
Modélisation des caractéristiques statiques et de la stabilité des paliers de butée aérostatiques par la méthode des éléments finis

Marc Bonis — Abdérafi Charki

*Laboratoire Roberval, Département de Génie des Systèmes Mécaniques
Centre Pierre Guillaumat
Université de Technologie de Compiègne,
B.P. 60319
F-60206 Compiègne Cedex
marc.bonis@utc.fr*

RÉSUMÉ. Le comportement statique et dynamique des paliers à air alimentés par des orifices a été modélisé par la méthode des éléments finis. Les résultats, en bon accord avec l'expérience, permettent d'en déduire les paramètres de conception afin d'assurer, pour une capacité de charge donnée, un fonctionnement stable tout en maximisant la raideur et l'amortissement.

ABSTRACT. The static and dynamic behaviours of orifices air bearings has been modeled by finite elements. The results, in good agreement with experiments, allow to design stable bearings, while maximising the stiffness and the damping for a given load capacity.

MOTS-CLÉS : paliers à air, raideur, amortissement, stabilité, simulation, éléments finis.

KEYWORDS: Air bearings, stiffness, damping, stability, simulation, finite elements.

1. Introduction

Le principe des paliers fluides aérostatiques consiste à créer une portance entre deux parois mobiles l'une par rapport à l'autre, en générant un écoulement d'air dans le jeu étroit qui les sépare. Si la source est à pression constante, l'épaisseur du jeu et le débit s'adaptent de façon à ce que la résultante des forces de pression appliquée par le film de fluide sur chacune des parois en regard équilibre à chaque instant les charges appliquées de part et d'autre. Le fluide sous pression est le plus souvent introduit dans le film au travers d'une restriction dont la perte de charge confère au dispositif des propriétés de raideur spécifiques.

Les paliers à air sont souvent utilisés pour sustenter et guider les éléments mobiles des machines d'usinage et de métrologie d'ultra précision, qui nécessitent que les perturbations de mouvement soient inférieures à une fraction de micromètre (10^{-1} à 10^{-2} μm).

Du fait de la basse viscosité de l'air, le frottement et la génération thermique dans les paliers à air restent négligeables. En revanche, leur capacité de charge, leur raideur et leur amortissement sont plus faibles que pour les paliers à huile, avec cependant l'avantage que l'augmentation de la viscosité des gaz avec la température tend à renforcer la portance et l'amortissement en cas d'échauffement. Par contre, les effets combinés de la compressibilité de l'air et du faible amortissement induisent une tendance à l'instabilité.

L'article concerne les paliers à air plans, dits de butée, alimentés par plusieurs orifices dont Fourka et Bonis [FOU 97] ont montré les avantages potentiels de compromis raideur - portance - amortissement par rapports aux alimentations à poche et à paroi poreuse. Différents modules de calcul statique et dynamique par éléments finis ont été développés, [TIA 93], [FOU 94], [RAB 95], [CHA 00], afin de définir pour chaque type d'alimentation les meilleures conditions de conception pour assurer un fonctionnement stable en maximisant capacité de charge, raideur et amortissement. Selon les performances privilégiées et la qualité de surface envisageable (planéité, rugosité) une solution optimale est à trouver, et la créativité reste possible.

2. Equation de Reynolds adimensionnelle

Le but de la modélisation du palier à orifices schématisé sur la figure 1 est de prédire le champ de pression dans le film, dont on déduit : en statique, la portance et la raideur ; puis en dynamique, le coefficient d'amortissement et la stabilité. Les variables sans dimension sont définies par

$$p^* = \frac{p}{p_a}; h^* = \frac{h}{h_0}; x^* = \frac{x}{R_2}; z^* = \frac{z}{R_2} \text{ et } \tau = vt ;$$

où p_a est la pression atmosphérique, h_0 un jeu de référence, R_2 le rayon extérieur du patin, et ν la fréquence de la perturbation.

