

---

# Simulation numérique de l'endommagement de fluage par la méthode LATIN

Emmanuel Bellenger \* — Pascal Bussy \*

LMCAO

IUT de l'Aisne - Université de Picardie Jules Verne

48 rue d'Ostende

F-02100 Saint-Quentin

emmanuel.bellenger@iut.u-picardie.fr

---

**RÉSUMÉ.** Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à la simulation numérique du comportement des structures soumises au fluage. Le but de cette étude est d'obtenir des prévisions fiables et rapides concernant la durée de vie. Pour cela, nous avons développé des modèles et utilisé des outils numériques appropriés afin de décrire les trois phases de l'évolution macroscopique au cours du fluage. Nous avons étudié en particulier la phase tertiaire due à plusieurs phénomènes que nous avons appelé endommagement de fluage. Simuler numériquement de telles durées de vie exige le calcul de toute l'histoire du chargement (plusieurs milliers d'heures de fluage). Ceci peut être extrêmement coûteux, aussi bien en temps de calcul qu'en place mémoire, surtout si l'on cherche à décrire la totalité de la durée de vie. Le choix de la méthode LATIN adaptée à notre problème permet d'obtenir rapidement l'évolution du comportement de la structure au cours du temps et une estimation de la durée de vie. D'autre part, l'utilisation d'un modèle d'endommagement approprié permet de décrire jusqu'à des niveaux élevés l'évolution de l'endommagement pendant la phase tertiaire.

**ABSTRACT.** This paper deals with a numerical analysis of creep components up to failure. We will take an interest in the macroscopic modeling of the creep curves with its three stages based on the irreversible thermodynamics theory with internal variables. A viscoplastic model is used to describe primary and secondary creep behaviors, and the tertiary creep description is based upon the introduction of a scalar damage variable and the non-linear effects of changes in geometry. Therefore, viscoplastic damage models in non-linear geometry are defined in order to describe different modes of creep damage development. The numerical treatment uses the finite element method and LATIN method in a version adapted to solve non-linear problems with geometrical non linearities, in order to obtain a rapid creep life assessment.

**MOTS-CLÉS :** endommagement de fluage, viscoplasticité, non-linéaire géométrique, intégration des lois de comportement, méthode LATIN.

**KEYWORDS:** creep damage descriptions, viscoplasticity, non-linear geometry, constitutive laws integration, LATIN method.

---

## 1. Introduction

La description de la phase tertiaire déterminante pour l'estimation de la durée de vie nécessite la prise en compte du phénomène d'endommagement. Cette prise en compte se fera dans le cadre de la théorie mécanique de l'endommagement continu, en introduisant une variable scalaire d'endommagement isotrope qui décrira la dégradation du matériau. On tiendra compte aussi de l'effet non-linéaire géométrique qui peut contribuer au développement de cette phase et même être prépondérant dans certains cas. Dans cette étude, nous proposons d'utiliser le modèle élastique d'endommagement convexe développé au LMCAO établi en petites perturbations [BEN 94] et stable au sens des matériaux standards généralisés [HAL 75]. Il présente donc une propriété de stabilité au sens de Drucker, ce qui assure la stabilité numérique et l'unicité de la solution quand un point de la structure atteint un seuil critique d'endommagement. Nos modèles sont les extensions à la viscoplasticité endommageable en non-linéaire géométrique de ce modèle d'endommagement stable initialement écrit dans le cadre des petites perturbations élastiques [BEL 98a].

Les équations constitutives utilisées pour la description du fluage introduisent donc des non linéarités matérielles comme la viscoplasticité et l'endommagement, ainsi que des non-linéarités de géométrie. La résolution numérique de ce problème mécanique nécessite donc le choix d'une méthode numérique appropriée. Dans le cadre du fluage, les logiciels d'éléments finis emploient généralement des méthodes de résolutions des problèmes non-linéaires de type Newton Raphson qui sont incrémentales en temps et itératives sur chaque incrément. Ces calculs sont d'autant plus coûteux que s'accumulent les non-linéarités. Avec ces algorithmes, une simulation numérique d'un cas industriel de fluage nécessite des incréments de temps petits, donc nombreux dans le cas d'une structure à grande durée de vie et nécessite par conséquent un nombre très important de résolutions globales. Contrairement à ces algorithmes incrémentaux, la méthode LATIN proposée par Ladevèze [LAD 85] développe une procédure itérative qui traite l'ensemble du chargement en quelques incréments, voire un seul incrément. On voit donc, dans le cas du fluage, où réside l'intérêt de cette méthode, qui permet d'envisager de résoudre des problèmes non-linéaires en 10 à 100 fois moins d'incrémentes et un nombre de résolutions globales beaucoup plus petit. On pourra ainsi décrire les phases de fluage primaire et secondaire en quelques incréments pour atteindre rapidement la phase tertiaire qui regroupe une grande part des non-linéarités du problème. On obtient ainsi une estimation rapide de la durée de vie de la structure avant d'étudier, si nécessaire, la propagation de l'endommagement pendant la phase tertiaire grâce à nos modèles.

## 2. Modélisations viscoplastiques endommageables en non-linéaire géométrique

On travaille dans le cadre de la thermodynamique des processus irréversibles avec variables internes. On ne considère que les phénomènes d'écroutissage isotrope et d'endommagement de fluage. Pour la modélisation des phases de fluage primaire et secondaire, on utilise un modèle viscoplastique de type Chaboche [LEM 85] couplé

à une loi d'écroutissage isotrope additive. Les données expérimentales sur les phénomènes de rupture par fluage permettent de mettre en évidence deux modes privilégiés de rupture qui dépendent du niveau de contrainte et de température [ARG 82]. Une rupture ductile précédée par la réduction de la section externe due aux grandes déformations de fluage qui s'expliquent principalement par des glissements dans les grains. La rupture est alors due à l'instabilité plastique associée à une déformation à rupture importante. Des cavités peuvent apparaître durant la striction finale. Ce phénomène de rupture ductile est prépondérant pour les contraintes élevées à faible température. La rupture fragile ou intergranulaire en fluage s'explique par la détérioration des matériaux due à la formation de cavités dans les joints de grains qui viennent réduire la section interne résistante. Ce phénomène apparaît pour les faibles contraintes à haute température. Dans ce cas, l'effet non-linéaire géométrique n'est pas observé et la déformation de fluage reste petite. Toutefois, les résultats expérimentaux suggèrent l'existence d'une zone de transition où aucun des phénomènes décrit précédemment prédomine pendant la phase tertiaire. On admet plutôt une combinaison des mécanismes de rupture fragile et ductile. Afin de décrire les phénomènes précédents dans le cadre d'une approche phénoménologique, deux modèles viscoplastiques endommageables en non-linéaire géométrique ont été introduits [BEL 01].

Le modèle non-linéaire géométrique utilisé introduit une configuration corotationnelle dite configuration tournée [LAD 81]. Une rotation locale  $\mathbf{R}$  transforme la configuration actuelle  $\Omega$  en une configuration tournée  $\underline{\Omega}$ . L'évolution de  $\mathbf{R}$  est donnée par une démarche phénoménologique. L'usage d'un référentiel tournant permet de découpler les non-linéarités géométriques des non linéarités physiques. Une fois la cinématique de  $\mathbf{R}$  déterminée, on peut formuler les lois constitutives comme en petites perturbations en utilisant les variables tensorielles tournées. On écrit nos modèles viscoplastiques endommageables en non-linéaire géométrique en utilisant la contrainte de Kirchhoff tournée  $\underline{\tau}$  comme tenseur des contraintes et le taux de déformation tourné  $\underline{D}$  comme vitesse de déformation, sous la forme d'une loi en taux dans la configuration corotationnelle entre  $\dot{\underline{\tau}}$  et  $\underline{D}$ .

