

---

# Mise en œuvre numérique d'un mésomodèle d'endommagement des stratifiés

Bernard Douchin\* — Pierre Ladevèze\*\*

\*LGMT - Equipe PRO<sup>2</sup>COM

I.U.T. Paul Sabatier - Département G.M.P.

133, avenue de Rangueil, F-31077 Toulouse Cedex 4

Bernard.Douchin@gmp.iut-tlse3.fr

\*\*LMT - Cachan

(E.N.S. de Cachan / C.N.R.S. / Université Paris VI)

61, Avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan Cedex

ladeveze@lmt.ens-cachan.fr

---

*RÉSUMÉ. La prédiction des intensités des mécanismes d'endommagement qui se développent au sein des structures composites stratifiées est basée sur une approche qualifiée de « mésomodélisation », initiée au L.M.T-Cachan depuis plus de quinze ans. Des progrès restent cependant à faire au niveau de la simulation, car les méthodes incrémentales classiques ne sont pas adaptées aux phénomènes fortement non linéaires, comme la localisation brutale de l'endommagement. Nous présentons donc une extension de la méthode LATIN aux matériaux élasto-plastiques endommageables, dans le but d'augmenter la robustesse de telles simulations. Un estimateur d'erreur, basé sur la notion d'erreur en relation de comportement, a été introduit afin de contrôler les calculs précédents. Les résultats d'un problème modèle unidimensionnel montre la faisabilité de la méthode.*

*ABSTRACT. The prediction of the intensities of the damage mechanisms which develop within the laminated composite structures is based on an approach called "mesomodelling" initiated in the L.M.T-Cachan more fifteen years ago. Nevertheless further enhancements may still be achieved at the simulation level considering the standard incremental methods are not convenient when applied to high nonlinear phenomena like the brutal localization of damage. We present then an extension of the LATIN method to (visco)plastic with softening materials with the intention of increase the numerical robustness of this simulations. An error estimator-based on the constitutive relation error notion- has been introduced in order to control the precedent computations. The results of a one dimension model problem show the feasibility of the method.*

*MOTS-CLÉS : calcul des structures, méthode LATIN, endommagement, rupture, éléments finis.*

*KEYWORDS: structural analysis, LATIN method, damage, rupture, finite elements.*

---

## 1. Introduction

La dégradation des composites en général, et des stratifiés en particulier, fait appel à de nombreux mécanismes complexes. En effet, différents mécanismes d'endommagement sont présents et la simulation de telles structures nécessite alors des attentions particulières.

Un des points-clés est le choix d'une échelle capable de représenter l'ensemble des phénomènes mis en cause. Une approche initiée au L.M.T-Cachan, développée dans de nombreux articles antérieurs, est de baser la modélisation des stratifiés sur l'échelle mésoscopique [LAD 86]. Cette mésomodélisation des composites stratifiés représente un empilement quelconque comme une succession de couches homogènes dans l'épaisseur, séparées par des interfaces interlaminaires. Les comportements de ces deux monoconstituants sont décrits par variables internes, et permettent de représenter tous les mécanismes d'endommagement mis en jeu : rupture des fibres, microfissuration de la matrice parallèlement à la direction de renfort, délaminage [ALL 92a, LAD 92]. Le mésomodèle d'endommagement est une modélisation semi-discrète, car l'état de l'endommagement est localement uniforme au sein des mésoconstituants. Afin d'obtenir des modèles consistants, des modèles dits « avec effet retard » sont introduits dans le cadre d'un calcul dynamique. Il en suit une indépendance des résultats numériques vis-à-vis du maillage choisi au sein de la méthode des éléments finis [LAD 91]. Notons que cette modélisation a aussi été appliquée en dynamique [ALL 97].

La mise en œuvre de la modélisation précédemment introduite a débouché sur la réalisation de différents logiciels prototypes [ALL 92b, 98a]. Même si les résultats ainsi obtenus montrent une bonne corrélation des modèles avec l'expérience, des difficultés numériques persistent encore, en particulier au niveau du traitement de la localisation des déformations et de l'endommagement. Ici, nous nous intéresserons plus particulièrement à la simulation des stratifiés. Les algorithmes incrémentaux classiques ne paraissant pas adaptés à la simulation de fortes localisations, nous présenterons une stratégie de résolution plus robuste. L'efficacité de telles simulations passant aussi par un contrôle précis des paramètres de calcul, un estimateur d'erreur, relatif aux modèles de comportements élasto-viscoplastiques endommageables, sera introduit.

