

---

# Préservation de l'orientation et convergence de Newton-Raphson avec le modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko

François Peyraut — Nadia Labeled

Université de Technologie de Belfort-Montbeliard (UTBM)  
Laboratoire Mécatronique 3M (M3M)  
Rue du Château - Sévenans - 90 010 Belfort cedex

francois.peyraut@utbm.fr  
nadia.labeled@utbm.fr

---

*RÉSUMÉ.* Cet article traite du modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko dans le cas d'une structure cubique en compression dans une presse. Pour certaines valeurs d'incrément de charge, on montre que l'orientation n'est pas préservée. Dans ce cas, l'algorithme de Newton-Raphson incrémental diverge. Avec une méthode de pilotage par longueur d'arc, on aboutit à une conclusion analogue pour certaines valeurs de la longueur d'arc. On propose alors de contrôler la convergence en choisissant de manière optimale les paramètres numériques de chaque méthode. Ces paramètres optimum garantissent la préservation de l'orientation et un temps de calcul minimum.

*ABSTRACT.* This paper deals with the Blatz-Ko hyperelastic compressible model in the case of a cubic structure under compression loading by a press. With some particular increment loading values, we show that the orientation is not preserved. In this case, the incremental Newton-Raphson algorithm diverges. With the arc length method, we obtain a similar conclusion for some arc length values. So we suggest to control the convergence by using optimal numerical parameters. These optimal numerical parameters guarantee the orientation preservation and a minimal time computation.

*MOTS-CLÉS :* hyperélasticité compressible, modèle de Blatz-Ko, Newton-Raphson incrémental, Newton avec pilotage par longueur d'arc, préservation de l'orientation.

*KEYWORDS:* compressible hyperelasticity, Blatz-Ko model, incremental Newton-Raphson, arc length method, orientation preservation.

---

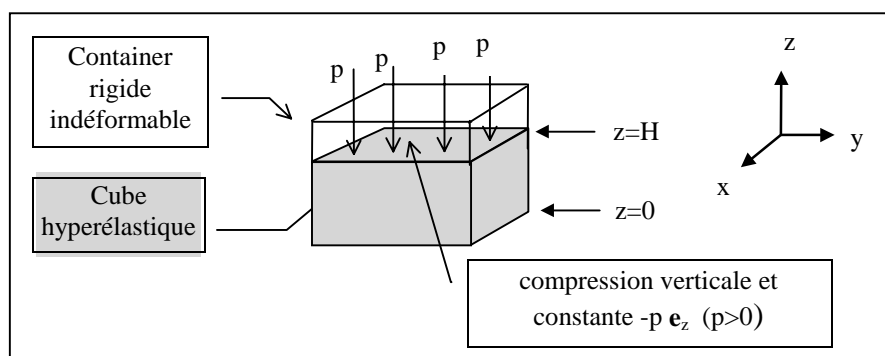
## 1. Introduction

Aujourd'hui, l'analyse non linéaire suscite encore de nombreuses interrogations. Pour les problèmes hyperélastiques par exemple, l'existence et l'unicité de la solution ne sont pas assurées ([ARO 98] et [CIA 85]). Pour le modèle compressible de Blatz-Ko ([BLA 62]) en particulier, de nombreuses études ont porté sur la perte d'ellipticité des équations d'équilibre ([ARO 98], [HOR 95] et [HOR 96]). Cette perte d'ellipticité peut entraîner des difficultés numériques à proximité des valeurs critiques de chargement ([WIN 95]).

Dans cet article, nous nous sommes intéressés au modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko ([BLA 62]). Ce modèle permet de représenter le comportement de mousse élastomères ou de caoutchouc en polyuréthane. Il est caractérisé par deux constantes : un module de cisaillement et un paramètre relié au taux de vide dans la mousse ou le caoutchouc. Lorsque ce paramètre vaut zéro, on obtient le modèle spécial de Blatz-Ko ([HOR 96]). Ce modèle est implémenté dans le code de calcul industriel aux éléments finis ANSYS, ce qui nous a permis de valider nos calculs analytiques avec des calculs numériques.