L'énergie libre spécifique s'écrit dans notre cas, et contrairement aux modèles classiques, de la façon suivante [BEL 98a] :

$$\rho\psi(\underline{\varepsilon}_e, X, p) = \rho\psi_e(\underline{\varepsilon}_e, X) + \rho\psi_{vp}(p) + \rho\psi_X(X) \quad [1]$$

$X$  est la variable d'état interne d'endommagement scalaire reliée à l'endommagement scalaire classique  $D$ , par le changement de variable suivant :

$$1 - D = \frac{1}{1 + X} \quad \text{soit} \quad X = \frac{D}{1 - D} \quad [2]$$

On aura donc  $X = 0$  pour un matériau sain et  $X \rightarrow \infty$  pour un matériau totalement endommagé.  $X$  n'est pas borné, ce qui évite aussi les problèmes numériques lors du cumul de cette variable.

$\rho\psi_{vp}(p)$  et  $\rho\psi_X(X)$  sont des fonctions convexes nulles à l'origine,  $p$  la variable interne d'érouissage isotrope est la déformation viscoplastique cumulée.  $\rho\psi_e(\underline{\varepsilon}_e, X)$  est l'énergie libre élastique endommagée.

$$\rho\psi_e(\underline{\varepsilon}_e, X) = \frac{1}{2} Tr[\underline{\varepsilon}_e \frac{C_e}{1+X} \underline{\varepsilon}_e] \quad [3]$$

$C_e$  est le tenseur d'élasticité linéaire.  $\underline{\varepsilon}_e$  est la partie élastique de  $\underline{\varepsilon}$  la déformation totale dans la configuration tournée du modèle cinématique.  $\underline{\varepsilon} = \int_0^T \underline{D} dt$  avec  $\underline{D} = \underline{D}_e + \underline{D}_{vp}$ ,  $\underline{\varepsilon}_e = \int_0^T \underline{D}_e dt$ ,  $\underline{\varepsilon}_{vp} = \int_0^T \underline{D}_{vp} dt$ .  $\underline{D}_e$  est le taux de déformation élastique tournée et  $\underline{D}_{vp}$  est le taux de déformation viscoplastique tournée.

L'utilisation des principes thermodynamiques avec l'énergie libre définie précédemment permet d'écrire les lois d'état suivantes :

$$\underline{\tau} = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \underline{\varepsilon}_e} = \frac{C_e}{1+X} \underline{\varepsilon}_e, \quad R = \rho \frac{\partial \psi_{vp}}{\partial p} = Q(1 - \exp(-bp)) \quad [4]$$

$$Y = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial X} + \rho \frac{\partial \psi_X}{\partial X} = -\frac{1}{2} Tr[\underline{\tau} C_e^{-1} \underline{\tau}] + Z(X), \quad Z(X) = \rho \frac{\partial \psi_X}{\partial X} \quad [5]$$

$Q$  et  $b$  sont des constantes.  $R$  est la variable associée à l'érouissage isotrope et  $Y$  la variable associée à l'endommagement.

Le choix de la fonction  $R$  permet de décrire les phases de fluage primaire et secondaire. Afin d'assurer l'admissibilité thermodynamique du processus irréversible d'écoulement viscoplastique avec endommagement, on suppose que les phénomènes d'érouissage et d'endommagement dissipent indépendamment. On représente ces dissipations par un potentiel de dissipation viscoplastique  $\varphi_{vp}^*(\underline{\tau}, R,)$  et un potentiel de dissipation d'endommagement  $\varphi_x^*(Y)$  dont on obtient les lois complémentaires d'évolution par la règle de normalité. L'écoulement viscoplastique est décrit par le modèle de Chaboche [LEM 85]. Le choix de  $\varphi_x^*(Y)$  couplé avec l'effet non linéaire géométrique permettra de décrire les différents modes d'endommagement de fluage vus précédemment.

Les lois de comportement des modèles sont résumés dans le tableau 1 [BEL 01].  $K$ ,  $n$ ,  $n_x$ ,  $q$ ,  $c$  et  $A$  sont des constantes.  $R_0$  et  $Z_0$  désignent respectivement la limite d'écoulement viscoplastique et la limite d'endommagement.  $\lambda_x$  est le multiplicateur d'endommagement défini par la condition de consistance  $f_X = 0$  et  $\dot{f}_X = 0$ . Le modèle viscoplastique endommageable est utilisé pour décrire une phase tertiaire qui s'explique par un phénomène de rupture fragile. L'influence de l'effet non-linéaire géométrique dans ce modèle permet de décrire une combinaison fragile-ductile. Pour ce modèle, le potentiel de dissipation d'endommagement  $\varphi_x^*(Y)$  est pris sous la forme d'une fonction puissance dans un formalisme identique à la description de l'écoulement viscoplastique. Pour décrire une rupture ductile pendant la phase tertiaire, le modèle viscoplastique visco-endommageable est introduit en prenant  $\varphi_x^*(Y)$  comme la fonction indicatrice d'un convexe d'endommagement  $f_x(Y)$  défini par une fonction de charge dans un formalisme identique à la plasticité indépendante du temps.

<i>modèle viscoplastique endommageable</i>	<i>modèle viscoplastique visco-endommageable</i>
$\varphi_{vp}^* = \frac{K}{n+1} \left\langle \frac{\tau_{eq} - R(p) - R_0}{K} \right\rangle^{n+1}$	$\varphi_{vp}^* = \frac{K}{n+1} \left\langle \frac{\tau_{eq} - R(p) - R_0}{K} \right\rangle^{n+1}$
avec $\tau_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} Tr[\underline{\tau}_D \underline{\tau}_D]$ et $\underline{\tau}_D$ la partie déviatorique de $\underline{\tau}$	avec $\tau_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}} Tr([\underline{\tau}_D \underline{\tau}_D])$ et $\underline{\tau}_D$ la partie déviatorique de $\underline{\tau}$
$\varphi_X^*(Y) = \frac{1}{n_x+1} (-Y - Z_0)^{n_x+1}$	$f_X(Y) = -Y - Z_0 \leq 0$
$\underline{D}_{vp} = \frac{\partial \varphi_{vp}^*}{\partial \underline{\tau}} = \frac{3}{2} \frac{\tau_{eq}}{\tau_{eq}} \dot{p}$	$\underline{D}_{vp} = \frac{\partial \varphi_{vp}^*}{\partial \underline{\tau}} = \frac{3}{2} \frac{\tau_{eq}}{\tau_{eq}} \dot{p}$
$\dot{p} = -\frac{\partial \varphi_{vp}^*}{\partial R} = \left\langle \frac{\tau_{eq} - R(p) - R_0}{K} \right\rangle^n$	$\dot{p} = -\frac{\partial \varphi_{vp}^*}{\partial R} = \left\langle \frac{\tau_{eq} - R(p) - R_0}{K} \right\rangle^n$
$\dot{X} = -\frac{\partial \varphi_X^*}{\partial Y} = (-Y - Z_0)^{n_x}$	$\dot{X} = -\frac{\partial \varphi_X^*}{\partial Y} = -\lambda_X \frac{\partial f_X(Y)}{\partial X} = \lambda_X$
$Z(X) = q(1 - exp(-cX))$	$Z(X) = \frac{\ln(1+X)}{A}$

