
Modélisation par la méthode des éléments finis de la lubrification EHD des paliers de vilebrequin des moteurs thermiques

Anne-Marie Chomat-Delalex — Dominique Bonneau

Laboratoire de Mécanique des Solides, UMR CNRS 6610
Equipe Structures et Interfaces I.U.T.
4, avenue de Varsovie
F-16021 Angoulême Cedex
adelalex@iutang.univ-poitiers.fr
dbonneau@iutang.univ-poitiers.fr

RÉSUMÉ. L'étude présentée décrit un modèle de la lubrification élastohydrodynamique de l'ensemble carter/vilebrequin d'un moteur à quatre cylindres en ligne. Ce modèle est essentiellement basé sur la méthode des éléments finis et considère le comportement des paliers soumis à des chargements non stationnaires. Il prend en compte principalement l'interdépendance de toutes les parties du mécanisme et les déformations élastiques de chaque élément. Les quelques résultats présentés sont en bon accord avec ceux donnés par des études expérimentales.

ABSTRACT. The presented study describes an elasto-hydro-dynamic lubrication model of a complete crankshaft / engine block assembly of a four-cylinder inline automotive engine. The study is mainly founded upon the finite element method. The engine behaviour depends on unstationary loads. The inter-dependence of main bearings and the elastic distortions of each element are considered. The few presented results are in good agreement with those given by experimental studies.

MOTS-CLÉS : Méthode des éléments finis, paliers de vilebrequin, lubrification EHD.

KEYWORDS: Finite element method, crankshaft bearings, EHD lubrication.

1. Introduction

La méthode des éléments finis (MEF) a été largement utilisée dans les années 70 et 80 pour analyser la lubrification hydrodynamique des paliers rigides et s'est révélée particulièrement efficace. L'évolution suivante a été la prise en compte des déformations élastiques et ce nouveau modèle élastohydrodynamique, désigné par EHD, a d'abord été appliqué à l'étude des paliers de tête de bielle. Nous ne citerons que les études faites dans les cas les plus réalistes pour ces paliers, à savoir ceux qui sont soumis à des charges dynamiques :

- Comportement dynamique avec une structure 2D : [FAN 83] et [OH 84],
- Amélioration avec prise en compte d'une structure 3D [OH 85],
- Développement d'une méthode de calcul plus rapide [MCI 89],
- Prise en compte de :
 - la conservation de la masse du lubrifiant [KUM 91],
 - puis des déformées inertielles [BON 95].

Le passage de l'étude EHD des paliers de bielle à l'étude EHD des paliers de vilebrequin n'a été entreprise qu'une dizaine d'années plus tard. La raison en est la complexité de la seconde qui doit tenir compte de l'interdépendance des paliers et de la possibilité, pour chaque palier, d'être mésaligné. De plus, l'ensemble complet carter/vilebrequin constitue une structure 3D très complexe dont les constructeurs n'ont pu réaliser un maillage raffiné que très récemment grâce à la disponibilité de logiciels dédiés et de moyens de calcul puissants. La discrétisation de la structure se caractérise, en général, par un nombre très élevé de nœuds, de l'ordre de 60 000, possédant chacun 3 ddl. Il est évident que ces « données constructeur » ne peuvent être utilisées telles quelles : elles conduiraient à des temps de calcul prohibitifs. La difficulté conséquente est donc de créer une interface entre ces données et le modèle EHD. Cette interface doit principalement réduire le nombre de nœuds à traiter pour réduire ainsi le nombre d'équations générées, la taille des matrices intervenant dans le calcul et les temps de calcul eux-mêmes, tout en assurant une bonne précision des résultats.

A ce jour, très peu d'analyses développées dans le cadre de la théorie EHD ont porté sur l'ensemble carter/vilebrequin.

Bien que Maspeyrot [MAS 89] ait étudié, dès 1989, par la méthode de mobilité de Booker, l'influence des défauts de forme et du mésalignement sous charge dynamique pour un palier rigide unique, sans connexion avec les autres, il a fallu attendre 1997 et les publications de Knoll *et al.* [KNO 97], Loibnegger *et al.* [LOI 97] et Garnier *et al.* [GAR 99] pour voir apparaître les premiers résultats sur l'ensemble complet carter/vilebrequin dans le cadre de la théorie EHD. Les premiers modélisent tout déplacement en la somme d'un grand déplacement du corps rigide et d'un petit déplacement élastique. Ils diminuent le temps de calcul en utilisant la méthode de réduction de Guyan qui ne prend en compte, dans la structure, que les

nœuds chargés et en la complétant par un choix de modes propres appropriés. Le modèle des seconds prend en compte l'influence des différents types de vibrations dues à toutes les parties en mouvement. Garnier *et al.* ont généralisé les études EHD développées pour les bielles au comportement d'un moteur à n cylindres en ligne. Leur modèle permet de réduire de façon importante la taille des matrices et par suite le temps de calcul.

Puis, Bonneau *et al.* [BON 99] ont réalisé, dans le cadre du modèle développé par Garnier *et al.*, une étude paramétrique qui montre l'influence de la souplesse de chaque partie du mécanisme et l'influence d'un mésalignement éventuel initial du vilebrequin et des paliers. Ils ont mis en évidence, entre autres, l'importance d'une meilleure répartition des masses d'équilibrage.

Chomat *et al.* [CHO 00] ont développé ce modèle en prenant en compte des défauts de forme des paliers et une alimentation en lubrifiant par des rainures circumférentielles et des trous débouchants.

2. Modélisation

2.1. Présentation du mécanisme

L'objet de la présente étude est de déterminer le comportement EHD de la structure 3D constituée du vilebrequin et du bloc moteur, structure discrétisée par éléments finis.

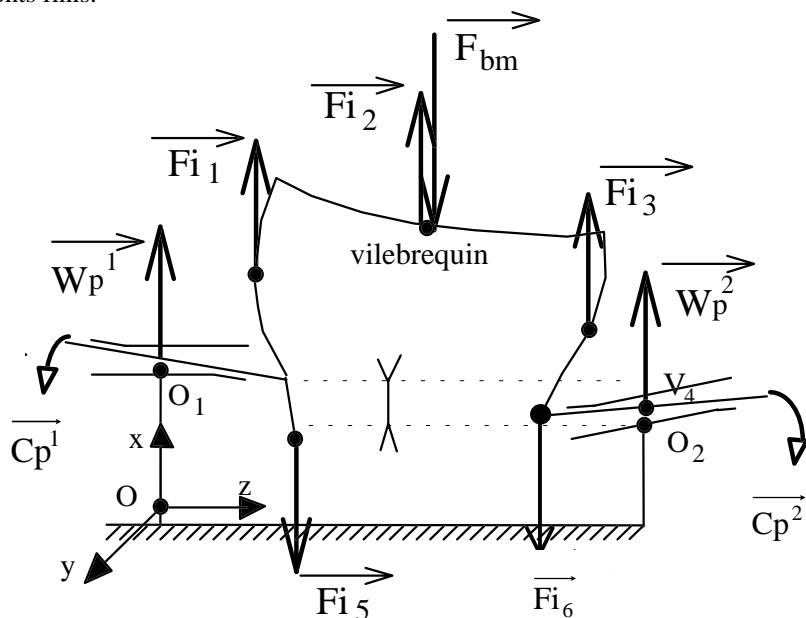


Figure 1. Actions agissant sur un tronçon de vilebrequin

La figure 1 montre, de façon amplifiée, pour le premier cylindre du moteur, les distorsions subies par le vilebrequin, sous l'action des charges extérieures, l'élasticité de tout le mécanisme étant prise en compte.

