
Approche par la MEF de la lubrification thermoélastohydrodynamique des paliers de tête de bielle

Dominique Souchet* — Stéphane Piffeteau**

**Laboratoire de Mécanique des Solides, UMR CNRS 6610
4, avenue de Varsovie
F-16021 Angoulême Cedex
dsouchet@iutang.univ-poitiers.fr*

*** Renault
Centre Technique de Rueil
67, rue des bons raisins
F-92508 Rueil Malmaison
Stéphane.piffeteau@renault.com*

RÉSUMÉ. L'étude de la lubrification de la liaison bielle-vilebrequin d'un moteur thermique nécessite la détermination de l'écoulement hydrodynamique du film d'huile ainsi que des déformations des structures, qu'elles soient d'origine élastiques ou bien thermiques. La prise en compte des déformées thermiques des solides passe par la résolution d'un problème thermique dont le domaine est constitué du film lubrifiant, de la bielle et de l'arbre. Ecrites en régime dynamique, l'équation de Reynolds généralisée, les équations d'équilibre de la charge, les équations de l'élasticité, l'équation de l'énergie et les équations de la chaleur permettent par leur résolutions simultanées de déterminer les différentes caractéristiques du film lubrifiant. Toutes ces équations sont discrétisées par la méthode des éléments finis. Le problème TEHD est scindé en deux sous-problèmes dont les non-linéarités des équations sont traitées par la méthode de Newton-Raphson.

ABSTRACT. The determination of the fluid film hydrodynamic flow and the knowledge of the thermal or elastic structure deformations are necessary to study the lubrication of the connecting-rod shaft link of a thermal engine. A thermal problem embedding the fluid, the shaft and the connecting-rod must be solved to calculate the solid thermal deformations. Taking into account the transient phenomena, the generalized Reynolds equation, the applied load balance equations, the elasticity equations, the energy equation and the heat equations allow the determination of the different film characteristics. All these equations are discretized by the finite element method. The TEHD problem can be separated into two coupled non-linear problems solved by the Newton-Raphson method.

MOTS-CLÉS : liaison bielle-vilebrequin lubrification thermoélastohydrodynamique, régime transitoire, chargement dynamique, déformation élastique de la bielle, dilatation des solides.

KEYWORDS: Connecting-rod big end bearing, thermoelastohydrodynamic lubrication, transient phenomena, dynamical loading, connecting-rod elastic-deformation, thermal expansion.

1. Introduction

Par opposition aux méthodes analytiques qui sont plus économiques en temps de calcul, la méthode des éléments finis présente l'avantage de permettre l'étude des structures à géométrie complexe telles que les paliers de tête de bielle. Les publications faites jusqu'à ce jour concernant le problème thermoélasto-hydrodynamique, noté par la suite TEHD, montrent que la méthode numérique la plus fréquemment retenue est la méthode des différences finies. La principale raison semble être la simplicité de mise en œuvre de la méthode des différences finies pour des maillages réguliers (comme ceux construits notamment par Khonsari et Wang [KHO 91], Yang et Rodkiewicz [YAN 96] ou Fillon *et al.* [FIL 97]). La méthode des éléments finis a toutefois été employée par Khonsari et Wang ainsi que par Fillon, Souchet et Frêne [FIL 90]. Ils ont combiné la méthode des éléments finis pour le calcul de structure et la méthode des différences finies pour la résolution des équations thermiques et de l'équation de Reynolds. Kim, Palazzolo et Gadangi [KIM 94] et Kucinski [KUC 98] ont, quant à eux, résolu toutes les équations à l'aide de la méthode des éléments finis. Ils emploient une technique de décentrement afin d'éliminer les instabilités numériques dues aux termes convectifs de l'équation de l'énergie. Cependant, l'emploi d'éléments finis linéaires associé à cette technique de décentrement peut altérer la précision des résultats.

Dès 1965, Zienkiewicz [ZIE 65] a montré l'intérêt que représente la méthode des éléments finis en l'utilisant sous forme intégrale. Deux techniques de résolution sont alors employées. La première, de type variationnel, est utilisée lorsqu'une grandeur physique doit être rendue extrémale, comme c'est notamment le cas pour tous les calculs de structure par éléments finis. Concernant les problèmes de lubrification, le théorème d'Helmutz établit que l'énergie totale de dissipation visqueuse doit être rendue minimale. Oh et Huebner [OH 73] appliquèrent cette méthode de résolution dans le cas d'un palier élastique de même que Goenka [GOE 84] dans le cas d'un palier rigide de longueur finie chargé dynamiquement. La seconde technique de résolution, de type projectif et appelée également méthode de Galerkin, est basée sur un théorème propre aux espaces de Hilbert. Cette approche, utilisée pour la première fois par Taylor et O'Callaghan [TAY 73], fut appliquée dans le cas d'un contact linéaire EHD. De nombreux problèmes ont par la suite été résolus par la méthode des éléments finis à l'aide de cette formulation. On peut notamment citer Oh et Goenka [OH 85] puis McIvor et Fenner [McI 89] dans le cas d'un palier élastique dynamiquement chargé, Absi [ABS 95] pour l'étude des paliers à rainures en chevrons ou encore Bonneau [BON 95] dans le cas de paliers de tête de bielle.

Comme le souligne Nicolas [NIC 72] lorsqu'il compare les résultats analytiques d'un problème hydrodynamique aux résultats obtenus à l'aide des méthodes numériques, la méthode des différences finies s'adapte bien aux domaines de géométrie simple. En revanche, un pas variable indispensable à la discrétisation de domaines complexes rend sa mise en œuvre compliquée. Que les éléments soient de taille constante ou variable, la méthode des éléments finis présente la même difficulté de programmation. L'avantage de la méthode des éléments finis réside

dans le fait qu'il est possible d'utiliser un maillage plus dense dans les zones de forts gradients de pression. De plus, Nicolas observe que les éléments quadratiques donnent une meilleure précision, ce qui s'explique par la forme parabolique de la courbe de pression. Enfin, la méthode des éléments finis est préférable à la méthode des différences finies car d'une part, les conditions aux limites sur les dérivées de pression deviennent implicites lorsqu'elles sont incluses dans la fonctionnelle et d'autre part, la formulation faible permet de traiter sans difficulté les problèmes de lubrification où le film possède des discontinuités d'épaisseur [BON 93].

Les équations de Fourier dans les solides sont moins complexes à résoudre que l'équation de l'énergie en raison de l'inexistence des termes convectifs dans ces équations. La simplicité de construction du maillage d'une structure de géométrie simple constitue encore le point fort de la méthode des différences finies. Cependant, la méthode des éléments finis reste efficace quelle que soit la complexité de la géométrie de la structure étudiée.

La résolution de l'équation de l'énergie introduit une difficulté supplémentaire résultant de la présence des termes convectifs. Ceux-ci introduisent des instabilités numériques d'autant plus grandes que les vitesses de transport sont élevées. Pour éliminer ces instabilités, Christie *et al.* [CHR 76] ainsi que Heinrich *et al.* [HEI 77] proposent des fonctions de pondération décentrées déduites des fonctions de forme. Kelly *et al.* [KEL 80] proposent une solution originale consistant à introduire des termes additionnels de dissipation dans l'équation de l'énergie.

En raison de la géométrie complexe des structures constituant les paliers de tête de bielle, la méthode des éléments finis associée à une approche de type projectif est donc retenue pour résoudre les équations du problème de lubrification thermoélasto-hydrodynamique de ce type de palier.

2. Hypothèses et équations générales

La résolution d'un problème thermoélastohydrodynamique exige l'obtention simultanée du champ de pression existant dans le film, du champ de température au sein de tous les éléments du système et des variations d'épaisseur de film engendrées par ces pressions et températures. Ces dernières sont d'ailleurs déterminées à l'aide des variations de l'excentration de l'arbre ainsi que des déformations thermiques et élastiques des solides.

Plusieurs équations doivent alors être résolues simultanément :

- Une équation hydrodynamique ou équation de Reynolds permettant de déterminer le comportement du fluide du point de vue des pressions.
- Des équations thermiques au sein du fluide mais également dans les solides au contact du film.
- Une équation géométrique définissant l'épaisseur du film de lubrifiant en considérant les déformations thermoélastiques des surfaces.

2.1. Equation de Reynolds

2.1.1. Hypothèses

L'équation généralisée de la mécanique des films minces visqueux est déduite de la mécanique des milieux continus et permet, compte tenu des conditions géométriques et cinématiques, de déterminer les caractéristiques d'un écoulement en film mince. Une forme particulière de cette équation est appelée l'équation de Reynolds généralisée ([DOW 62]). Le développement complet conduisant à l'équation de Reynolds généralisée a été traité de nombreuses fois [FRE 90]. Toutefois, il est important de rappeler les hypothèses restrictives qui ont permis d'établir l'équation généralisée de la mécanique des films minces visqueux :

- le fluide est newtonien,
- le milieu est continu,
- l'épaisseur h du film est faible devant son étendue,
- l'écoulement est laminaire,
- les forces de pesanteur et d'inertie sont négligeables,
- le fluide adhère parfaitement aux parois,
- la courbure des surfaces peut être négligée.

On suppose d'autre part que le fluide est incompressible. Enfin, afin d'obtenir une formulation simplifiée et numériquement raisonnable, la répartition de pression est supposée parabolique suivant la direction axiale du palier (Rohde et Li [ROH 80], figure 1).

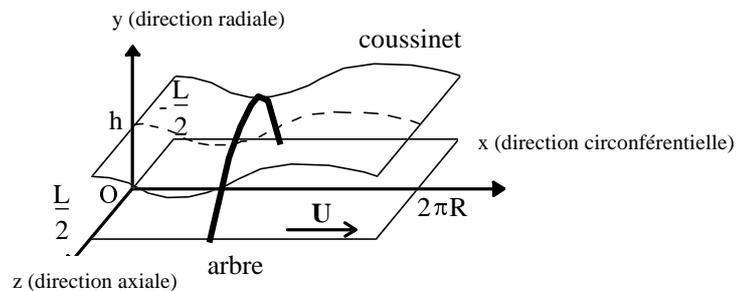


Figure 1. Palier développé

Cette dernière hypothèse est surtout vérifiée lorsque le rapport longueur sur diamètre du palier reste inférieur à l'unité. Elle constitue d'autre part un bon compromis entre rapidité du calcul et précision des résultats. La pression s'écrit donc :

$$p(x, z) = f(x) \left(1 - \left(\frac{2z}{L} \right)^2 \right) \text{ pour } -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}$$

où $f(x)$ représente la pression à déterminer dans le plan médian du palier.