**Tableau 1.** Loix d'évolution en non-linéaire géométrique.  $\langle x \rangle = x$  si  $x > 0$  et  $\langle x \rangle = 0$  si  $x \leq 0$

### 3. Résolution du problème mécanique par la méthode LATIN

Soit  $\Omega_0$  le domaine à l'instant initial et  $\Omega$  le domaine à l'instant  $t$ . La frontière du domaine initial se décompose en une partie  $\partial_1 \Omega_0$  où les déplacements sont imposés et une partie  $\partial_2 \Omega_0$  où les efforts sont imposés. Soient  $U_d$  les déplacements imposés sur  $\partial_1 \Omega$ ,  $F_d$  les efforts imposés sur  $\partial_2 \Omega$  et  $f_d$  les forces volumiques sur  $\Omega$ .  $M_0$  est un point de  $\Omega_0$  que nous retrouvons en  $M$  à l'instant  $t$ .  $M$  est défini par  $M = M_0 + u(M_0, t)$ , avec  $u(M_0, t)$  le champ de déplacement.

Le problème mécanique à résoudre se ramène à la résolution d'un système d'équations non-linéaires paramétrées par le temps. Pour cela, les techniques se résument essentiellement aux méthodes incrémentales classiques. Dans ce cas, le problème d'évolution initial se transforme en une succession de problèmes stationnaires en découplant le chargement  $[0, T]$  en un ensemble de petits incréments de temps  $\Delta t$ . L'équilibre de la structure est vérifié à la fin de chaque incrément. Ces méthodes incrémentales conduisent à des temps de résolution importants, d'autant plus grands que les non-linéarités s'accumulent. Au contraire, la méthode LATIN que nous utilisons dans la suite [BOI 90] permet d'avoir à chaque itération une estimation de la solution dans  $\Omega_0$  et sur  $[0, T]$ . Ce processus de champs converge vers la solution du problème au cours des itérations. L'idée de cette méthode consiste à étendre le schéma itératif à deux phases, mis en place pour les problèmes stationnaires, au cas des inconnues définies sur  $[0, T] \times \Omega_0$ , c'est-à-dire sur les processus de champs. Cette extension est possible par le fait que les relations qui définissent les processus de champs solutions dans les problèmes d'évolution présentent des spécificités analogues à celles qui lient

les champs solutions des problèmes stationnaires :

- un caractère global et linéaire pour les équations d'admissibilité cinématiques et statiques;
- un caractère local et non-linéaire pour la loi de comportement.

Les qualificatifs *local* et *global* sont relatifs à la variable d'espace  $M$  uniquement.

Pour conserver en non-linéaire géométrique le caractère linéaire des équations d'admissibilité cinématiques et statiques, un changement de variable est nécessaire pour retrouver le cadre mathématique de la méthode LATIN initialement introduit en petites perturbations. Nous utiliserons le couple de variables duales  $F$  et  $P$ , avec  $F$  le tenseur gradient et  $P$  le premier tenseur de Piola-Kirchhoff.

En vue d'appliquer la méthode LATIN, qui est une méthode itérative, à notre problème, nous définissons deux sous-ensembles de « solutions »  $A_d$  et  $\Gamma$ .  $A_d$  est l'ensemble des processus de champs  $S_n = (F_n, P_n)$  qui vérifie les équations d'admissibilité cinématiques et statiques.  $\Gamma$  est l'ensemble des processus de champs  $\hat{S}_n = (\hat{F}_n, \hat{P}_n)$  qui vérifie la loi de comportement. Le processus itératif permet de construire les solutions en passant alternativement de  $A_d$  à  $\Gamma$ . Chaque itération se compose de deux étapes :

- à partir de  $S_n$  admissible, une étape qualifiée de locale conduit au calcul d'une solution  $\hat{S}_n \in \Gamma$  suivant une direction de recherche, cette étape traite les non-linéarités physiques et géométriques du problème. L'appartenance de  $\hat{S}_n$  à  $\Gamma$  est vérifiée en intégrant localement la relation de comportement. Ce problème local est non-linéaire sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ . On parlera d'étape locale non linéaire;

- une seconde étape dite globale linéaire permet de déterminer une nouvelle solution admissible  $S_{n+1}$  suivant une direction de recherche.

Le processus itératif s'arrête lorsque les solutions  $\hat{S}_n$  et  $S_{n+1}$  sont suffisamment proches.

### 3.1. *Algorithme pratique*

Pour l'algorithme utilisé [BEL 98b],  $S_n$  désignera le couple  $(\dot{F}_n, \dot{P}_n)$ . Les variables utilisées sont donc les dérivées par rapport au temps de  $F$  et  $P$ , ce qui conduit à des calculs plus simples.

En pratique, et comme dans beaucoup de méthodes itératives, l'étape globale est transformée afin de fournir une correction  $\Delta S_n$  à la solution précédente  $S_n$  admissible, telle que  $S_{n+1} = S_0 + \sum_{i=0}^{n+1} \Delta S_i$ . Avec  $S_0 = (\dot{F}_0, \dot{P}_0)$  la solution initiale obtenue par un calcul élastique linéaire.  $n$  est le nombre d'itérations. La correction  $\Delta S_n$  est donc cherchée cinématiquement et statiquement admissible à 0.

Les directions de recherche suivantes ont été retenues :

- étape locale :  $\dot{\hat{F}}_n = \dot{F}_n$

– étape globale :  $\dot{\hat{P}}_n - \dot{P}_{n+1} = C_e(\dot{\hat{F}}_n - \dot{F}_{n+1})$

$C_e$  est le tenseur d'élasticité linéaire, constant et indépendant du temps et de l'espace. Ces directions de recherche conduisent à un algorithme à grand incrément de temps de type Newton modifié.

Une fois ces choix effectués, les itérations de l'algorithme s'écrivent :

– *Etape locale et non-linéaire* : connaissant  $S_n = (\dot{F}_n, \dot{P}_n) \in A_d$ , construire  $\hat{S}_n = (\hat{\dot{F}}_n, \hat{\dot{P}}_n) \in \Gamma$  vérifiant sur  $[0, T]$  :

$$\begin{cases} \hat{\dot{F}}_{n_t} = \mathcal{A}(\hat{P}_{n_t}, \mu \leq t) \\ \hat{\dot{F}}_n = \dot{F}_n \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_0 \quad [6]$$

$\mathcal{A}$  désigne les lois de comportement en non-linéaire géométrique introduites précédemment.

– *Etape globale et linéaire* : pour obtenir une résolution globale sur tout le chargement, par itération, il est nécessaire de faire des hypothèses sur l'évolution en temps et en espace des variables. Une fois ces hypothèses adoptées, on peut écrire le problème global sous forme variationnelle et dans une approche cinématique qui reste la plus utilisée pour la résolution par éléments finis. L'écriture suivante résulte du choix des deux directions de recherche.