Le vilebrequin, par cylindre, est modélisé par six nœuds massiques, désignés par V_j , reliés entre eux par des éléments flexibles sans masse. Chaque nœud possède quatre paramètres de déplacement u_x, u_y, θ_x et θ_y . Les déplacements u_z et θ_z sont sans intérêts. Ce modèle a été développé et validé par Hodgetts [HOD 74].

Sur la figure 1 sont désignés les paramètres de charge, connus ou inconnus qui interviennent lors du fonctionnement du moteur. Charges et déplacements induits doivent satisfaire les équations de l'équilibre de la structure et du comportement élastique de chacun de ses éléments.

On appelle torseur des actions extérieures sur le vilebrequin, par cylindre i , le torseur, noté $\{T_E\}$ dont la résultante est la somme de :

- la force motrice F_{bm} transmise par la bielle au maneton,
- la résultante des efforts d'inertie F_i appliqués
 - au centre de masse de chaque bras,
 - et au centre de masse du maneton.

Le moment résultant de ce torseur est la somme des moments induits par chacune de ces forces au centre de référence du vilebrequin, à savoir le nœud O_1 coïncidant avec le centre du premier tourillon. Le torseur $\{T_E\}$ est supposé connu.

On appelle torseur des actions de pression sur le vilebrequin, par tourillon i , le torseur noté $\{T_p\}$ dont la résultante est la force W_{pi} résultant du champ de pression exercée par le fluide lubrifiant sur le tourillon. Ce champ est montré figure 2.

Le moment résultant de ce torseur est le moment C_{pi} induit au nœud O_1 par ce champ de pression. Ce torseur est inconnu.

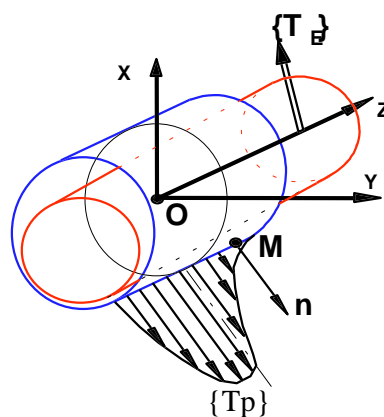


Figure 2. Palier mésaligné

Le comportement du moteur dépend du comportement élastique du vilebrequin et du comportement élastique du bloc moteur. Ces comportements sont calculés séparément mais ils doivent être pris en compte en même temps dans le déroulement du calcul EHD. Le comportement élastique du vilebrequin est connu par les quatre paramètres de déplacement de chacun de ses nœuds. Le comportement élastique du bloc moteur est connu par la mise en relation de la pression agissant en chaque nœud de la surface du coussinet de chaque palier avec les paramètres de déplacement de chacun de ces nœuds.

S'ajoute à la prise en compte du comportement élastique des éléments de la structure une condition qui traduit la compatibilité des déplacements d'un palier à l'autre. Ces déplacements combinent :

- le déplacement relatif des centres de deux tourillons successifs,
- le déplacement relatif des centres de deux paliers successifs,
- les vecteurs excentricités de ces deux paliers.

2.2. Equation de l'épaisseur du film lubrifiant

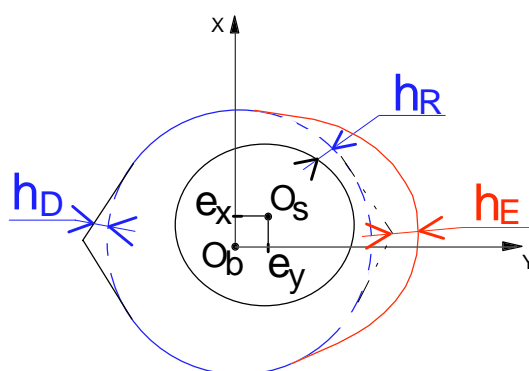


Figure 3. Position de l'arbre dans le palier réel déformé

Pour un palier réel compliant, en formulation EF, au nœud j , à l'angle θ_j et à l'ordonnée z_j sur la surface interne du coussinet, l'épaisseur du film se définit comme la somme d'une composante rigide et d'une composante élastique :

$$h_j(\theta_j, z_j) = h_R(\theta_j) + h_D(\theta_j, z_j) + h_E(\theta_j, z_j, p) \quad [1]$$

La composante rigide est la somme de :

- h_R : épaisseur nominale du film,
- h_D : épaisseur due à un éventuel défaut de forme du palier.

La composante élastique h_E est le déplacement radial élastique au nœud j résultant de la pression du film lubrifiant sur la surface du coussinet.

$$\{h_E(p)\} = [C][A]\{p\} \quad [2]$$

$[C]$: matrice de compliance de la surface du coussinet, (voir paragraphe 3-4)

$[A]$: matrice d'intégration sur le domaine qui dépend des fonctions de forme des éléments utilisés dans la formulation EF,

$\{p\}$: vecteur des pressions sur tous les nœuds de la surface du coussinet.

2.3. Prise en compte du mésalignement des paliers

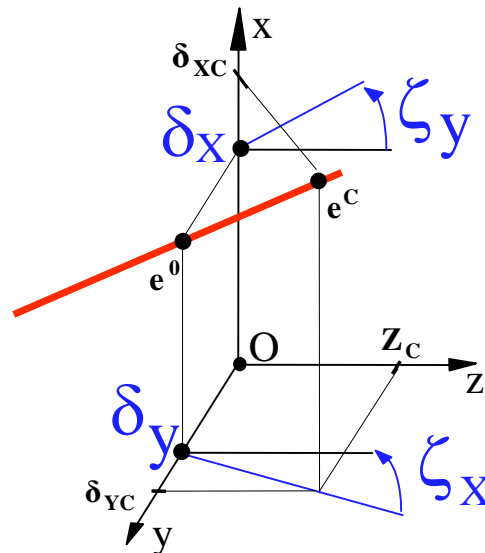


Figure 4. Définition de l'excentricité

Le vilebrequin et le bloc moteur étant élastiques, chaque tourillon peut être mésaligné dans le palier comme montré figure 2. Le champ de pression et l'épaisseur du film lubrifiant ne sont pas symétriques par rapport au plan $z = 0$. Pour décrire, dans le repère de référence (O, x, y, z) du palier, la ligne des centres du tourillon, désignée par $e^0 e^c$ sur la figure 4, les paramètres suivants sont définis :

- δ_x et δ_y : position de e^0 dans le repère de référence,
- ζ_x et ζ_y : angles nécessaires à l'orientation de la ligne des centres.

