
Schéma dissipatif HHT d'intégration temporelle pour un modèle de poutre en grandes rotations

Saïd Mamouri* — Adnan Ibrahimbegovic**

*Université de Technologie de Compiègne
Dept. GSM, Lab. Roberval, bp-20529
60205 Compiègne, France
said.mamouri@utc.fr*

*Ecole Normale Supérieure de Cachan
LMT/61, av du Président Wilson
94235 Cachan, France
ai@lmt.ens-cachan.fr*

RÉSUMÉ. Dans ce travail nous présentons l'extension du schéma d'intégration temporelle dissipatif HHT aux problèmes de dynamique des structures soumises à de grandes rotations. Le modèle retenu est un modèle de poutre tridimensionnelle basé sur la théorie dite "géométriquement exacte". Parmi les divers paramétrisations des rotations, nous avons choisi une représentation matérielle du vecteur de rotation incrémentale qui nous facilite la construction du schéma d'intégration temporelle. Nous abordons également les aspects pertinents liés aux détails de l'implantation numérique.

ABSTRACT. In this work we present an extension of HHT dissipative numerical integration scheme for the dynamics of structures undergoing large rotations. The problem used to illustrate the proposed modification pertains to so-called 'geometrically exact' three-dimensional beam theory. Among different possibilities to parameterize the finite rotations, we choose a material representation of the rotation vector, which simplified the construction of time-integration schemes. We also present the essential details of the finite element implementation.

MOTS-CLÉS : dynamique, intégration temporelle, schéma dissipatif HHT.

KEYWORDS: dynamics, time integration, dissipative HHT scheme.

1. Introduction

Commençant par le travail de Simo et Vu-Quoc [SIM 86], un nombre important de publications (par exemple, voir Cardona et Géradin [CAR 88], Jelenic et Crisfield [JEL 96], Iura et Atluri [IDE 89], Simo *et al.* [SIM 95], Ibrahimbegovic *et al.* [IBR 95a], [IBR 97], [IBR 98] and Jelenic and Crisfield [JEL 98], Barraco *et al.* [BAR 98], Aubry *et al.* [AUB 95], parmi d'autres) se sont adressés à l'analyse non linéaire élastodynamique des poutres tridimensionnelles soumises à de grandes rotations. Le modèle de poutre souvent utilisé dit géométriquement exact est capable de fournir des mesures exactes des déformations sans aucune restriction sur l'amplitude des déplacements et des rotations, ainsi que de simplifier la considération des effets d'inertie en utilisant un repère fixe. Ceci est un avantage majeur par rapport aux approches antérieures, notamment l'approche du repère flottant (proposée par Freaeijs de Veubeke [VEU 76] en Europe et Kane aux Etats-unis [KAN 85]) qui conduit à une matrice masse compliquée à cause de la présence de l'accélération de Coriolis.

La difficulté principale de cette approche réside dans la nature non vectorielle des rotations, qui appartiennent à une variété différentielle $SO(3)$ (voir Marsden et Hughes [MAR 83]). Par conséquent, un schéma d'intégration temporelle standard ne peut pas être appliqué directement à une analyse dynamique non linéaire en présence des grandes rotations (voir Cardona et Géradin [CAR 89]). Parmi plusieurs ensembles de paramètres de grandes rotations, on a choisi ceux qui sont le mieux adaptés à la construction du schéma pas-à-pas, qui consiste à considérer un vecteur de rotation incrémentale appartenant à l'espace tangent de variété $SO(3)$ construit à l'identité (Al Mikdad et Ibrahimbegovic [ALM 97]). Ceci nous facilite la tâche de la construction du schéma d'intégration et le rend équivalent à un problème standard qui ne possède que des degrés de liberté (d.d.l.) de translation.

Le schéma de Newmark inconditionnellement stable dans le cas linéaire (pour $\gamma \geq \frac{1}{2}$ et $\beta \geq \frac{1}{4}$) devient instable dans un problème non linéaire en présence de hautes fréquences (voir Hilber *et al.* [HIL 77] ou Cardona et Géradin [CAR 89]). Ceci a motivé le travail de Cardona et Géradin ([CAR 89] à appliquer le schéma HHT (Hilber et al [HIL 77]) aux problèmes non linéaires soumis à de grandes rotations finies. D'autres chercheurs (par exemple, Bauchau *et al.* [BAU 95], Simo *et al.* [SIM 95], Ibrahimbegovic et Mamouri [IBR 99]) ont confirmé qu'un renforcement successif du schéma d'intégration par la conservation de l'énergie totale garantit la stabilité et la robustesse du schéma. On a besoin parfois d'une dissipation numérique pour mieux maîtriser les problèmes des hautes fréquences qui peuvent être gênants surtout pour le calcul des contraintes (voir Bauchau *et al.* [BAU 95], Botasso et Borri [BOT 98], Kahl et Crisfield [KUH 98]).

Dans ce travail nous nous sommes intéressés à l'extension du schéma HHT dissipatif du second ordre dédié aux problèmes non linéaires soumis à de grandes rotations. Cardona et Géradin [CAR 89] ont montré que l'extension de ce schéma dissipatif à l'intégration de grandes rotations ne se fait pas tout simplement par l'addition

des deux termes $\delta\pi_{int,n+1}$ et $(1 - \alpha)\delta\pi_{int,n}$, car ils appartiennent à deux espaces tangents différents. Par contre, Jelenic et Crisfield [JEL 98] l'ont appliqué exactement comme dans le cas linéaire en justifiant leurs choix par la simplicité, tandis que Simo *et al.* [SIM 95] ont exprimé le travail virtuel interne directement à l'instant $t_{n+\alpha}$ (où $\alpha \in [0, 1]$ est le coefficient d'amortissement numérique).

Dans ce travail on a développé une nouvelle approche d'utilisation du schéma HHT aux problèmes non linéaires en grandes rotations, par la considération d'un vecteur de rotation incrémentale mesuré entre les deux instants t_n et $t_{n+\alpha}$ pour exprimer la contribution des efforts internes dans la forme faible des équations de mouvement à l'instant $t_{n+\alpha}$.

L'article est organisé comme suit : dans la section 2 on a présenté la formulation théorique du modèle choisi, notamment la poutre 3D géométriquement exacte. Dans la section 3 on a brièvement rappelé les équations de base du schéma de Newmark et dans la section 4 on a proposé leur modification pour le schéma HHT. Tous les détails de la linéarisation cohérente ainsi que de l'implantation numérique sont présentés dans la section 5. Plusieurs exemples numériques sont traités dans la section 6, suivis par les conclusions dans la section 7.