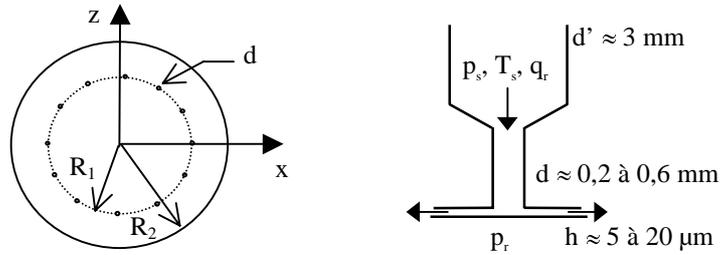


Figure 1. Géométries du palier et d'un orifice

L'épaisseur du film étant très faible devant les autres dimensions, si on suppose que l'écoulement est laminaire et isotherme et que la vitesse de déplacement latérale du patin est suffisamment petite pour ne pas apporter de contribution significative à la contrainte de cisaillement, la répartition de pression de pression $p^*(x^*, z^*)$ dans le film est décrite par l'équation simplifiée de Reynolds déduite des équations de continuité et de Navier-Stokes sous la forme adimensionnelle, [FRE 90],

$$\nabla \left(h^{*3} p^* \nabla p^* \right) = \sigma \frac{\partial (p^* h^*)}{\partial \tau^*}, \quad [1]$$

où $\sigma = \frac{12\mu\nu R_2^2}{h_0^2 p_a}$ est le paramètre d'écrasement.

Le deuxième membre de cette équation traduit les effets temporels de cisaillement par écrasement du film $p^* \frac{\partial h^*}{\partial \tau^*}$ et de compressibilité $h^* \frac{\partial p^*}{\partial \tau^*}$.

En supposant que la détente à travers les orifices est isentropique, le débit massique q_r admis par chaque orifice s'exprime, avec $\gamma = 1,4$ pour l'air :

– si l'écoulement dans l'orifice est subsonique, $\frac{p_r}{p_s} > \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ par

$$q_r^* = \frac{12\mu \mathfrak{R} T_s}{h_0^3 p_a^2} q_r = C_s h^* \left\{ \frac{2\gamma}{(\gamma-1)} \left[\left(\frac{p_r}{p_s} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_r}{p_s} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad [2]$$

– si l'écoulement est supersonique, $\frac{p_r}{p_s} \leq \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, par

$$q_r^* = \frac{12\mu\mathcal{R}T_s}{h_0^3 p_a^2} q_r = C_s h^* \left\{ \gamma \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \right\}^{\frac{1}{2}} ; \quad [3]$$

où p_s et T_s sont la pression absolue et la température de l'air à l'alimentation, p_r la pression absolue dans le film en aval de l'orifice, d le diamètre de l'orifice et

$$C_s = \frac{12\pi\mu\sqrt{\mathcal{R}T_s}}{h_0^2 p_a^2} p_s d C_d$$

le paramètre d'alimentation, avec C_d le coefficient de débit.

3. Formulation par éléments finis

Reddi et Chu [RED 70] ont été les premiers à utiliser la méthode des éléments finis pour la résolution de l'équation non linéaire de Reynolds dans le cas d'un écoulement compressible stationnaire, dont les avantages par rapport à la méthode des différences finies ont été mis en évidence par Gero et Ettles [GER 84]. L'application au calcul de la portance d'une glissière rectangulaire en régime transitoire a été effectuée par Yap [YAP 85], et le cas de la discontinuité d'épaisseur de film introduite dans un palier de butée rainuré a été étudié par Bonneau [BON 93]. Fourka *et al.* [FOU 96] ont obtenu la carte de stabilité des butées aérostatisques à poche, en montrant que l'approche linéaire sous-estime le domaine de stabilité des paliers.

La méthode des résidus pondérés avec la formulation de Galerkin, proposée par Dhatt et Touzot [DHA 84], appliquée à l'équation de Reynolds [1], conduit à résoudre sur le domaine S du palier la formulation intégrale

$$I(p^*) = \int_S \delta p^* \left[\nabla \cdot (h^3 p^* \nabla p^*) - \sigma \frac{\partial p^* h^*}{\partial t} \right] dS^* = 0.$$

Les conditions aux limites sur la frontière $\Gamma = \Gamma_p + \Gamma_q$ du domaine de solution S , figure 2, sont $\delta p^* = 0$ le long de Γ_p (pression constante), et $q_n^* = -h^3 p^* \nabla p^* \cdot \mathbf{n}$ sur Γ_q , où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à Γ_q dirigé vers l'extérieur. La transformation de l'intégrale par le théorème de Green, donne alors :

$$I(p^*) = \int_S \left(h^{*3} p^* \nabla p^* \cdot \nabla \delta p^* + \sigma \frac{\partial p^* h^*}{\partial \tau} \delta p^* \right) dS + \int_{\Gamma_q} \delta p^* q_n^* d\Gamma = 0.$$