Ainsi, la position de chaque centre C, à la distance z_c du centre du palier est-elle donnée, dans l'hypothèse des petits angles, par les quatre composantes suivantes :

$$\begin{aligned}\delta_{xc} &= \delta_x + z_c \zeta_y \\ \delta_{yc} &= \delta_y + z_c \zeta_x \\ \zeta_{xc} &= \zeta_x \\ \zeta_{yc} &= \zeta_y\end{aligned}$$

3. Equations du système et discrétisation par la méthode des EF

Le problème dynamique est traité comme une suite d'états quasi statiques. Par suite, le diagramme de charge est discrétisé par pas de temps successifs. Un bon compromis entre la précision nécessaire et le temps de calcul détermine le pas de temps. Une étude comparative a montré qu'un pas de temps correspondant à une rotation de quatre ou cinq degrés allie précision et rapidité.

Pour chaque état, on écrit un ensemble de cinq équations :

- l'équation de Reynolds régissant le comportement hydrodynamique 2D du fluide lubrifiant, dans chacun des paliers,
- les équations d'équilibre du vilebrequin,
- les équations régissant le comportement élastique du vilebrequin,
- les équations régissant le comportement élastique du carter,
- les équations dues à l'hyperstaticité du mécanisme et traduisant la compatibilité des déplacements du centre d'un palier au centre du palier suivant.

3.1. Equation de Reynolds et conditions aux limites

3.1.1. Hypothèses et équation de Reynolds

Hypothèses. Le fluide lubrifiant est considéré newtonien, incompressible et isovisqueux. La pression est constante dans l'épaisseur ; aussi la distribution de pression est-elle décrite de façon bidimensionnelle. A l'instant t et en tout point M, de coordonnées θ et z , la pression satisfait l'équation :

$$\nabla \cdot (h^3 \nabla p) - 12\mu \left(\frac{R\omega}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) = 0$$

- h : épaisseur du film lubrifiant au temps t ,
- p : pression du film lubrifiant au temps t ,
- μ : viscosité du lubrifiant,
- θ : coordonnée angulaire sur le coussinet,

– ω : vitesse angulaire de l'arbre.

Conditions aux limites sur les bords du palier : pression = 0.

3.1.2. Description du phénomène de rupture du film lubrifiant

Dans les paliers étudiés, l'alimentation est non surabondante. Dans le palier classique, l'arbre, de par sa vitesse de rotation et les charges imposées, se trouve excentré. Le film lubrifiant présente alors une partie convergente où il est comprimé suivi d'une partie divergente où il est détendu. A la sortie de la partie divergente, le film se rompt et il apparaît une zone appelée zone de cavitation, terme consacré mais en fait impropre. Cette zone qui s'étend de la fin du divergent au début du convergent sera désignée, par la suite, zone inactive car le fluide n'y est pas sous pression par opposition à la zone où le fluide est sous pression qui sera désignée par zone active. Ces deux zones évoluent au cours du temps. Il est extrêmement important de les préciser, en particulier de déterminer leurs frontières, à chaque pas de temps car seule la partie du film sous pression satisfait l'équation de Reynolds.

3.1.3. Algorithme de Murty

Cet algorithme fut utilisé pour la première fois, en 1985, par Oh et Goenka [OH 85] dans la résolution complète de l'étude E.H.D. d'un palier de bielle. Sa caractéristique est de réaliser une partition du domaine étudié en deux zones : active et inactive, l'équation de Reynolds n'étant résolue que sur le domaine actif. L'avantage principal de cet algorithme est une réduction importante du rang des matrices intervenant dans la méthode des E.F. et par suite une réduction appréciable du temps de calcul, ces matrices étant à inverser plusieurs fois au cours du processus de convergence.

Le processus se réalise comme suit : Estimation d'une zone inactive Ω_0 . Pour tout point de cette zone, sa pression est imposée nulle.

Puis, les opérations suivantes sont enchaînées jusqu'à obtenir la stabilité de la zone inactive.

- résolution de l'équation de Reynolds $E(p) = 0$ dans la zone active Ω ,
- vérification de l'inéquation $E(p) < 0$ dans la zone inactive Ω_0 ; par suite, tout point ne vérifiant pas cette condition est placé dans Ω .
- tout point de Ω où $p < 0$ est placé dans Ω_0 et sa pression est mise à zéro.

3.1.4. Discrétisation de l'équation de Reynolds

Résoudre cette équation revient à annuler la forme intégrale :

$$E(\mu, h, t) = \int_{\Omega} \left[h^3 \nabla N^* \nabla p + 12\mu N \left(\frac{R\omega}{2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \right] d\Omega$$

où N désigne un ensemble de fonctions choisies à la fois comme fonctions de forme et comme fonctions d'interpolation. Cette forme intégrale, exprimée sous formulation faible, permet la discrétisation nécessaire à un calcul numérique. Le domaine d'intégration Ω est la partie active du domaine bidimensionnel du coussinet de palier. Ce domaine 2D est issu automatiquement de la discrétisation tridimensionnelle de la structure complète. Il est divisé en un nombre fini N_e d'éléments Ω_e de type Serendip, isoparamétriques à huit nœuds, à quatre côtés courbes. L'étude se faisant en coordonnées cartésiennes, le maillage utilisé est, en fait, celui du palier développé, comme le montre la figure 6.