2. Théorie de poutre géométriquement exacte

Dans cette section nous présentons brièvement les équations qui gouvernent le mouvement d'une poutre. Pour le modèle de poutre géométriquement exact (voir [ALM 97], [IBR 95a], [IBR 98], [SIM 95], [SIM 86]), la configuration initiale de la poutre est définie par le vecteur position $\varphi_0(s)$ du centre de gravité de chaque section repéré par l'abscisse curviligne 's'. Un repère orthonormal attaché sur cette section (voir figure 1), de telle façon que le vecteur unitaire \mathbf{t}_{01} soit perpendiculaire à la section.

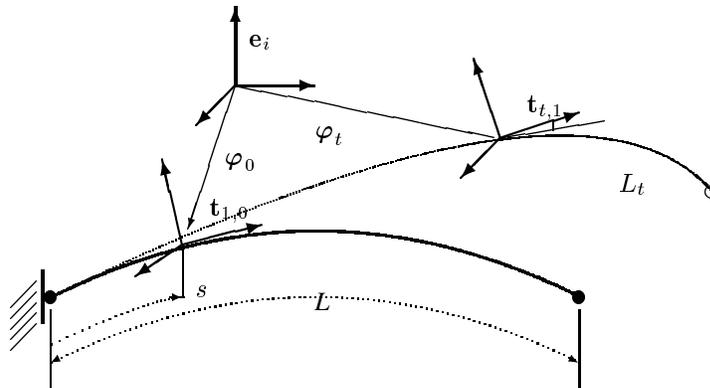


Figure 1. Poutre 3D : la configuration initiale et actuelle

$$\mathbf{t}_{1,0}(s) = \varphi'_0(s) \quad ; \quad (\bullet)' = \frac{\partial}{\partial s}(\bullet) \quad [1]$$

La configuration déformée de la poutre est définie par le nouveau placement $\varphi(s)$ du centre de la section et l'orientation du repère \mathbf{t}_i . En accord avec l'hypothèse cinématique de Reissner, "section droite, qui reste droite après déformation", le repère \mathbf{t}_i est défini par un tenseur orthogonal $\mathbf{\Lambda} \in SO(3)$.

$$\mathbf{\Lambda}(s) = \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{e}_i \implies \mathbf{t}_i = \mathbf{\Lambda} \mathbf{e}_i \quad [2]$$

avec

$$SO(3) := \{ \mathbf{\Lambda} | \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda} = \mathbf{I}, Det(\mathbf{\Lambda}) = 1 \}$$

Le vecteur unitaire \mathbf{t}_1 reste normal à la section, mais il ne coïncide pas avec le vecteur tangent de l'axe neutre, à cause de l'effet du cisaillement transversal. Par conséquent, l'espace de configuration de la poutre peut s'écrire comme :

$$\mathcal{C} := \{ (\varphi_t, \mathbf{\Lambda}_t) : [0, L] \times [0, T] \implies \mathbf{R}^3 \times SO(3); \varphi'_t \cdot \mathbf{\Lambda}_t \mathbf{e}_1 > 0 \}$$

Les mesures de déformations, décrites sur la configuration initiale peuvent s'écrire :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{\Lambda}^T \varphi' - \mathbf{e}_1 \quad [3]$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Lambda}^T \mathbf{\Lambda}' \quad [4]$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ contient les déformations axiales et celles de cisaillement, \mathbf{K} est le tenseur anti-symétrique des courbures correspondant au vecteur axial \mathbf{k}

$$\mathbf{K} \mathbf{b} = \mathbf{k} \times \mathbf{b} \quad ; \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3 \quad [5]$$

Les déformations $\boldsymbol{\epsilon}$ sont conjuguées dans le sens de l'énergie des efforts résultants axial et tranchants \mathbf{n} .

$$\mathbf{n} = \mathbf{C}_n \boldsymbol{\epsilon} \quad [6]$$

Il est de même pour les courbures \mathbf{k} qui sont elles aussi conjuguées au sens de l'énergie du moment de torsion et des moments fléchissants \mathbf{m}

$$\mathbf{m} = \mathbf{C}_m \mathbf{k} \quad [7]$$

Dans [6] et [7], $\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_m$ sont des matrices 3×3 avec des paramètres constants, qui deviennent diagonales dans le cas où \mathbf{t}_2 et \mathbf{t}_3 coïncident avec les axes principaux de la section.

$$\mathbf{C}_n = \text{diag}(EA, GA_1, GA_2) \quad [8]$$

$$\mathbf{C}_m = \text{diag}(EI, EI_1, EI_2) \quad [9]$$

Afin d'écrire explicitement la contribution des effets d'inertie dans les équations du mouvement, on a besoin de calculer les vitesses et les accélérations angulaires. Dans ce sens, la variation temporelle du tenseur de rotation nous permet d'écrire :

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{\Lambda}^T \dot{\mathbf{\Lambda}} ; \dot{\mathbf{W}}\mathbf{b} = \dot{\mathbf{w}} \times \mathbf{b} ; \forall \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3 \quad [10]$$

$$\ddot{\mathbf{W}} = \mathbf{\Lambda}^T \ddot{\mathbf{\Lambda}} + \dot{\mathbf{\Lambda}}^T \dot{\mathbf{\Lambda}} ; \ddot{\mathbf{W}}\mathbf{b} = \ddot{\mathbf{w}} \times \mathbf{b} ; \forall \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3 \quad [11]$$

où $\dot{\mathbf{W}}, \ddot{\mathbf{W}}$ sont les tenseurs antisymétriques correspondant respectivement aux vitesses et aux accélérations angulaires, qui appartiennent à l'espace tangent de variété $SO(3)$ construit à l'identité $T_I SO(3)$. La forme faible des équations du mouvement se réduit dans le cas d'une poutre géométriquement exacte à:

$$G = \delta\pi_{int} - \delta\pi_{ext} + \int_L [\delta\varphi \cdot A_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \delta\psi \cdot (\mathbf{J}_\rho \ddot{\mathbf{w}} + \dot{\mathbf{w}} \times (\mathbf{J}_\rho \dot{\mathbf{w}}))] ds = 0 \quad [12]$$

où $\delta\varphi$ and $\delta\psi$ sont, respectivement les déplacements et les rotations virtuels $A_\rho = \int_A \rho dA$ est la densité linéique de masse et \mathbf{J}_ρ est le tenseur d'inertie de rotation dans la configuration initiale. Le tenseur d'inertie peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{J}_\rho = \int_A \rho \sum_{i=2}^3 \xi_i \mathbf{T}_{0i} \sum_{j=2}^3 \xi_j \mathbf{T}_{0j} dA ; \mathbf{T}_{0i} \mathbf{b} = \mathbf{t}_{0i} \times \mathbf{b} \forall \mathbf{b} \in \mathbf{R}^3 \quad [13]$$