La stratégie de calcul retenue, pour accroître la robustesse des simulations, est la méthode LATIN [LAD 99a]. Cette méthode, introduite en 1985, ayant fait preuve de grande robustesse et d'efficacité pour de nombreux problèmes, en particulier dans des cas de (visco)plasticité, nous en présentons ici une extension aux cas de comportements adoucissants, appliquée à un problème modèle unidimensionnel. La méthode LATIN est en rupture avec les méthodes incrémentales classiquement utilisées, car elle n'est pas basée sur la notion d'incrément. Il s'agit d'une méthode itérative, qui, partant d'une initialisation grossière (souvent issue d'un calcul élastique), propose à chaque itération une solution approchée du problème, en tout point et à tout instant. L'idée de départ est une partition des difficultés, en séparant

les équations non linéaires des équations globales en variables d'espace. Cette partition permet une résolution à deux étapes : à chaque itération, on construit alternativement une solution du premier, puis du second groupe d'équations, par une étape locale, suivi d'une étape linéaire globale. Le choix de directions de recherche, supposant connue l'évolution des variables internes du problème à chaque étape, permet l'écriture de ces deux étapes. L'utilisation de la méthode LATIN pour traiter des problèmes (visco)plastiques endommageables passe par une reformulation du problème classique, et la définition de directions de recherche spécifiques, adaptées aux comportements endommageables. Les résultats prometteurs du problème modèle unidimensionnel seront présentés.

Dans le but d'augmenter l'efficacité de la simulation, un estimateur d'erreur spécifique aux comportements adoucissants est ensuite introduit [LAD 99b]. Cet estimateur est basé sur la notion d'erreur en dissipation [LAD 98b] destinée aux cas non linéaires d'évolution, elle-même issue de l'erreur en relation de comportement [LAD 99a]. Son utilisation, dans le cas de la simulation des stratifiés, permet le contrôle du calcul, ainsi que celui de l'algorithme itératif de la méthode LATIN. Les résultats obtenus sur le problème modèle unidimensionnel laissent entrevoir les possibilités d'adaptation des paramètres du calcul, afin d'en diminuer les coûts.

## 2. Méso-modélisation des stratifiés

Le mésomodèle des composites stratifiés repose sur une décomposition de tout empilement quelconque en deux types de mésoconstituants :

- la monocouche ;
- l'interface interlaminaire, entité surfacique liée aux deux couches adjacentes, dépendant de l'orientation relative de leurs fibres. L'interface  $0^\circ/0^\circ$  n'est *a priori* pas introduite.

Les mécanismes d'endommagement sont pris en compte par une description du comportement par variables internes. Le mésomodèle est défini par une propriété supplémentaire : l'état des variables d'endommagement est uniforme dans l'épaisseur de la couche élémentaire. Ce point joue un rôle majeur lors de la simulation d'une fissure par le mésomodèle. En complément, des modèles d'évolution de l'endommagement « avec effet retard » sont introduits.

Une limitation du mésomodèle proposé est que la rupture du matériau ne peut être décrite que par deux types de macrofissures :

- des fissures dues au délaminage à l'intérieur des interfaces ;
- des fissures perpendiculaires au plan moyen du stratifié, avec chaque couche fissurée complètement rompue dans son épaisseur.

Une autre limitation est l'impossibilité de décrire des chargements dynamiques extrêmement rapides, car la longueur d'onde dynamique doit être supérieure à la longueur caractéristique du modèle, qui est l'épaisseur du pli.

Le modèle lié à la monocouche, rapidement résumé ici, ainsi que celui de l'interface, sont détaillés dans [ALL 92a, LAD 92].

### 2.1. Lois d'état de l'endommagement de la couche

Les lois d'état de l'endommagement sont définies à partir de l'énergie de déformation  $E_D$  de la couche endommagée, dans laquelle apparaissent trois variables internes :  $d$ ,  $d'$  et  $d_F$ , décrivant respectivement la chute de rigidité en cisaillement, en traction transverse, et la rupture des fibres. Les forces thermodynamiques, associées aux variables internes d'endommagement au sens de la dissipation mécanique, s'obtiennent par :

$$Y_i = \frac{\partial}{\partial d_i} \langle \langle E_D \rangle \rangle \Big|_{\sigma: \text{cst}}$$

où  $\langle \langle \cdot \rangle \rangle$  représente l'intégrale sur l'épaisseur de la couche [LAD 00]. L'indice  $i$  représente  $Y_d$ ,  $Y_{d'}$  et  $Y_F$  pour  $Y_i$  et  $d$ ,  $d'$  et  $d_F$  pour  $d_i$ , respectivement.

### 2.2. Lois d'évolution de l'endommagement

Classiquement, pour de faibles taux d'endommagement, les lois d'évolution introduites initialement sont de la forme :

$$d_i = f_i \left( \underline{Y}_i^{1/2} \right) \text{ pour } d_i \leq 1, \quad \text{avec } \underline{Y}_i = \sup_{\tau \leq t} Y_i \Big|_{\tau}$$

Ces lois décrivent à la fois une évolution progressive et fragile de l'endommagement. Pour des taux d'endommagement plus importants, des lois d'évolution « avec effet retard » ont été introduites :

$$\dot{d}_i = \frac{1}{\tau_c} \left[ 1 - \exp \left( -a \left\langle f_i \left( Y_i^{1/2} \right) - d_i \right\rangle \right) \right] \text{ si } d_i \leq 1, \quad d_i = 1 \text{ sinon}$$

Ces lois montrent qu'une variation de la force  $Y_i$  n'engendre pas une évolution instantanée de la variable d'endommagement  $d_i$ , car il existe un certain retard défini par le temps caractéristique  $\tau_c$ . En outre,  $1/\tau_c$  représente un taux maximum d'endommagement. On peut remarquer que ce temps caractéristique est lié à la vitesse de propagation des fissures, et n'est donc pas du tout du même ordre de grandeur que ceux utilisés en viscoplasticité ou en viscoélasticité.