Connaissant  $\hat{S}_n = (\hat{\dot{F}}_n, \hat{\dot{P}}_n) \in \Gamma$ , construire  $\Delta S_{n+1} = (\Delta \dot{F}_{n+1}, \Delta \dot{P}_{n+1})$  admissible à 0, vérifiant sur  $[0, T]$  :

$$\begin{cases} \exists \Delta \dot{u}_{n+1} / \Delta \dot{F}_{n+1} = \frac{\partial \Delta \dot{u}_n}{\partial M_0} \text{ et } \Delta \dot{u}_{n+1} |_{\partial, \Omega_0} = 0, \\ \forall u^* / u^* |_{\partial, \Omega_0} = 0 \text{ et } u^*(M_0, 0) = 0, \\ \int_{\Omega_0} \int_0^T Tr[F^{*T} C_e \Delta \dot{F}_{n+1}] dt d\Omega_0 = \int_{\Omega_0} \int_0^T Tr[F^{*T} (\dot{P}_n - \hat{\dot{P}}_n)] dt d\Omega_0 \end{cases} \quad [7]$$

ce qui conduit à déterminer explicitement  $\Delta \dot{P}_{n+1}$ , la correction statiquement admissible à 0 à chaque instant par  $\Delta \dot{P}_{n+1} = C_e \Delta \dot{F}_{n+1} - (\dot{P}_n - \hat{\dot{P}}_n)$ .

### 3.2. Représentation des inconnues pour la résolution du problème global

Afin de ne pas avoir à résoudre le problème [7] à chaque instant, il a été proposé de chercher les corrections sous une forme qui permet de décomposer ce problème global en deux sous-problèmes. Un premier sous-problème en espace où l'inconnue temps disparaît et un second sous-problème qui est uniquement fonction du temps.

Ainsi, un des points essentiels de la méthode LATIN consiste à découpler l'espace et le temps, en représentant chaque correction sous la forme d'une somme de produits de fonctions du temps par des fonctions d'espace. Ce choix va donc nous conduire

à résoudre le problème global [7] de façon approchée, tout en respectant bien sûr l'appartenance de  $S_{n+1}$  à  $A_d$  et de  $\hat{S}_n$  à  $\Gamma$ . Les différents termes correctifs s'écrivent de la façon suivante :

$$\Delta \dot{u}_n(t, M_0) = \sum_{i=1}^p g_i(t) w_i(M_0) \quad \text{d'où} \quad \Delta \dot{F}_n(t, M_0) = \sum_{i=1}^p g_i(t) \alpha_i(M_0) \quad [8]$$

$$\Delta \dot{P}_n(t, M_0) = \sum_{i=1}^p h_i(t) \beta_i(M_0) \quad [9]$$

où les  $g_i(t)$  sont des fonctions scalaires du temps constantes sur chaque sous-pas de temps d'intégration de la loi de comportement. Les  $w_i(M_0)$  sont des champs de déplacements cinématiquement admissibles à 0.  $\alpha_i = \frac{dw_i}{dM_0}$ .  $p$  est le nombre de fonctions du temps et de l'espace par correction. Les  $h_i(t)$  sont des fonctions scalaires du temps et les  $\beta_i(M_0)$  sont des champs statiquement admissibles à 0.

La nouvelle estimation de la solution du problème est donc obtenue en ajoutant à chaque itération une correction admissible à 0.

$$S_{n+1} = S_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \left( \sum_{j=1}^p g_j(t) \alpha_j(M_0), \sum_{j=1}^p h_j(t) \beta_j(M_0) \right) \quad [10]$$

#### 4. Intégration numérique des lois de comportement

Dans cette section, nous allons présenter l'intégration locale des lois de comportement sur un incrément de temps  $\Delta t$  de la méthode LATIN. A chaque itération, cette intégration des lois de comportement se fait successivement sur les  $m$  sous-pas de temps de la représentation en temps des inconnues du problème. Ainsi, nous aurons l'incrément de temps  $\Delta t$  de la méthode LATIN sur lequel on construit à chaque itération un processus de champs. Cet incrément sera découpé en  $m$  sous-pas de temps  $\Delta t_m$  pour la représentation des inconnues du problème. Pour l'intégration des lois de comportement et dans un souci de précision, ces  $m$  pas de temps seront à leur tour découpés en sous-pas de temps  $\Delta t_i$ . C'est donc sur chacun de ces « sous-pas de temps » que l'on va intégrer les lois de comportement. A l'instant  $t$ , les différents champs mécaniques sont supposés connus. La résolution des lois constitutives consiste alors à trouver la valeur de ces champs en  $t + \Delta t_i$ . Or, d'après la direction de recherche choisie entre l'étape globale et l'étape locale, la seule variable connue est une approximation de  $\Delta \hat{F}$  entre  $t$  et  $t + \Delta t_m$ .

En considérant une variation linéaire de  $\hat{F}$  entre  $t$  et  $t + \Delta t_m$ , nous obtenons  $\hat{F}_{(t+\Delta t_i)} = \hat{F}_t + \Delta \hat{F}$  avec cette fois  $\Delta \hat{F}$  l'incrément de  $\hat{F}$  sur  $\Delta t_i$ . Les relations de comportement étant exprimées dans la configuration tournée, la connaissance de  $\hat{F}_{(t+\Delta t_i)}$  permet de calculer la rotation  $\mathbf{R}_{(t+\Delta t_i)}$  et  $\Delta \underline{\varepsilon}$  l'incrément de déformation sur  $\Delta t_i$ . On aura :

$$\Delta \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[ \Delta \hat{F} \hat{F}_{(t+\Delta t_i)}^{-1} + (\Delta \hat{F} \hat{F}_{(t+\Delta t_i)}^{-1})^T \right] \quad [11]$$

L'intégration des lois de comportement rentre alors dans le cadre de la résolution d'un système non linéaire d'équations différentielles.  $\mathbf{R}_{(t+\Delta t_i)}$  est associée au taux de rotation de la façon suivante :

$$\Delta \mathbf{R}^T \mathbf{R}_{(t+\Delta t_i)} = \frac{1}{2} [\Delta \hat{F} \hat{F}_{(t+\Delta t_i)}^{-1} - (\Delta \hat{F} \hat{F}_{(t+\Delta t_i)}^{-1})^T] \quad [12]$$

La résolution de cette équation différentielle donne  $\mathbf{R}_{(t+\Delta t_i)}$ , ce qui permet de calculer :

$$\Delta \underline{\varepsilon} = \mathbf{R}_{(t+\Delta t_i)} \Delta \varepsilon \mathbf{R}_{(t+\Delta t_i)}^T \quad [13]$$

Pour l'intégration numérique de nos lois de comportement dépendantes du temps, nous utiliserons des méthodes telles que Euler ou Euler-Cauchy avec ou sans schéma itératif. Pour le modèle viscoplastique visco-endommageable, on utilisera la méthode du retour radial proposée par Ortiz et Simo [ORT 86]. Cette méthode, qui tient compte des propriétés de la fonction seuil d'endommagement, permettra de vérifier le critère d'endommagement (on gardera une méthode explicite pour l'intégration de la viscoplasticité).

#### 4.1. Modèle viscoplastique endommageable

Dans un premier temps, on suppose une mise en charge élastique sur l'intervalle de temps  $\Delta t_i$ . Les variables internes  $p$  et  $X$  sont alors bloquées à leurs valeurs obtenues à l'instant  $t$ . On aura donc :

$$\underline{\varepsilon}_{(t+\Delta t_i)} = \underline{\varepsilon}_t + \frac{C_e}{1 + X_t} \Delta \underline{\varepsilon}, \quad p_{(t+\Delta t_i)} = p_t, \quad X_{(t+\Delta t_i)} = X_t \quad [14]$$

Si  $\underline{\varepsilon}_{(t+\Delta t_i)} - R(p_t) - R_0 > 0$ , une correction viscoplastique doit être calculée. Si  $\frac{1}{2} Tr [\underline{\varepsilon}_{(t+\Delta t_i)} C_e^{-1} \underline{\varepsilon}_{(t+\Delta t_i)}] - Z(X_t) - Z_0 > 0$ , une correction endommageable doit être déterminée.