2.1.2. Equations

Avec les hypothèses précédentes, l'équation de Reynolds généralisée se simplifie et s'écrit alors :

$$\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{8G}{L^2} p = U \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad [1]$$

Dans cette équation, f représente la pression hydrodynamique, h l'épaisseur du film fluide, L la largeur du palier et U la vitesse relative du coussinet par rapport à l'arbre. G est une fonction dépendant de la viscosité du fluide utilisé et est définie par :

$$G = J_2 - \frac{J_1^2}{J_0}, \quad F = \frac{J_1}{J_0} \quad \text{avec} \quad J_i = \int_0^h \frac{\xi^i}{\mu(\xi)} d\xi \quad \text{pour } i = 0 \text{ à } 2$$

Dans cette dernière équation μ représente la viscosité dynamique du lubrifiant.

2.1.3. Conditions aux limites

Le champ de pression, obtenu à partir de l'équation de Reynolds [1], satisfait les conditions aux limites dites de Reynolds à la sortie x_s de la zone sous pression.

$$f(x_s) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f(x_s)}{\partial x} = 0$$

Dans la zone dite inactive, la pression est supposée nulle. En revanche, dans la zone couvrant l'alimentation en fluide frais (orifice ou rainure), la pression est supposée constante.

2.2. Equations thermiques

2.2.1. Hypothèses

Dans le cas d'un fluide incompressible, le coefficient de dilatation calorimétrique est nul. De plus, on suppose le coefficient de conductibilité constant.

Afin de réduire les temps de calcul engendrés par la résolution du problème thermique et en raison de l'épaisseur réduite d'une bielle par rapport à ses autres

dimensions, la température est supposée constante suivant la direction axiale du palier. Dans la zone inactive du film, les phénomènes liés à la cavitation ne sont pas considérés : l'équation de l'énergie est résolue dans la totalité du film lubrifiant en supposant que le fluide occupe tout l'espace qui lui est donné.

La température du fluide d'alimentation est seulement imposée au niveau de l'interface entre le fluide et la paroi du solide dans lequel est localisée l'alimentation.

2.2.2. Equations

L'équation de l'énergie permet la détermination d'un champ de température au sein d'un écoulement. Dans le cadre de la mécanique des films minces visqueux, l'équation de l'énergie peut se simplifier considérablement, compte tenu du fait que l'épaisseur du film est très faible devant son étendue ; en particulier, les taux de cisaillement relatifs à x et z sont négligeables par rapport à ceux relatifs à y . Les étapes de ces simplifications ont déjà été évoquées [FRE 90] et ne sont pas rappelées ici. Avec les hypothèses précédemment citées, on obtient :

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \quad [2]$$

où u , v et w sont les composantes de la vitesse du fluide respectivement suivant les directions x , y et z . Dans cette équation, C_p est la chaleur spécifique, K le coefficient de conductibilité et ρ la masse volumique du fluide utilisé.

Le premier membre de cette équation correspond au flux de chaleur évacué par convection, le premier terme du second membre représente le flux de chaleur évacué par conduction et le second terme du second membre correspond à la dissipation visqueuse.

Afin de déterminer avec plus de précision les températures dans le film, il est indispensable d'associer à l'équation de l'énergie les équations de la chaleur dans les solides en contact avec le fluide. Ces équations, connues sous le nom d'équations de Fourier, peuvent s'écrire en particulier pour l'arbre :

$$\rho_a C_{pa} \frac{\partial T}{\partial t} = K_a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_a^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y_a^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z_a^2} \right) \quad [3]$$

où x_a , y_a , z_a sont les coordonnées suivant les axes x , y et z du repère lié à l'arbre ; ρ_a , C_{pa} , K_a sont respectivement la masse volumique, la capacité calorifique et la conductivité thermique du matériau. Une équation similaire est obtenue pour la bielle.

2.2.3. Conditions aux limites

L'arbre, percé en son centre, possède un conduit entre sa surface intérieure et sa surface extérieure. Ce conduit sert à l'alimentation du palier en fluide frais.

Une température constante est imposée au rayon intérieur de l'arbre ainsi qu'à l'intérieur du conduit d'alimentation, emmenant le fluide frais. D'autre part, une condition de continuité de flux de chaleur est vérifiée au niveau de l'interface film-arbre :

$$K_f \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_f = K_a \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_a$$

où n est la normale au film ou à l'arbre, K_f le coefficient de conductibilité du fluide et K_a la conductivité thermique de l'arbre. A l'interface entre la bielle et le film, la condition précédente est de même réalisée et s'écrit:

$$K_f \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_f = K_b \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_b$$

où n est la normale au film ou à la bielle et K_b la conductivité thermique de la bielle.

Entre la bielle et l'extérieur du domaine étudié, on peut considérer soit une température imposée constante, soit une condition de type adiabatique, ou bien une condition d'échange de chaleur, de type convectif, avec l'extérieur.

2.3. Equation géométrique de l'épaisseur de film

2.3.1. Hypothèses

Parmi les hypothèses liées à l'obtention de l'épaisseur du film, les effets de mésalignement de l'arbre à l'intérieur de la bielle ne sont pas considérés. De plus, on ne tient pas compte des défauts de forme et de fabrication, ces derniers résultant d'un défaut d'usinage ou d'une nécessité technologique. Enfin, en raison de la complexité du problème TEHD, on considère seulement l'effet bidimensionnel des déformations élastiques et thermiques (ou élastothermiques). Ainsi l'épaisseur de film est constante suivant la direction axiale du palier. D'autre part, on suppose que l'arbre ne se déforme pas sous l'effet de la pression hydrodynamique.

2.3.2. Equations

En prenant en compte les déformations thermiques résultant de la dilatation des solides ainsi que les déformations élastiques des surfaces, l'épaisseur totale de film fluide peut s'écrire, à un instant t donné par :

$$h(\theta, t) = h_0(\theta, t) + h_E(\theta, t) + h_{Tb}(\theta, t) - h_{Ta}(\theta, t)$$

Dans cette équation, h_E représente la composante élastique de l'épaisseur totale de film h . Cette épaisseur résulte des champs de pression hydrodynamique générés au cours du cycle moteur qui s'exercent sur la bielle.

Les composantes thermiques de l'épaisseur du film sont appelées h_{Ta} et h_{Tb} ; elles correspondent respectivement aux déformations de l'arbre et de la bielle sous l'effet de l'accroissement de la température.

h_0 représente l'épaisseur du film dans le cas rigide et est définie par :

$$h_0(\theta) = C(1 - \varepsilon_x \cos\theta - \varepsilon_y \sin\theta)$$

Dans cette équation,

$C = R_c - R_a$ est le jeu radial,

R_c et R_a sont respectivement les rayons du coussinet et de l'arbre,

ε_x et ε_y sont les excentricités relatives suivant les directions x et y ,

$\theta = x/R$ est la position angulaire d'un point M considéré, x étant la coordonnée du palier développé et R le rayon nominal du contact. L'angle de référence pour la mesure de l'angle θ correspondra par la suite à la ligne des centres « tête de bielle-pied de bielle » (figure 2).

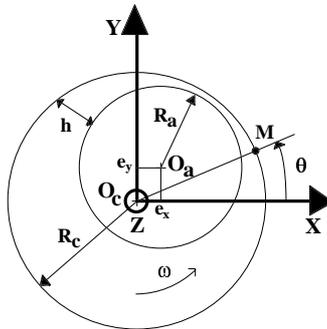


Figure 2. Palier circulaire rigide

2.4. Equations supplémentaires

2.4.1. Relation viscosité température

La viscosité dynamique définie précédemment est une fonction décroissante de la température. La loi de variation de la viscosité en fonction de la température utilisée est définie par :

$$\mu(T) = \mu_0 e^{-\beta(T-T_0)}$$

où μ est la viscosité dynamique à la température T , β le coefficient de thermoviscosité et μ_0 la viscosité dynamique à une température donnée T_0 .

2.4.2. Equation d'équilibre de la charge

Afin de résoudre le problème thermoélastohydrodynamique transitoire dans un palier de tête de bielle, le cycle de fonctionnement se décompose en une succession d'états quasi-statiques. A chaque instant, le système et chacun de ses différents composants vont alors être en équilibre. Les forces appliquées à un instant donné, sont :

- la force \vec{F}_p résultant du champ de pression hydrodynamique exercé dans le film,
- les autres forces \vec{F}_{ext} , comprenant les forces d'inertie de la bielle ainsi que les forces extérieures appliquées au niveau du pied de bielle (issues notamment des forces d'explosion exercées sur le piston).

La résultante de la totalité des forces appliquées sur la bielle doit s'annuler pour que l'équilibre existe. En négligeant la contrainte de cisaillement du fluide s'exerçant à l'interface du film avec le coussinet, la somme des forces se traduit par l'équation suivante :

$$\vec{F}_{ext} + \vec{F}_p = \vec{F}_{ext} + \int_S p \vec{n} ds = \vec{0}$$

où \vec{n} est la normale intérieure de la surface de la bielle. L'égalité précédente peut alors s'écrire :

$$\int_S p \cos \theta dS - F_x = 0 \quad \text{et} \quad \int_S p \sin \theta dS - F_y = 0 \quad [4]$$

où F_x et F_y sont les résultantes suivant x et y des forces extérieures définies par un diagramme de charge représentant l'action du vilebrequin sur la bielle.

3. Formulation éléments finis

Afin de s'affranchir de la difficulté que représente l'interdépendance de toutes les inconnues constituant le problème thermoélastohydrodynamique, le problème général est décomposé en trois sous-problèmes : un problème de lubrification, un problème thermique et un problème thermoélastique.