avec $\xi_{i=1,2}$ étant les coordonnées locales sur la section. Si \mathbf{t}_{02} et \mathbf{t}_{03} coïncide avec les axes principaux d'inertie ce tenseur prend une forme diagonale

$$\mathbf{J}_\rho = \text{diag}(J_1, J_2, J_3) \quad [14]$$

3. Schéma implicite de Newmark

Le rôle d'un schéma d'intégration temporelle dans un problème de dynamique des structures est de calculer les déplacements et les rotations, ainsi que les vitesses et les accélérations à des instants bien choisis dans le temps obtenu en partageant l'intervalle $[0, T]$ en séquence de pas,

$$0 < t_1 < \dots t_n < t_{n+1} < \dots T \quad [15]$$

La discrétisation temporelle est ainsi effectuée par un schéma standard du second ordre, tel que le schéma de Newmark, qui consiste à résoudre le système d'équations sur un pas du temps typique $h = t_{n+1} - t_n$.

Si le schéma de Newmark est appliqué directement à la dynamique non linéaire d'un problème possédant que des degrés de liberté de déplacements, les vitesses et les accélérations sont calculées à l'instant t_{n+1} par par :

$$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{u}_{n+1} + (1 - \frac{\gamma}{\beta}) \mathbf{v}_n + h(1 - \frac{\gamma}{\beta}) \mathbf{a}_n \quad [16]$$

$$\mathbf{a}_{n+1} = \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{u}_{n+1} - \frac{1}{\beta h} \mathbf{v}_n - \frac{0.5 - \beta}{\beta} \mathbf{a}_n \quad [17]$$

Dans [16] et [17] β et γ sont les paramètres de Newmark, \mathbf{v}_n et \mathbf{a}_n sont respectivement les vitesses et les accélérations à l'instant t_n , tandis que \mathbf{u}_{n+1} est l'incrément de déplacement entre t_n et t_{n+1} . Par la suite, on ne considère qu'un schéma implicite utilisant une valeur positive de β (e.g. le choix habituel avec $\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$). L'actualisation de la configuration déformée se fait ainsi d'une manière additive selon

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \mathbf{u}_{n+1} \quad [18a]$$

En revanche, en présence de grandes rotations les approximations standards (16) et (17) de Newmark ne s'appliquent pas à leurs états sur les variables de rotations à cause de leur nature non vectorielle. Du coup on doit construire d'autres approximations en respectant les paramétrisations choisies pour les rotations (voir Ibrahimbegovic et Al Mikdad [IBR 98]), ou privilégier une représentation matérielle des rotations finies (c'est-à-dire des paramètres appartenant à l'espace tangent de la variété différentielle $SO(3)$ construit à l'identité), ce qui nous permet d'appliquer directement les approximations (16) et (17) de Newmark. Il s'agit d'un vecteur de rotation mesuré entre les deux instants t_n et t_{n+1} appelé vecteur de rotation incrémentale (voir Ibrahimbegovic [IBR 97]). Le tenseur de rotation orthogonal peut être obtenu ainsi, comme une application exponentielle de ce vecteur superposée à la rotation existante $\mathbf{\Lambda}_n$. En description matérielle ce tenseur prend la forme suivante :

$$\mathbf{\Lambda}_{n+1} = \mathbf{\Lambda}_n \exp(\boldsymbol{\theta}_{n+1}) \quad [18]$$

où $\boldsymbol{\theta}_{n+1}$ est le vecteur de rotation incrémentale. Le choix d'un tel vecteur de rotation incrémentale simplifie la tâche de construction du schéma d'intégration, et nous permet d'utiliser les équations habituelles de Newmark, car tous les paramètres ($\dot{\mathbf{w}}_n$, $\ddot{\mathbf{w}}_n$, $\boldsymbol{\theta}_{n+1}$, $\dot{\mathbf{w}}_{n+1}$ et $\ddot{\mathbf{w}}_{n+1}$) appartiennent au même espace tangent du groupe $SO(3)$ construit à l'identité $T_1SO(3)$.

$$\dot{\mathbf{w}}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta h} \boldsymbol{\theta}_{n+1} + (1 - \frac{\gamma}{\beta}) \dot{\mathbf{w}}_n + h(1 - \frac{\gamma}{\beta}) \ddot{\mathbf{w}}_n \quad [19]$$

$$\ddot{\mathbf{w}}_{n+1} = \frac{1}{\beta h^2} \boldsymbol{\theta}_{n+1} - \frac{1}{\beta h} \dot{\mathbf{w}}_n - \frac{0.5 - \beta}{\beta} \ddot{\mathbf{w}}_n \quad [20]$$

Dans le cas d'une version spatiale, cette extension n'est pas directe (voir Ibrahimbegovic et AlMikdad [IBR 98]), et les deux dernières équations sont beaucoup plus compliquées.

Les approximations de Newmark de [16] à [20] sont accompagnées par les équations de mouvement d'équilibre dynamique établie à l'instant t_{n+1} . La substitution des approximations des vitesses et des accélérations dans les équations de mouvement, conduit à un système d'équations non linéaire d'inconnues \mathbf{u}_{n+1} et $\boldsymbol{\theta}_{n+1}$. La solution est déterminée par une procédure itérative de Newton-Raphson, qui nécessite une forme linéarisée des équations (voir la section 5).

4. Schéma d'intégration HHT (Hilber-Hughes-Taylor)

Il est bien établi aujourd'hui que le schéma de Newmark est susceptible de souffrir des problèmes d'instabilité en présence des hautes fréquences (voir Hughes *et al.* [HIL 77] et [CAR 89]). L'introduction d'un amortissement numérique (voir Hilber *et al.* [HIL 77]), permet de rétablir cette stabilité et mieux maîtriser les problèmes d'ordre numérique générés par les hautes fréquences. A la différence des travaux précédents, nous proposons dans ce travail une autre alternative d'extension du schéma dissipatif HHT du second ordre à l'intégration de grandes rotations, dédié aux modèles de poutre soumis à de grandes rotations. Nous discutons ainsi les aspects particuliers de l'implantation numérique de cette nouvelle alternative.

Nous exprimons l'effort interne directement à l'instant $t_{n+\alpha}$ en considérant un vecteur de rotation incrémentale mesuré entre t_n et $t_{n+\alpha}$. Comme les paramètres appartiennent à l'espace $TISO(3)$, ce vecteur de rotation peut être établis facilement comme :

$$\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} = \alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1} ; \quad \alpha \in [0, 1] \quad [21]$$

REMARQUE : Hilbert *et al.* [HIL 77] ont montré qu'avec le choix de $\alpha \in [0.66, 1]$ le schéma HHT est stable pour le cas linéaire.