### **2.3. Couplage endommagement/(visco)plasticité au sein de la couche**

L'endommagement, dû aux microfissures, génère du contact avec frottement et donc des déformations inélastiques. L'introduction du couplage endommagement/plasticité et la réécriture du problème grâce aux variables effectives, ne seront pas détaillés ici, mais peuvent être trouvés dans [LAD 92].

### **3. L'algorithme de résolution**

La modélisation présentée précédemment a été validée par la mise en œuvre de différents logiciels de simulation du comportement jusqu'à rupture des composites stratifiés [ALL 92b, LAD 98a] : les résultats numériques sont en accord avec ceux issus de l'expérience. Des difficultés persistent encore, principalement au niveau de l'algorithme de résolution utilisé dans ces logiciels. En effet, les algorithmes incrémentaux classiques ne semblent pas adaptés au traitement de fortes non-linéarités, comme la zone de localisation des déformations observée juste avant la rupture. Nous présentons donc une stratégie de résolution foncièrement différente, plus apte à décrire de tels comportements. La stratégie de calcul retenue, pour accroître la robustesse des simulations, est la méthode LATIN [LAD 99a]. Cette méthode, introduite en 1985, ayant fait preuve de grande robustesse et d'efficacité pour de nombreux problèmes, en particulier dans des cas de (visco)plasticité, nous en présentons ici une extension aux cas de comportements adoucissants, appliquée à un problème modèle unidimensionnel.

#### **3.1. La méthode LATIN : formulation classique en viscoplasticité**

La méthode LATIN est en rupture avec les méthodes incrémentales, car elle n'est pas basée sur la notion d'incrément. Il s'agit d'une méthode itérative, qui, partant d'une initialisation grossière (souvent issue d'un calcul élastique), propose à chaque itération une solution approchée du problème, en tout point et à tout instant de l'intervalle d'étude. La méthode repose sur trois principes :

- le premier est une partition des difficultés, en séparant les équations non linéaires des équations globales en variables d'espace ;
- le deuxième est une résolution itérative à deux étapes : à chaque itération, on construit alternativement une solution du premier, puis du second groupe d'équations, par une étape locale, suivie d'une étape linéaire globale. Le choix de directions de recherche, supposant connue l'évolution des variables internes du problème à chaque étape, permet l'écriture de ces deux étapes ;
- le troisième est une représentation des inconnues par une approximation temps-espace issue de l'approximation « chargements simples », qui permet généralement un gain important sur le coût de résolution des étapes globales.

Dans le cas classique d'une formulation du comportement par variables internes, pourvu que ce comportement s'exprime au moyen d'une formulation normale et standard, la partition des équations est faite de la manière suivante :

- le groupe d'équations locales en variables d'espace, non linéaires, inclut les lois d'évolution des variables internes. On note  $\Gamma$  l'ensemble des solutions de ce groupe ;

- le groupe d'équations linéaires, mais majoritairement globales, rassemble toutes les autres équations du problème de référence, c'est-à-dire les équations d'équilibre statiques et cinématiques, ainsi que les lois d'état. L'ensemble des solutions de ce second groupe est noté  $A_d$ .

La solution exacte du problème de référence étant situé à l'intersection de  $A_d$  et  $\Gamma$ , nous l'approcherons itérativement en construisant une solution approchée vérifiant alternativement les deux groupes d'équations. Pour ce faire, l'algorithme est initialisé par un calcul élastique. Cette initialisation appartenant à  $A_d$ , la solution approchée suivante, devant appartenir à  $\Gamma$ , est issue de la résolution d'un problème local (d'où l'appellation « étape locale »). Nous définissons pour cela une direction de recherche arbitraire, en supposant connue l'évolution des variables associées du problème. Naturellement, cette direction de recherche est choisie locale en variables d'espace.

Nous ne présenterons la mise en œuvre que des deux premiers principes, les variables définies sur l'espace-temps ayant été discrétisées, dans un premier temps, plus classiquement par des éléments finis en espace et par la  $\theta$ -méthode en temps, afin de tester la faisabilité de l'extension aux matériaux adoucissants. La conséquence de cette discrétisation temporelle classique est que la résolution de chaque étape s'effectue incrémentalement, contrairement au cas où le troisième principe serait utilisé.