3.1. Formulation pour l'équation de Reynolds

3.1.1. Formulation intégrale

L'utilisation de la méthode des éléments finis nécessite la formulation intégrale de l'équation de Reynolds [1]. L'approche de Galerkin consiste à définir l'ensemble des fonctions $f(x)$ sur le domaine d'étude Γ qui satisfassent les conditions aux limites et telles que la fonctionnelle $E(f)$ soit nulle. Soit :

$$E(f) = \int_{\Gamma} \varphi \left[\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(G \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \left(8 \frac{f}{L^2} G + U \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) \right] dx = 0$$

où φ est une fonction continue.

Un choix judicieux de ces fonctions permet de réduire l'ordre de dérivation de la fonctionnelle si les fonctions φ s'annulent sur le contour Γ . En effet, une intégration par parties de la fonctionnelle permet de réduire à un l'ordre de dérivation. On est finalement ramené à résoudre l'équation suivante :

$$E(f) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{2}{3} G \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx - \int_{\Gamma} \varphi \left(8 \frac{f}{L^2} G + U \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) dx = 0$$

3.1.2. Discrétisation de l'équation

Le domaine unidimensionnel Γ est divisé en N éléments finis iso-paramétriques à trois nœuds. A chacun des éléments Γ_e de Γ sont associés deux points de Gauss. Par la suite, on note la valeur d'une fonction f calculée au point d'intégration de Gauss M d'un élément fini par :

$$f_M = \sum_{k=1}^{nt} \varphi_{Mk} f_k$$

f_k étant la valeur prise au nœud k de la fonction f , φ_{Mk} la fonction d'interpolation relative au nœud k évaluée en M et nt le nombre total de nœuds par élément.

L'intégrale $E(f)$ évaluée sur un élément Γ_e s'écrit :

$$E(\Gamma_e) = \sum_{M=1}^2 \sum_{j=1}^3 \left\{ -\frac{2}{3} G_M \frac{\partial \varphi_{Mj}}{\partial x} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi_{Mi}}{\partial x} f_i \right\} \Delta \Gamma_M - \sum_{M=1}^2 \sum_{j=1}^3 \varphi_{Mj} \left\{ 8 \frac{G_M}{L^2} \sum_{i=1}^3 \varphi_{Mi} f_i + U \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_M + \frac{\partial h(\theta, t)}{\partial t} \right\} \Delta \Gamma_M$$

où j représente les trois nœuds de l'élément Γ_e et M les deux points d'intégration de Gauss sur cet élément. G_M et $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M$ sont les valeurs aux points de Gauss de G et de $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$. Ces fonctions sont définies par (annexe) :

$$G_M = (J_2)_M - \frac{(J_1)_M^2}{(J_0)_M}$$

$$\text{et} \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M = \left[\frac{h_M}{\mu(h_M)} \frac{1}{(J_0)_M} - \frac{(J_1)_M}{(J_0)_M^2} \frac{1}{\mu(h_M)} \right] \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{(J_0)_M} \int_0^{h_M} \frac{\partial \mu(\xi)}{\partial x} \left(\xi - \frac{(J_1)_M}{(J_0)_M} \right) \frac{d\xi}{\mu^2(\xi)}$$

La sommation de toutes les contributions élémentaires $E(\Gamma_e)$ établies sur chacun des N éléments du domaine Γ constitue un système algébrique d'équations qui peut encore s'écrire sous forme matricielle :

$$\{E\} = [A]\{f\} + \{B\} = \{0\}$$

Dans cette égalité, $\{E\}$ et $\{f\}$ sont respectivement le vecteur résidu et le vecteur de la pression dans le plan médian du palier, $\{B\}$ constituant le vecteur second membre de l'équation de Reynolds.

Si on note N_e le nombre total de nœuds du domaine actif du film Γ , la matrice $[A]$ est de rang N_e et se compose des termes suivants :

$$A_{ji} = \sum_{\Gamma_e} \sum_{M=1}^2 \left\{ -\frac{2}{3} G_M \frac{\partial \varphi_{Mj}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{Mi}}{\partial x} - 8 \frac{G_M}{L^2} \varphi_{Mj} \varphi_{Mi} \right\} \Delta \Gamma_M$$

Le vecteur $\{B\}$ est quant à lui défini par :

$$B_j = - \sum_{\Gamma_e} \sum_{M=1}^2 \varphi_{Mj} \left\{ U \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_M + \frac{h_M(t) - h_M(t - \Delta t)}{\Delta t} \right\} \Delta \Gamma_M$$

L'évaluation des résidus de l'équation de Reynolds du système d'équations précédent présente un double avantage. Il permet d'une part de résoudre le problème hydrodynamique pour les nœuds du maillage situés dans la zone active du film.

D'autre part, l'évaluation de ces résidus permet de définir le signe de l'inéquation de Reynolds et est par la suite utilisée dans l'algorithme de Murty [MUR 74].

3.2. Formulation pour l'équation de l'énergie

3.2.1. Formulation intégrale

Les équations de l'énergie dans le film, de la chaleur dans l'arbre et dans la bielle sont discrétisées en employant la même approche que celle ayant permis la discrétisation de l'équation de Reynolds. Les températures sont supposées invariantes suivant la direction axiale du palier et toutes les équations thermiques sont alors formulées dans les domaines bidimensionnels Ω_f , Ω_a et Ω_b qui représentent respectivement les domaines du film, de l'arbre et de la bielle.

La fonctionnelle associée à l'équation de l'énergie s'écrit de manière générale :

$$ET_f(T) = \int_{\Omega_f} N_f \left\{ \rho C_p \frac{dT}{dt} - K \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} d\Omega_f$$

où N_f est une fonction continue. Dans cette expression, la dérivée totale de la température des particules fluides par rapport au temps s'exprime par :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{y}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial y}$$

Le dernier terme de cette relation résulte de la vitesse de déformation de l'épaisseur du film au cours du temps, ce qui entraîne la déformation du maillage éléments finis et donc le changement de la position du nœud sur lequel la dérivée est effectuée.

Une intégration par parties de ET_f permet d'écrire :

$$ET_f(T) = \int_{\Omega_f} K \frac{\partial N_f}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} d\Omega_f - K \int_{\Gamma_{fy}} N_f \frac{\partial T}{\partial y} n_y d\Gamma_{fy} \\ + \int_{\Omega_f} N_f \left\{ \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{y}{h} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} d\Omega_f$$

où Γ_{fy} constitue le contour séparant le fluide et les solides de normale n_y .

Suivant le même principe, les formes intégrales ET_a et ET_b correspondant aux équations de la chaleur dans l'arbre et dans la bielle s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 ET_a(T) = & \int_{\Omega_a} K_a \frac{\partial N_a}{\partial x_a} \frac{\partial T}{\partial x_a} d\Omega_a + \int_{\Omega_a} K_a \frac{\partial N_a}{\partial y_a} \frac{\partial T}{\partial y_a} d\Omega_a \\
 & + \int_{\Omega_a} N_a \left(\rho_a C_{pa} \frac{\partial T}{\partial t} \right) d\Omega_a - K_a \int_{\Gamma_{ax}} N_a \frac{\partial T}{\partial x_a} n_x d\Gamma_{ax} \\
 & - K_a \int_{\Gamma_{ay}} N_a \frac{\partial T}{\partial y_a} n_y d\Gamma_{ay}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 ET_b(T) = & \int_{\Omega_b} K_b \frac{\partial N_b}{\partial x_b} \frac{\partial T}{\partial x_b} d\Omega_b + \int_{\Omega_b} K_b \frac{\partial N_b}{\partial y_b} \frac{\partial T}{\partial y_b} d\Omega_b \\
 & + \int_{\Omega_b} N_b \left(\rho_b C_{pb} \frac{\partial T}{\partial t} \right) d\Omega_b - K_b \int_{\Gamma_{bx}} N_b \frac{\partial T}{\partial x_b} n_x d\Gamma_{bx} \\
 & - K_b \int_{\Gamma_{by}} N_b \frac{\partial T}{\partial y_b} n_y d\Gamma_{by}
 \end{aligned}$$

où Γ_{ax} , Γ_{ay} , Γ_{bx} et Γ_{by} sont les contours séparant l'arbre et la bielle du film ou de l'extérieur ; n_x et n_y représentent la normale à ces contours.

La relation précédente associée soit à une condition adiabatique, soit à une condition de température imposée aux frontières entre les solides et l'extérieur, constitue une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les intégrales disparaissent lorsque la sommation des trois fonctionnelles est effectuée. Toutefois, lorsqu'une condition d'échange de chaleur avec l'extérieur est imposée sur un contour, les intégrales curvilignes sur ce contour subsistent. L'équation à résoudre est donc

$$ET(T) = E_f(T) + E_a(T) + E_b(T) = 0$$

où $E_f(T)$, $E_a(T)$ et $E_b(T)$ sont les fonctionnelles issues respectivement de l'équation de l'énergie dans le film et des équations de la chaleur dans l'arbre et dans la bielle.

3.2.2. Discrétisation des équations thermiques

Les domaines Ω_f , Ω_a et Ω_b (du film, de l'arbre et de la bielle) sont partagés respectivement en n_f , n_a et n_b éléments finis iso-paramétriques à huit nœuds. A chacun des éléments Ω_{fe} de Ω_f sont associés 4 points d'intégration de Gauss.

Les termes convectifs de l'équation de l'énergie entraînent des instabilités numériques. Pour réduire ces instabilités, un terme supplémentaire dépendant de la taille des éléments et de la vitesse de l'écoulement est ajouté à l'équation de

l'énergie (KELLY *et al.* [KEL 80]). On notera que seul un terme de décentrement est ajouté suivant la direction circonférentielle : les rapports « hauteur sur longueur » de chaque élément et « vitesse d'écrasement sur vitesse circonférentielle » sont très faibles, ce qui rend inutile le décentrement suivant l'épaisseur du film.