Dans ce modèle, les deux phénomènes sont dépendants du temps.  $\underline{\varepsilon}$ ,  $p$  et  $X$  doivent satisfaire les lois d'évolution écrites sous forme incrémentale. En utilisant par exemple une intégration par la méthode d'Euler explicite, on aura :

$$p_{(t+\Delta t_i)} = p_t + \Delta p = p_t + \Delta t_i \dot{p}_t \quad \text{avec} \quad \dot{p}_t = \left\langle \frac{(\underline{\varepsilon}_{eq t}) - R(p_t) - R_0}{K} \right\rangle^n$$

$$X_{(t+\Delta t_i)} = X_t + \Delta t_i \dot{X}_t \quad \text{avec} \quad \dot{X}_t = \left\langle \frac{1}{2} Tr [\underline{\varepsilon}_t C_e^{-1} \underline{\varepsilon}_t] - Z(X_t) - Z_0 \right\rangle^{n_x}$$

On peut écrire  $\underline{\varepsilon}$  à  $t + \Delta t_i$  sous la forme suivante (voir [4]) :

$$\underline{\varepsilon}_{(t+\Delta t_i)} = \frac{C_e}{1 + X_{(t+\Delta t_i)}} \underline{\varepsilon}_{e_{(t+\Delta t_i)}} = \frac{C_e}{1 + X_{(t+\Delta t_i)}} [\underline{\varepsilon}_{(t+\Delta t_i)} - \underline{\varepsilon}_{vp t} - \Delta \underline{\varepsilon}_{vp}] \quad [15]$$

La substitution de  $\underline{\varepsilon}_{vp,t} = -C_e^{-1} \underline{\tau}_t(1 + X_t) + \underline{\varepsilon}_t$  (voir [4]) dans l'équation [15] permet d'écrire :

$$\underline{\tau}_{(t+\Delta t_i)} = \frac{C_e}{1 + X_{(t+\Delta t_i)}} [\Delta \underline{\varepsilon} - \Delta \underline{\varepsilon}_{vp}] + \underline{\tau}_t \frac{1 + X_t}{1 + X_{(t+\Delta t_i)}} \quad [16]$$

Dans laquelle (tableau 1) :

$$\Delta \underline{\varepsilon}_{vp} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\tau}_{Dt}}{\underline{\tau}_{eqt}} \Delta p \quad [17]$$

On peut ainsi calculer  $\hat{P}_{(t+\Delta t_i)}$  sous la forme :

$$\hat{P}_{(t+\Delta t_i)} = \mathbf{R}_{(t+\Delta t_i)}^T \underline{\tau}_{(t+\Delta t_i)} \mathbf{R}_{(t+\Delta t_i)} \hat{P}_{(t+\Delta t_i)}^{-T} \quad [18]$$

#### 4.2. *Modèle viscoplastique visco-endommageable*

Contrairement au modèle précédent, les schémas explicites utilisés ne sont plus suffisants pour l'intégration de la loi d'endommagement. En effet, dans ce cas, l'endommagement indépendant du temps impose que le critère d'endommagement  $f_x$  (tableau 1) soit nul à chaque instant tant que l'endommagement se développe. On aura  $f_x < 0$  pour un comportement non endommageable,  $f_x = 0$  et  $\dot{f}_x = 0$  lorsqu'il y a endommagement. Pour déterminer l'incrément d'endommagement sur l'incrément de temps, nous utilisons l'algorithme de Ortiz et Simo [ORT 86]. La prédiction élastique est donnée par [14]. Pour la correction viscoplastique, la procédure est la même que celle présentée précédemment. Si la prédiction élastique satisfait la condition  $f_x \leq 0$ , il n'y a pas évolution de l'endommagement. Sinon, l'état mécanique défini par les variables  $\underline{\tau}$  et  $X$  doit être corrigé. Les variables  $\underline{\tau}$ ,  $X$  doivent satisfaire à l'instant  $t + \Delta t_i$  le critère d'endommagement et les lois d'évolution. On devra donc vérifier  $f_x(\underline{\tau}_{(t+\Delta t_i)}, X_{(t+\Delta t_i)}) = 0$  et l'équation [15].

La phase de correction endommageable est construite à partir d'une suite d'itérations où le critère de convergence est la vérification du critère d'endommagement  $f_x = 0$ . Ainsi, si  $f_x^j$  désigne la valeur de  $f_x$  à l'itération  $j$  et  $f_x^{j+1}$  la valeur de  $f_x$  à l'itération  $j + 1$ , la linéarisation de  $f_x^{j+1}$  autour des valeurs obtenues à l'itération  $j$  permet d'écrire :

$$f_{x(t+\Delta t_i)}^{j+1} \simeq f_{x(t+\Delta t_i)}^j + \left( \frac{\partial f_x^j}{\partial \underline{\tau}} \right)_{t+\Delta t_i} \Delta \underline{\tau}_{X(\Delta t_i)}^{j+1} + \left( \frac{\partial f_x^j}{\partial X} \right)_{t+\Delta t_i} \Delta X_{(\Delta t_i)}^{j+1} = 0 \quad [19]$$

En différentiant la loi d'état donnant  $\underline{\tau}$ , on obtient la variation de contrainte due à l'endommagement :

$$\Delta \underline{\tau}_X^{j+1} = - \frac{C_e}{(1 + X_{(t+\Delta t_i)}^j)^2} \underline{\varepsilon}_e \Delta X^{j+1} = - \frac{\underline{\tau}_{(t+\Delta t_i)}^j}{1 + X_{(t+\Delta t_i)}^j} \Delta X^{j+1} \quad [20]$$

La substitution de l'équation [20] dans l'équation [19] donne :

$$\Delta X^{j+1} = \frac{f_{X(t+\Delta t_i)}^j}{\frac{\text{Tr}[\underline{x}_{(t+\Delta t_i)}^j C_e^{-1} \underline{x}_{(t+\Delta t_i)}^j]}{1 + X_{(t+\Delta t_i)}^j} + Z'(X_{(t+\Delta t_i)}^j)} \quad [21]$$

On obtient :

$$X_{(t+\Delta t_i)}^{j+1} = X_t + \sum_{i=1}^{j+1} \Delta X^i \quad [22]$$

Ainsi, on pourra obtenir  $\underline{x}_{(t+\Delta t_i)}^{j+1}$  par la relation [15]. Le processus itératif s'arrêtera lorsque l'on considèrera avoir atteint  $f_{X(t+\Delta t_i)} = 0$ .

## 5. Exemples numériques

Dans cette section nous allons nous attacher à montrer les capacités de la modélisation proposée et du traitement numérique dans le cadre de la simulation du comportement des structures soumises au fluage. Les modèles précédents en non-linéaire géométrique ont été intégrés dans le code de calculs par éléments finis OPTIFIA dans le cadre de la méthode LATIN présentée. Les éléments utilisés sont des triangles isoparamétriques à six nœuds et trois points de Gauss. Les calculs sont réalisés sur une station de travail HP 9000 C160.