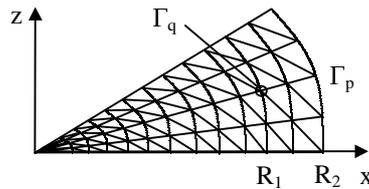


Figure 2. *Domaine S de solution et conditions aux limites*

Le modèle par éléments finis est développé avec des éléments iso paramétriques T3, qui s'adaptent bien à la géométrie d'un patin à plusieurs orifices. Après introduction des fonctions d'interpolation et assemblage des formes élémentaires, le système à résoudre se met sous la forme matricielle :

$$[K(p_n^*)] \{p_n^*\} + [C] \{p_n^*\} + \{F\} = 0 ;$$

avec les conditions aux limites suivantes : sur le contour extérieur du palier, les pressions nodales sont égales à la pression atmosphérique ; en chaque nœud interne de S le débit est nul ; aux nœuds représentant la sortie de chacun des N orifices la pression est déterminée par l'expression [2] de la conservation du débit entre les orifices et la sortie du palier, formulée sous forme adimensionnelle par :

$$q_f^* = N q_r^* = - \int_{\Gamma_q} h^{*3} p^* \nabla p^* \cdot n d\Gamma ;$$

prenant avantage de la symétrie, le modèle n'est calculé que sur un secteur d'angle $2\pi/N$, le débit net aux nœuds situés sur les frontières récurrentes est nul et les pressions aux nœuds homologues situés à la même distance du centre sont égales.

3.1. Formulation statique

En statique, la solution est recherchée par un algorithme de Newton-Raphson, qui consiste à minimiser le vecteur résidu :

$$\{R(P)\} = [K(P)]\{P\} - \{Q\}$$

3.2. Formulation dynamique

L'étude du mouvement instationnaire et de la stabilité nécessitent de résoudre simultanément le système non linéaire constitué de l'équation de Reynolds et de l'équation du mouvement de la partie mobile sustentée.

$$W^*(\tau) = M\ddot{h}^* \quad \text{où} \quad M = \frac{mv^2h_0}{p_a R_2^2} \quad \text{est la masse adimensionnelle de la butée.}$$

Le schéma temporel adopté est la méthode d'Euler implicite, avec utilisation de la méthode de Newton-Raphson pour la résolution à chaque pas de temps à partir d'une position et d'une vitesse initiales.

3.3. Calcul de la capacité de charge, de la raideur et de l'amortissement

L'expression adimensionnelle de la capacité de charge pour chaque type de palier s'exprime :

$$W^* = \frac{W}{p_a R_2^2} = \int_S (p^* - 1) dS = \sum_{e=1}^{n_e} \langle N \rangle \{ p^* \} dS ;$$

et la raideur :

$$k^* = \frac{h_0 k}{p_a R_2^2} = - \frac{dW^*}{dh^*}$$

se déduit d'un lissage par fonctions *spline* effectué sur la variation statique $W^*(h^*)$ calculée.

L'amortissement est évalué, en référence au modèle linéaire du second ordre, par le décremé logarithmique sur les courbes de réponse à un échelon de déplacement calculées.

4. Simulations d'un palier de butée

Le palier est alimenté par N orifices identiques répartis uniformément sur sa surface, supposée parfaitement plane. En première évaluation, deux calculs de variation de la portance d'un patin à 12 orifices pour des jeux compris entre 1 et 50 μm ont été effectués, l'un avec un maillage régulier comportant 180 éléments, l'autre avec un maillage adapté de 250 éléments. Dans le premier cas, l'orifice est assimilé à un nœud, tandis que dans le deuxième cas, l'orifice est représenté par un cercle comportant 4 nœuds répartis uniformément. Le temps de calcul dans le cas du maillage adaptatif étant multiplié par 5 et la sous-estimation par le maillage régulier, inférieure à 10 %, restant acceptable en recherche de solution technologique, le

maillage régulier a donc finalement été adopté pour l'étude des caractéristiques statiques et dynamiques du palier.