En particulier, on montre que les algorithmes de Newton-Raphson incrémental et de Newton avec pilotage par longueur d'arc divergent lorsque l'orientation n'est pas préservée. Ce point est mis en évidence à l'aide d'un cube soumis à un effort de compression dans un container rigide indéformable (figure 1).

Pour assurer la convergence, il suffit de procéder, en liaison avec la préservation de l'orientation, au réglage des paramètres numériques de chaque méthode (nombre de pas sur le chargement pour Newton-Raphson incrémental et longueur d'arc pour une méthode avec pilotage par longueur d'arc). Pour l'exemple particulier traité, on montre que ce réglage peut être réalisé de manière optimale afin d'assurer la convergence avec un minimum de temps de calcul.



**Figure 1.** Cube en compression dans un container rigide

## 2. Notations

On note  $x, y$  et  $z$  les coordonnées cartésiennes Lagrangiennes,  $u$  le déplacement,  $F$  la matrice gradient des déformations ( $F = Id + \nabla u$ ) et  $B$  le tenseur des déformations de Cauchy-Green à gauche ( $B = FF^T$ ).

## 3. Hypothèses

On se place dans le cadre des grandes déformations, en régime stationnaire et en l'absence de forces volumiques de gravitation (hypothèse H1).

On suppose que le contact entre les parois latérales du cube et le container est sans frottement, que les parois du container sont rigides et que la base du cube est parfaitement collée sur le fond du container (hypothèse H2).

## 4. Calcul analytique des déplacements et des contraintes

En l'absence de termes d'accélération et de gravitation (hypothèse H1), l'équation d'équilibre en variable de Lagrange s'écrit :

$$\operatorname{div} \hat{\sigma} = 0 \quad [1]$$

où l'opérateur  $\operatorname{div}$  représente la divergence et où le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff :

$$\hat{\sigma} = \mu \left[ (\det F) Id - B^{-1} \right] F^{-T} \quad [2]$$

se déduit de la densité d'énergie introduite par Blatz et Ko ([BLA 62]) :

$$W = \frac{\mu}{2} \left[ \frac{I_2}{I_3} + 2\sqrt{I_3} - 5 \right] \quad [3]$$

Dans cette dernière égalité,  $\mu$  représente le module de cisaillement et  $I_2$  et  $I_3$  sont les deuxième et troisième invariants du tenseur des déformations de Cauchy-Green à gauche  $B$ .

Par ailleurs, il découle de la forme du chargement et de la nature du container (hypothèse H2) que le déplacement  $u(x,y,z)$  satisfait :

$$u_x = u_y = 0 ; u_z(z) \neq 0 \quad [4]$$

L'utilisation conjointe de [1], [2] et [4] conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{\partial \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^{-3} \right]}{\partial z} = 0 \quad [5]$$

L'intégration de [5] et la prise en compte des conditions aux limites donnent la composante  $u_z$  des déplacements. On déduit ensuite de l'expression [2] du premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff le tenseur des contraintes de Cauchy  $\sigma$ . Tout calcul fait, on obtient :

$$u_z(z) = \left[ \left( 1 + \frac{p}{\mu} \right)^{-1/3} - 1 \right] z ; \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \mu \left\{ 1 - \left( 1 + \frac{p}{\mu} \right)^{1/3} \right\} ; \sigma_{zz} = -p \quad [6]$$

les autres composantes étant nulles.