Par conséquent, le tenseur de rotation à l'instant $t_{n+\alpha}$ est calculé directement par l'application exponentielle sur le vecteur dans [21] surposée au tenseur $\boldsymbol{\Lambda}_n$:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha} = \boldsymbol{\Lambda}_n \exp(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \quad [22]$$

De même, le vecteur de position à cet instant peut s'écrire comme :

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+\alpha} = \alpha \boldsymbol{\varphi}_{n+1} + (1 - \alpha) \boldsymbol{\varphi}_n \quad [23]$$

Le schéma HHT proposé dans ce travail repose sur les mêmes approximations du schéma de Newmark données par [16], [17], [19] et [20]. En revanche, nous remplaçons la contribution des efforts internes ainsi que des efforts externes, dans les équations d'équilibre par la forme correspondante exprimée à l'instant $t_{n+\alpha}$.

$$\delta \pi_{inert,n+1} + \delta \pi_{int,n+\alpha} = \alpha \delta \pi_{ext,n+1} + (1 - \alpha) \delta \pi_{ext,n} \quad [24]$$

où $\delta \pi_{inert,n+1}$ est la contribution de l'effet d'inertie. Nous définissons le travail virtuel interne à l'instant $t_{n+\alpha}$ comme suit :

$$\delta \pi_{int,n+\alpha} = \int_L \begin{pmatrix} \delta \boldsymbol{\varphi}' \\ \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta \boldsymbol{\theta}' \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{r}_{n+\alpha}) ds \quad [25]$$

où $\mathbf{r}_{n+\alpha}$ est le vecteur résiduel établi à l'instant $t_{n+\alpha}$, qui s'écrit explicitement comme

$$\mathbf{r}_{n+\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha}^T \\ \{[\boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha}^T \boldsymbol{\varphi}'_{n+\alpha} \times] \\ \mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1})\} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \{\mathbf{R}(\alpha \boldsymbol{\theta}'_{n+1}) + \\ [exp[\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}]^T \boldsymbol{\kappa}_n \times] \mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1})\} \\ \mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{n}_{n+\alpha} \\ \mathbf{m}_{n+\alpha} \end{pmatrix} \quad [26]$$

Dans [26], \mathbf{T} est le tenseur différentiel de rotation (voir Ibrahimbegovic *et al.* [IBR 95b]), caractérisant la relation entre le vecteur de rotation itérative virtuelle $\delta\boldsymbol{\psi}$ et le vecteur de rotation incrémentale virtuelle $\delta\boldsymbol{\theta}$.

$$\delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\theta}_{n+1})\delta\boldsymbol{\theta} \quad [27]$$

où

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\theta}_{n+1}) = \frac{\sin\theta}{\theta} \mathbf{I} + \frac{1 - \cos\theta}{\theta^2} \boldsymbol{\Theta} + \frac{\theta - \sin\theta}{\theta^3} \boldsymbol{\theta}_{n+1} \otimes \boldsymbol{\theta}_{n+1} \quad [28]$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}_{n+1}) &= (c_1\boldsymbol{\theta}_{n+1} - c_2(\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \times \boldsymbol{\theta}_{n+1}) + c_3(\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \cdot \boldsymbol{\theta}_{n+1})\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha}) \otimes \boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \\ &\quad + c_4\boldsymbol{\theta}_{n+1} + c_5((\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \cdot \boldsymbol{\theta}_{n+1})\mathbf{I} + \boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \otimes \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \end{aligned} \quad [29]$$

avec

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\theta_{n+1} \cos \theta_{n+1} - \sin \theta_{n+1}}{\theta_{n+1}^3}; \quad c_2 = \frac{\theta_{n+1} \sin \theta_{n+1} + 2 \cos \theta_{n+1} - 2}{\theta_{n+1}^4} \\ c_3 &= \frac{2 \sin \theta_{n+1} - 2\theta_{n+1} - \theta_{n+1} \cos \theta_{n+1}}{\theta_{n+1}^5}; \quad c_4 = \frac{1 - \cos \theta_{n+1}}{\theta_{n+1}^2} \\ c_5 &= \frac{\theta_{n+1} - \sin \theta_{n+1}}{\theta_{n+1}^3} \end{aligned} \quad [30]$$

$\mathbf{n}_{n+\alpha}$ et $\mathbf{m}_{n+\alpha}$ sont les efforts conjugués dans le sens de l'énergie des déformations $\boldsymbol{\epsilon}_{n+\alpha}$ et $\mathbf{k}_{n+\alpha}$, données respectivement par :

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+\alpha} = \boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha}^T \boldsymbol{\varphi}'_{n+1} - \mathbf{e}_1 \quad [31]$$

$$\mathbf{K}_{n+\alpha} = \boldsymbol{\Lambda}_{n+\alpha}^T \boldsymbol{\Lambda}'_{n+\alpha} \quad [32]$$

En exploitant l'équation [22], le tenseur antisymétrique des courbures peut s'écrire comme :

$$\mathbf{K}_{n+\alpha} = \exp[\alpha\boldsymbol{\theta}_{n+1}]^T (\exp[\alpha\boldsymbol{\theta}_{n+1}])' + \exp[\alpha\boldsymbol{\theta}_{n+1}]^T \mathbf{K}_n \exp[\alpha\boldsymbol{\theta}_{n+1}] \quad [33]$$

où $\mathbf{K}_n = \boldsymbol{\Lambda}_n^T \boldsymbol{\Lambda}'_n$ sont les courbures définies à l'instant t_n . Cette dernière relation entre les tenseurs antisymétriques des courbures se traduit par une simple relation entre leurs vecteurs axiaux

$$\mathbf{k}_{n+\alpha} = \alpha \mathbf{T}^T(\alpha\boldsymbol{\theta}_{n+1}) \boldsymbol{\theta}'_{n+1} + \exp[\alpha\boldsymbol{\theta}_{n+1}]^T \mathbf{k}_n \quad [34]$$

En gardant toujours la même loi de comportement linéaire de Saint Venant-Kirchhoff, les efforts à l'instant $t_{n+\alpha}$ s'écrivent

$$\mathbf{n}_{n+\alpha} = \mathbf{C}_n \boldsymbol{\epsilon}_{n+\alpha} \quad [35]$$

$$\mathbf{m}_{n+\alpha} = \mathbf{C}_m \mathbf{k}_{n+\alpha} \quad [36]$$

où \mathbf{C}_n et \mathbf{C}_m sont les matrices de la loi de comportement données par les équations [8] et [9]. En introduisant les équations [31] et [33] dans l'équation [25], nous obtenons les équations de mouvement modifiées du schéma d'intégration HHT. Par contre, l'actualisation des vitesses et accélérations angulaires avec le schéma proposé est toujours gérée par les équations [16] à [20] utilisées pour le schéma de Newmark.