Les paramètres nominaux adoptés pour les simulations sont : $R_2 = 32$ mm, $d = 0,2$ mm avec $N = 12$ pour les simulations statiques et $N = 8$ pour les simulations dynamiques (le comportement statique est quasiment le même dans les deux cas), $p_s = 0,5$ Mpa, $C_d = 0,7$, avec $h_0 = 20$ μ m et $\sigma = 3$.

La valeur du coefficient de débit d'un écoulement compressible à travers un orifice est liée aux rapports des sections et des pressions amont et aval, et à la forme de l'arête aval. La littérature est pauvre à ce propos et les mesures directes sont difficiles à cette échelle, son évaluation reste donc imprécise. Les simulations montrent que lorsque C_d augmente, la portance s'accroît mais que le maximum de raideur diminue. La recherche d'une valeur optimale de C_d peut donc constituer un objectif technique, bien que l'influence de C_d sur les performances soit moins prépondérante que celle des autres paramètres. Les essais effectués au laboratoire permettent d'estimer qu'une valeur de 0,7 donne une bonne corrélation entre les simulations et l'expérience dans le domaine qui nous intéresse ($d = 0,2$ mm, $p_s = 0,5$ Mpa, avec un jeu de 10 à 20 μ m).

4.1. Etude des caractéristiques statiques

Les pas sur l'épaisseur du film et sur la pression ont été choisis respectivement égaux à 5×10^{-2} μ m et 10^{-5} MPa, dans le but de satisfaire la conservation du débit massique entre les orifices et le film d'air avec une erreur inférieure à 1 %.

Les figures 3 à 6 décrivent la variation de la capacité de charge W^* et de la rigidité k^* , en fonction de l'épaisseur du film d'air, pour différentes valeurs des paramètres de construction ou de fonctionnement. D'une façon générale, le meilleur compromis peut être obtenu pour de petites épaisseurs de film d'air, dans la zone voisine de la rigidité maximale.

La capacité de charge augmente avec la pression d'alimentation et le nombre, le diamètre et le décentrement des orifices. On remarque figures 3 et 6 que pour 24 orifices ou $R_2/R_1 = 0,8$, la capacité de charge chute rapidement quand le jeu s'élève, donnant un maximum étroit de raideur pour environ 5 μ m, ce qui requiert une précision d'usinage des surfaces astreignante, tandis que les courbes de portance et de raideur pour 8 et 12 orifices sont quasiment confondues. D'une manière générale, la rigidité maximale croît en réduisant le diamètre des orifices ou en augmentant leur nombre et la pression d'alimentation, figures 3, 4 et 5 ; l'épaisseur du film correspondant à la rigidité maximale décroît lorsque le diamètre des orifices diminue ou le nombre d'orifices augmente, et elle reste quasiment constante quand on fait varier la pression d'alimentation.

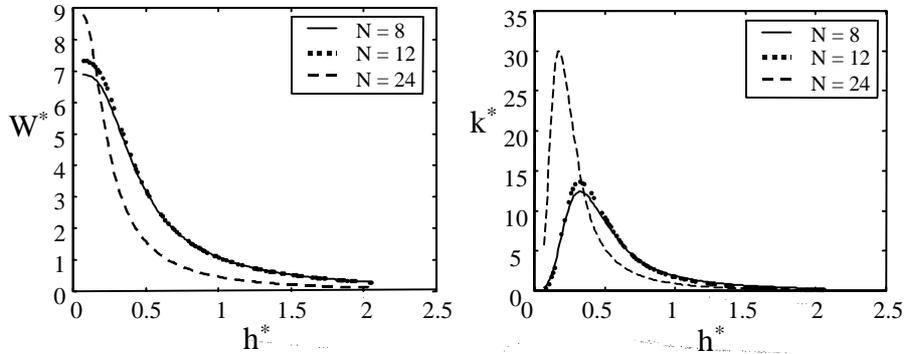


Figure 3. Influence du nombre N d'orifices sur les variations de la capacité de charge W^* et de la rigidité statique k^* en fonction de l'épaisseur du film d'air, $p_s = 0,5$ MPa, $C_d = 0,7$, $d = 0,2$ mm, $R_1/R_2 = 0,5$