Afin de corréler les formules [6], nous avons effectué des comparaisons avec le code aux éléments finis ANSYS (tableau 1). Les données numériques pour le calcul sont :  $H = 0.5$  m ;  $p = 5$  MPa ;  $\mu = 220\,711,2$  Pa. L'écart relatif obtenu étant très faible, la solution analytique est validée.

z	Analytique	ANSYS	Ecart (%)
H	$u_z = -0.325818682$ m	$u_z = -0.325818682$ m	0
0	$\sigma_{xx} = -412856.1735$ Pa	$\sigma_{xx} = -412856.174$ Pa	1.2E-7
0	$\sigma_{zz} = -5000000$ Pa	$\sigma_{zz} = -5000000$ Pa	0

**Tableau 1.** Comparaison calcul analytique-calcul numérique

## 5. Condition optimale de convergence pour Newton-Raphson incrémental

On constate que l'algorithme de Newton-Raphson incrémental diverge sous certaines conditions de chargement (tableau 3). Comme le suggèrent les résultats de ce tableau, une augmentation progressive du nombre de pas  $n$  sur le chargement constitue une stratégie possible pour assurer la convergence. A chaque fois qu'un diagnostic de divergence est rendu, on recommence les calculs en augmentant  $n$ . C'est de cette manière que procède ANSYS. Mais on conçoit qu'une telle stratégie peut être coûteuse en temps calcul. Si le nombre de pas nécessaire à la convergence est grand, on est en effet contraint à de fréquents retours en arrière, ce qui annule le bénéfice d'une partie des calculs déjà réalisés avec un  $n$  plus petit. Il est donc intéressant de rechercher le  $n$  optimal assurant la convergence du premier coup. Pour cela, on va étudier la relation entre les déplacements et les efforts. Celle-ci peut être

obtenue grâce à la minimisation de l'énergie potentielle totale, en liaison avec l'hypothèse de champ de déplacement linéaire. En effet, un tel champ est défini par :

$$u_z(z) = \frac{u}{H}z \tag{7}$$

D'après [3], la densité d'énergie qui lui est associée est donc :

$$W = \frac{\mu}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{u}{H} \right)^{-2} + 2 \frac{u}{H} - 1 \right\} \tag{8}$$

On en déduit l'énergie potentielle totale :

$$I(u) = \frac{\mu}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{u}{H} \right)^{-2} H + 2u - H \right\} + pu \tag{9}$$

L'équation cherchée, associée à la minimisation de cette énergie, est donc :

$$K(u) = \mu \left[ 1 - \left( 1 + \frac{u}{H} \right)^{-3} \right] = -p \tag{10}$$

La courbe d'équation  $f = K(u)$  est représentée sur la figure 2.

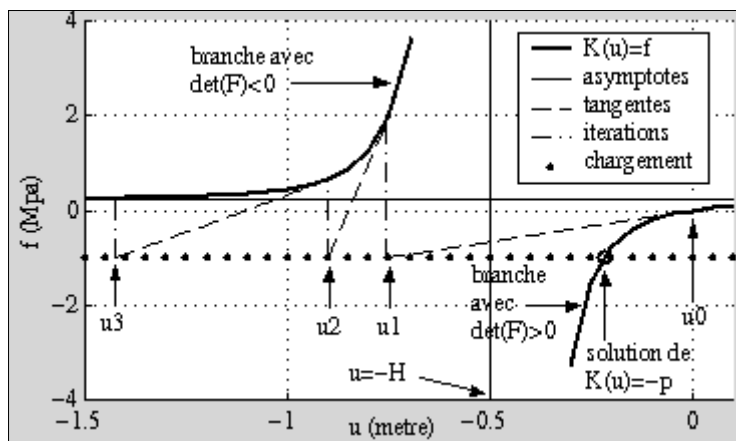
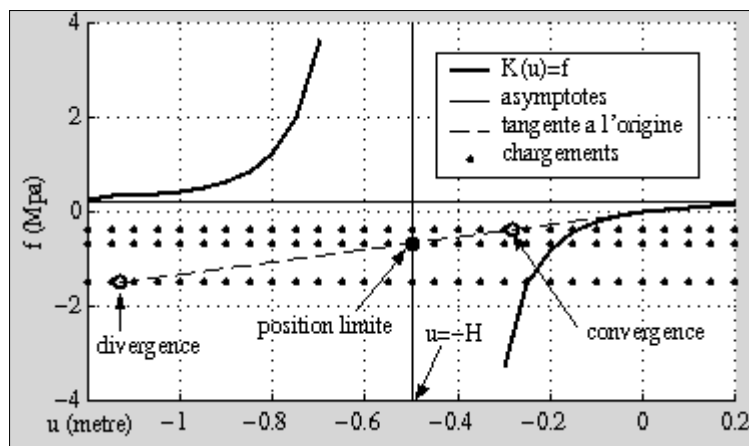