L'évaluation numérique sur un élément Ω_{fe} de la fonctionnelle E_f s'écrit donc :

$$E_f(\Omega_{fe}) = \sum_{M=1}^4 \sum_{j=1}^8 \left\{ K \frac{\partial N_{Mj}}{\partial y} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial y} T_i + \alpha_M K \frac{\partial N_{Mj}}{\partial x} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial x} T_i \right. \\ \left. + \rho C_p N_{Mj} \left(u_M \frac{\partial N_{Mi}}{\partial x} T_i + \left(v_M - \frac{y_M}{h_M} \left(\frac{h_M^t - h_M^{(t-\Delta t)}}{\Delta t} \right) \right) \frac{\partial N_{Mi}}{\partial y} T_i \right) \right. \\ \left. + N_{Mj} \phi_M + \rho C_p N_{Mj} \left(\frac{T_M^t - T_M^{(t-\Delta t)}}{\Delta t} \right) \right\} \Delta \Omega_{jM}$$

où u_M , v_M et ϕ_M sont respectivement la composante circonférentielle de la vitesse, la composante d'écrasement de la vitesse et la dissipation visqueuse. Ces quantités sont définies au point d'intégration M de Gauss. Le coefficient α_M est défini par Kelly [KEL 80].

En raison des phénomènes thermiques transitoires dans les solides, il est nécessaire de pondérer les évolutions de température dans le temps [ZIE 77]. Les fonctionnelles E_a et E_b s'écrivent alors :

$$E_a(\Omega_{ae}) = \sum_{M=1}^{14} \sum_{j=1}^8 \left\{ K_a \left(\frac{\partial N_{Mj}}{\partial x_a} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial x_a} + \frac{\partial N_{Mj}}{\partial y_a} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial y_a} \right) \left(\frac{2T_i^t + T_i^{(t-\Delta t)}}{3} \right) \right\} \Delta \Omega_{aM} \\ + \sum_{M=1}^{14} \sum_{j=1}^8 \left\{ N_{Mj} \rho_a C_{pa} \left(\frac{T_M^t - T_M^{(t-\Delta t)}}{\Delta t} \right) \right\} \Delta \Omega_{aM}$$

et

$$E_b(\Omega_{be}) = \sum_{M=1}^{14} \sum_{j=1}^8 \left\{ K_b \left(\frac{\partial N_{Mj}}{\partial x_b} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial x_b} + \frac{\partial N_{Mj}}{\partial y_b} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial y_b} \right) \left(\frac{2T_i^t + T_i^{(t-\Delta t)}}{3} \right) \right\} \Delta \Omega_{bM} \\ + \sum_{M=1}^{14} \sum_{j=1}^8 \left\{ N_{Mj} \rho_b C_{pb} \left(\frac{T_M^t - T_M^{(t-\Delta t)}}{\Delta t} \right) \right\} \Delta \Omega_{bM}$$

Bien que l'arbre possède une vitesse de rotation, le maillage de l'arbre est fixé.

Le calcul des températures au pas de temps précédent s'opère en recherchant les coordonnées du point avant rotation.

Les fonctionnelles E_a , E_b et E_f établies sur chacun des éléments du domaine regroupant l'arbre, la bielle et le film sont ensuite additionnées. Cela conduit à un système algébrique d'équations qui peut encore s'écrire sous forme matricielle :

$$\{ET\} = [C]\{T\} + \{D\} = \{0\}$$

Dans cette égalité, $\{D\}$ représente le vecteur second membre des équations thermiques bidimensionnelles, $\{ET\}$ et $\{T\}$ étant respectivement les vecteurs résidus et de la température dans le plan médian du palier.

Si on note n_t le nombre total de nœud du domaine constitué par le film, l'arbre et la bielle, la matrice $[C]$ est de rang n_t et se compose des termes suivants :

$$\begin{aligned} C_{ji} = & \sum_{\Omega_f} \sum_{M=1}^4 \left\{ K \frac{\partial N_{Mj}}{\partial y} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial y} + \alpha_M K \frac{\partial N_{Mj}}{\partial x} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial x} \right. \\ & \left. \rho C_p N_{Mj} \left(u_M \frac{\partial N_{Mi}}{\partial x} + \left(v_M - \frac{y_M}{h_M} \left(\frac{h_M^t - h_M^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right) \right) \frac{\partial N_{Mi}}{\partial y} \right) + \frac{N_{Mi}}{\Delta t} \right\} \Delta \Omega_{fM} \\ & + \sum_{\Omega_a} \sum_{M=1}^{14} \left\{ \frac{2}{3} K_a \left(\frac{\partial N_{Mj}}{\partial x_a} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial x_a} + \frac{\partial N_{Mj}}{\partial y_a} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial y_a} \right) + \rho_a C_{pa} \frac{N_{Mj} N_{Mi}}{\Delta t} \right\} \Delta \Omega_{aM} \\ & + \sum_{\Omega_b} \sum_{M=1}^{14} \left\{ \frac{2}{3} K_b \left(\frac{\partial N_{Mj}}{\partial x_b} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial x_b} + \frac{\partial N_{Mj}}{\partial y_b} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial y_b} \right) + \rho_b C_{pb} \frac{N_{Mj} N_{Mi}}{\Delta t} \right\} \Delta \Omega_{bM} \end{aligned}$$

Le vecteur $\{D\}$ est déterminé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} D_j = & \sum_{\Omega_f} \sum_{M=1}^4 N_{Mj} \left\{ \phi_M - \rho C_p \frac{T_M^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right\} \Delta \Omega_{fM} \\ & + \sum_{\Omega_a} \sum_{M=1}^{14} \left\{ \frac{K_a}{3} \left(\frac{\partial N_{Mj}}{\partial x_a} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial x_a} + \frac{\partial N_{Mj}}{\partial y_a} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial y_a} \right) \frac{T_i^{t-\Delta t}}{\Delta t} - N_{Mj} \rho_a C_{pa} \frac{T_M^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right\} \Delta \Omega_{aM} \\ & + \sum_{\Omega_b} \sum_{M=1}^{14} \left\{ \frac{K_b}{3} \left(\frac{\partial N_{Mj}}{\partial x_b} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial x_b} + \frac{\partial N_{Mj}}{\partial y_b} \frac{\partial N_{Mi}}{\partial y_b} \right) \frac{T_i^{t-\Delta t}}{\Delta t} - N_{Mj} \rho_b C_{pb} \frac{T_M^{t-\Delta t}}{\Delta t} \right\} \Delta \Omega_{bM} \end{aligned}$$

3.3. Déformations thermoélastiques des structures

Afin de déterminer les déformées thermiques et élastiques de l'alésage au cours du cycle moteur, un calcul préliminaire de trois matrices (une matrice de compliance élastique et deux matrices de compliance thermique) doit être effectué. Chacune de ces déformées est définie par un calcul de structure basé sur la méthode des éléments

finis des déplacements. Cette méthode consiste à minimiser l'énergie potentielle totale de déformation et est utilisée par la suite avec l'hypothèse des contraintes planes [ZIE 77]. Les déplacements recherchés $\{\delta\}$ s'obtiennent par inversion de la matrice de rigidité globale $[K]$ de la structure :

$$\{\delta\}=[K]^{-1}\{F\}$$

où $\{F\}$ est un vecteur composé des forces résultant des déformées initiales de la structure ainsi que des forces surfaciques et volumiques.

3.3.1. Déformations élastiques sous l'effet du champ de pression

La composante élastique de l'équation de l'épaisseur de film est due aux pressions hydrodynamiques appliquées sur l'alésage, en supposant que l'arbre est rigide. Puisque les paliers de tête de bielle sont très compliants, chaque déplacement nodal dépend de toutes les forces agissant sur l'alésage. En utilisant des discrétisations par éléments finis, une matrice de compliance $[C_e]$ est calculée comme suit.

La bielle est maillée en deux dimensions avec des éléments isoparamétriques à huit nœuds. Le logement du palier est maillé en éléments linéiques à 3 nœuds. Ce maillage est constitué des côtés des éléments bidimensionnels qui sont localisés sur l'alésage. Il sera par la suite utilisé pour discrétiser l'équation de Reynolds et pour construire le maillage bidimensionnel du film. Ce dernier est constitué d'éléments iso-paramétriques à 8 nœuds.

Grâce au processus d'éléments finis, une force radiale unitaire est successivement appliquée à chaque nœud de l'alésage. La distorsion radiale sous cette charge unitaire donne une solution élémentaire, en supposant que la bielle est fixée à une certaine distance de l'alésage et en retranchant le déplacement moyen, dû à la flexion, de la distorsion de l'alésage. En utilisant une combinaison linéaire de toutes les solutions élémentaires, la composante élastique de l'épaisseur de film est donnée par la relation :

$$h_e^i = \sum_{k=1}^{mn} C_e(i,k) f_k$$

où la force appliquée f_k au nœud k est calculée par intégration du champ de pression. $C_e(i,k)$ est le déplacement radial au nœud i dû à une force unitaire au nœud k .

3.3.2. Déformations thermiques sous l'effet d'un champ de température

La modification de l'épaisseur du film due aux déformations thermiques a deux origines. La première est due à la déformation thermique de l'arbre et la seconde à la déformation thermique de la bielle.

Puisque les températures dans la direction axiale du palier sont supposées constantes, une analyse thermique bidimensionnelle des déformations utilisant la méthode des éléments finis peut être réalisée. Cette analyse fait intervenir les températures de tous les nœuds localisés sur la frontière de la bielle.

Les expressions de la dilatation thermique de la surface extérieure de l'arbre et intérieure de la bielle sont obtenues de la manière suivante :

– L'équation de Laplace, linéaire, est tout d'abord résolue afin d'obtenir des champs de température élémentaires. Pour ce faire, une température de 1°C est successivement appliquée en chacun des nœuds situés sur la frontière de la bielle (ou de l'arbre) tandis qu'une valeur de zéro est appliquée aux autres nœuds de la frontière.