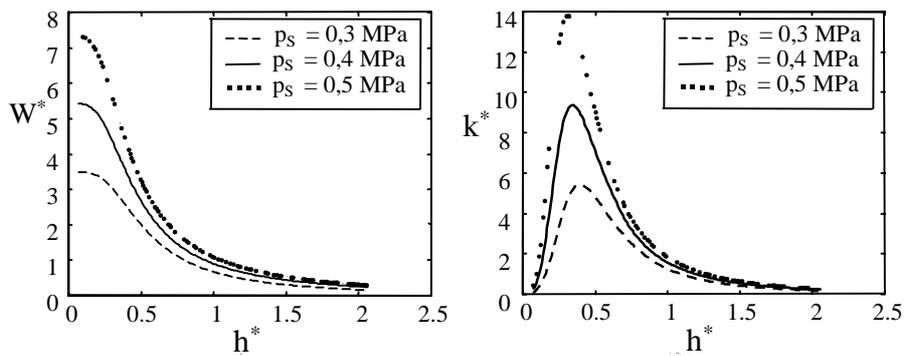


Figure 4. Influence de la pression d'alimentation sur les variations de la capacité de charge W^* et de la rigidité statique k^* en fonction de l'épaisseur du film d'air, $N = 12$, $C_d = 0,7$, $d = 0,2$ mm, $R_1/R_2 = 0,5$

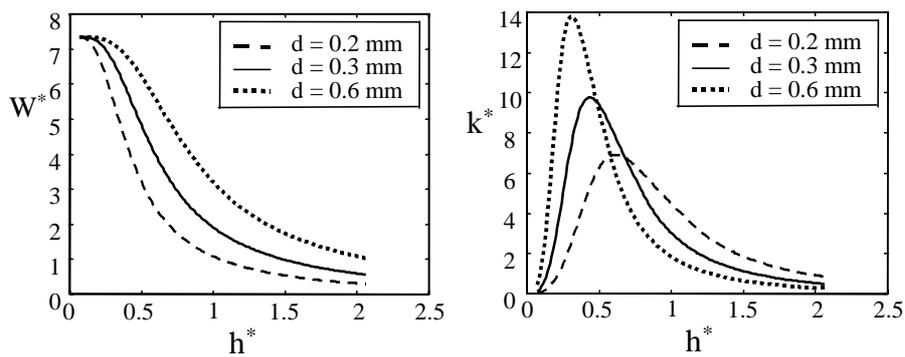


Figure 5. Influence du diamètre des orifices sur les variations de la capacité de charge W^* et de la rigidité statique k^* en fonction de l'épaisseur du film d'air, $p_s = 0,5$ MPa, $N = 12$, $C_d = 0,7$, $d = 0,2$ mm, $R_1/R_2 = 0,5$.

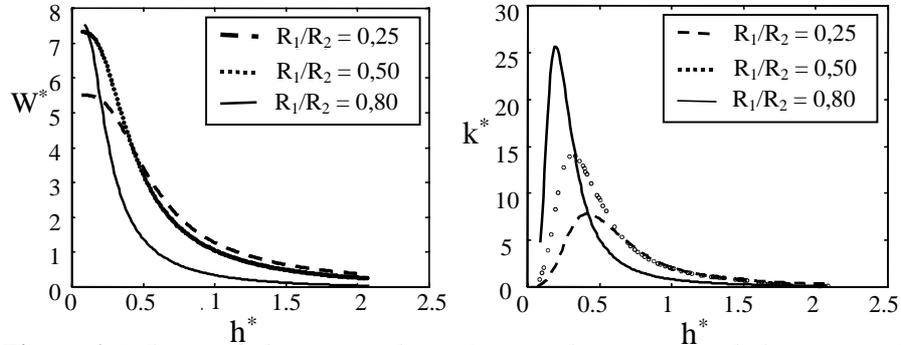


Figure 6. Influence de la position des orifices sur les variations de la capacité de charge W^* et de la rigidité statique k^* en fonction de l'épaisseur du film d'air, $p_s = 0,5 \text{ MPa}$, $N = 12$, $C_d = 0,7$, $d = 0,2 \text{ mm}$