Figure 2. Graphe de  $f = K(u)$  et divergence de Newton-Raphson

Cette courbe permet d'analyser graphiquement la divergence de Newton-Raphson. On remarque en effet qu'elle possède deux branches. La première correspond à  $u$  plus petit que  $-H$ . Sur cette branche, le déterminant de la matrice gradient des déformations, calculé à partir de [4] et [7], est donc négatif :

$$\det(F) = 1 + \frac{u}{H} < 0 \quad [11]$$

On en conclut que l'orientation n'est pas préservée. En revanche, il est facile de constater qu'elle l'est sur la branche correspondant à  $u$  plus grand que  $-H$ . L'asymptote verticale  $u = -H$  constitue donc la frontière entre la branche à déterminant positif, où doit être recherchée la solution physique, et la branche à déterminant négatif, où il faut éviter de se positionner au cours des itérations de Newton-Raphson. Il en résulte que la convergence est conditionnée par la position de l'intersection entre la tangente à l'origine à la courbe  $f = K(u)$  et la droite horizontale de chargement (figure 3). Si cette intersection est située à une abscisse supérieure strictement à  $-H$ , l'algorithme converge. Si l'abscisse de l'intersection est inférieure ou égale à  $-H$ , l'algorithme diverge (figure 2).



**Figure 3.** Trois cas possibles pour le chargement

Le cas correspondant à  $-H$  est une situation limite qui démarque les zones de convergence et de divergence. Pour déterminer le nombre de pas  $n$  sur le chargement qui lui correspond, il suffit de considérer le point d'intersection entre la tangente à l'origine d'équation :

$$f = \frac{3\mu}{H}u \quad [12]$$

et la droite de chargement d'équation :

$$f = -\frac{p}{n} \quad [13]$$

Le point d'intersection a alors pour coordonnées :

$$\left( -\frac{H}{3\mu} \frac{p}{n}, -\frac{p}{n} \right) \quad [14]$$

et la condition de convergence s'écrit après simplification par H :

$$n > \frac{p}{3\mu} \quad [15]$$

Sous cette condition, on montre que l'algorithme de Newton-Raphson donne une suite croissante et majorée à chaque itération sur le chargement. On montre également que les termes de la suite de Newton-Raphson sont majorés par  $-H$  si la condition [15] n'est pas satisfaite. La solution étant supérieure à  $-H$ , l'algorithme ne peut alors pas converger. La condition [15] est par conséquent une condition nécessaire et suffisante de convergence.

Enfin, le nombre de pas  $n$  sur le chargement est un nombre entier. Le plus petit  $n$  assurant la convergence est donc donné par :

$$n = \text{ent} \left[ \frac{p}{3\mu} \right] + 1 \quad [16]$$

où *ent* représente la partie entière.

Cet entier  $n$  est le nombre de pas optimal sur le chargement. Il satisfait en effet au mieux deux objectifs antagonistes. Le premier est la convergence de l'algorithme. Pour cela, il faut que  $n$  soit « grand ». Le second objectif est un faible coût du temps de calcul. Pour cela, il faut que  $n$  soit « petit » puisque  $n$  représente le nombre d'itérations sur le chargement. La formule [16] donne le meilleur compromis entre ces deux objectifs. Pour la valider, on a effectué des comparaisons avec le code aux éléments finis ANSYS. Le  $n$  optimal analytique, calculé par [16], figure dans le tableau 2, le rapport  $p/(3\mu)$  étant donné à titre indicatif. Le  $n$  optimal numérique, calculé par ANSYS, est donné dans le tableau 3. Il est repéré par le sigle **C** qui signifie convergence. Il a été obtenu en faisant autant de calculs que nécessaire, jusqu'à obtenir la convergence. Chaque divergence de l'algorithme de Newton-Raphson est repérée par le sigle **D**.