### 5.1. Plaque unitaire homogène en fluage uniaxial

Dans le cadre du modèle viscoplastique endommageable en non-linéaire géométrique, la première structure étudiée est la plaque unitaire homogène soumise à un échelon de force donnant une contrainte uniaxiale. Dans un premier temps, on peut mettre en évidence les capacités de la loi de comportement pour retrouver les résultats d'essais de fluage uniaxiaux dans le cas de l'alliage IN100 à 1 000° C [LEM 85]. Tous les paramètres du modèle sont donnés dans le tableau 2. La figure 1 montre une bonne concordance entre les essais expérimentaux et les calculs à différentes contraintes. On peut maintenant étudier les capacités et les avantages de la méthode numérique utilisée pour la résolution du problème mécanique dans le cadre du fluage. On étudie les résultats obtenus pour la courbe de fluage à 137 MPa, en fonction des valeurs de certains paramètres de la méthode LATIN. Pour cela, on définit une courbe de référence qui correspond à un calcul que l'on considèrera comme le plus précis possible puisque l'augmentation du nombre d'incrèments et de pas de temps n'entraîne plus de changement notable de la courbe de fluage obtenue. Pour évaluer les performances du traitement numérique, deux erreurs sont définies. On appellera  $er_2$  l'erreur relative en déplacement des calculs par rapport à la courbe de référence à  $t = 200\,000$  s.  $er_1$  sera l'erreur en temps des calculs par rapport à la courbe de référence pour  $\varepsilon_{vp} = 2\%$ .

Le tableau 3 montre l'évolution de  $er_1$  et  $er_2$  lorsque l'on augmente la taille des incréments  $\Delta t$ . On remarque que ces erreurs restent faibles, même lorsque l'on passe de 33 à 4 incréments. Dans ce cas le temps, CPU est divisé par 17 et le nombre d'itérations par 5,6. Pour la résolution avec 4 incréments,  $19 \times p$  résolutions globales ont été nécessaires ( $p = 3$ ). Dans le cas d'une résolution avec une méthode incrémentale classique, un minimum de 160 résolutions globales (en considérant une itération par incrément) auraient été nécessaires pour obtenir la même discrétisation en temps au niveau de l'intégration des lois de comportement, donc la même précision.

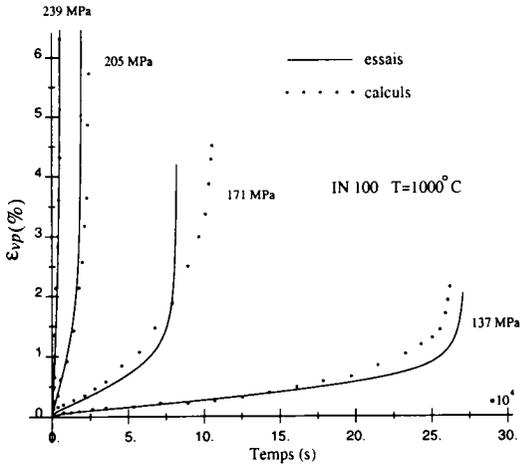
Le tableau 4 montre les résultats lorsque l'on essaie de calculer la courbe de fluage à 137 MPa à l'aide de deux incréments et un seul incrément. Dans le cas de 2 incréments, si l'on veut privilégier la vitesse, un temps CPU de 17 s suffit pour décrire la courbe complète de fluage. Cette rapidité est obtenue en diminuant le nombre de pas de temps  $\Delta t_m$ . Malgré cela, on garde des erreurs  $er_1$  et  $er_2$  très acceptables. Dans le cas où l'on privilégie la précision en prenant  $\Delta t_m = 400$ , on améliore fortement  $er_1$  et  $er_2$  en gardant toutefois un nombre d'itérations faible et un temps CPU de 59 s qui reste petit. Quoi qu'il en soit, il est possible de décrire les trois phases de fluage avec un seul incrément  $\Delta t$  et 200 pas de temps  $\Delta t_m$ . On obtient le résultat en 2 itérations avec une erreur  $er_1$  qui reste petite et un temps de calcul très rapide. Pour ce calcul, dans le cas d'une résolution avec une méthode incrémentale classique, un minimum de 200 résolutions globales (en considérant une itération par incrément) auraient été nécessaires pour obtenir la même discrétisation en temps au niveau de l'intégration des lois de comportement, donc la même précision. Pour notre calcul, seulement  $2 \times p$  résolutions globales ont été nécessaires ( $p = 10$ ).

Paramètres	IN 100 (1000°C)	Paramètres	IN 100 (1000°C)	Paramètres	IN 100 (1000°C)
$E$	147000	$Q$	95	$n_x$	4.5
$\nu$	0.3	$b$	6000	$q$	0.5
$n$	7.5	$R_0$	0	$c$	0.038
$K$	450	$Z_0$	0		

**Tableau 2.** Paramètres du modèle viscoplastique endommageable pour l'IN 100 à 1 000° C

	Référence				
Nombre d'incrément $\Delta t$	33	33	19	9	4
Nombre de pas de temps $\Delta t_m$	2640	1320	760	360	160
Nombre d'itérations	107	94	65	37	19
Temps CPU (s)	508	240	135	72	30
$er_1$		0.036 %	0.09 %	0.22 %	0.71 %
$er_2$		0.008 %	0.036 %	0.062 %	0.3 %

**Tableau 3.** Influence de la taille des incréments  $\Delta t$



**Figure 1.** Essai de fluage uniaxial. Comparaison entre les calculs et les essais pour différentes contraintes dans le cas de l'IN100 à 1 000° C

Nombre d'incrément $\Delta t$	2	2	1
Nombre de pas de temps $\Delta t_m$	140	400	200
Nombre d'itérations	4	5	2
Temps CPU (s)	17	59	27
$er_1$	2 %	0.19 %	0.35 %
$er_2$	1.8 %	0.03 %	

**Tableau 4.** Simulation avec 2 incréments  $\Delta t$  et 1 incrément  $\Delta t$

Dans le cas de la simulation en 2 incréments  $\Delta t$ , avec un premier incrément jusqu'à 150 000 s comportant 40 pas de temps  $\Delta t_m$  et 3 fonctions du temps et de l'espace par correction, on montre que le choix du nombre de pas de temps dans le deuxième incrément conditionne la précision  $er_1$ . Celle-ci passe de 1,04 % à 0,82 % lorsque le nombre de pas de temps passe de 100 à 500 et ce quel que soit le nombre de fonctions du temps. Le nombre de fonctions du temps par correction permet de diminuer le nombre d'itérations. En effet, l'augmentation du nombre de pas de temps diminue peu le nombre d'itérations, alors que pour un nombre de pas de temps constant, le nombre d'itérations passe de 13 à 2 lorsque l'on augmente le nombre de fonctions du temps. Il faut remarquer que le temps de calcul par itération passe de 5,9 à 31 s lorsque l'on passe de 100 à 500 pas de temps, alors que le temps de calcul par itération ne passe que de 5,9 à 7 s lorsque le nombre de fonctions du temps passe de 3 à 4.