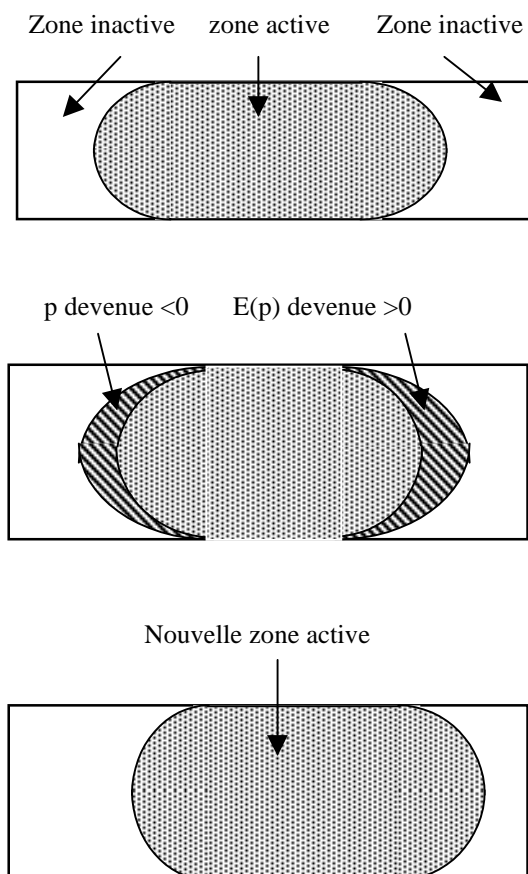


Figure 5. Partition du domaine en deux zones et évolution de ces deux zones

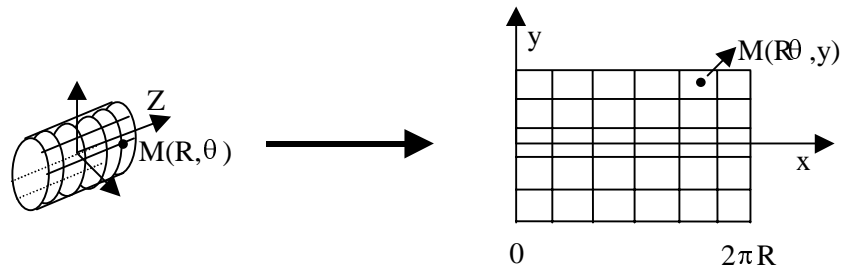


Figure 6. $M (R, \theta, z)$ du coussinet devient $M (x = R \theta , y = z)$ dans le palier développé

La fonctionnelle peut être évaluée sur chaque élément par une intégration numérique à quatre points de Gauss et après sommation sur l'ensemble des N_e éléments du domaine Ω , on obtient un système d'équations algébriques linéaires en pression.

Cette équation et les conditions aux limites associées peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\{E\} = [M]\{p\} + \{U\} = \{0\} \quad [3]$$

$\{E\}$ est le vecteur résidu des équations de Reynolds,

$[M]$ est la matrice globale du processus éléments finis,

$\{p\}$ est le vecteur pression en chaque nœud,

$\{U\}$ est le vecteur constitué du second membre des équations de Reynolds.

Quelques détails de la forme discrétisée de l'équation [3] sont donnés dans l'annexe 1.

3.2. Equation de l'équilibre statique du vilebrequin

L'écriture de cette équation, sous sa forme généralisée, est la suivante :

$$\{T_E\} + \{T_p\} = 0 \quad [4]$$

où $\{T_E\}$ désigne le torseur des actions extérieures et $\{T_p\}$ le torseur du champ de pression.

$$\{\mathbf{T}_E\} = (\vec{\mathbf{W}}_E, \vec{\mathbf{C}}_E) \text{ avec } \begin{cases} \vec{\mathbf{W}}_E = \sum_i \left(\vec{\mathbf{F}}_{bm} + \sum_{j=1}^6 \vec{\mathbf{F}}_{i_j} \right) \\ \vec{\mathbf{C}}_E = \sum_i \left(\vec{\mathbf{O}}_1 \vec{\mathbf{V}}_2 \wedge \vec{\mathbf{F}}_{bm} + \sum_{j=1}^6 \left(\vec{\mathbf{O}}_1 \vec{\mathbf{V}}_j \wedge \vec{\mathbf{F}}_{i_j} \right) \right) \end{cases}$$

$$\{\mathbf{T}_p\} = (\vec{\mathbf{W}}_p, \vec{\mathbf{C}}_p) \text{ avec } \begin{cases} \vec{\mathbf{W}}_p = \sum_i \int_S p \vec{\mathbf{n}} ds \\ \vec{\mathbf{C}}_p = \sum_i \int_S \vec{\mathbf{O}}M \wedge p \vec{\mathbf{n}} ds \end{cases}$$

Les paramètres de ces équations ont été définis paragraphe 2.1.

Ces équations sont discrétisées (voir annexe). L'intégration numérique du torseur $\{\mathbf{T}_p\}$ s'effectue, pour chaque palier, sur le domaine bidimensionnel du coussinet développé.

3.3. Equation du comportement élastique du vilebrequin

Hormis le nœud de référence, le vilebrequin est modélisé par 24 nœuds massiques rigides à 4 ddl (6 nœuds par cylindre) ; la matrice de compliance, notée $[S_v]$, est obtenue en calculant les déplacements de chaque nœud sous effort unitaire ; elle est de dimensions 97×97 . Les conditions aux limites imposées au vilebrequin sont les suivantes :

Pour le nœud de référence O_1 , centre du tourillon opposé au volant d'inertie on conserve un degré de liberté, à savoir la rotation possible autour de l'axe Oz . Ceci permet d'appliquer en cette extrémité un moment extérieur connu, celui des efforts des courroies de distribution, par exemple.

Le centre du tourillon du côté volant d'inertie a tous les degrés de liberté sauf un, à savoir la rotation autour de l'axe Oz , car cette extrémité subit la réaction du volant d'inertie a priori inconnue.

L'équation traduisant le comportement élastique du vilebrequin, sous sa forme généralisée, s'écrit :

$$\{q_v\} = [S_v] \{T_v\} \quad [5]$$

$\{q_v\}$: vecteur généralisé du déplacement en chaque nœud du vilebrequin,
 $[S_v]$: matrice de compliance du vilebrequin,

$\{T_v\}$: vecteur charge formé des composantes des charges en chacun de ses nœuds.

3.4. Equation du comportement élastique du bloc moteur

Le maillage du bloc moteur complet (figure 7) comporte 59 638 nœuds ayant chacun 3 ddl. Il est donc nécessaire de créer un modèle élastique utilisant un nombre réduit de nœuds, tout en maintenant une précision suffisante.

L'idée est de définir le déplacement total δ_{ji}^T du nœud j à la surface du palier i comme la somme du déplacement d'ensemble du palier i considéré rigide, calculé au centre O_i de ce palier, noté δ_{O_i} et d'un déplacement local δ_{ji} du nœud j de la surface élastique du palier i.

$$\delta_{ji}^T = \delta_{O_i} + \delta_{ji}$$

Ces deux déplacements sont calculés successivement.

Le premier δ_{O_i} est calculé en appliquant un effort unitaire en chaque centre de palier, les conditions aux limites (figure 7) étant imposées au bloc moteur, à savoir:

- les nœuds du joint de culasse ont été fixés,
- les paliers ont été remplis avec un matériau de raideur « infinie ».

L'ensemble de ces déplacements forme la matrice de compliance du bloc moteur notée : $[S_c]$, de dimensions 20*20 (5 centres O_i ayant chacun 4 ddl)

L'équation traduisant le comportement élastique du bloc moteur, sous la forme généralisée, s'écrit donc :

$$\{q_c\} = [S_c]\{T_c\} \quad [6]$$

$\{q_c\}$: vecteur généralisé du déplacement du centre de chaque palier,

$[S_c]$: matrice de compliance du bloc moteur,

$\{T_c\}$: vecteur des charges appliquées au centre de chaque palier.

