un fluide de type Maxwell peut s'écrire :

$$\dot{\gamma}_{ij} = A \frac{d\tau_{ij}}{dt} + \tau_{ij} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \quad [8]$$

le symbole $\frac{d}{dt}$ représente la dérivée intrinsèque. τ_e est la contrainte équivalente

$\tau_e = (\sum_{i \neq j} \tau_{ij}^2)^{1/2}$ et $F(\tau_e)$ est une fonction linéaire ou non qui représente le

comportement visqueux ou visco-plastique du fluide [NAJ 89]. L'équation de Reynolds généralisée s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G_m \frac{\partial P}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} [U_2(R_2 - F_m) + U_1 F_m] - U_2 \frac{\partial H_2}{\partial x} + U_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} [W_2(R_2 - F_m) + W_1 F_m] - W_2 \frac{\partial H_2}{\partial z} + U_1 \frac{\partial H_1}{\partial z} \\
&+ (V_2 - V_1) - \left(\frac{\partial L_{mx}}{\partial x} + \frac{\partial L_{mz}}{\partial z} \right) \quad [9]
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
I_m &= \int_{H_1}^y \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} s \, ds & ; & & J_m &= \int_{H_1}^y \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} s \, ds \\
K_{mx} &= \int_{H_1}^y A \frac{d\tau_{xy}}{dt} \, ds & ; & & K_{mz} &= \int_{H_1}^y A \frac{d\tau_{xy}}{dt} \, ds \\
I_{m2} &= \int_{H_1}^{H_2} \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} y \, dy & ; & & J_{m2} &= \int_{H_1}^{H_2} A \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \, dy \\
I_{mx2} &= \int_{H_1}^{H_2} A \frac{d\tau_{xy}}{dt} \, dy & ; & & K_{mz2} &= \int_{H_1}^{H_2} A \frac{d\tau_{xy}}{dt} \, dy \\
R &= y - H_1 & ; & & R_2 &= H_2 - H_1
\end{aligned}$$

$$F_m = \frac{1}{J_{m2}} \int_{H_1}^{H_2} R \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \, dy$$

$$G_m = \int_{H_1}^{H_2} R \frac{F(\tau_e)}{\tau_e} \left[y - \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right] \, dy$$

$$L_{mx} = \int_{H_1}^{H_2} R \cdot A \frac{d\tau_{xy}}{dt} \, dy - K_{mx2} \cdot F_m$$

L'équation de l'énergie prend la forme suivante en film mince :

$$\rho_f C_f \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(K_f \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \phi \quad [10]$$

avec ϕ la fonction de dissipation. ρ_f est la masse volumique du fluide, C_f sa chaleur spécifique et K_f sa conductivité.

3.1. Formulation intégrale

Une forme intégrale de type Galerkin peut être obtenue pour les équations (9) et (10). Sur un domaine D de frontières $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ où la pression et la température sont inconnues, on a :

$$\begin{aligned}
 W_G = & \int_{(D)} \left\langle \frac{\partial \delta T}{\partial y}, \frac{\partial \delta P}{\partial x}, \frac{\partial \delta P}{\partial z} \right\rangle [L_{21}] \begin{Bmatrix} T \\ P \end{Bmatrix} dD \\
 & + \int_{(D)} \langle \delta T, \delta P \rangle \left\{ [L_{22}] \begin{Bmatrix} T \\ P \end{Bmatrix} + \{f_2\} \right\} dD \\
 & - \oint_{\Gamma_1} \langle \delta T, \delta P \rangle \begin{pmatrix} K_f \frac{\partial T}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} d\Gamma_1 + \oint_{\Gamma_2} \langle \delta T, \delta P \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ G_m \frac{\partial P}{\partial x} \end{Bmatrix} d\Gamma_2 \\
 & - \oint_{\Gamma_1} \langle \delta T, \delta P \rangle \begin{pmatrix} K_f \frac{\partial T}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} d\Gamma_1 + \oint_{\Gamma_2} \langle \delta T, \delta P \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ G_m \frac{\partial P}{\partial x} \end{Bmatrix} d\Gamma_2 \\
 & + \oint_{\Gamma_3} \langle \delta T, \delta P \rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ G_m \frac{\partial P}{\partial z} \end{Bmatrix} d\Gamma_3 \tag{11}
 \end{aligned}$$

avec :

$$[L_{21}] = \begin{bmatrix} K_f \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & -G_m \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -G_m \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} ; \quad [L_{22}] = \begin{bmatrix} \rho_f C_f (u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et $f_2 = \langle f_T, f_P \rangle$ $f_T = -\phi$

Ici f_p représente l'opposé du terme de droite de l'équation 9.