5. Linéarisation cohérente

La méthode de Newton employée pour la résolution du système d'équations non linéaire, nécessite l'obtention d'une forme linéarisée. Ceci est effectué par le biais de la dérivée directionnelle (voir Marsden et Hughes [MAR 83]).

$$\mathcal{L}in[G] = G + \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} [G(\varphi_\epsilon, \mathbf{\Lambda}_\epsilon)] \quad [37]$$

Comme les termes d'inerties dans la formulation faible pour le schéma HHT sont traités de la même manière que pour le schéma de Newmark, nous pouvons exploiter les résultats obtenus précédemment donnés dans AlMikdad et Ibrahimbegovic [IBR 98], et il ne reste à détailler ici que la linéarisation de la partie interne. La linéarisation de la partie interne du travail virtuel est composée d'une partie matérielle et une géométrique

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} [(\pi_{int,n+\alpha})_\epsilon] &= \int_L \{ \delta \epsilon_{n+\alpha} \cdot \Delta \mathbf{n}_{n+\alpha} + \delta \mathbf{k}_{n+\alpha} \cdot \Delta \mathbf{m}_{n+\alpha} \} ds \\ &+ \int_L \{ \Delta \delta \epsilon_{n+\alpha} \cdot \mathbf{n} + \Delta \delta \mathbf{k}_{n+\alpha} \cdot \mathbf{m}_{n+\alpha} \} ds \quad [38] \end{aligned}$$

En exploitant les équations [31], [32], [34] et [35], les incréments des efforts internes peuvent s'écrire sous la forme

$$\Delta \mathbf{n}_{n+\alpha} = \alpha \mathbf{C}_n (\mathbf{\Lambda}_{n+\alpha}^T \Delta \varphi'_{n+1} - (\mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \Delta \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \times (\mathbf{\Lambda}_{n+\alpha}^T \varphi'_{n+\alpha})) \quad [39]$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{m}_{n+\alpha} &= \mathbf{C}_m (\alpha \Delta \mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \boldsymbol{\theta}'_{n+1} + \alpha \mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \Delta \boldsymbol{\theta}'_{n+1} \\ &- \alpha (\mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \Delta \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \times (\exp[\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}]^T \boldsymbol{\kappa}_n)) \quad [40] \end{aligned}$$

Comme les configurations initiale et actuelle sont éloignées l'une de l'autre, les incréments des déformations virtuelles ne peuvent pas être négligés. Donnant leurs expressions explicitement :

$$\begin{aligned} \Delta \delta \epsilon &= -(\Delta \mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \delta \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \times (\mathbf{\Lambda}_{n+\alpha}^T \varphi'_{n+\alpha}) \\ &- (\mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \delta \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \times (\alpha \mathbf{\Lambda}_{n+\alpha}^T \Delta \varphi'_{n+1}) \\ &- (\alpha \mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \Delta \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \times (\mathbf{\Lambda}_{n+\alpha}^T \delta \varphi') \\ &+ (\mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \delta \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \times ((\alpha \mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \Delta \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \times \varphi') \quad [41] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta \delta \mathbf{k} = & \Delta \delta \mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \boldsymbol{\theta}'_{n+1} + \alpha \delta \mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \Delta \boldsymbol{\theta}'_{n+1} + \Delta \mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \delta \boldsymbol{\theta}'_{n+1} \\ & - (\Delta \mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \delta \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \times (\exp[\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}]^T \boldsymbol{\kappa}_n) \\ & + (\mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \delta \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \times ((\alpha \mathbf{T}^T(\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \Delta \boldsymbol{\theta}_{n+1}) \times (\exp[\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}]^T \boldsymbol{\kappa}_n)) \end{aligned} \quad [42]$$

Par substitutions des équations [39],[40], [41] et [42] dans [38], nous aboutissons à la contribution de la partie interne dans le système linéarisé du travail virtuel écrit en notation matricielle comme :

$$\mathcal{L}in[\delta \pi_{int}] = \int_L \begin{pmatrix} \delta \varphi' \\ \delta \boldsymbol{\theta}_{n+1} \\ \delta \boldsymbol{\theta}'_{n+1} \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{r}_{n+\alpha} + \mathbf{K} \begin{pmatrix} \Delta \varphi' \\ \Delta \boldsymbol{\theta}_{n+1} \\ \Delta \boldsymbol{\theta}'_{n+1} \end{pmatrix}) ds \quad [43]$$

où le vecteur $\mathbf{r}_{n+\alpha}$ est défini par l'équation [26]. La matrice tangente de rigidité \mathbf{M}_T dans [43], est composée d'une partie matérielle et d'une partie géométrique, qui s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}^T & [\boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\varphi}' \times] \mathbf{T}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}(\alpha \boldsymbol{\theta}'_{n+1}) + [\exp[\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}]^T \boldsymbol{\kappa}_n \times] \mathbf{T}^T & \mathbf{T}^T \end{bmatrix}^T \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{C}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}^T & [\boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\varphi}' \times] \mathbf{T}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}(\alpha \boldsymbol{\theta}'_{n+1}) + [\exp[\alpha \boldsymbol{\theta}_{n+1}]^T \boldsymbol{\kappa}_n \times] \mathbf{T}^T & \mathbf{T}^T \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} \\ & & & -\boldsymbol{\Lambda}[\mathbf{n}_{n+\alpha} \times] \mathbf{T}^T & & \\ \mathbf{T}[\mathbf{n}_{n+\alpha} \times] \boldsymbol{\Lambda}^T & \mathbf{T}[\mathbf{n}_{n+\alpha} \times][\boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\varphi}' \times] \mathbf{T}^T + \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{n}_{n+\alpha} \times \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\varphi}') & & & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} & \boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{m}) \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{m}) & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}[\mathbf{m} \times][\exp[\boldsymbol{\theta}_{n+1}]^T \boldsymbol{\kappa}_n \times] \mathbf{T}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [44] \end{aligned}$$