Le second déplacement δ_{ji} est calculé en appliquant un effort unitaire en chaque nœud du maillage du coussinet, les conditions aux limites suivantes étant imposées au bloc moteur : nœuds du joint de culasse fixés et paliers vides. A ce dernier déplacement est soustrait le déplacement moyen des δ_{ji} puisqu'il est représenté par δ_{O_i} .

Ces déplacements forment la matrice de compliance notée C de chaque coussinet, de dimensions 410*410 (410 nœuds par coussinet ayant chacun 1 ddl, à savoir le

déplacement radial). C est la matrice utilisée dans le calcul de l'épaisseur élastique du film lubrifiant (paragraphe 2-2).

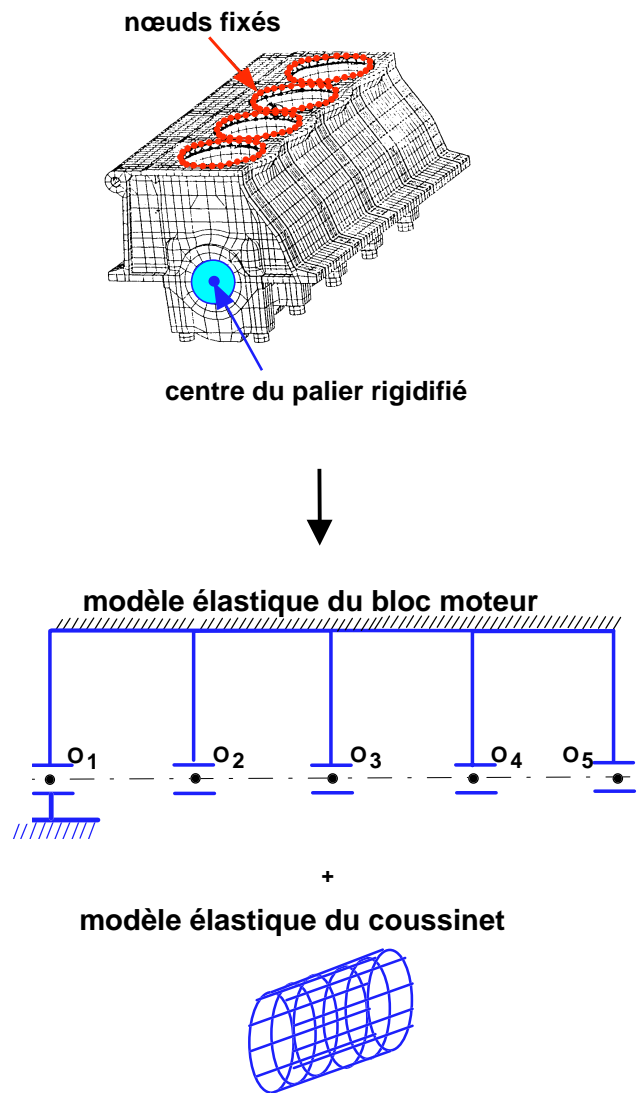


Figure 7. *Modèle élastique du bloc moteur*

Il peut être remarqué que le modèle du bloc moteur élastique étant le résultat de deux calculs faits avec le maillage complet 3D, la précision est assurée. De plus, ce modèle induit un gain de temps de calcul important.

3.5. Equation de compatibilité des déplacements

Soit les vecteurs :

- q_c : déplacement relatif du nœud O_2 du carter par rapport à O_1
- ε_1 et ε_2 : excentricité des paliers 1 et 2
- q_4 : déplacement du nœud V_4 du vilebrequin, dû à l'élasticité
- $dr(V_4)$: déplacement de V_4 dû à la rotation du corps rigide du vilebrequin.

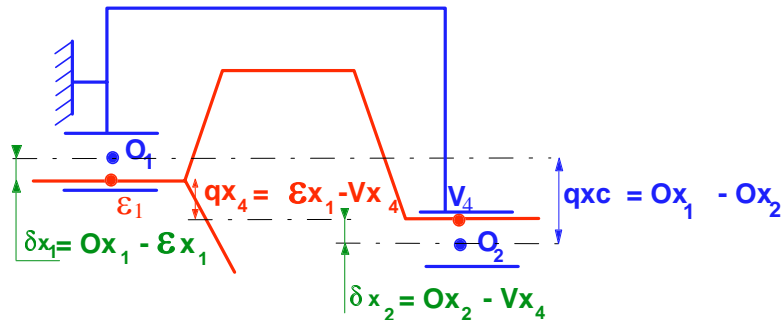


Figure 8. Les différents déplacements intervenant d'un palier au suivant

Les déplacements cumulés lors du parcours d'une boucle cinématique sont nuls. La boucle représentée figure 8 est constituée d'une part, du tronçon de vilebrequin entre deux paliers successifs et d'autre part, du tronçon du bloc moteur correspondant.

Ces vecteurs doivent vérifier l'équation de compatibilité suivante :

$$\{ q_c \} + \{ \varepsilon_2 \} - \{ q_4 \} - \{ \varepsilon_1 \} + \{ dr(V_4) \} = \{ 0 \} \quad [7]$$

4. Méthode de résolution

Toutes les équations évoquées précédemment auxquelles s'ajoute la détermination des zones actives et inactives ne peuvent être étudiées séparément car elles sont interdépendantes. Elles doivent être considérées en même temps et incluses dans un même algorithme général.

L'algorithme général utilisé est du même type que celui mis au point par Guines et Bonneau, [BON 95] dans la modélisation EHD d'un palier de tête de bielle.

Une boucle de Newton-Raphson, détaillée au paragraphe suivant et permettant de déterminer les inconnues du système, est insérée dans une boucle de Murty permettant de déterminer les zones actives et inactives, elle même insérée dans une boucle de chargement transformant le problème dynamique en une suite de problèmes quasi statiques.

4.1. Résolution par la méthode de Newton Raphson

La non-linéarité du problème EHD est traitée par la méthode de Newton Raphson. Elle est basée sur le développement en série de Taylor, à l'ordre un, de chaque équation.

Le système complet formé de n équations non linéaires s'écrit :

$$\{R\} + [J]\{\Delta\} = \{0\}$$

\{R\} : vecteur des résidus des équations du système,

[J] : matrice jacobienne,

\{\Delta\} est le vecteur inconnu à déterminer à chaque pas de temps.

4.2. Définition et organisation de la matrice jacobienne

Le calcul de la matrice jacobienne est au cœur du processus de Newton Raphson puisque cette matrice contient les dérivées partielles de toutes les équations du système par rapport à toutes les inconnues. Dans le cas de l'étude, à savoir un moteur en ligne à quatre cylindres, les dimensions de la matrice sont élevées :

$$\left(\sum_{i=1}^5 N_i + N_s \right) * \left(\sum_{i=1}^5 N_i + N_s \right)$$

avec N_i , nombre de nœuds par palier et N_s , nombre d'équations supplémentaires.

On appelle équations supplémentaires toutes les équations autres que celles issues de la résolution de l'équation de Reynolds. Pour les exemples présentés par la suite, on a $N_s = 136$ et $N_i = 410$. Si l'algorithme de Murty n'était pas utilisé, les dimensions de la matrice seraient : 2186*2186.