Comme illustration de l'écriture classique de l'algorithme, prenons par exemple le cas d'un comportement viscoplastique de Prandtl-Reuss : les variables internes sont la déformation totale  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , la déformation inélastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  et la déformation plastique cumulée  $p$  ; les variables associées sont la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et la variable associée à  $p$ , notée  $R$ . Remarquons ici que les lois d'état peuvent être choisies non linéaires, contrairement à d'autres versions de LATIN, où l'on utilise le fait qu'un matériau standard admet une formulation normale et standard (rendant linéaire cette loi d'état par changement de variables), si certaines hypothèses peu restrictives sont remplies [LAD 98b]. Remarquons encore que l'unicité de la solution trouvée à l'étape locale peut être démontrée sous certaines conditions [LAD 99a]. Le choix de la direction de recherche locale retenu ici, efficace et robuste pour les problèmes de (visco)plasticité, est extrêmement simple à mettre en œuvre :

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = 0, \quad \Delta R = 0$$

où la notation  $\Delta x$  représente la différence entre la valeur de  $x$  appartenant à  $\Gamma$  et sa valeur précédente appartenant à  $A_d$ . Avec une telle direction de recherche, la

discrétisation du problème de référence conduit à résoudre explicitement l'étape locale à un très faible coût.

L'étape linéaire globale suivante consiste à trouver une solution approchée appartenant à  $A_d$ , connaissant celle précédente de  $\Gamma$ . L'opérateur, définissant la direction de recherche linéaire par un lien entre les variations des variables internes et celles des variables associées, est ici choisi comme la différentielle de l'opérateur décrivant les lois d'évolution. Cette direction est alors dite « direction de recherche tangente ». Dans le cas où ce dernier opérateur n'est pas différentiable, comme en plasticité par exemple, la direction de recherche choisie peut alors être la différentielle de l'opérateur viscoplastique régularisant le comportement plastique.

Concrètement, avec le modèle viscoplastique de Prandtl-Reuss, les lois d'évolution dérivent du pseudo-potential de dissipation suivant :

$$\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, R) = \frac{k_v}{n_v + 1} \left\langle \|\boldsymbol{\sigma}^D\| - (R + R_0) \right\rangle_+^{n_v + 1}$$

$$\text{Soit : } -\dot{p} = \frac{\partial \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, R)}{\partial R} = -k_v \left\langle \|\boldsymbol{\sigma}^D\| - (R + R_0) \right\rangle_+^{n_v} \quad \text{et} \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\partial \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}, R)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^D}{\|\boldsymbol{\sigma}^D\|} \dot{p}$$

La direction de recherche de l'étape globale s'obtient alors par différentiation :

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \\ -\Delta \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 & \hat{H}_2 \\ \hat{H}_2 & \hat{H}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\sigma} \\ \Delta R \end{bmatrix}$$

$$\text{Avec : } \hat{H}_1 = n_v k_v \left\langle \|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^D\| - (\hat{R} + R_0) \right\rangle_+^{n_v - 1} \quad \text{et} \quad \hat{H}_2 = -\frac{\hat{\boldsymbol{\sigma}}^D}{\|\hat{\boldsymbol{\sigma}}^D\|} \hat{H}_1$$

les quantités «  $\hat{\quad}$  » étant issues de l'étape locale précédente, donc connues.

Notons qu'il existe d'autres choix possibles pour les directions de recherche. En particulier, la convergence de la méthode LATIN peut être démontrée dans le cas de deux directions de recherche dites « conjuguées », définies chacune par un opérateur linéaire, positif et local en variables d'espace.

### 3.2. Particularités spécifiques à l'endommagement

L'utilisation de la méthode LATIN pour traiter des problèmes (visco)plastiques endommageables passe par une reformulation du problème classique et la définition de directions de recherche spécifiques, adaptées aux comportements endommageables.

Pour plus de clarté, le comportement sera décrit par la suite par un endommagement isotrope, défini par une unique variable interne scalaire, notée  $d$ . Remarquons que l'écriture, dans le cas plus général d'un endommagement anisotrope,

peut être envisagé en remplaçant dans les équations suivantes la variable scalaire  $d$  par un « vecteur d'endommagement »  $\underline{d}$ .

Un premier point se situe au niveau de la partition des équations du problème : en effet, la loi d'état reliant la contrainte à la déformation élastique devient non linéaire, avec l'apparition de l'endommagement :

$$\sigma = (1 - d) \varepsilon^e$$

Cette loi étant non linéaire, elle ne permet plus la partition classique des équations du problème de référence. Dans le but de la linéariser, une direction de recherche spécifique au paramètre d'endommagement  $d$  est choisie : cette variable est considérée comme un paramètre inchangé durant l'étape globale et conserve donc sa valeur connue issue de l'étape locale précédente, soit :

$$\Delta \dot{d} = 0$$

Par l'utilisation de variables effectives [LAD 92], les directions de recherche concernant la (visco)plasticité et l'endommagement sont totalement découplées [DOU 00] et celles concernant la (visco)plasticité s'écrivent comme précédemment.