Dans [45], les matrices $\boldsymbol{\Pi}$ est \mathbf{J} sont définies comme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{a}) = & (c_1 \mathbf{a} + c_2(\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \times \mathbf{a}) + c_3(\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \cdot \mathbf{a})\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha}) \otimes \boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \\ & - c_4 \mathbf{A} + c_5((\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \cdot \mathbf{a})\mathbf{I} + \boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \otimes \mathbf{a}) \end{aligned} \quad [45]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J} = & (c_1(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}'_{n+\alpha}) - c_2 \mathbf{m} \boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \times \boldsymbol{\theta}'_{n+\alpha}) + c_3(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}_{n+\alpha})(\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \cdot \boldsymbol{\theta}'_{n+\alpha}) \mathbf{I} \\ & + (a_1(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}'_{n+\alpha}) - a_2 \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \times \boldsymbol{\theta}'_{n+\alpha})) \\ & + a_3(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}_{n+\alpha})(\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \cdot \boldsymbol{\theta}'_{n+\alpha})[\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \otimes \boldsymbol{\theta}_{n+\alpha}] \end{aligned}$$

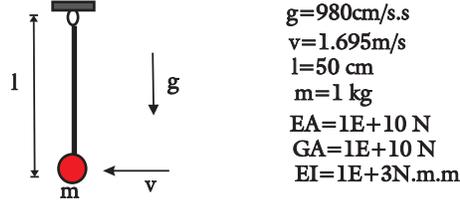


Figure 2. Pendule simple : caractéristiques mécanique et géométrique

$$\begin{aligned}
& +c_5[\boldsymbol{\theta}'_{n+\alpha} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \boldsymbol{\theta}'_{n+1}] + c_3(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\theta}_{n+\alpha})[\boldsymbol{\theta}'_{n+\alpha} \otimes \boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} + \boldsymbol{\theta} \otimes \boldsymbol{\theta}'_{n+\alpha}] \\
& +c_3(\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \cdot \boldsymbol{\theta}'_{n+\alpha})[\boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \boldsymbol{\theta}_{n+\alpha}] \\
& -c_2[(\boldsymbol{\theta}'_{n+\alpha} \times \mathbf{m}) \otimes \boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} + \boldsymbol{\theta}_{n+\alpha} \otimes (\boldsymbol{\theta}'_{n+\alpha} \times \mathbf{m})], \quad [46]
\end{aligned}$$

avec les coefficients $c_{i=1,5}$ qui sont déjà donnés dans l'équation [30], et les coefficients $a_{i=1,3}$

$$a_1 = c_3 - c_2; \quad a_2 = (c_1 - 4c_2)/\theta_{n+1}^2; \quad a_3 = (c_2 - 5c_3)\theta_{n+1}^2. \quad [47]$$

où $\theta_{n+1} = \|\boldsymbol{\theta}_{n+1}\|$.

6. Simulations numériques

Dans cette section nous présentons les résultats de trois applications numériques, afin de montrer et évaluer la robustesse du schéma proposé. L'implantation numérique du schéma proposé a été faite dans le logiciel FEAP développé par Pr. R. L. Taylor à l'Université de Californie, Berkeley. Dans tous les exemples on a utilisé $\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = \frac{1}{4}$

6.1. Simple pendule

Dans le premier exemple, on étudie un simple pendule quasi rigide d'une densité négligeable. Une masse concentrique attachée à son extrémité libre et articulé à l'autre extrémité (voir figure 2). Le système sous le champ de pesanteur est entraîné par une vitesse initiale $v = 1.695\text{m/s}$. Il est modélisé par un élément de poutre dont la rigidité en flexion ($EI = 10^3$) est beaucoup plus petite que les rigidités par rapport aux déformations axiale et de cisaillement ($EA = 10^{10}$, $GA = 10^{10}$). La figure 3 confirme la présence des hautes fréquences dans l'accélération obtenue par le schéma de Newmark ($\Delta t = 0.01\text{sec.}$), qui est incapable de les dissiper. Or avec le schéma HHT (figure 4) on arrive à faire disparaître ces oscillations numériques après un certain nombre de pas du temps et ainsi retrouver la stabilité.

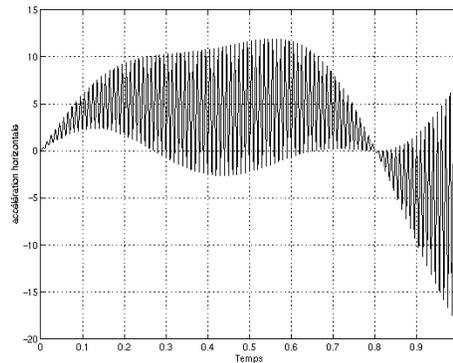


Figure 3. Pendule simple : l'accélération horizontale de l'extrémité libre du pendule obtenu par le schéma de Newmark

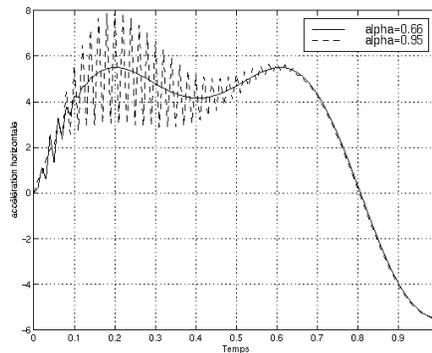


Figure 4. Pendule simple : l'accélération horizontale de l'extrémité libre du pendule obtenu par le schéma HHT pour $\alpha = 0.66$ et $\alpha = 0.95$

6.2. Mécanisme à quatre barres

Dans le but d'illustrer la capacité du schéma HHT et de réduire les bruits numériques de hautes fréquences dans le calcul des contraintes. On reprend le problème traité par Bauchau *et al.* [BAU 95] et Ibrahimbegovic et Mamouri [IBR 99]. Il s'agit d'un mécanisme à quatre barres, dont deux composantes déformables sont liées par une masse $m = 0.5kg$, en liaison pivot avec deux barres rigides. Le module de Young $E = 73GN/m^2$ des composantes flexibles et leur section est $A = 1 \times 5mm^2$ (voir figure 5). Chaque composante déformable est modélisée par 4 éléments de poutre à deux nœuds, les barres rigides sont idéalisées par le même élément de poutre avec des propriétés physiques assez importantes et en négligeant leur masse. Le système est

entraîné par une charge d'impulsion appliquée sur la masse. Elle atteint linéairement $2N$ à $t = 0.128s$ puis s'annule à $0.256s$ et après cet instant, le système continue en vibration libre. L'événement le plus important dans la première période de mouvement se produit à l'instant $0.641s$ où la barre rigide à gauche est obligée de changer le sens de la rotation à cause de la contrainte cinématique, provoquant des modes de vibrations axiales importantes (voir figure 6). Comme le montre la figure 7 le schéma HHT est capable de réduire les oscillations de l'effort axial en le comparant avec le schéma de conservation de l'énergie (voir Ibrahimbegovic et Mamouri [IBR 99]).