La structure de la matrice jacobienne comporte de nombreuses composantes nulles. Cette structure est mise à profit pour optimiser les temps de calcul. Le système linéaire est résolu par blocs, par l'intermédiaire de sous-matrices et le vecteur solution est reconstitué ensuite. De plus, la matrice étant à triangulariser

plusieurs fois à chaque pas de calcul et le temps CPU nécessaire à cette opération étant proportionnel à la largeur de bande de la matrice, ce traitement induit un gain de temps significatif. Enfin, pour une meilleure optimisation de la mémoire du calculateur, les sous-matrices sont rangées dans un vecteur colonne et sont repérées par des pointeurs de positionnement.

La structure de la matrice jacobienne est présentée pour un monocylindre puis généralisée à un moteur à n cylindres.

Soient E1 et E2, les équations de Reynolds, de type [3], discrétisées dans les paliers 1 et 2,

Eqv, l'équation d'équilibre statique, de type [4], du vilebrequin,

Ecomp, l'équation de compatibilité, de type [7], des déplacements entre les paliers 1 et 2,

Elv, l'équation du comportement élastique, de type [5], du vilebrequin,

Elc, l'équation du comportement élastique, de type [6], du bloc moteur,

p_{1j} , p_{2j} la pression au nœud j des paliers 1 et 2,

ε_1 , ε_2 l'expression généralisée des vecteurs excentricité des paliers 1 et 2,

q_v , l'expression généralisée du déplacement de chaque nœud du vilebrequin,

q_c , l'expression généralisée du déplacement relatif des paliers 1 et 2.

Le tableau ci-dessous indique

les différentes variables dont dépendent les équations. On peut en déduire la structure par blocs de la matrice jacobienne [J].

Variables → Equations ↓	p_{1j}	p_{2j}	ε_1	ε_2	q_v	q_c
E1	X	0	X	0	0	0
E2	0	X	0	X	0	0
Eqv	X	X	0	0	0	0
Ecomp	0	0	X	X	X	X
Elv	0	X	0	0	X	0
Elc	X	X	0	0	0	X

$$[J] = \begin{bmatrix} [A_{1,1}] & [0] & [0] & [A_{1,m}] \\ [0] & [A_{2,2}] & \dots & [0] \\ [0] & \dots & [A_{n,n}] & [A_{n,m}] \\ [A_{1,1}] & [A_{2,2}] & \dots & [A_{m,m}] \end{bmatrix} \quad [8]$$

avec :

$$[A_{k,k}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_k}{\partial p_{k,j}} \\ \frac{\partial E_s}{\partial p_{k,j}} \\ \frac{\partial E_{lv}}{\partial p_{k,j}} \\ \frac{\partial E_{lc}}{\partial p_{k,j}} \end{bmatrix} \quad [A_{k,m}] = \left[\frac{\partial E_k}{\partial \varepsilon_k} \right]$$

$$[A_{mm}] = \begin{bmatrix} [\partial \text{comp} / \partial \varepsilon_1] \dots \dots & [\partial \text{comp} / \partial \varepsilon_n] & [\partial \text{comp} / \partial qv] & [\partial \text{comp} / \partial qc] \\ [0] \dots \dots & [0] & [\partial E_{lv} / \partial qv] & [0] \\ [0] \dots \dots & [0] & [0] & [\partial E_{lc} / \partial qc] \end{bmatrix}$$

5. Applications du modèle à l'étude d'un moteur à quatre cylindres en ligne

Le code développé a été appliqué à l'analyse des paliers de vilebrequin d'un moteur à quatre cylindres en ligne et à huit masses d'équilibrage (figure 9).

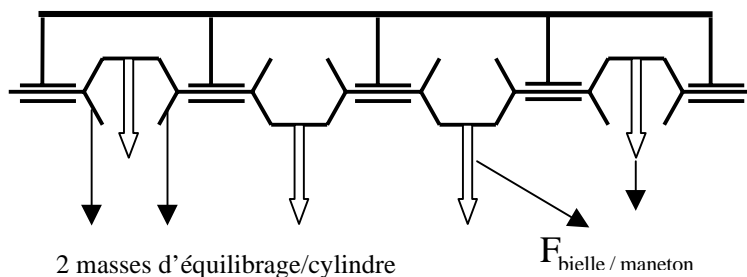


Figure 9. Schéma du vilebrequin à 4 cylindres en ligne

Sont pris en compte les défauts de forme des paliers, le mésalignement initial du vilebrequin et une alimentation en lubrifiant par des rainures circonférentielles sur le coussinet et des orifices débouchants à la surface des tourillons.

L'étude est réalisée pour deux vitesses de rotation : 2000 et 5500 rev/min.

Les conditions de fonctionnement sont précisées dans le tableau ci-dessous.

Vitesse de rotation (rev / min)	2000
Module d'Young du vilebrequin (Gpa)	210
Module d'Young du bloc moteur (Gpa)	210
Diamètre du tourillon (m)	$60 \cdot 10^{-3}$
Jeu radial- classe C (m)	$45 \cdot 10^{-6}$
Viscosité (Pa.s) prise à 80°	$6.58 \cdot 10^{-3}$

Les résultats obtenus avec ce modèle ont été comparés, d'une part aux résultats des mesures effectuées sur le moteur considéré et d'autre part, aux résultats obtenus par deux autres logiciels utilisés par le constructeur, ces logiciels faisant l'hypothèse plus restrictive de paliers circulaires et rigides. Il est à souligner qu'on peut accorder crédit aux résultats des mesures car l'instrumentation réalisée sur le moteur a été très satisfaisante assurant par exemple une très bonne répétabilité des mesures des épaisseurs du film lubrifiant à $\pm 1 \mu\text{m}$.

Les figures 10 et 11 montrent le très bon accord sur les épaisseurs de film, au niveau des deux capteurs, numérotés 10 et 12 dans le palier 3, entre les résultats expérimentaux et numériques donnés par le présent modèle et désignés par ACEVIM