Un second point spécifique au comportement endommageable est une reformulation du comportement ; l'évolution du paramètre d'endommagement peut s'écrire plus généralement :

$$\dot{d}_i = f_i \left( \langle Y_i - w(d_i) \rangle \right)$$

$$\text{avec : } f(0) = 0, w(0) = 0, \quad \text{et } f(x) \geq 0, w(x) \geq 0, \forall x \geq 0$$

La fonction scalaire  $w(\bullet)$  peut être interprétée comme un effet « d'érouissage » ; en caractérisant cet effet par l'ajout de la variable interne  $\alpha_i$ , et de sa variable associée  $\beta_i$ , on obtient une modification des lois suivantes :

$$\dot{d}_i = f_i \left( \langle Y_i - \beta_i \rangle \right) \quad \text{et} \quad -\dot{\alpha}_i = -f_i \left( \langle Y_i - \beta_i \rangle \right)$$

$$\text{avec : } d_i = \alpha_i = 0 \quad \text{à } t = 0 \quad \text{et} \quad \text{la nouvelle loi d'état : } \beta_i = w(\alpha_i)$$

L'apport de ces deux nouvelles variables permet l'écriture classique de l'algorithme LATIN, en ajoutant les directions de recherche suivantes :

$$\Delta \beta_i = 0 \quad \text{au niveau de l'étape locale,}$$



$$[-\Delta\hat{\alpha}_i] = \begin{bmatrix} -\hat{H}_3 & \hat{H}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Y_i \\ \Delta \beta_i \end{bmatrix} \text{ au niveau de l'étape globale}$$

où  $\hat{H}_3$  est la différentielle de l'opérateur définissant la loi d'évolution ci-dessus.

### 3.3. Critère d'arrêt de l'algorithme

On peut trouver dans [LAD 99a] des indicateurs de convergence classiques pour la méthode LATIN. Dans notre cas et dans le but de contrôler les calculs, le critère d'arrêt de l'algorithme sera la stabilisation de l'estimateur d'erreur introduit au chapitre suivant. On remarquera que le processus itératif s'arrête lorsque l'estimateur d'erreur n'évolue plus, mais pas nécessairement lorsque celui-ci tend vers zéro, car l'erreur résiduelle à convergence est due aux erreurs commises lors des discrétisations spatiale et temporelle du problème.

### 3.4. Application unidimensionnelle

L'exemple unidimensionnel proposé est celui d'une poutre encadrée à une extrémité et sollicitée en tension à l'autre extrémité par un déplacement imposé, linéairement croissant. Cette poutre possède en son centre un défaut de rigidité, dans le but d'y localiser la rupture du barreau. Son comportement est viscoplastique endommageable, semblable à celui d'un pli unidirectionnel sollicité en traction transverse. La limite élastique initiale  $R_0$  est choisie suffisamment grande pour ne pas initier de plasticité.

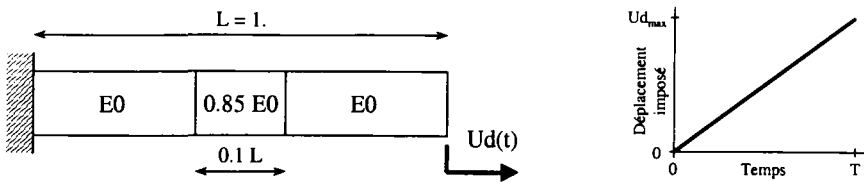
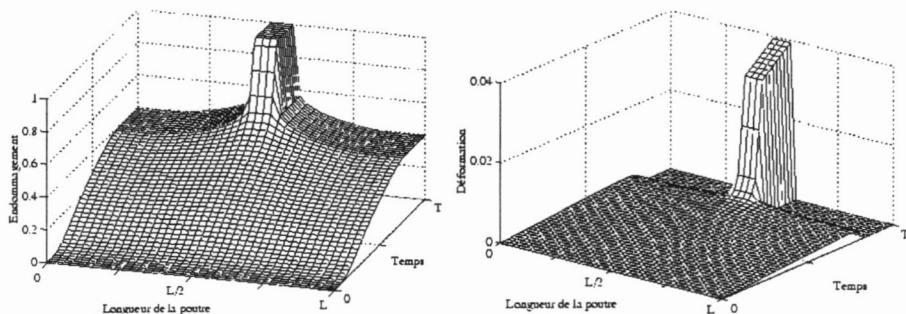


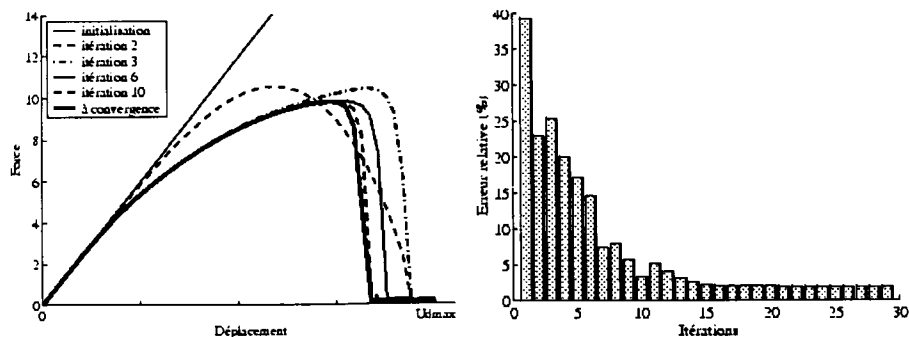
Figure 1. Géométrie et évolution du chargement

La figure 2 montre l'évolution de l'endommagement et de la déformation pour une discrétisation de 50 pas de temps et un maillage uniforme de 40 éléments. On observe un endommagement quasi uniforme au début du chargement, pour atteindre une forte localisation avant rupture, où seul l'endommagement au centre évolue encore. Cette localisation se retrouve au niveau des déformations, où les deux extrémités de la poutre subissent une décharge élastique.