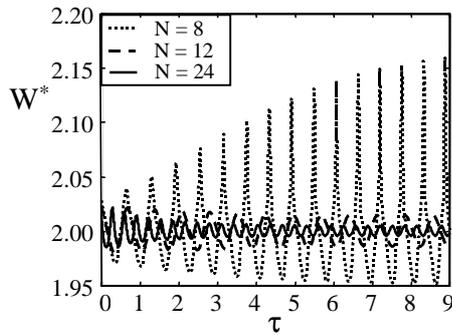


Figure 7. Réponse temporelle de la capacité de charge pour $\bar{W}^* = 2.0$. Influence du nombre d'orifices ; $P_s = 0,5 \text{ MPa}$, $C_d = 0.7$, $d = 0.2 \text{ mm}$, $R_1/R_2 = 0.5$

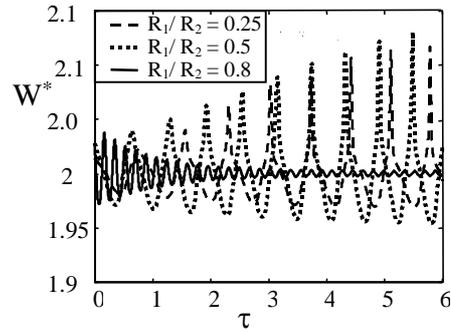


Figure 8. Réponse temporelle de la capacité de charge pour $\bar{W}^* = 2.0$. Influence de la position des orifices ; $P_s = 0,5 \text{ MPa}$, $C_d = 0.7$, $d = 0.2 \text{ mm}$, $R_1/R_2 = 0.5$

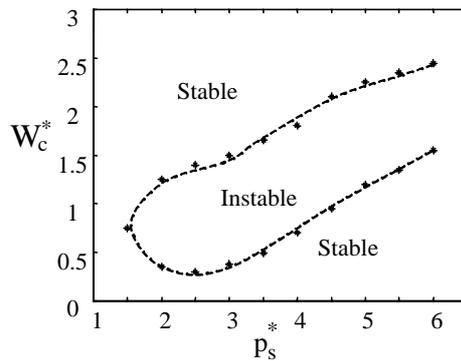


Figure 9. Carte de stabilité. $d = 0,2 \text{ mm}$, $N = 8$, $R_1/R_2 = 0,5$, $R_2 = 32 \text{ mm}$

4.2. Analyse de la stabilité

Des exemples de variation temporelle de la résultante de pression, en réponse à un échelon de déplacement de faible amplitude ($\Delta h \approx 1 \mu\text{m}$) sont donnés sur les figures 7 et 8. Le patin est initialement écarté de sa position d'équilibre correspondant à un chargement vertical par une masse telle que $\overline{W} = mg$, puis lâché sans vitesse initiale. La masse oscille ainsi à sa fréquence naturelle, avec un comportement quasi linéaire qui dépendra des paramètres. La carte de stabilité donnant les chargements critiques W_c^* en fonction de la pression d'alimentation p_s , pour le cas standard de construction considéré, est déduite d'une série de simulations sur la figure 9. Le pas de temps est de 10^{-4} s, et les pas sur l'épaisseur du film et sur la pression sont les mêmes que pour les calculs statiques. Le palier est stable quand l'amplitude est décroissante.

Les simulations présentées ont été effectuées pour $\overline{W}^* = 2$, correspondant à une masse $m = 20,9$ kg, avec un jeu moyen h variant entre environ 8 et 15 μm . La figure 7 montre que, bien que leur comportement statique soit très proche, le palier à $N = 8$ est dans ce cas instable alors que celui à $N = 12$ est stable, ainsi que celui à $N = 24$ pour lequel on constate que la diminution du jeu accroît l'amortissement. De même, figure 8, le palier se stabilise avec un fort amortissement lorsque les orifices sont éloignés du centre, offrant une plus grande surface cisailée sous pression maximale.