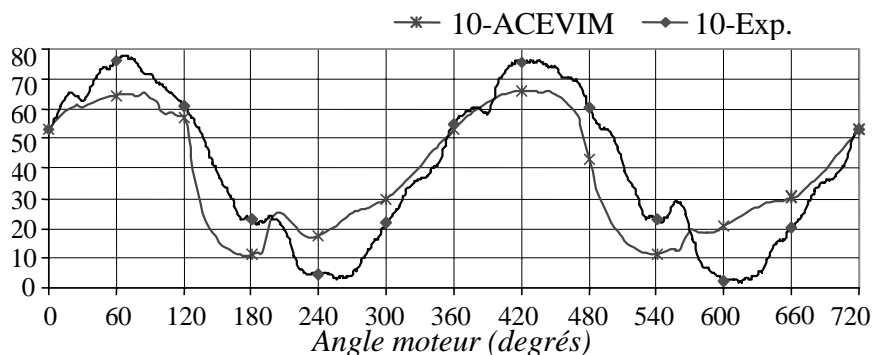


Figure 10. Epaisseur du film d'huile – capteur 10 - palier 3 - 5500 rev / min

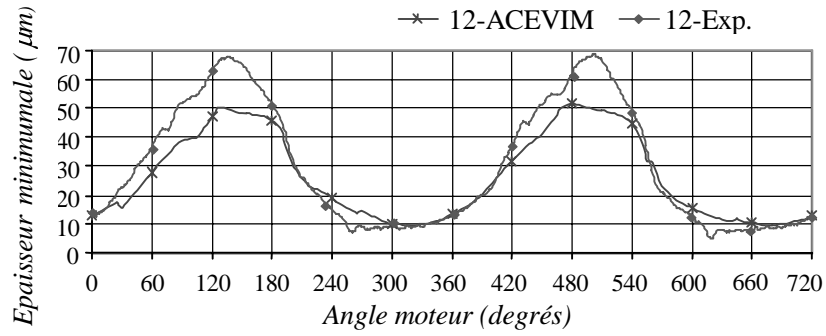


Figure 11. Epaisseur du film d'huile – capteur 12 - palier 3 - 5500 rev / min

De même, les figures 12 et 13 montrent le bon accord entre la trajectoire du centre de l'arbre mesurée dans le palier 3 et celle calculée par le code ACEVIM dans le même palier.

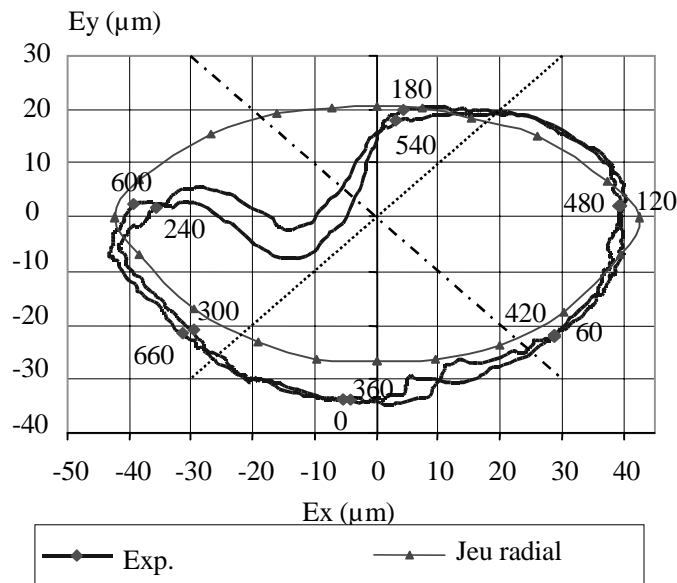


Figure 12. Trajectoire expérimentale du centre de l'arbre – palier 3

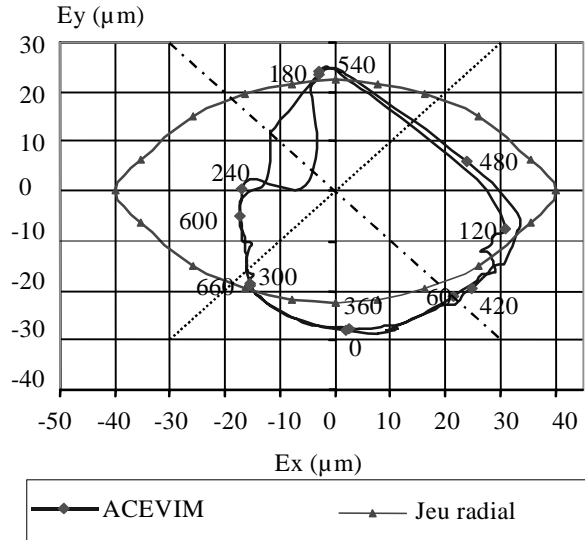


Figure 13. Trajectoire calculée du centre de l'arbre – palier 3 - 5500 rev / min

La figure 14 montre quatre résultats pour l'épaisseur du film lubrifiant dans le palier 3, au niveau du capteur 10 : le résultat expérimental et les trois résultats donnés par les trois logiciels : les deux utilisés par le constructeur ATTILA et ENGDYN et le code ACEVIM.

Les résultats obtenus à partir du présent modèle sont plus proches des résultats expérimentaux que ceux obtenus à partir des logiciels du constructeur, ce qui montre l'importance de la prise en compte de l'élasticité des structures et de la forme réelle des paliers.

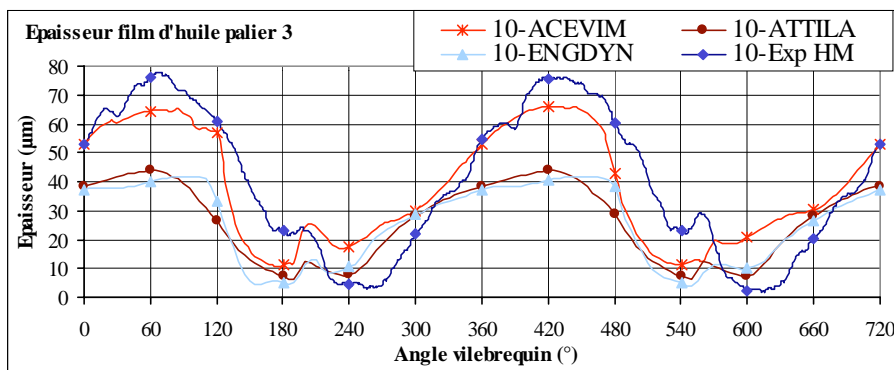


Figure 14. Epaisseur du film mesurée et calculée par 3 logiciels-palier 3

6. Conclusion

Le modèle numérique présenté permet l'analyse du comportement élastohydrodynamique de l'ensemble complet carter/vilebrequin d'un moteur à n cylindres en ligne. Il a été appliqué à un moteur réel à quatre cylindres. Ce modèle prend en compte simultanément les effets hydrodynamiques dans les cinq paliers, l'équilibre statique du vilebrequin, le comportement élastique de tous les éléments (vilebrequin, coussinets et bloc moteur), la compatibilité de tous les déplacements, les défauts de forme des coussinets, le mésalignement initial du vilebrequin, l'alimentation en lubrifiant par des rainures circonférentielles sur le coussinet et des orifices débouchants à la surface des tourillons. La prise en compte de tous ces paramètres réalise une description très fine du modèle. Le code développé sur ce modèle, essentiellement basé sur la méthode des E.F., associé à des algorithmes efficaces, a donné des résultats dont l'accord avec des mesures expérimentales est très satisfaisant. Le modèle permet ainsi une meilleure connaissance du comportement mécanique de toute la structure, des paliers et du vilebrequin en particulier, tant du point de vue de la lubrification que du point de vue du dimensionnement des structures. Il constitue une aide précieuse, dans la recherche de performance, pour les constructeurs de moteurs à combustion interne et de compresseurs à pistons.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier les sociétés Renault SA et Peugeot SA pour le soutien financier qu'elles ont apporté à cette étude.