Dix valeurs de chargement différentes ont été choisies de manière à faire varier le nombre de pas optimal de un à dix. Dans chacun des dix cas, on constate une corrélation parfaite entre le résultat analytique prédit par la formule [16] et les calculs numériques. La formule [16] est donc validée. On remarque également qu'un changement très faible sur les deux dernières valeurs de chargement (5959202 et 5959203 Pa) a un impact important sur le n optimal qui passe de 9 à 10. Cette influence est corrélée exactement par les calculs numériques contenus dans le tableau 3. Cela permet d'illustrer la finesse de prévision de la formule [16].

chargement p (Pa)	$p/(3 \mu)$	nombre de pas de charge n optimal
331066	0,499998792	1
993200	1,499999396	2
1655334	2,5	3
2317468	3,500000604	4
2979601	4,499999698	5
3641735	5,500000302	6
4303868	6,499999396	7
5000000	7,551346133	8
5959202	8,999999396	9
5959203	9,000000906	10

**Tableau 2.** n optimal calculé à l'aide de la formule [16]

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	n
331066	C										
993200	D	C									
1655334	D	D	C								
2317468	D	D	D	C							
2979601	D	D	D	D	C						
3641735	D	D	D	D	D	C					
4303868	D	D	D	D	D	D	C				
5000000	D	D	D	D	D	D	D	C			
5959202	D	D	D	D	D	D	D	D	C		
5959203	D	D	D	D	D	D	D	D	D	C	
chargement p (Pa)											

**Tableau 3.** n optimal calculé numériquement avec ANSYS



## 6. Condition optimale de convergence pour l'algorithme de Newton avec pilotage par longueur d'arc

L'algorithme avec pilotage par longueur d'arc consiste à contrôler en parallèle les incréments sur le chargement et sur le déplacement. Les itérées successives sont cherchées à l'intersection de la courbe d'équilibre et d'un arc de cercle dont le rayon constitue un paramètre numérique de la méthode.

Dans le code de calcul ANSYS, la recherche de l'intersection s'effectue en deux étapes. La première calcule l'incrément de déplacement dû à la méthode conventionnelle de Newton-Raphson. La deuxième étape apporte ensuite une correction permettant de se ramener à proximité de l'arc de cercle. Pour cela, une correction approximative assurant l'orthogonalité est utilisée (itération sphérique explicite [FOR 87]).

La première étape est une itération de Newton-Raphson conventionnel. Les risques de divergence liés à cette méthode, comme la violation de la préservation de l'orientation, peuvent alors se manifester. C'est ce que l'on constate en examinant le tableau 4. On a en effet divergence si le déplacement se situe à gauche de l'asymptote  $u = -H$  ( $H = 0.5$  m pour l'exemple traité). D'après le paragraphe 5, ce cas est associé à une perte de la préservation de l'orientation. Dans le cas où l'orientation est préservée ( $u > -0.5$  m), il y a convergence.

De la même façon que pour l'algorithme de Newton-Raphson incrémental, la mise en défaut de la préservation de l'orientation constitue donc une cause de divergence pour la méthode de Newton avec pilotage par longueur d'arc.

chargement (Pa)	longueur d'arc	convergence	u
5959202	1/8	non	-0.56249996
5959202	1/9	oui	-0.49999996
5959203	1/9	non	-0.50000005
5959203	1/10	oui	-0.450000045

**Tableau 4.** Influence de  $u$  à la première itération sur la convergence (calcul ANSYS)

Par ailleurs, ANSYS introduit la longueur d'arc initiale  $r$  sous la forme :

$$r = \frac{1}{n} \quad [17]$$

où  $n$  est un entier spécifié par l'utilisateur.