L'expression du champ de vitesse utile pour la résolution de l'équation de l'énergie et issue de la résolution de l'équation de Reynolds généralisée est donnée par :

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{\partial p}{\partial x} \left(I_m - J_m \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right) + (U_2 - U_1 - K_{mx2}) \frac{J_m}{J_{m2}} + K_{mx} + U_1 \\
 w = & \frac{\partial p}{\partial z} \left(I_m - J_m \frac{I_{m2}}{J_{m2}} \right) + (W_2 - W_1 - K_{mz2}) \frac{J_m}{J_{m2}} + K_{mz} + W_1 \tag{12}
 \end{aligned}$$

où U_i et W_i sont les vitesses aux parois (figure 1). La loi de variation de la viscosité en fonction de la pression et de la température peut être écrite sous la forme :

$$\mu(P, T) = \mu_0 \exp\left(\alpha P + \beta\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right) \quad [13]$$

où α et β représentent respectivement les coefficients de piézo et thermoviscosité.

La résolution numérique de ce problème s'effectue en utilisant des éléments de type Hermite semi- C^1 pour la pression et Lagrange bi-linéaire pour la température. Le système non linéaire à résoudre est du type :

$$[K(X_n)]\{X_n\} = \{F(X_n)\} \quad [14]$$

$\{X_n\}$ est le vecteur contenant les inconnues en température et en pression et ses dérivées. $\{F(X_n)\}$ est le vecteur représentant les flux thermiques et les débits de fluide. La matrice $[K(X_n)]$ est obtenue par assemblage des matrices élémentaires « fluide » et « température ». L'équation (14) est non linéaire, et un processus itératif est nécessaire pour obtenir la solution. Une méthode de prédiction correction est utilisée pour résoudre les équations de comportement lorsque A est non nul dans l'équation (8).

3.2. Résultats

Nous traitons ici le cas d'un palier lisse dont les caractéristiques sont les suivantes :

– rayon de l'arbre R	= 20 mm
– longueur L	= 40 mm
– jeu radial C	= 0.05 mm
– viscosité dynamique μ	= 0.27 Pa.s
– densité du lubrifiant ρ	= 900 kg/m ³
– vitesse angulaire N	= 1500 rpm
– chaleur spécifique C_f	= 2000 J/kg°C
– conductivité thermique K_f	= 0,032 W/m°C

Les conditions aux limites de type Dirichlet (rainures d'alimentation) et de Reynolds (prise en compte de la cavitation) sont utilisées pour la pression. Pour la température à l'interface fluide-solide on utilise dans ce cas précis, soit une température imposée soit une condition adiabatique.

Aux limites du palier des conditions d'échange sont appliquées. Dans la rainure d'alimentation une condition de mélange entre fluide chaud dû à la recirculation et fluide frais d'alimentation donne (figure 7) [BON 84].

$$T_{se} = \frac{Q_r}{Q_{se}} T_r + \left(1 - \frac{Q_r}{Q_{se}}\right) T_0 \quad [15]$$

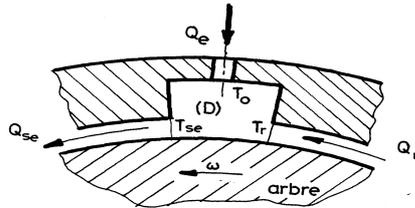


Figure 7. Schéma du mode d'alimentation

On définit le nombre de Déborah N_D qui représente le rapport entre les effets élastiques et les effets visqueux pour un palier comme suit :

$$N_D = \frac{t_R}{t_p} = \frac{\mu_0 N}{120G} \quad [16]$$

G représente le module de cisaillement du fluide.

Les figures 8, 9 et 10 représentent respectivement la carte de stabilité et les évolutions du couple de frottement adimensionné ainsi que le maximum de température obtenu dans le palier en fonction du nombre de Déborah. Les éléments finis permettent dans ce cas de répondre très correctement au problème complexe posé incluant des non-linéarités dues aux effets thermiques et non newtoniens.