La carte de stabilité, figure 9, est similaire à celles obtenues antérieurement soit expérimentalement [STO 71], [CHA 83], soit expérimentalement et par la méthode des éléments finis [FOU 96]. Le mécanisme de l'instabilité n'est pas encore clairement élucidé. Il résulte des déphasages entre les variations de quantité de mouvement et les variations de pression sous les effets : de la perte de charge à travers l'orifice, de la compressibilité et de l'écrasement du film, qui gèrent la raideur et l'amortissement. On constate que le palier est toujours stable aux faibles pressions où la raideur est quasiment nulle ; et, pour une pression donnée, le palier est stable aux faibles charges (jeu élevé) où l'inertie est petite, et aux fortes charges (faible jeu) où l'amortissement induit par l'écrasement du film est élevé. L'étendue de la zone instable et les valeurs des jeux correspondant aux limites inférieures et supérieures varient avec les paramètres géométriques de conception.

5. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux

Le banc d'essai est schématisé sur la figure 10. Le patin est guidé par un palier cylindrique, également alimenté en air, afin d'éviter les frottements et le glissement latéral du bloc sous lequel il est fixé. Le patin est chargé par l'intermédiaire d'un contact bille/plan, soit par un effort exercé par une vis et contrôlé par un capteur de force pour les tests statiques, soit par des masses pour les essais dynamiques. La

variation de l'épaisseur du film d'air est mesurée par un capteur à fibres optiques de résolution inférieure à $0,01 \mu\text{m}$ développé au laboratoire.

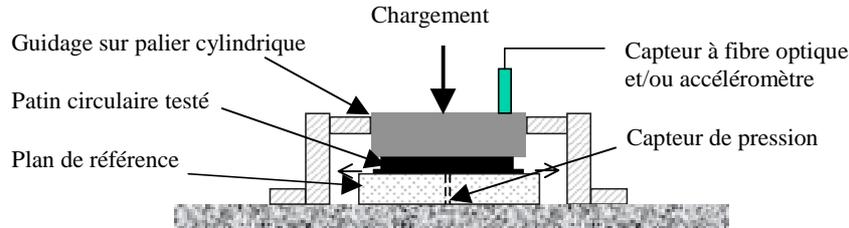


Figure 10. Banc d'essai

Les patins ont été réalisés en AU4G, la finition miroir de la surface a été effectuée par tournage à l'outil diamant monocristallin, avec une rugosité R_a de 6 nm et une planéité voisine du micromètre, qui assure également une bonne acuité des arêtes des orifices.

Pour les tests dynamiques le patin est excité en bruit blanc par un pot vibrant jusqu'à un effort maximum de 10 N. Le signal obtenu avec un accéléromètre de masse 13 g est traité par un système d'analyse modale.

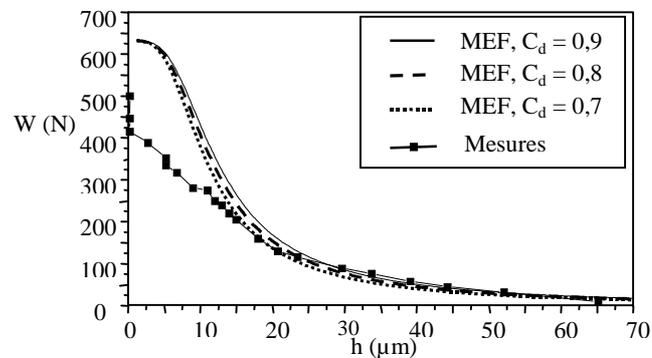


Figure 11. Capacité de charge en fonction de l'épaisseur du film $P_s = 0,5 \text{ MPa}$, $R_1/R_2 = 0,8$, $d = 0,6 \text{ mm}$, $R_2 = 32 \text{ mm}$.

Les résultats expérimentaux statiques de variation de la portance en fonction de l'épaisseur du film d'air, obtenus avec un patin comportant 8 orifices de diamètre 0,6 mm alimentés à la pression absolue de 0,5 MPa, sont comparés avec ceux de la simulation sur la figure 11. Les résultats numériques, obtenus avec des valeurs du coefficient de débit de 0,7 à 0,9, montrent une bonne corrélation avec les mesures

pour une épaisseur de film supérieure à 10 μm . L'écart entre l'expérience et la théorie pour des épaisseurs de film d'air inférieures à 10 μm est attribué aux erreurs expérimentales aux faibles jeux : défauts de planéité et de parallélisme, présence de rayures sur les surfaces ou de poussières dans le jeu.