– La distorsion radiale résultant de chacun des champs thermiques donne une solution élémentaire. Ainsi, en construisant une matrice de compliance thermique, la modification thermique de l'épaisseur de film est finalement donnée au nœud i par une combinaison linéaire de ces solutions :

$$h_i^i = h_{ib}^i - h_{ia}^i = \sum_{k=1}^{m_b} C_t^b(i,k)(T(k) - T_{ref}) - \sum_{k=1}^{m_a} C_t^a(i,k)(T(k) - T_{ref})$$

où $C_t^a(i,k)$ et $C_t^b(i,k)$ sont les matrices thermiques de l'arbre et de la bielle. T_{ref} est la température de référence *i.e.* la température à laquelle sont définies les dimensions des solides.

Cette procédure a déjà été appliquée par Khonsari et Wang [KHO 91] pour prendre en compte l'expansion thermique dans un palier complet en régime permanent. L'emploi de cette méthode suppose que tous les champs thermiques dans les solides sont stationnaires ou que les fluctuations de température au cours du temps entraînent des variations de déformation négligeables.

3.4. Discrétisation du temps

Le problème thermoélastohydrodynamique est résolu en considérant une succession de problèmes quasi-statiques. Le diagramme de charge évoqué précédemment est alors discrétisé en pas de temps dont l'incrément correspond à un angle de vilebrequin de quatre degrés. Ce pas de temps a été déterminé par Guines [GUI 94] afin de concilier rapidité et précision du calcul élastohydrodynamique.

Afin de résoudre le problème TEHD, ce pas de temps doit être également choisi de manière à optimiser le temps de calcul. Bien qu'il soit correctement choisi pour la résolution de l'équation de l'énergie dans le film lubrifiant, il n'en va pas de même

en ce qui concerne la résolution de l'équation de la chaleur dans les solides. En effet, les phénomènes transitoires dans ces derniers sont plusieurs centaines de fois plus lents que dans le film fluide. Toutefois, l'étude TEHD se plaçant dans le contexte de l'étude d'un cycle de fonctionnement établi (dont la durée du cycle est de quelques millisecondes), l'intervalle de temps considéré dans l'étude EHD est conservé. Un choix différent devrait être fait pour l'étude des problèmes de montée en régime d'un moteur pour lesquels la phase transitoire peut durer plusieurs minutes.

Les dérivées temporelles apparaissant dans l'équation de Reynolds généralisée et dans les équations thermiques sont déterminées par linéarisation au premier ordre à partir de la méthode d'Euler (différences finies décentrées à droite). Par exemple, l'expression de l'épaisseur de film est donnée de la manière suivante :

$$\frac{\partial h(\theta, t)}{\partial t} = -C\dot{\varepsilon}_x(t)\cos\theta - C\dot{\varepsilon}_y(t)\sin\theta + \dot{h}_E(\theta, t) + \dot{h}_{Tb}(\theta, t) - \dot{h}_{Ta}(\theta, t)$$

$$\text{avec } \dot{\varepsilon}_x(t) = \frac{\varepsilon_x^t - \varepsilon_x^{t-\Delta t}}{\Delta t}, \quad \dot{\varepsilon}_y(t) = \frac{\varepsilon_y^t - \varepsilon_y^{t-\Delta t}}{\Delta t},$$

$$\dot{h}_E(t) = \frac{h_E^t - h_E^{t-\Delta t}}{\Delta t},$$

$$\dot{h}_{Ta}(t) = \frac{h_{Ta}^t - h_{Ta}^{t-\Delta t}}{\Delta t} \text{ et } \dot{h}_{Tb}(t) = \frac{h_{Tb}^t - h_{Tb}^{t-\Delta t}}{\Delta t},$$

où Δt représente le pas de temps.

4. Mise en œuvre numérique

4.1. Méthode de résolution

Le système constitué par l'équation de Reynolds généralisée et les équations d'équilibre de la charge est fortement non linéaire par rapport aux inconnues que sont les pressions et les composantes de l'excentricité. De plus, ce système dépend de la variable temporelle. C'est pourquoi la méthode de Newton-Raphson, utilisant le développement en série de Taylor au premier ordre, est employée pour résoudre un tel système.

La même méthode est également employée pour résoudre les équations thermiques. En effet, les températures et les pressions sont étroitement liées dans le film lubrifiant via l'expression des vitesses ou des viscosités.

A un instant donné, les déterminations d'un champ de pression, d'une position relative de l'arbre par rapport au coussinet et d'un champ de température s'effectuent de la manière suivante :

– L'équation élastohydrodynamique de Reynolds généralisée et les équations d'équilibre de la charge sont tout d'abord résolues à l'aide de la méthode de Newton-Raphson pour un champ de température donné.

– A partir du champ de pression et du profil de film lubrifiant trouvés, la solution des équations thermiques est ensuite déterminée en utilisant de nouveau la méthode de Newton-Raphson. Bien que les équations de la chaleur dans les solides soient linéaires et que la méthode de Newton-Raphson nécessite le calcul d'une matrice jacobienne de toutes les équations thermiques, cette matrice n'est pas systématiquement recalculée et triangularisée à chaque itération, ce qui entraîne des réductions importantes des temps de calcul.

– Le passage d'un système d'équations à l'autre s'opère à l'aide de la méthode de substitution. Compte tenu des relations complexes liant les pressions, excentricités, déformées élastiques et thermiques et les températures, cette méthode, permettant de construire le vecteur inconnu à partir du vecteur précédent par une relation de récurrence, converge assez rapidement si l'on part d'un état proche de la solution à atteindre.

4.2. Algorithme général

Le système à résoudre formé par les équations 1 à 4 peut être décomposé en quatre sous-problèmes. Le premier est un problème élastohydrodynamique : son objectif est de trouver la solution constituée des pressions dans le film, de l'excentricité et de la forme du film de telle sorte que la somme des efforts appliqués sur la bielle s'annule. Le problème thermique constitue le second : un champ de température dans les domaines fluides ou solides doit être trouvé de telle sorte que les conditions aux limites des domaines en question soient toutes vérifiées. Le but du troisième sous-problème est de trouver la déformée d'un alésage créée par le champ de température. La résolution d'un problème de rupture du film constitue le dernier : il s'agit de définir la partie active du domaine dans laquelle se crée un film d'huile continu entre les deux surfaces et pour laquelle les conditions aux limites sur les frontières de ce domaine soient vérifiées.

Chacun de ces problèmes nécessite l'élaboration d'un algorithme particulier. Cependant, la résolution d'un problème TEHD implique l'interdépendance des quatre sous-problèmes, d'où la nécessité d'établir un algorithme général. Cet algorithme peut être résumé de la manière suivante :

Lecture des données

Initialisation du problème

Faire pour chaque pas de temps défini

Faire jusqu'à ce que la zone de rupture du film devienne stable

Faire tant que les pressions, excentricités et températures varient

Calculer un champ de vitesse

Calculer un nouveau champ de température

Calculer un nouveau champ de viscosité
Calculer un nouveau champ de pression, une nouvelle
position de l'arbre
Calculer un nouveau profil élasto-thermique d'alésage

Fin

Modification de la zone de rupture du film

Fin

Fin

Ecriture des résultats

Fin

L'algorithme donné ci-dessus s'est avéré être le plus efficace, compte tenu de l'interdépendance des diverses inconnues.

4.3. Optimisation du logiciel

A notre connaissance, aucun programme de calcul d'un palier de tête de bielle soumis à des charges dynamiques et prenant en compte les déformées thermoélastiques des solides n'existait avant cette étude. Ceci nous a conduit à valider le programme établi de deux manières différentes :

– Les résultats du problème élastohydrodynamique en régime transitoire isotherme sont comparés avec ceux obtenus par Goenka [GOE 84] et par Guines [GUI 94] pour une structure tridimensionnelle.

– Pour le modèle thermoélastohydrodynamique, une comparaison est effectuée entre les résultats expérimentaux obtenus par Mitsui [MIT 87] dans le cas d'un coussinet fonctionnant sous une charge constante [PIF 00].

Le programme de calcul élaboré sera dans la suite désigné sous l'acronyme ATSCCEL (Analyse Thermique Simplifiée des Contacts Elastiques Lubrifiés).

4.3.1. Optimisation du logiciel et temps de calcul

Les calculs ont été réalisés sur une station Alpha DEC.AXP 3000_600 avec un pas de temps correspondant à 4° d'angle de vilebrequin. Les 30 cycles de fonctionnement demandés sont achevés en 15 heures de calcul.

Le temps de calcul important limite les tests de précision d'un tel logiciel. En effet, on ne peut accroître le nombre d'éléments dans le film suivant la direction circonférentielle sans le faire également dans les solides en raison de la correspondance des nœuds au niveau des interfaces entre le fluide et les solides. De même, ce nombre d'éléments ne peut être réduit car les champs de pression et d'épaisseur seraient alors trop imprécis. Par ailleurs, les éléments dans les solides, dont le nombre ne peut être augmenté ou réduit sans tenir compte du film, doivent comporter des dimensions du même ordre de grandeur dans les deux directions.

Toutefois, on peut comparer l'effet de la densité du maillage du film sur les températures obtenues. Suivant que l'on dispose d'un maillage avec 3, 6 ou 10 éléments suivant l'épaisseur du film, les températures maximales dans le film sont plus ou moins précises (tableau 1). Le maillage à 3 éléments suivant l'épaisseur du film conduit à une température maximale légèrement plus faible que pour les autres maillages en raison du manque de nœuds suivant l'épaisseur du film. Alors que le test de convergence sur les températures est du centième de degré lors de la résolution des équations thermiques, la température maximale obtenue à la fin du trentième cycle moteur est plus élevée de trois dixièmes de degré pour un maillage à 6 éléments par rapport à la valeur obtenue pour un maillage à 3 éléments. Puisqu'une différence de seulement un millième de degré est observée entre les maillages du film à 6 et 10 éléments suivant l'épaisseur, le maillage du film à 6 éléments suivant l'épaisseur semble donc le plus adapté. La précision obtenue sur la température maximale est cependant toute relative en raison des nombreuses hypothèses simplificatrices retenues pour résoudre le problème.

Nombre d'éléments suivant l'épaisseur de film	Température maximale dans le film à 0° d'angle de Vilebrequin
3	101.235 °C
6	101.268 °C
10	101.269 °C

Tableau 1. Effet de la densité du maillage sur la température maximale

4.3.2. Influence de l'aspect tridimensionnel

Le tableau 2 fournit les principales données géométriques de la liaison bielle-vilebrequin étudiée ainsi que les caractéristiques du lubrifiant et du matériau pour une bielle du constructeur General Motors qui a servi de référence pour les travaux de Goenka et Guines.