Si l'on observe l'amélioration de l'erreur  $er_1$  en passant de 100 à 500 pas de temps, on s'aperçoit que celle-ci ne passe que de 1,04 % à 0,82 %. L'amélioration n'est

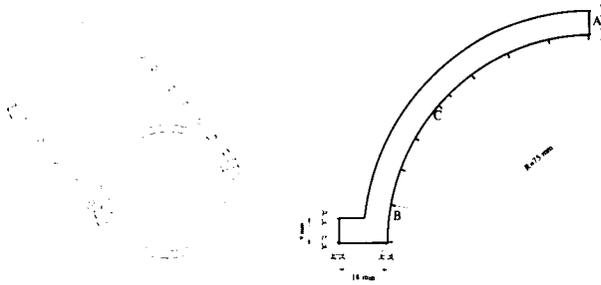
donc pas énorme. La raison provient du fait que le premier incrément, qui va de 0 à 150 000 s, n'est pas assez précis et que de plus, il ne va pas assez loin dans le temps. En effet, il semble logique que dans le cas d'un calcul avec deux incréments, le premier incrément traite au mieux les phases de fluage primaire et secondaire afin que les pas de temps du deuxième incrément se répartissent pour décrire uniquement les grandes non linéarités de la phase tertiaire. Dans ce cas, le premier incrément va maintenant jusqu'à 250 000 s afin de décrire complètement les phases de fluage primaire et secondaire. Le deuxième incrément décrira uniquement la phase tertiaire. On montre qu'en augmentant le nombre de pas de temps dans le deuxième incrément et en gardant leur nombre constant dans le premier incrément, ceci n'améliore pas d'une façon notable  $er_1$  comme on l'a vu précédemment. 100 pas de temps semblent donc suffisants pour décrire la phase tertiaire plus non-linéaire mais plus courte en temps. Cependant, on montre qu'en améliorant la description dans le premier incrément en augmentant le nombre de pas de temps, alors l'erreur  $er_1$  diminue automatiquement ( $er_1$  passe à 0,19 %). Ainsi, dans le cas de deux incréments, le meilleur compromis semble être d'effectuer un premier incrément qui décrive les phases primaire et secondaire occupant une grande partie de l'essai. Pour cela, un nombre de pas de temps important est nécessaire afin de ne pas cumuler trop d'erreurs au cours de ces phases de longues durées (surtout la phase secondaire). Pour la phase tertiaire, plus courte mais fortement non-linéaire, un nombre de pas de temps moins important est suffisant, mais le nombre de fonctions du temps doit augmenter afin de diminuer le nombre d'itérations.

Dans le cas d'un calcul effectué avec un seul incrément, un nombre de pas de temps inférieur à 200 ne permet pas de converger. En effet, puisque le découpage de l'incrément est régulier (même taille des pas de temps), la description de la phase tertiaire n'est vraiment plus assez fine. On va de 250 000 s à 276 000 s en 9 pas de temps. De plus, le nombre de fonctions du temps doit être assez important pour décrire rapidement la phase tertiaire; ceci est plutôt incompatible avec la description de la phase secondaire. Effectivement, cette phase macroscopiquement peu évolutive ne nécessite pas l'addition d'un nombre important de fonctions du temps à chaque correction à la base déjà existante. La solution consisterait donc à augmenter le nombre de pas de temps en diminuant le nombre de fonctions du temps, mais ceci entraîne une augmentation importante du nombre d'itérations. De plus, le gain sur  $er_1$  n'est pas énorme puisque l'augmentation du nombre de pas de temps uniformément répartis sur tout l'intervalle d'étude n'améliore pas beaucoup le découpage de la phase tertiaire plus courte. Ainsi, on peut dire que la description d'une courbe de fluage avec un seul incrément, bien qu'elle soit possible, reste plus difficile à cause du compromis à trouver entre la précision et la rapidité.

## ***5.2. Etude simplifiée de l'enveloppe cylindrique d'une turbine***

Dans cet exemple, la structure utilisée correspond à la schématisation très simple du stator d'une turbine, on le modélisera à l'aide d'un tube cylindrique avec deux épaulements (figure 2), cette structure est soumise à une pression interne à température

élevée. On ne traite qu'un quart de la structure. Le chargement, la géométrie et les conditions aux limites sont représentés sur la figure 2. Les paramètres utilisés dans la loi d'érouissage isotrope additive du modèle viscoplastique correspondent au cas d'un acier inoxydable 17-12 SPH à 600° C (tableau 5). Pour décrire un phénomène de rupture ductile avec le modèle viscoplastique visco-endommageable en non-linéaire géométrique, une pression de 12 MPa est appliquée. Pour décrire un phénomène de rupture fragile avec le modèle viscoplastique endommageable, une pression de 6 MPa est appliquée.



**Figure 2.** Schématisation du stator d'une turbine. Géométrie et conditions aux limites

17-12 SPH 600° C						Modèle endommageable				Modèle visco-endommageable	
$n$	$K$	$Q$	$b$	$R_0$	$E$	$n_x$	$q$	$c$	$Z_0$	$Z_0$	$A$
12	150	80	10	6	145000	3	0.5	0.038	0	0.04	100

**Tableau 5.** Paramètres viscoplastiques et paramètres d'endommagement des deux modèles proposés pour l'acier inoxydable 17-12 SPH à 600° C

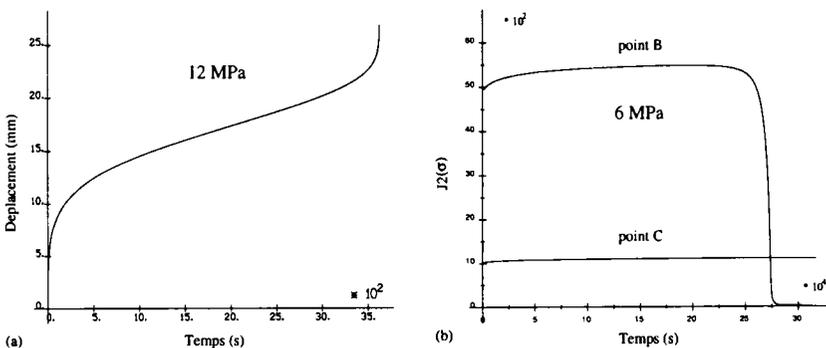
La figure 4 montre les isovaleurs de l'endommagement obtenues pour les deux chargements à 90 % et à la fin de la durée de vie estimée. Pour le chargement de 6 MPa, on constate une localisation logique de l'endommagement sur la face interne près de l'épaulement (figure 4.a). Les niveaux d'endommagement atteignent à cet endroit des valeurs supérieures à 99,9 %. On a dans ce cas une ligne de rupture courant longitudinalement le long du cylindre, au niveau de l'épaulement. A rupture, la contrainte de Mises devient nulle pour le point le plus endommagé (point B), alors que la contrainte reste constante pour le point C (figure 3.b). Ainsi, pour le modèle viscoplastique endommageable, l'endommagement a évolué régulièrement au cours du temps sans apport de l'effet non-linéaire géométrique. On modélise dans ce cas une rupture fragile avec une durée de vie plus longue qui se caractérise par la formation et la croissance de cavités avec une faible déformation à rupture.