La réponse temporelle numérique de ce patin a été calculée avec un chargement de 13,5 kg ($W^* = 1,3$). Le coefficient d'amortissement et la fréquence naturelle, calculés par la méthode de l'incrément logarithmique, montrent une bonne concordance de la fréquence naturelle, 99 Hz expérimentalement et 92 Hz en simulation numérique ; tandis que les coefficients d'amortissement sont relativement éloignés : $\xi = 0,071$ pour l'expérience et $\xi = 0,013$ par le calcul. Considérant l'écart sur ξ , la fréquence naturelle mesurée est en bonne concordance avec la fréquence propre non amortie calculée avec la raideur statique issue des simulations.

6. Conclusion

Le jeu optimum, où se trouvent les portances et les rigidités les plus élevées, est dans les cas traités inférieur à 10 μm , avec des portance W^* supérieures à environ 2,5 situées de surcroît dans le domaine stable de fonctionnement. La comparaison expérimentale, bien qu'actuellement peu représentative dans le domaine intéressant des faibles jeux, montre systématiquement une sous-estimation de la raideur et de l'amortissement par le calcul numérique basé sur le modèle de Reynolds communément adopté.

Ces résultats confirment cependant l'intérêt de la méthode des éléments finis pour le calcul du comportement dynamique non linéaire des paliers à air, et la bonne représentativité de cet outil de simulation pour la conception de paliers devant répondre à un cahier des charges bien défini. Cette validation, avec les interrogations qui subsistent, ouvre la voie à des investigations plus approfondies pour expliciter le mécanisme d'instabilité et compléter le modèle afin de mieux rendre compte des effets physiques impliqués.

7. Bibliographie

- [BON 93] BONNEAU D., HUITRIC J., TOURNERIE B., « Finite Element Analysis of Grooved Gas Thrust Bearings and Grooved Gas Face Seals », *Journal of Tribology*, Vol. 115, 1993, 348-354.
- [CHA 00] CHARKI A., Modélisation du comportement statique et dynamique des paliers à air à orifices – Application à la conception de broches, Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 2000.
- [CHA 83] CHANG H. S., WANG Z. S., SUN D. C., « An experimental investigation of the stability of externally pressurized gas-lubricated porous thrust bearings », *Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology*, oct. 1983, 630 – 637.

- [DHA 84] DHATT G., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Editions Maloine, 2^{ème} édition, 1984.
- [FOU 96] FOURKA M., TIAN Y., BONIS M., « Prediction of the stability of air thrust bearings by numerical, analytical and experimental methods », *Wear*, Vol. 198, 1996, 1-6.
- [FOU 97] FOURKA M., BONIS M., « Comparison between externally pressurized gas thrust bearings with different orifice and porous feeding systems », *Wear*, 210, 1997, 311 - 317.
- [FOU 94] FOURKA M., Etude expérimentale et modélisation statique et dynamique par la méthode des éléments finis des paliers à air, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1994.
- [FRE 90] FRENE J., NICOLAS D., DEGUEURCE B., BERTHE D., GODET M., *Lubrification Hydrodynamique, Paliers et Butées*, Paris, Editions Eyrolles, 1990.
- [GER 84] GERO L. R., ETTLES MC. C. M., « An Evaluation of Finite Difference and Finite Element Methods for the Solution of the Reynolds Equation », *ASLE Trans.*, Vol. 29, 2, 1984, 166-172.
- [RAB 95] RABIA A., *Modélisation des paliers aérostatiques a paroi poreuse par la méthode des éléments finis*, Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1995.
- [RED 70] REDDI M. M., CHU T.Y., « Finite Element Solution of the Steady-State Compressible Lubrication Problem », *Trans. ASME, Series F: Journal of Lubrication Technology*, Vol. 92, 3, July 1970, 495-503.
- [TIA 93] TIAN Y., Modélisation Statique et Dynamique des Paliers Fluides par la Méthode des Eléments Finis et Comparaison Expérimentale, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1993.
- [STO 71] STOWELL T.B., « Pneumatic hammer in gas lubricated externally pressurized annular thrust bearing », *Trans. ASME, Journal of Lubrication Technology*, oct. 1971, 498 - 503.
- [YAP 85] YAP Y.K., « A Galerkin Finite Element Scheme for the Rectangular Gas-Lubricated Slider Bearing – the Transient Case », *Wear*, Vol.105, 1985, 109-122.