Largeur du coussinet	21.6 mm
Longueur du bras de bielle	145 mm
Longueur de la manivelle	38.06 mm
Rayon intérieur de la bielle sans déformation	27 mm
Jeu radial	27 μ m
Fréquence de rotation du vilebrequin	2000 tr/mn
Viscosité du lubrifiant (à 110°C)	6.89 mPa.s
Module d'Young du matériau constituant la bielle	213 GPa
Coefficient de Poisson du matériau constituant la bielle	0.3

Tableau 2. Principales conditions de fonctionnement de la bielle General Motors

Le diagramme de charge donné sur la figure 3 montre l'influence que peuvent avoir les effets d'inertie par rapport aux effets de compression et d'explosion des gaz : les premiers sont d'autant plus importants que la vitesse de rotation du vilebrequin est élevée. De plus, les cycles moteurs débutent par la phase correspondant à l'explosion-détente, avant de se poursuivre par les phases d'échappement, d'admission et de compression.

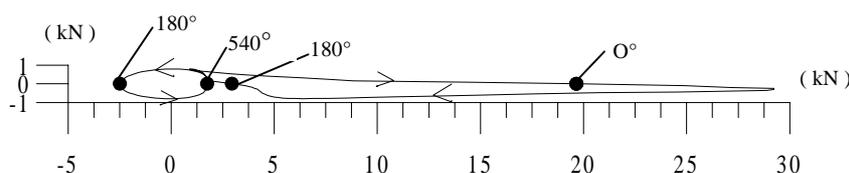


Figure 3. Diagramme de charge pour un cycle de fonctionnement à 2000 tr/mn

Le logiciel ATSCCEL est pour cette partie considéré avec des hypothèses de régime isotherme et les résultats sont comparés à ceux obtenus par Guines et Goenka. Les hypothèses communes à cette comparaison sont :

- la méthode de résolution de Newton-Raphson,
- l'emploi de la méthode des éléments finis,
- l'algorithme de Murty pour traiter la zone de rupture du film,
- un palier de longueur finie.

La différence fondamentale repose sur le fait que la répartition de pression axiale est supposée parabolique dans la présente analyse. Calculées dans le plan médian du palier dans la présente étude, les pressions sont déterminées par Goenka ou Guines sur la totalité du domaine du palier développé où règne un champ de pression. De plus, ces derniers emploient l'hypothèse des déformations tridimensionnelles alors que dans le cas présent, seule l'hypothèse des déformations bidimensionnelles peut être retenue.

Malgré ces hypothèses différentes, la comparaison faite va permettre d'établir la précision d'un programme de calcul considérant les déformations bidimensionnelles des surfaces. Les différents paramètres des maillages utilisés par Goenka, Guines et dans Atscel pour discrétiser l'équation de Reynolds sont donnés dans le tableau 3. Afin de déterminer les déformées élastiques des surfaces introduites dans Atscel, un maillage bidimensionnel présenté figure 4 est réalisé à partir de la bielle General Motors. Ce maillage comporte 322 éléments isoparamétriques à 8 nœuds, soit 1 098 nœuds. Les tons blancs, gris clairs et gris foncés observés au sein du maillage correspondent respectivement à des demi-épaisseurs de bielle de 1,25 mm, 8,7 mm et 10,8 mm. Ces différents niveaux d'épaisseur permettent la prise en compte de la géométrie tridimensionnelle de la bielle dans la matrice de compliance, bien que les

déformations élastiques de l'alésage obtenues correspondent seulement au plan médian du palier.

	GOENKA	GUINES	ATSCEL
Type d'éléments utilisés	Eléments triangulaires à 3 nœuds	Eléments Iso-paramétriques à 8 nœuds	Eléments curvilignes à 3 nœuds
Nombre total De nœuds	288 sur un demi-alésage	487 sur un demi-alésage	97 sur le plan médian
Nombre total d'éléments	240	140	48

Tableau 3. Maillages éléments finis du domaine du palier développé

La figure 5.a présente les évolutions des pressions au cours d'un cycle moteur à 2000 tr/mn. Les deux courbes ont la même allure : c'est au moment de l'explosion qu'une forte augmentation de la pression maximale est relevée. Les pics des maxima de pression sont de 91,8 MPa pour Goenka et de 114 MPa avec ATSCEL.

Les évolutions des épaisseurs minimales de film sont semblables même si les épaisseurs minimales obtenues par ATSCEL (figure 5.b) sont souvent nettement supérieures (de près de 1 μm à 180° et de 2 μm à 480°) à celles obtenues par Guines et Goenka. Cependant le minimum d'épaisseur de film est quasi-identique et se situe au même endroit.

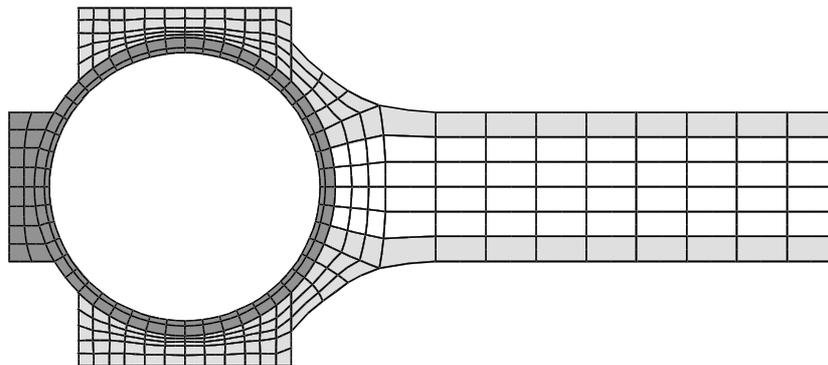


Figure 4. Maillage éléments finis de la bielle General Motors

Les résultats donnés par Guines traduisent les effets de l'élasticité de la structure suivant la largeur du palier. Le calcul tridimensionnel fait apparaître des pincements

du film en général localisés sur les cotés du palier. Le modèle utilisé pour cette étude ne donne qu'une épaisseur moyennée sur la largeur du palier et ne peut pas rendre compte de ces phénomènes. C'est la raison pour laquelle l'épaisseur minimale de film est surévaluée par ATSCCEL.

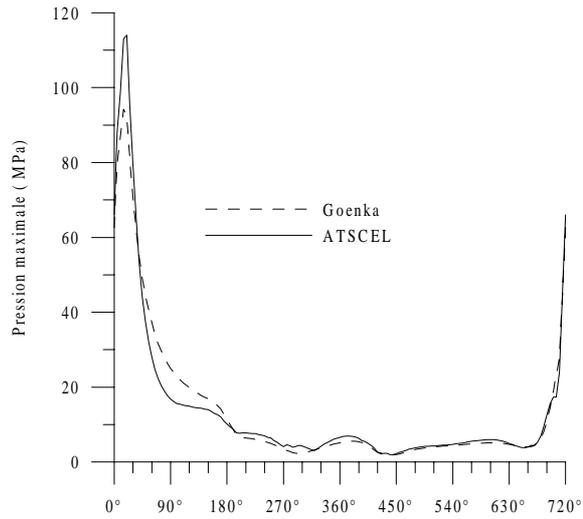


Figure 5.a. Evolution des pressions maximales au cours du cycle moteur

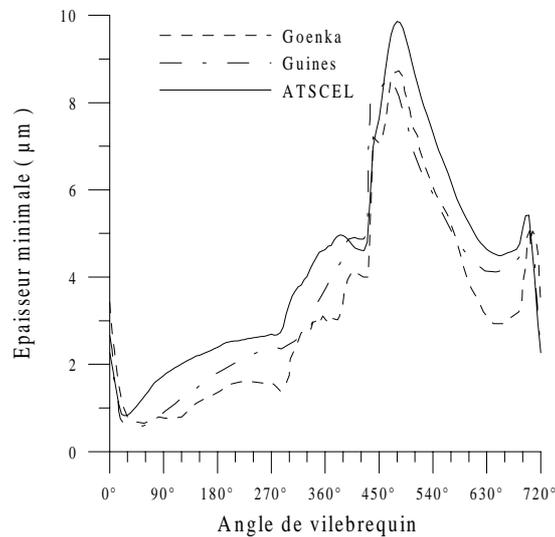


Figure 5.b. Evolution des épaisseurs minimales au cours du cycle moteur

Cette étude comparative montre que l'hypothèse des déformations bidimensionnelles des surfaces alliée à la résolution unidimensionnelle de l'équation de Reynolds permet de mettre en évidence les situations critiques de fonctionnement et notamment les épaisseurs minimales de film. Cependant, le logiciel ATSCCEL est dix fois plus rapide que celui développé par Guines d'où un gain de temps de calcul considérable. Ces simplifications s'avèrent indispensables dans un premier temps pour incorporer les déformations thermoélastiques des structures. En effet, les phénomènes thermiques introduits font accroître de manière significative les temps de calcul.

4.3.3. Influence des effets thermiques locaux

Deux cas sont présentés afin de montrer l'influence des effets thermiques locaux :

- Cas A : l'arbre (ou maneton) est à une température constante de 90°C.
- Cas B : la surface interne du maneton est à une température constante et égale à 90°C ainsi que suivant un conduit d'alimentation au travers de l'épaisseur de l'arbre.

Par ailleurs, on impose sur la frontière extérieure de la bielle une température constante et égale à la température d'alimentation. Les conditions de fonctionnement sont présentées dans le tableau 4-a. L'arbre est supposé en acier tandis que la bielle est en fonte. Les caractéristiques de l'huile sont reportées dans le tableau 4-b.