Comme il est clair sur la figure 8, un schéma qu'on développe actuellement (voir annexe 1), capable de conserver ou de dissiper l'énergie, affiche une capacité encore plus grande et une meilleure maîtrise du bruit numérique que le schéma HHT.

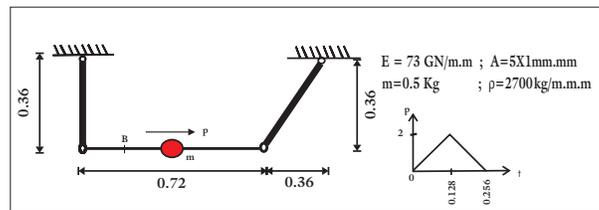


Figure 5. Mécanisme à quatre barres : caractéristiques mécaniques et géométriques

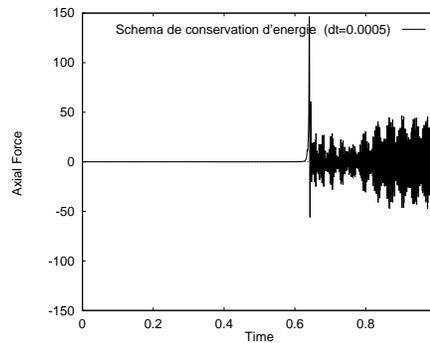


Figure 6. Mécanisme à quatre barres : effort axial au point de Gauss de l'élément à gauche de la masse obtenu par le schéma de conservation d'énergie

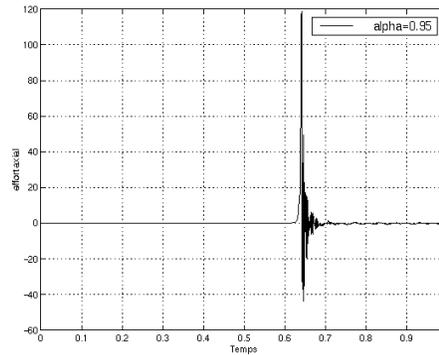


Figure 7. Mécanisme à quatre barres : effort axial au point de Gauss de l'élément à gauche de la masse obtenu par le schéma dissipatif HHT

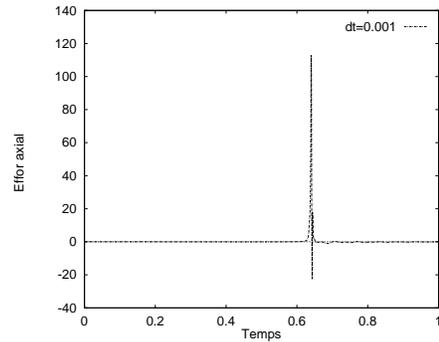


Figure 8. Mécanisme à quatre barres : effort axial au point de Gauss de l'élément à gauche de la masse obtenu par le schéma de conservation et dissipation d'énergie

6.3. Poutre droite

Cet exemple est utilisé afin d'illustrer le besoin d'un schéma dissipatif tel que HHT (voir Ibrahimbegovic et Mamouri [IBR 99]) pour réduire le bruit numérique de hautes fréquences dans le calcul des efforts résultants. Il s'agit d'une poutre droite de longueur de 2.4 m, pivotant autour de l'axe hors du plan à l'extrémité et la deuxième extrémité est libre. Les propriétés physiques sont présentées sur tableau ci-dessous. La poutre est entraînée par une charge triangulaire appliquée à l'extrémité libre dans les deux directions (hors plan et latérale), la charge varie linéairement de $t = 0$ à $t = 0.025$ pour atteindre 1000 N puis, s'annule à $t = 0.05s$. La poutre est modélisée par huit éléments de poutre à deux nœuds et l'analyse dynamique se fait par les deux schémas, de conservation d'énergie (voir Simo et al. [SIM 95]) et le schéma HHT

présenté dans ce travail avec $h = 0.001\text{sec}$. La figure 9 représente la variation de l'effort tranchant calculée au point de Gauss de l'élément à côté de la liaison pivot. La réponse obtenue par le schéma de conservation de l'énergie présente des oscillations plus importantes qu'avec le schéma proposé à cause de son effet dissipatif.

Poutre droite : propriétés mécaniques, géométriques et d'inertie

$$\begin{array}{ll} EA = 4.25080 \cdot 10^7 N & \rho A = 1.60920 kg/m \\ GA_1 = 1.40385 \cdot 10^7 N & \\ EA_2 = 2.80769 \cdot 10^7 N & \\ EI = 2.80514 \cdot 10^4 N/m^2 & \rho I = 1.19092 \cdot 10^{-2} kgm \\ EI_1 = 2.32577 \cdot 10^4 N/m^2 & \rho I_1 = 8.60200 \cdot 10^{-4} kgm \\ EI_2 = 2.98731 \cdot 10^5 N/m^2 & \rho I_2 = 1.10490 \cdot 10^{-2} kgm \end{array}$$

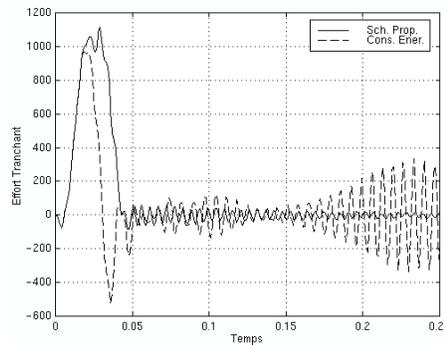


Figure 9. Poutre droite : comparaison des variations de l'effort tranchant obtenu par le schéma de conservation d'énergie et le schéma dissipatif HHT

Remerciement

Ce travail a été soutenu par le MENRT de la France et de l'Algérie, ainsi que l'ANVAR.

7. Conclusion

Cet article a été consacré à l'implantation numérique du schéma d'intégration temporelle HHT dissipatif du second ordre dédié à un modèle de poutre tridimensionnelle soumis à de grandes rotations. Le choix du vecteur de rotation incrémentale nous a facilité la construction et l'implantation de ce schéma, en nous permettant de traiter les rotations à chaque pas de la même manière comme des variables de translation. On a montré à travers les exemples présentés que ce schéma peut être effectivement utilisé pour la dynamique non linéaire des structures pour réduire le bruit numérique dans un calcul éléments finis. Nous avons également pu illustrer l'efficacité du schéma dans la maîtrise et le contrôle des hautes fréquences pour construire une bonne représentation des contraintes.