On constate sur la figure 3a que la réponse globale de la structure présente un adoucissement brutal au moment de la localisation. Cependant, on peut aussi remarquer que les solutions intermédiaires issues de la méthode LATIN décrivent cet adoucissement au fur et à mesure, car l'évolution de l'endommagement est obtenue progressivement au cours des itérations. Ainsi, l'algorithme LATIN ne rencontre pas de difficultés particulières pour suivre un changement comportemental si brusque, contrairement aux algorithmes incrémentaux. La figure 3b illustre l'efficacité de la méthode par l'évolution de l'erreur en fonction des itérations.



**Figure 2.** Evolution de l'endommagement et de la déformation en fonction du temps et de l'abscisse sur la barre



**Figure 3.** Réponse globale de la structure (a) et évolution de l'erreur (b) en fonction des itérations

#### 4. Le contrôle des calculs

L'utilité d'un estimateur d'erreur est double : son utilisation permet d'une part, de vérifier la pertinence de calculs réalisés et d'autre part, d'optimiser les paramètres afin d'éviter des calculs inutiles. Les sources d'erreur, pour un problème non linéaire

dépendant du temps, sont : l'approximation spatiale liée au maillage éléments finis, l'approximation temporelle faite par la discrétisation de l'intervalle de temps et le défaut de convergence toléré pour les algorithmes itératifs. Le lecteur trouvera dans [DOU 00] une bibliographie concernant les différents indicateurs d'erreur. L'estimateur d'erreur utilisé ci-dessous, applicable aux comportements élastoplastiques endommageables, est basé sur la notion d'erreur en relation de comportement et sur son extension aux cas non linéaires d'évolution, l'erreur en dissipation [LAD 98b]. Il a fait l'objet d'une présentation détaillée dans [LAD 99b].

#### 4.1. L'estimateur d'erreur en relation de comportement

L'idée de base de la définition de cet estimateur est une partition des équations du problème en deux groupes, le premier rassemblant les équations les plus « sûres » (équilibres cinématique et statique et conditions initiales) et le second les moins fiables (les lois de comportement). La mesure d'erreur est faite sur une solution dite admissible, c'est-à-dire vérifiant le premier groupe d'équations et quantifie la non-vérification du second groupe. L'erreur est ensuite construite par l'ajout de la contribution des lois d'état à celle des lois d'évolution. Il est montré que deux types de potentiel convexe pouvaient être introduits, les crochets de dualité étant différents. Ces deux potentiels scalaires convexes sont : le pseudo-potential de dissipation  $\varphi^*$ , dans le cas des lois d'évolution et l'énergie libre  $\psi$  (exprimée en fonction des contraintes et des variables internes pour en assurer la convexité), dans le cas des lois d'état. Les contributions utilisent ensuite un résidu défini, pour chaque potentiel, par l'inégalité de Legendre-Fenchel, de la manière suivante :

$$\eta_{\psi}(\boldsymbol{\sigma}, d, \alpha, p, \boldsymbol{\varepsilon}^e, Y, \beta, R) = \psi(\boldsymbol{\sigma}, d, \alpha, p) + \psi^*(\boldsymbol{\varepsilon}^e, Y, \beta, R) - \text{Tr}[\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}^e] - Y d - \beta \alpha - R p$$

$$\eta_{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, R, Y, \beta, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}, \dot{d}, -\dot{\alpha}) = \varphi^*(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, R, Y, \beta) + \varphi(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}, \dot{d}, -\dot{\alpha}) - \text{Tr}[\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p] + R \dot{p} - Y \dot{d} + \beta \dot{\alpha}$$

où  $\psi^*$  est le potentiel dual de l'énergie libre modifiée  $\psi$  et où  $\varphi$  représente le potentiel dual du pseudo-potential de dissipation  $\varphi^*$ . Les variables effectives sont repérées par « ~ ». L'inégalité de Legendre-Fenchel nous garantissant la positivité de ces deux résidus, on construit donc une contribution locale à l'erreur, en chaque point de la structure et en chaque instant, par :

$$\mathcal{E}_{x,t}^2 = \eta_{\psi}(\boldsymbol{\sigma}, d, \alpha, p, \boldsymbol{\varepsilon}^e, Y, \beta, R) \Big|_t + \int_0^t \eta_{\varphi}(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}, R, Y, \beta, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, -\dot{p}, \dot{d}, -\dot{\alpha}) dt$$

La solution admissible coïncide avec la solution exacte du problème, si et seulement si le résidu précédent est nul, pour tout point et en tout instant de l'intervalle d'étude  $[0, T]$ .