Température de référence	T_{ref}	20	°C
Rayon intérieur du maneton	R_i	13.75	mm
Rayon extérieur du maneton	R_a	25.25	mm
Largeur du palier	L	18.8	mm
Jeu radial du palier	C	30	µm
Longueur du bras de vilebrequin	l_v	43	mm
Longueur de la bielle	l_b	132	mm
Fréquence de rotation	N	6500	tr/min

Tableau 4.a. Caractéristiques géométriques du palier étudié

Température de référence	T_0	90	°C
Viscosité de référence	μ_0	2.5	mPa.s
Coefficient de thermoviscosité	β	0.0346	°C ⁻¹
Masse volumique du lubrifiant	ρ	840	kg.m ⁻³
Conductivité thermique du lubrifiant	k	0.125	W.m ⁻¹ .°C ⁻¹
Chaleur spécifique du lubrifiant	C_p	2300	J.kg ⁻¹ .°C ⁻¹

Tableau 4.b. Caractéristiques du lubrifiant

Le diagramme de charge à 6500 tr/mn et les maillages du maneton, de la bielle et du film sont donnés figure 6. On considère une bielle artificiellement coupée à 60mm du centre de l'alésage, une condition aux limites thermiques de type adiabatique étant appliquée au niveau de cette coupure.

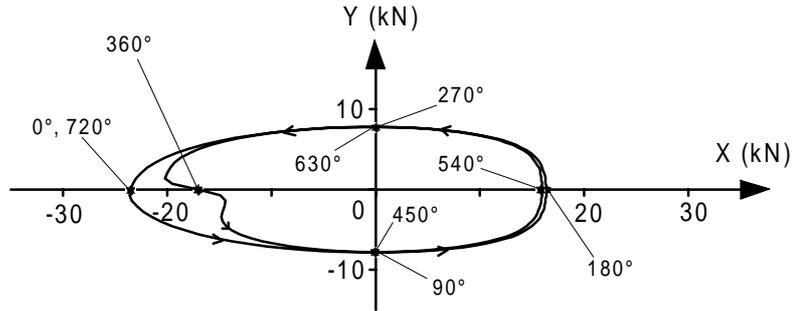


Figure 6.a. Diagramme de charges pour un moteur à essence fonctionnant à 6500 tr/mn

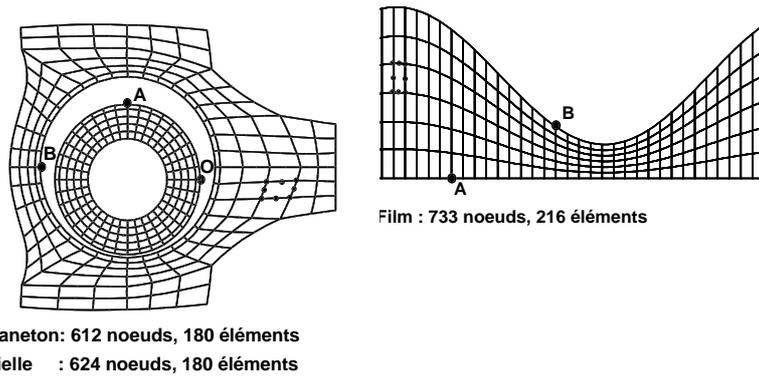


Figure 6.b. Maillages du maneton, de la bielle et du film d'huile

Les figures 7 et 8 représentent respectivement pour les cas A et B l'évolution au cours du cycle moteur des températures maximales dans le fluide, dans le maneton et dans la bielle. C'est au sein du fluide que la température est maximale. Pour certains angles moteur, les courbes correspondant à l'évolution de la température maximale dans le film et dans la bielle sont confondues et la température maximale est alors localisée au niveau de l'interface entre la bielle et le fluide.

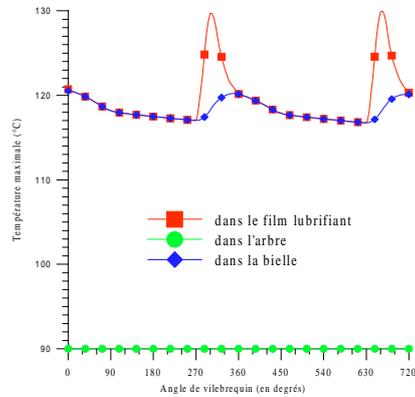


Figure 7. Evolution au cours du cycle moteur des températures maximales dans le film, l'arbre et la bielle (Cas A)

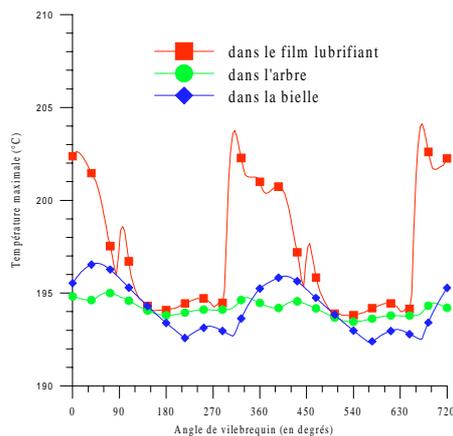


Figure 8. Evolution au cours du cycle moteur des températures maximales dans le film, l'arbre et la bielle (Cas B)

Les variations de la température maximale dans le maneton (figure 8) sont bien inférieures à celles dans la bielle et surtout dans le film : elles restent inférieures à 1°C pendant toute la durée d'un cycle moteur.

Comparant les deux hypothèses faites au niveau de la température dans le maneton, on observe des températures maximales (de l'ordre de 195°C) très élevées pour le deuxième cas. Les températures maximales y sont effectivement plus élevées d'environ 80°C pour la bielle et le film et d'environ 110°C pour le maneton. L'hypothèse d'une température constante dans le maneton et égale à la température d'alimentation est en fait irréaliste dans le cas du palier de tête de bielle. Comme

pour le cas A, le point de température maximale se situe toujours dans le film ou à l'interface entre le film et la bielle.

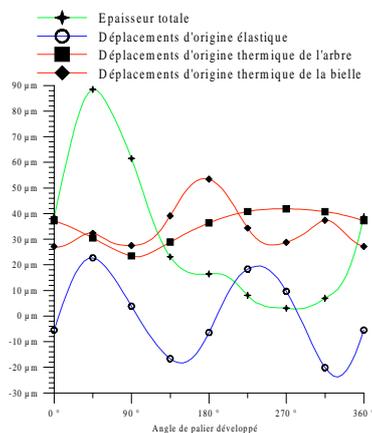


Figure 9. Répartition des déplacements thermoélastiques et de l'épaisseur totale de film pour un angle de vilebrequin de 440°

La figure 9 montre, pour un angle de vilebrequin de 440° , les déplacements issus des déformées thermoélastiques des surfaces lorsque la surface interne du maneton et un conduit d'alimentation sont à température constante égale à 90°C .

On observe que le déplacement normal à la paroi résultant des déformées thermiques du maneton varie de $24\ \mu\text{m}$ à $42\ \mu\text{m}$, le déplacement minimal du maneton correspondant à l'endroit où se trouve le conduit d'alimentation. Le déplacement issu des déformées thermiques de la bielle est compris entre $27\ \mu\text{m}$ du côté du pied de bielle à $54\ \mu\text{m}$ du côté du chapeau de tête de bielle. Même si le déplacement d'origine thermique du maneton doit être retranché à celui de la bielle dans l'expression de l'épaisseur de film, la résultante des déplacements thermiques peut dans certains cas dépasser $30\ \mu\text{m}$ (notamment à 180° d'angle de vilebrequin) et modifier de manière importante l'épaisseur totale de film. La composante thermique de l'épaisseur de film ne peut donc être négligée et ce surtout lorsque de forts gradients de température existent dans les solides. Ce qui est notamment le cas pour le maneton en raison du refroidissement dû au conduit d'alimentation.

Il est à noter que les déplacements issus des déformées élastiques varient selon une sinusoïde d'amplitude $20\ \mu\text{m}$ pour un angle de vilebrequin de 440° .

La figure 10 présente les températures aux interfaces entre le film et les solides pour un angle de vilebrequin de 440° . L'évolution circconférentielle des températures à l'interface entre le film et le maneton présente la même allure que l'évolution des déplacements d'origine thermique du maneton. En revanche, l'évolution des déplacements d'origine thermique de la bielle est liée à la forme géométrique

complexe de la bielle : les températures à l'interface entre la bielle et le film sont comprises entre 172°C et 195.5°C et présentent une allure différente.

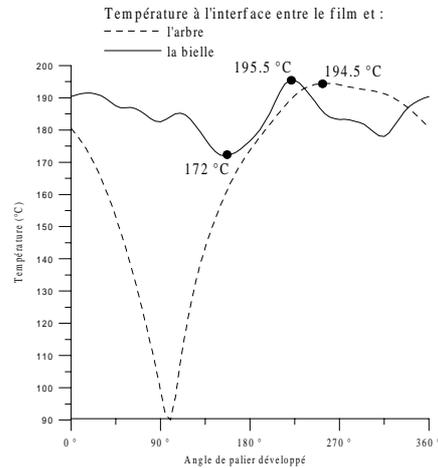


Figure 10. Evolution des températures aux interfaces film-arbre et film-bielle pour un angle de vilebrequin de 440°

5. Conclusion

Qu'elle soit employée pour la résolution du problème élastohydrodynamique, du problème thermique ou bien pour le calcul de structures, la méthode des éléments finis s'avère efficace, et ce particulièrement dans le cas de domaines d'étude à géométrie complexe.

Bien qu'elle nécessite une place mémoire importante et de nombreux calculs en raison du nombre élevé d'inconnues, la méthode de Newton-Raphson associée à des techniques d'optimisation de stockage matriciel permet de résoudre rapidement les équations linéaires ou non, grâce à une optimisation de la numérotation des nœuds du film, de l'arbre et de la bielle afin de réduire la largeur de bande de la matrice jacobienne thermique. De plus, le calcul et donc la triangularisation des matrices jacobienes, très coûteux en temps de calcul, ne sont pas effectués à chaque itération.

Les différents résultats obtenus [BON 99, PIF 00, SOU 00] montrent d'une part l'importance des hypothèses faites au niveau de la température dans le contact et notamment les conditions aux limites thermiques retenues pour l'arbre et pour la bielle. En effet, ces dernières modifient de manière radicale les profils de température dans le solide où elles sont posées mais aussi les profils de températures dans le film.