8. Bibliographie

- [ALM 97] ALMIKIDAD M., IBRAHIMBEGOVIC A., « Dynamique et schémas d'intégration pour modèles de poutres géométriquement exacts », *Revue Euro. Elém. Finis*, vol. 6 N° 4, 1997, p. 471-502.
- [AUB 95] AUBRY D., VAILHEN C., DRESSLER B., LUCAS D., « Nonlinear dynamic analysis of frictional contact between shell structures », *9th DYMAT Tech. Conf. Mat. and Struc. Modelling in collision reasearch, TU-Munich*, vol. I, 1995.
- [BAR 98] BARRACO A., GILBERT M., « Quasi exact solutions for some elastodynamics problems », *Fourth World Congress on Computational Mechanics (IV WCCM)*, vol. CD, 1998.
- [BAU 95] BAUCHAU O., DAMILANO G., THERON J., « Numerical integration of non-linear elastic multibody systems », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 38, 1995, p. 2727-2751.
- [BOT 98] BOTTASSO C. L., BORRI M., « Integrating finite rotations », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng., in press*, vol. 164, 1998, p. 307-331.
- [CAR 88] CARDONA A., GERADIN M., « A beam finite element non-linear theory with finite rotations », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 26, 1988, p. 2403-2438.
- [CAR 89] CARDONA A., GERADIN M., « Time integration of the equations of motion in mechanism analysis », *Comput. Struc.*, vol. 33, 1989, p. 801-820.
- [HIL 77] HILBER H., HUGHES T., TAYLOR R., « Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics », *Earthq. Eng. Struc. Dynam.*, vol. 5, 1977, p. 283-292.
- [IBR 95a] IBRAHIMBEGOVIC A., « On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three dimensional curved beam element », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 112, 1995, p. 11-26.
- [IBR 95b] IBRAHIMBEGOVIC A., FREY F., KOZAR I., « Computational aspect of vector-like parameterization of three dimensional finite rotations », *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, vol. 38, 1995, p. 3653-3673.
- [IBR 97] IBRAHIMBEGOVIC A., « On the choice of finite rotation parameters », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 149, 1997, p. 49-71.
- [IBR 98] IBRAHIMBEGOVIC A., ALMIKIDAD M., « Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes », *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, vol. 41, 1998, p. 781-814.
- [IBR 99] IBRAHIMBEGOVIC A., MAMOURI S., « Nonlinear dynamics of flexible beams in planar motion: formulation and time-stepping schemes for stiff problems », *Comput. Struc.*, vol. 70, 1999, p. 1-22.
- [IDE 89] IDER S., AMIROUCHE F., « Nonlinear modeling of flexible multibody systems dynamics subjected to variable constraints », *J. Appl. Mech.*, vol. 56, 1989, p. 444-450.
- [JEL 96] JELENIC G., CRISFIELD M., « Non-linear 'master-slave' relationship for joints in 3D beams with large rotations », *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, vol. 135, 1996, p. 211-228.
- [JEL 98] JELENIC G., CRISFIELD M., « Interpolation of rotational variables in nonlinear dynamics of 3d beams », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 43, 1998, p. 1193-1222.
- [KAN 85] KANE T. R., LEVINSON D., *Dynamics Theory and Applications*, Mc-Graw Hill, New York, 1985.

- [KUH 98] KUHL D., CRISFIELD M. A., « Energy-conserving and decaying algorithms in nonlinear structural dynamics », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 45, 1998, p. 569-599.
- [MAR 83] MARSDEN J. E., HUGHES T., *Mathematical foundations of elasticity*, Prentice-Hall, Englewoods Cliffs, N.J., 1983.
- [SIM 86] SIMO J., VU-QUOC L., « On the dynamics of flexible beams under large overall motions the plane case, Part 1 and 2 », *ASME J. Appl. Mech.*, vol. 53, 1986, p. 849-863.
- [SIM 95] SIMO J., TARNOW N., DOBLARE M., « Nonlinear dynamics of three-dimensional rods: Exact energy and momentum conserving algorithm », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 38, 1995, p. 1431-1473.
- [VEU 76] FRAEIJIS DE VEUBEKE B., « The dynamics of flexible bodies », *Int. J. Engng. Science*, vol. 14, 1976, p. 895-913.

9. Annexe

Nous présentons dans cette annexe un schéma qui semble être encore plus intéressant que le schéma dissipatif HHT dans le sens d'une bonne maîtrise des hautes fréquences et le calcul des efforts internes (voir exemple 2). Ce dernier est encore en cours de validation pour une version tridimensionnelle. Nous décrivons brièvement la version bi-dimensionnelle. Ce schéma est capable de conserver et dissiper l'énergie pour le choix correspondant des paramètres α_1 et α_2 . L'équation de mouvement discrète d'un modèle de poutre 2d prend la forme :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_0^L \delta \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{A}_\rho (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) ds + \frac{1}{\Delta t} \int_0^L \delta \psi I_\rho (\omega_{n+1} - \omega_n) ds \quad [48] \\ & + \int_0^L \{ [\delta \boldsymbol{\varphi}' - \delta \psi \times \boldsymbol{\varphi}_{n+\frac{1}{2}}] \cdot \mathbf{n} + \delta \psi' m \} ds = \delta \pi_{ext_{n+\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{n} = \boldsymbol{\Lambda}_{n+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{C}_n (\mathbf{E}_{n+1} + \mathbf{E}_n) + \alpha_1 \mathbf{C}_n (\mathbf{E}_{n+1} - \mathbf{E}_n) \right\} \quad [49]$$

$$m = \cos^2 \left(\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{2} \right) \left\{ \frac{1}{2} C_m (k_{n+1} + k_n) + \alpha_1 (k_{n+1} - k_n) \right\} \quad [50]$$

où \mathbf{E}_{n+1} , k_{n+1} et \mathbf{E}_n , k_n sont les représentations matérielles des déformations aux instants t_{n+1} et t_n . A la différence du schéma dissipatif HHT, l'actualisation des vitesses de translation et angulaires se fait avec les approximations modifiées suivantes :

$$\mathbf{v}_{n+1} = \frac{2}{\Delta t(1+2\alpha_2)} (\boldsymbol{\varphi}_{n+1} - \boldsymbol{\varphi}_n) - \frac{1-2\alpha_2}{1+2\alpha_2} \mathbf{v}_n \quad [51]$$

$$\omega_{n+1} = \frac{4}{\Delta t(1+2\alpha_2)} \tan \left(\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{2} \right) - \frac{1-2\alpha_2}{1+2\alpha_2} \omega_n \quad [52]$$

avec α_1 et α_2 sans coefficients d'amortissement.