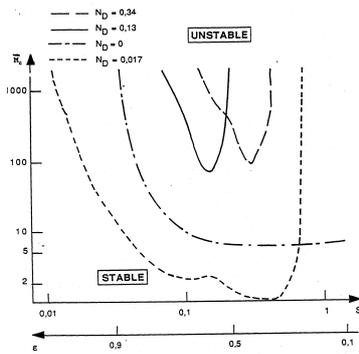


Figure 8. Carte de stabilité en fonction du nombre de Déborah

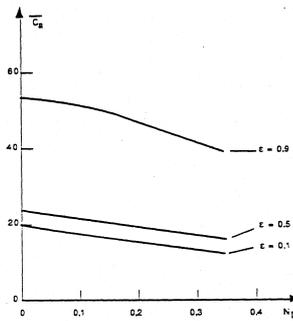


Figure 9. Variation du couple de frottement sans dimension en fonction de N_D

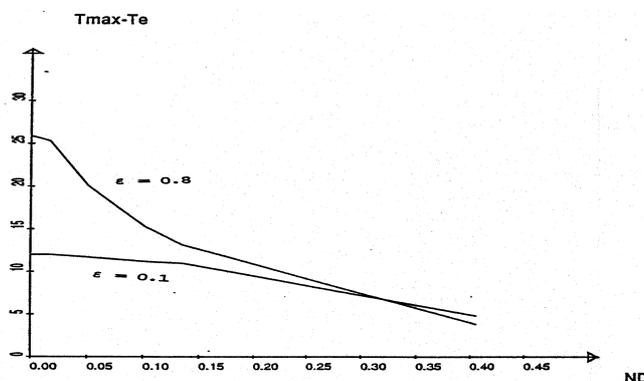


Figure 10. Température maximale dans le film en fonction de N_D

4. Conclusion

Dans cet article nous avons présenté les équations utiles pour une étude convenable d'écoulements particuliers qui possèdent de fortes non-linéarités telles que les effets d'inertie, de turbulence, les effets thermiques et non newtoniens. Le traitement de ces équations est réalisé par la méthode des éléments finis. D'une manière générale dans le cas d'applications courantes comme celles décrites dans cet article ces modèles sont représentatifs et la méthode des éléments finis utilisée est une approche numérique solide et fiable pour traiter des discontinuités géométriques ou de champ.

5. Bibliographie

- [BON 84] BONCOMPAIN R., « Les Paliers Lisses en Régime Thermohydrodynamique. Aspects Théoriques et Expérimentaux », Thèse de Doctorat-ès-Sciences, Université de Poitiers, novembre 1984.
- [BOU 85] BOU-SAÏD B., « La lubrification à basse pression par la méthode des Elements Finis », Thèse de Doctorat INSA de Lyon, décembre 1985.
- [BOU 93] BOU-SAÏD B., Document de synthèse, Habilitation à diriger des recherches, INSA de Lyon, UCB, Lyon I, juillet 1993.
- [BUR 74] BURTON R.A., « Approximation in Turbulent Film Analysis », *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Series F.*, vol. 96, 1974, p. 103.
- [CHO 59] CHOU V.T. AND SAIBEL E., « The Effect of Turbulence on Slider Bearing Lubrication », *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME* vol. 26, vol. 80, series E, 1959, 122.

- [CON 59] CONSTANTINESCU V.N., « On Turbulent Lubrication », *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 173, 1959, p. 881.
- [CON 62] CONSTANTINESCU V.N., « Analysis of Bearings Operating in the Turbulent Regime », *Journal of Basic Engng., Trans., ASME, series D*, vol. 84, 1962, p. 139.
- [CON 70] CONSTANTINESCU V.N., « On the Influence of Inertia Forces in Turbulent and Laminar Self-Acting Films », *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, series F*, vol. 92, 1970, p. 473.
- [CON 75] CONSTANTINESCU V.N., GALETUSE S AND KENNEDY F., « On Comparison Between Lubrication Theory, Including Turbulence and Inertia Forces, and Some Existing Experimental Data », *Journal of Lubrication Technology, Trans. ASME, Series F*, vol. 97, 1975, p. 439.
- [EHR 91] EHRET P., BOU-SAÏD B., « Why consider Non-Newtonian effects in lubrication. A review », *Recent Developments in Non-Newtonian flows and industrial application, 1991, Winter Annual Meeting ASME Atlanta* .
- [NAJ 89] NAJJI B., BOU-SAÏD B., BERTHE D., « New formulation for lubrication with non-newtonian fluids », *ASME, Journal of Tribology*, January 1989, Vol 111 p. 29-33.
- [NG 64] NG, C.W., « Fluid Dynamic Foundation of Turbulent Lubrication Theory », *A.S.L.E. Trans.*, vol. 7, 1964, p. 311.
- [NG 65] NG, C.W., PAN, C.W.T., « A Linearized Turbulent Lubrication Theory », *Journal of Basic Engng., Trans. ASME*, vol. 87, 1965, p. 675.