D'autre part, le principal facteur agissant sur le comportement du palier provient des déformées thermiques des solides. Celles-ci sont en effet plus importantes que les déformées élastiques des surfaces et elles peuvent jouer un rôle non négligeable lorsque les solides sont soumis à de forts gradients thermiques ce qui est toujours le cas du solide par lequel se fait l'alimentation en fluide frais.

Le modèle présenté n'est qu'une première approche de ce problème difficile. Il ne peut pas rendre compte des effets du déplacement élastique tridimensionnel des structures, pas plus que des effets thermiques tridimensionnels des conduits d'alimentation qui vont induire de forts gradients axiaux de température.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier la société RENAULT pour sa participation technique et financière pour la réalisation de ce travail.

6. Bibliographie

- [ABS 95] ABSI J., BONNEAU D., "Experimental measuring of velocity profiles in herringbone grooved journal bearings", *Proceeding of the 22nd Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, Lyon, 5-8 septembre 1995.
- [BON 93] BONNEAU D., GUINES D., FRENE J., TOPLOSKY J., "Finite Element Analysis of grooved Thrust Bearings an Grooved Gas Face Seals", *Transactions of the ASME, Journal of Lubrication Technology*, Vol. 115,1993, pp. 348-354.
- [BON 99] BONNEAU D., PIFFETEAU S., SOUCHET D., « Analyse thermoélasto-hydrodynamique d'un palier de tête de bielle soumis à un chargement dynamique », *9th Conference on E.H.D. Lubrication and Traction*, 5-6 juin 1998, University of Suceáva, Roumanie, 1999, pp. 405-409.
- [CHR 76] CHRISTIE I., GRIFFITHS D. F., MITCHELL A. R., ZIENKIEWICZ O. C., "Finite Element Methods for Second Order Differential Equations with Significant First Derivatives", *Int. J. num. meth. Engng*, Vol. 10, 1976, pp. 1389-1396.
- [DOW 62] DOWSON D., "A Generalized Reynolds Equation for Fluid Film Lubrication", *Int. Journal. Mech. Sc.*, Vol. 4, 1962, pp. 159-170.
- [DOW 79] Dowson D., *History of Tribology*, Editions Longman, 1979.
- [FIL 90] FILLON M., SOUCHET D., FRÈNE J., "Influence of Bearing Element Displacements on Thermohydrodynamic Characteristics of Tilting-Pad Journal Bearings", *Proc. of the Japan International Tribology Conf.*, Nagoya, 1990, pp. 635-640.
- [FIL 97] FILLON M., MONMOUSSEAU P., FRENE J., "Thermo élastohydro dynamique des paliers à patins oscillants en régime transitoire", *Rev. Gén. Therm*, Vol. 36, 1997, pp.433-441.
- [FRE 90] FRENE J., NICOLAS D., DEGUEURCE B., BERTHE D., GODET M., « Lubrification hydrodynamique : Paliers et butées », *Coll. des études et recherche d'Electricité de France*, 1990, Eyrolles.

- [GOE 84] GOENKA P. K., "Dynamically Loaded Journal Bearings : Finite Element Method Analysis", *Transactions of the ASME, Journal of Lubrication Technology*, Oct., Vol. 106, 1984, pp. 429-439.
- [GUI 94] GUINES D., *La Lubrification des Liaisons Compliantes : Modélisation et Algorithmes*, Thèse de Doctorat de l'Université de Poitiers, 1994.
- [HEI 77] HEIRICH J. C., HUYAKORN P. S., ZIENKIEWICZ O. C., "An 'Upwind' Finite Element Scheme for Two-Dimensional Convective Transport Equation", *Int. J. num. meth. Engng*, Vol. 11, 1977, pp. 131-143.
- [KEL 80] KELLY D. W., NAKAZAWA S., ZIENKIEWICZ O. C., "A Note on Upwinding and Anisotropic Balancing Dissipation in Finite Element Approximations to Convective Diffusion Problems", *Int. J. num. meth. Engng*, Vol. 15, 1980, pp. 1705-1711.
- [KHO 91] KHONSARI M. M., WANG S. H., "On the Fluid-Solid Interaction in Reference to Thermoelastohydrodynamic Analysis of Journal Bearings", *Transactions of the ASME Journal of Tribology*, 1991, Vol. 113, pp. 398-404.
- [KIM 94] KIM J., PALAZZOLO A. B., GADANGI R. K., "TEHD Analysis for Tilting-Pad Journal Bearings Using Upwind Finite Element Method", *Tribology Transactions*, Vol. 37, N°4, 1994, pp. 771-783.
- [KUC 98] KUCINSCHI B.-R., *Etude des instabilités thermiques des paliers à frottement fluide*, Thèse de Doctorat de l'Université de Poitiers et l'Université Politechnica de Bucarest, 1998.
- [McI 89] McIVOR J. D. C., FENNER D. N., "Finite Element Analysis of Dynamically Loaded Flexible Journal Bearings : A Fast Newton-Raphson Method", *Transactions of the ASME Journal of Tribology*, 1989, Vol. 111, pp. 597-604.
- [MIT 87] MITSUI J., "A Study of Thermohydrodynamic Lubrication in a Circular Journal Bearing", *Tribology Transactions*, 1987, pp. 331-341.
- [MUR 74] MURTY K. G., "Note on a Bard-type Scheme for Solving the Complementarity Problems", *Opsearch*, 1974, Vol. 11, pp. 123-130.
- [NIC 72] NICOLAS D., *Les Paliers Hydrodynamiques Soumis à un Torseur de Forces Quelconques*, Thèse de Docteur Ingénieur, INSA de Lyon, 1972.
- [OH 73] OH K. P., HUEBNER K. H., "Solution of the Elastohydrodynamic Finite Journal Bearing Problem", *Transactions of the ASME, Journal of Lubrication Technology*, Vol. 3, 1973, pp. 342-352.
- [OH 85] OH K. P., GOENKA P. K., "The Elastohydrodynamic Solution of Journal Bearings Under Dynamic Loading", *Transactions of the ASME Journal of Tribology*, Vol. 107, 1985, pp. 389-395.
- [PIF 00] PIFFETEAU S., SOUCHET D., BONNEAU D., "Influence of Thermal and Elastic Deformation on Connecting-Rod Big End Bearing Lubrication Under Dynamic Loading", *Transactions of the ASME, Journal of Tribology*, Vol. 122, 2000, pp. 181-191.
- [ROH 80] ROHDE S. M., LI D. F., "A Generalized Short Bearing Theory", *Transactions of the ASME Journal of Tribology*, Vol. 102, N°3, 1980, pp. 278-282.

- [SOU 00] SOUCHET D., PIFFETEAU S., BONNEAU D., “Influence des conditions aux limites thermiques sur le comportement d’un palier de tête de bielle”, *10th Conference on E.H.D. Lubrication and Traction*, 20-21 Octobre 2000, University of Sucéava.
- [TAY 73] TAYLOR C., O’CALLAGHAN J.F., “A Numerical Solution of the Elastohydrodynamic Lubrication Using Finite Elements”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 14, n°4, 1973, pp.229-237.
- [YAN 96] YANG P., RODKIEWICZ C. M., “Time-Dependent TEHL Solution to Centrally Supported Tilting Pad Bearings Subjected to Harmonic Vibration” *Tribology International*, Vol. 29, N°5, 1996, pp. 433-443.
- [ZIE 65] ZIENKIEWICZ O. C., CHEUNG Y. K., “Finite Elements in the Solution of Field Problems”, *Engineer*, Lond., Vol. 220, 1965, p. 507.
- [ZIE 77] ZIENKIEWICZ O. C., *The Finite Element Method*, Third Edition, McGRAW-HILL Book Company (UK) Limited, 1977.

Annexe

Expression G et de $\frac{\partial F}{\partial x}$ aux points d’intégration de Gauss

Par définition, $G = J_2 - \frac{J_1^2}{J_0}$ et $F = \frac{J_1}{J_0}$ avec $J_i = \int_0^h \frac{\xi^i}{\mu(\xi)} d\xi$ avec $i=0,1$ ou 2

La dérivée $\frac{\partial F}{\partial x}$ s’écrit $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{J_0} \frac{\partial J_1}{\partial x} - \frac{J_1}{J_0^2} \frac{\partial J_0}{\partial x}$.

Or $\frac{\partial J_i}{\partial x} = \int_0^h \left\{ -\frac{\partial \mu(\xi)}{\partial x} \frac{\xi^i}{\mu^2(\xi)} \right\} d\xi + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{h^i}{\mu(h)}$ avec $i=0$ ou 1 .

Il en résulte que :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left[\frac{h}{\mu(h)} \frac{1}{J_0} - \frac{J_1}{J_0^2} \frac{1}{\mu(h)} \right] \frac{\partial h}{\partial x} \frac{1}{J_0} \int_0^h \frac{\partial \mu(\xi)}{\partial x} \left(\xi - \frac{J_1}{J_0} \right) \frac{d\xi}{\mu^2(\xi)}.$$

Avec la loi de viscosité utilisée, nous obtenons :

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu_0 e^{-\beta(T-T_0)} \right\} = -\beta \mu_0 \frac{\partial T}{\partial x} e^{-\beta(T-T_0)}$$

Bien que G et $\partial F/\partial x$ dépendent de la température, ce lien n’est pas direct. En première approximation, l’intégration suivant l’épaisseur du film est tout d’abord effectuée à partir d’un champ de température calculé au pas précédent (méthode de prédiction-correction) puis l’intégrale est considérée au point d’intégration.

Il en résulte, au point d'intégration M :

$$G_M = (J_2)_M - \frac{(J_1)_M^2}{(J_0)_M}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M = \left[\frac{h_M}{\mu(h_M)} \frac{1}{(J_0)_M} - \frac{(J_1)_M}{(J_0)_M^2} \frac{1}{\mu(h_M)} \right] \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)_M$$

$$- \frac{1}{(J_0)_M} \int_0^{h_M} \frac{\partial \mu(\xi)}{\partial x} \left(\xi - \frac{(J_1)_M}{(J_0)_M} \right) \frac{d\xi}{\mu^2(\xi)}$$