7. Bibliographie

- [BON 99] BONNEAU D., CHOMAT A. M., GARNIER T., GREUTE C., « Influence of the engine block/crankshaft design on the 3D EHD lubrication of a four cylinder in line automotive engine », 10th World congress IFTOMM, Oulu, Finland, june 20-24, 1999, p. 2488-2495.
- [CHO 00] CHOMAT A. M., BONNEAU D. « Etude EHD des paliers de vilebrequin du moteur thermique à quatre cylindres en ligne XU10J4R ». Rapport final de l'Etude VV 23770758 17 Z10 de PSA Peugeot Citroën.
- [FAN 83] FANTINO B., PIERRE E., FRENE J., ROUSSEL G., DU PARQUET J., « Etude Theory and experiments on elastic connecting-rod bearings under steady-state conditions ». *Proceedings of the 9th Leeds-Lyon symposium on tribology*, p. 49-54
- [GAR 99] GARNIER T., BONNEAU D., GREUTE C., « Three dimensionnal EHD behavior of the engine block/crankshaft assembly for a four cylinder inline automotive engine ». *Transactions of the ASME, Journal of tribology*, Vol 121, 1999, p. 721-729.
- [HOD 74] HODGETTS, The vibrations of a crankshaft, PhD Thesis, Cranfield Institute of Technology, Bedford, G.B., 1974.

- [KNO 97] KNOLL G., SCHONEN R., WILHELM K., « Full dynamic analysis of crankshaft and engine block with special respect to elastohydrodynamic bearing coupling », *ASME/ICED, Spring Technical Conference, Fort Collins, CO, 1997.*
- [KUM 91] KUMAR A., BOOKER J.F., « A finite element cavitation algorithm », *ASME, Journal of tribology*, Vol 113, 1991, p. 276-286.
- [LOI 97] LOIBNEGGER B., RAINER G., BERHARD L., MICELLI D., TURINO G., « An integrated numerical tool for engine noise and vibrations simulation », *SAE Technical paper*, series 97, 1992.
- [MAS 89] MASPEYROT P., Comportement dynamique des paliers de vilebrequin. Influence des défauts de forme et des mésalignements, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 1989.
- [MCI 89] MCIVOR J.D.C., FENNER D.N., « Finite element analysis of dynamically loaded flexible journal bearings: a fast Newton-Raphson method », *ASME, Journal of tribology*, Vol 111, 1989, p. 597-604.
- [MOR 00] MOREAU H., Mesure des épaisseurs du film d'huile dans les paliers de moteur automobile et comparaisons avec les résultats théoriques, Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2000.
- [MUR 74] MURTY K., « Note on the bard type scheme for solving the complementarily problems », *Opsearch*, Vol 11, 1974, p. 123-130.
- [OH 84] OH K., « The numerical solution of dynamically loaded elastohydrodynamic contact as a non linear complementarity problem ». », *ASME, Journal of tribology*, Vol 106, 1984, p. 88-95.
- [OH 85] OH K., GOENKA P., « The elastohydrodynamic solution of journal bearings under dynamic loading », *ASME, Journal of tribology*, Vol 107, 1985, p. 389-395.

Annexe

Après discrétisation, l'expression du terme E_j de l'équation de Reynolds, est la suivante, pour le palier d'indice i_p et au pas de calcul i_k ($i_k > 1$)

$$E_j = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{PG} \sum_{i=1}^8 \frac{h^3}{\mu} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) P_i \Omega_{PG} - 6 \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{PG} N_j U_{ip} \frac{\partial h}{\partial x} \Omega_{PG}$$

$$- 12 \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{PG} N_j \frac{h(t) - h(t-1)}{\Delta t} \Omega_{PG}$$

En introduisant la dépendance de l'épaisseur par rapport à la pression, donnée par les relations [1] et [2], on en déduit l'expression d'un élément de la matrice jacobienne, tel $\frac{\partial E_j}{\partial p_i}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_j}{\partial p_i} &= \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{PG} \sum_{i=1}^8 \frac{h^3}{\mu} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) p_i \Omega_{PG} \\ &+ \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{PG} \sum_{k=1}^8 \frac{3h^2}{\mu} \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \frac{\partial h}{\partial p_i} p_k \Omega_{PG} \\ &- 6 \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{PG} N_j U_{ip} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial p_i} \Omega_{PG} - 12 \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{PG} \frac{N_j}{\Delta t} \frac{\partial h}{\partial p_i} \Omega_{PG} \end{aligned}$$

[A₁]

Après discrétisation, l'expression de la résultante des forces du torseur du champ de pression est :

$$\begin{aligned} W_{px} &= \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{PG} \sum_{i=1}^8 N_i p_i \cos \theta_m \Delta \Omega_{PG} \\ W_{py} &= \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{PG} \sum_{i=1}^8 N_i p_i \sin \theta_m \Delta \Omega_{PG} \end{aligned}$$

[A₂]

En utilisant les expressions [A₁] et [A₂], on peut exprimer différents éléments de la matrice jacobienne [8]

Nomenclature

dr(V₄) : déplacement du nœud V₄ dû à la rotation du corps rigide du vilebrequin,

h : épaisseur du film lubrifiant au temps t,

p : pression du film lubrifiant au temps t,

q₄ : déplacement du nœud V₄ du vilebrequin, dû à l'élasticité,

{q_C} : vecteur généralisé du déplacement du centre de chaque palier,

{q_V} : vecteur généralisé du déplacement en chaque nœud du vilebrequin,

[A] : matrice d'intégration sur le domaine étudié,

[C] : matrice de compliance du coussinet,

$\{E\}$: vecteur résidu des équations de Reynolds,
 $[J]$: matrice jacobienne,
 $[M]$: matrice globale du processus éléments finis,
 $\{R\}$: vecteur des résidus des équations du système,
 $[Sc]$: matrice de compliance du bloc moteur,
 $[Sv]$: matrice de compliance du vilebrequin,
 $\{T_C\}$: vecteur des charges appliquées au centre de chaque palier,
 $\{T_V\}$: vecteur charge en chacun des nœuds du vilebrequin,
 $\{U\}$: vecteur constitué des seconds membres des équations de Reynolds,
 δ_x et δ_y : position de la ligne des centres dans le repère de référence,
 ε_i : excentricité du palier i ,
 μ : viscosité du lubrifiant,
 θ : coordonnée angulaire d'un nœud du coussinet,
 ω : vitesse angulaire de l'arbre,
 ζ_x et ζ_y : angles nécessaires pour définir l'orientation de la ligne des centres,
 $\{\Delta\}$: vecteur inconnu à déterminer à chaque pas de temps.