Pour le chargement de 12 MPa, l'endommagement apparaît initialement près de l'épaulement (figure 4.b) puis celui-ci se localise rapidement en fin de durée de vie dans la zone de striction. La rupture finale s'effectue dans cette zone. L'évolution rapide de l'endommagement dans la zone de striction s'explique par l'accroissement

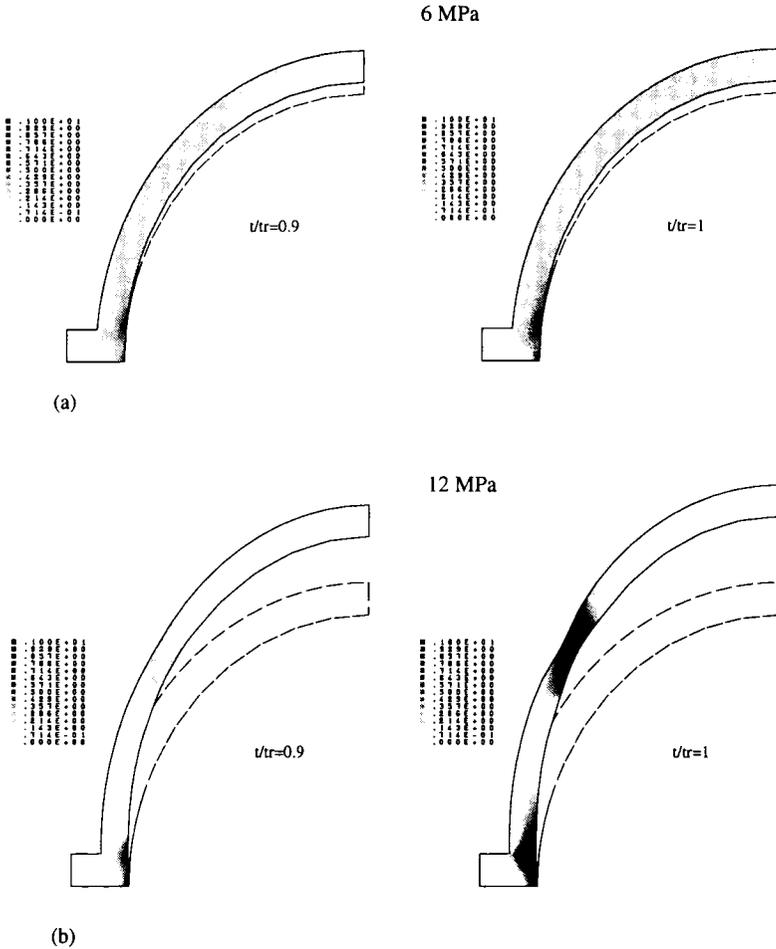
de la contrainte. Quoiqu'il en soit, dans le cas du chargement de 12 MPa, la rupture se fera dans cette zone puisque l'endommagement près de l'épaulement ne dépasse pas 92 %. La figure 3.a montre le déplacement vertical du point A au cours du temps. On observe l'apparition nette de la phase tertiaire qui va conduire à la rupture. Dans ce cas, la rupture est associée à une déformation importante.

Du point de vue numérique, le calcul réalisé à l'aide du modèle viscoplastique endommageable est moins coûteux puisque dans ce cas, l'effet non-linéaire géométrique est peu important. D'autre part, l'intégration explicite de la loi d'endommagement facilite son calcul. Toutefois, les niveaux d'endommagement supérieurs à 99,9 %, atteints en certains points, augmentent fortement le temps de calcul en fin de simulation. Ainsi, 12 incréments ont été nécessaires pour effectuer 91,5 % de la simulation en occupant 7,5 % du temps de calcul global. Le reste de la simulation a nécessité 17 incréments. Toutefois, si l'estimation de la durée de vie est le critère recherché, on peut stopper les calculs lorsque la contrainte de Mises est nulle pour le point B. Dans ce cas, 7 incréments sont nécessaires et le temps de calcul est divisé par 22.

La simulation qui utilise le modèle viscoplastique visco-endommageable est plus coûteuse puisque dans ce cas, l'effet non-linéaire géométrique est très important. D'autre part, l'intégration implicite de la loi d'endommagement (vérification de la fonction seuil) est plus difficile. De plus, les niveaux d'endommagement atteignent tout de même des valeurs supérieures à 90 %. Ainsi, 39 incréments ont été nécessaires pour effectuer 91 % du calcul en occupant 32 % du temps de calcul global. Le reste du calcul a nécessité 18 incréments. Toutefois, ces 91 % de la simulation globale permettent d'obtenir une estimation de la durée de vie puisque la phase tertiaire est déjà amorcée. On divise ainsi le temps de calcul par un facteur de l'ordre de 3.



**Figure 3.** (a) Déplacement du point A en fonction du temps pour un chargement de 12 MPa; (b) évolutions locales de la contrainte de Von Mises avec le temps pour un chargement de 6 MPa



**Figure 4.** Isovaleurs de l'endommagement à différents instants ( $t_r =$  temps à rupture)

## 6. Conclusion

Dans ce travail, une modélisation macroscopique du comportement des structures soumises au fluage a été proposée. Deux modèles ont été introduits pour décrire différents modes d'endommagement de fluage. On a pu montrer sur un exemple simple une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et les calculs. Le deuxième exemple a permis de mettre en évidence la description des modes de rupture différents pendant la phase tertiaire. Du point de vue numérique, la version de la méthode LATIN adaptée à notre problème de fluage permet d'obtenir une estimation rapide de la durée de vie en réduisant considérablement le nombre d'incrémentes et le nombre de résolutions globales. Toutefois, si l'on veut connaître le comportement postcritique de la structure en étudiant par exemple la localisation de l'endommagement pendant la

phase tertiaire, le calcul, bien que coûteux, est possible grâce aux propriétés de nos modèles. Cette possibilité a été mise en évidence sur plusieurs structures présentant des zones de localisation très différentes [BEL 01].

## 7. Bibliographie

- [ARG 82] ARGON A.S., « Mechanics and mechanisms of fracture in creeping alloys », *Recent Advances in Creep and Fracture of Engineering Materials and Structures*, Pineridge Press, Swansea, 1982.
- [BEL 98a] BELLENGER E., BUSSY P., « Plastic and viscoplastic damage models with numerical treatment for metal forming processes », *J. Mater. Process. Technol.*, Vol. 80, 1998, p. 591-596.
- [BEL 98b] BELLENGER E., « Modélisation et simulation numérique du fluage des structures viscoplastiques endommageables », Thèse de Doctorat, Université d'Amiens, 1998.
- [BEL 01] BELLENGER E., BUSSY P., « Phenomenological modeling and numerical simulation of different modes of creep damage evolution », *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 38, 2001, p. 577-604.
- [BEN 94] BENKRID K., BUSSY P., ABDALI A., « On the stable damage model for metal forming processes », *J. Mater. Process. Technol.*, Vol. 45, 1994, p. 521-526.
- [BOI 90] BOISSE P., BUSSY P., LADEVEZE P., « A new approach in non-linear mechanics: the LArge Time Increment Method », *Int. J. for Num. Meth. Eng.*, Vol. 29, 1990, p. 647-663.
- [HAL 75] HALPHEN B., SON N. Q., « Sur les matériaux standards généralisés », *Journal de Mécanique*, Vol. 14, n°1, 1975, p. 39-63.
- [LAD 81] LADEVEZE P., « Sur la théorie de la plasticité en grandes déformations », rapport interne n°9, 1981, L.M.T Cachan.
- [LAD 85] LADEVEZE P., « Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures » *C.R. Acad. des Sc.*, 300, série II, n°2, 1985.
- [LEM 85] LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., *Mécanique des matériaux solides*, Editions Dunod, Paris, 1985.
- [ORT 86] ORTIZ M., SIMO J.C., « An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations » *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 23, p. 353-366, 1986.