Il est donc possible de comparer à nouveau la formule [16] (tableau 2) avec des calculs numériques (tableau 5). Pour chaque valeur de chargement, on constate une corrélation parfaite. La formule [16], validée pour l'algorithme de Newton-Raphson incrémental, s'applique donc également pour une méthode de pilotage par longueur d'arc.

	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10	r
331066	C										
993200	D	C									
1655334	D	D	C								
2317468	D	D	D	C							
2979601	D	D	D	D	C						
3641735	D	D	D	D	D	C					
4303868	D	D	D	D	D	D	C				
5000000	D	D	D	D	D	D	D	C			
5959202	D	D	D	D	D	D	D	D	C		
5959203	D	D	D	D	D	D	D	D	D	C	
chargement p (Pa)											

**Tableau 5.** Convergence en fonction de la longueur d'arc (calcul ANSYS)

## 7. Conclusions et perspectives

Dans cet article, on a montré que la violation de la préservation de l'orientation constituait une cause potentielle de divergence aussi bien pour Newton-Raphson incrémental que pour une méthode de pilotage par longueur d'arc. Ce point a été établi dans le cas d'un cube hyperélastique compressible (modèle de Blatz-Ko) soumis à un effort de compression dans une presse.

La convergence est obtenue en choisissant les paramètres numériques de chaque méthode afin que la préservation de l'orientation soit respectée. Ces paramètres numériques sont le nombre d'incrément de charge, pour Newton-Raphson incrémental, et la longueur d'arc initiale pour Newton avec pilotage par longueur d'arc. Pour l'exemple choisi, on dispose même d'un choix de ces paramètres (formule analytique [16]) qui assure la convergence avec un minimum de temps de calcul. Les perspectives portent sur deux points.

Le premier est l'étude de la convergence avec d'autres exemples que celui présenté dans cet article. Il s'agira alors d'étudier s'il existe des causes potentielles de divergence numérique autres que la violation de la préservation de l'orientation.

Le second point est l'élaboration d'un algorithme général de résolution numérique dédié aux problèmes hyperélastiques compressibles. Cet algorithme serait développé sur la base d'approches de type Newton-Raphson. Il ne s'agirait donc pas d'un algorithme concurrent de ces méthodes. Il s'agirait plutôt d'une version prenant en compte les risques de divergence liés à la mise en défaut de la préservation de l'orientation.

## 8. Bibliographie

- [ARO 98] ARON M., CHRISTOPHER C., WANG Y., « On the Straightening of Compressible, Nonlinearly Elastic, Annular Cylindrical Sectors », *Mathematics and Mechanics of Solids*, Vol. 3, p. 131-145, 1998.
- [BLA 62] BLATZ P.J. , KO W.L., « Application of Finite Elastic Theory to the Deformation of Rubbery Materials », *Transactions of the Society of Rheology*, Vol. 6, p. 223-251, 1962.
- [CIA 85] CIARLET P.G., *Elasticité Tridimensionnelle*, Masson, Collection RMA, 1985.
- [FOR 87] FORDE W.R.B., STIEMER S.F., « Improved Arc Length Orthogonality Methods for Nonlinear Finite Element Analysis », *Computer & Structures*, Vol. 27, No. 5, p. 625-630, 1987.
- [HOR 95] HORGAN C.O., POLIGNONE D.A., « A Note on the Pure Torsion of a Circular Cylinder for a Compressible Nonlinearly Elastic Material with Nonconvex Strain-energy », *Journal of Elasticity*, Vol. 37, p. 167-178, 1995.
- [HOR 96] HORGAN C.O., « Remarks on Ellipticity for the Generalized Blatz-Ko Constitutive Model for a Compressible Nonlinearly Elastic Solid », *Journal of Elasticity*, Vol. 42, p. 165-176, 1996.
- [WIN 95] WINEMAN A.S., WALDRON JR W.K., « Normal Stress Effects Induced during Circular Shear of a Compressible Non-Linear Elastic Cylinder », *Int. J. Non-Linear Mechanics*, Vol. 30, No. 3, p. 323-339, 1995.