La définition d'une erreur globale en espace et en temps est faite en plusieurs étapes :

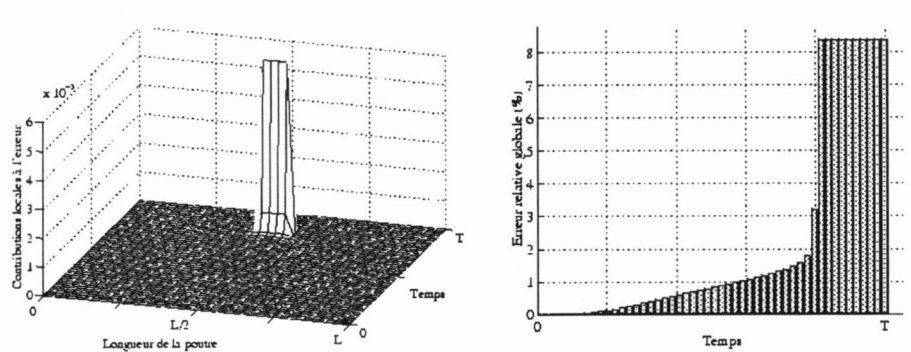
- une intégration du résidu précédent sur l'espace ;
- puis la définition de la contribution à l'erreur sur un intervalle  $[0, t]$  ;
- enfin, l'erreur absolue est choisie comme le maximum des contributions précédentes :

$$e_t^2 = \int_{\Omega} e_{x,t}^2 d\Omega \quad e_{[0,t]}^2 = \sup_{\tau \in [0,t]} e_{\tau}^2 \quad e^2 = \sup_{t \in [0,T]} e_{[0,t]}^2$$

Un effort particulier au niveau de la construction de cet estimateur d'erreur a été fait, de telle manière que les cas purement élastiques ou (visco)plastiques sans endommagement soient des cas particuliers : en élasticité, on retrouve l'expression classique de l'erreur en relation de comportement développée initialement dans le domaine linéaire et, pour les matériaux (visco)plastiques, l'estimateur coïncide avec l'erreur en dissipation, à condition que la solution admissible vérifie les lois d'état du matériau.

### 4.2. Résultats numériques

La figure 4a présente les contributions locales à l'erreur, appliquées sur l'exemple traité au chapitre précédent.



**Figure 4.** Contributions locales à l'erreur (a) et erreur relative globale en fonction du temps (b)

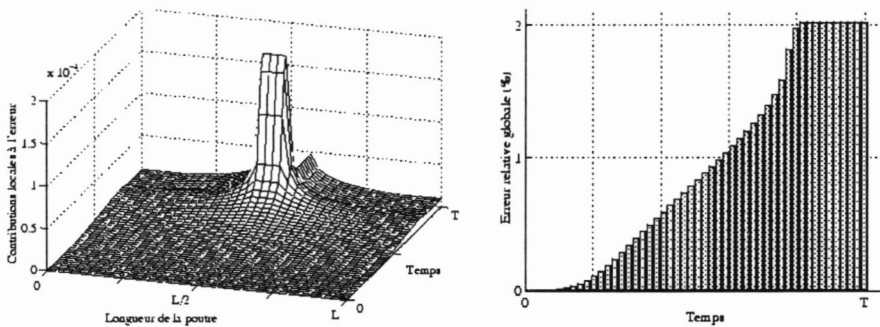
On constate que ces contributions locales sont exclusivement concentrées au moment de la localisation de l'endommagement. L'erreur relative globale, obtenue par intégration sur le domaine spatial, est présentée figure 4b.

Notre exemple unidimensionnel ne permet pas de tester l'influence de la discrétisation spatiale sur la valeur de l'erreur, cette dernière ne dépendant quasiment pas du nombre d'éléments. Par contre, l'estimateur se comporte sainement vis-à-vis de la discrétisation temporelle, comme le montre le tableau 1.

Nb pas de temps	25	50	100	200	400	800	1600	3200	6400
Erreur relative %	13,3	8,37	7,53	5,64	3,26	1,76	1,00	0,49	0,25

**Tableau 1.** Evolution de l'erreur en fonction du nombre de pas de temps

Cependant, la carte des contributions locales à l'erreur n'est pas satisfaisante : on remarque en effet qu'une discrétisation temporelle plus fine s'impose au moment de la localisation, par rapport au reste de l'intervalle de temps. Un critère sur la vitesse d'endommagement étant utilisé pour détecter la localisation, il permet de sous-discrétiser localement les intervalles de temps critiques. Les résultats ainsi obtenus sont présentés figure 5.



**Figure 5.** Contributions locales à l'erreur (a) et erreur relative globale en fonction du temps (b), après adaptation de la discrétisation temporelle

On peut maintenant noter une influence quasi uniforme de chaque pas de temps sur l'erreur relative globale. En outre, l'évolution de l'erreur en fonction du nombre de pas de temps reste saine (voir tableau 2), avec des niveaux d'erreur atteints beaucoup plus bas que précédemment.

Nb pas de temps	25	50	100	200	400	800
Erreur relative %	3,53	1,99	0,97	0,50	0,25	0,13

**Tableau 2.** Evolution de l'erreur en fonction du nombre de pas de temps, après adaptation

Remarquons que l'extension aux cas tridimensionnels de l'illustration 1D présentée ici ne pose pas de problème, car l'écriture de la méthode LATIN et celle de l'estimateur d'erreur ont été faites dans le cas général d'une structure *a priori* tridimensionnelle.

## 5. Conclusion

Cette étude a été motivée par le fait que les logiciels prototypes, destinés à la simulation du comportement des structures composites stratifiées et basés sur des algorithmes classiques de résolution incrémentaux, n'ont pas été pleinement satisfaisants.

Afin d'augmenter la robustesse de telles simulations, le choix de l'algorithme s'est porté sur la méthode LATIN, cette dernière ayant fait preuve de grande robustesse et d'efficacité dans de très nombreux domaines, en particulier en (visco)plasticité. La prise en compte du comportement endommageable a nécessité différentes attentions particulières au niveau de l'écriture de l'algorithme, principalement concernant le choix des directions de recherche, ainsi que la prise en compte de la rupture du composite.

Enfin, la définition d'un estimateur d'erreur plus général que l'erreur en relation de comportement dans le cas linéaire, et que l'erreur en dissipation pour les cas non linéaires d'évolution, permet le contrôle des résultats précédemment obtenus. L'écriture de cet estimateur repose fortement sur celle de l'erreur en dissipation.

Les résultats obtenus sur le problème « modèle » unidimensionnel ayant prouvé la faisabilité, ils permettent d'espérer étendre sans grandes difficultés cette démarche aux cas moins triviaux, plus proches des structures composites.

## 6. Bibliographie

- [ALL 92a] ALLIX O., LADEVÈZE P., "Interlaminar interface modelling for prediction of laminates delamination", *Composite Structures*, vol. 22, 1992, p. 235-242.
- [ALL 92b] ALLIX O., "Damage analysis of delamination around a hole", *New Advances in Computational Mechanics*, 1992, P. Ladevèze & O.C. Zienkiewicz Editions, Elsevier, p. 411-421.
- [ALL 94] ALLIX O., LADEVÈZE P., VITTECOQ E., "Modelling and identification of the mechanical behaviour of composite laminates in compression", *Composites Science and Technology*, vol. 51, 1994, p. 35-42.
- [ALL 97] ALLIX O., DEÙ J.-F., "Delay-damage modelling for fracture prediction of laminated composites under dynamic loading", *Engineering Transactions*, vol. 45, 1997, p. 29-46.

- [DOU 00] DOUCHIN B., Stratégie de calcul robuste et adaptative pour la simulation de l'endommagement et de la rupture des structures composites stratifiées, Thèse de doctorat, Ecole normale supérieure de Cachan, 2000.
- [LAD 86] LADEVÈZE P., « Sur la mécanique de l'endommagement des composites », *Comptes rendus des JNC 5*, Paris, 1986, C. Bathias & D. Menkès Editions, Pluralis Publication, p. 667-683.
- [LAD 91] LADEVÈZE P., "About a damage mechanics approach", *Mechanics and Mechanisms of Damage in Composites and Multi-materials*, London, 1991, D. Baptiste Editions, p. 119-141.
- [LAD 92] LADEVÈZE P., LE DANTEC E., "Damage modelling of the elementary ply for the laminated composites", *Composites Science and Technology*, vol. 43, 1992, p. 257-267.
- [LAD 98a] LADEVÈZE P., ALLIX O., GORNET L., LÉVÊQUE D., PERRET L., "A computational damage mechanics approach for laminates: Identification and comparison with experimental results", *Damage Mechanics in Engineering Materials*, 1998, G.Z. Voyiadjis, J.W. Wu & J.L. Chaboche Editions, Elsevier, p. 481-500.
- [LAD 98b] LADEVÈZE P., MOËS N., "A new a posteriori error estimation for nonlinear time-dependent finite element analysis", *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 157, 1998, p. 45-68.
- [LAD 99a] LADEVÈZE P., *Nonlinear Computational Structural Mechanics*, Springer, 1999, (French version 1996, Hermès).
- [LAD 99b] LADEVÈZE P., MOËS N., DOUCHIN B., "Constitutive relation error estimators for (visco)plastic finite element analysis with softening", *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.*, vol. 176, 1999, p. 247-264.
- [LAD 00] LADEVÈZE P., "Modelling and computation until final fracture of laminate composites", *Recent developments in durability analysis of composite systems*, 2000, A.H. Cardon, H. Kukuda, K.L. Reifsnider & G. Verchery Editions, Rotterdam Balkema, p. 39-47.