

---

# Éléments finis triangulaires pour la simulation de l'emboutissage

## Aspects de base

Francis Sabourin et Marc Vives

Laboratoire de Mécanique des Solides, INSA, Bât. 304  
F-69621, Villeurbanne,  
Francis.Sabourin@insa-lyon.fr

---

*RÉSUMÉ.* Bien que seuls les triangles soient à même de discrétiser en facettes planes les coques de forme générale, ce n'est que récemment qu'a été commercialisé un code de simulation complète de l'emboutissage utilisant un seul type d'élément : le triangle « BPT » à trois degrés de liberté par nœud. À l'aide de l'élément fini de plaque mince à déformation constante « S3 » et de mécanismes équivalents simples, nous montrons dans cet article comment le triangle « BPT » peut être dérivé de l'élément « DKT6 » basé sur des hypothèses de Kirchhoff discrètes et lui-même utilisé dans des codes de mise en forme basés sur une méthode inverse. Ces trois éléments ainsi que l'élément « C0 » (Belytschko) ont été implémentés dans le même programme et les résultats sont comparés à des valeurs théoriques ou expérimentales après mise en forme par emboutissage, suivie d'un retour élastique.

*ABSTRACT.* Although only triangles can describe shells of general shape with plane facets, it is only recently that a code of complete forming simulation has been marketed using only one type of element : the triangle "BPT" with three degrees of freedom per node. Using the constant strain thin plate element "S3" and simple equivalent mechanisms, this article shows how the triangle "BPT" can be derived from the element "DKT6" based on discrete Kirchhoff hypothesis and used in sheet forming software based on an inverse method. The elements "BPT", "S3" and "DKT6" as well as "C0" (Belytschko) are implemented within the same software. Numerical results for these four elements are compared to theoretical values or to experimental values after stamping and spring-back.

*MOTS-CLÉS :* élément fini, coque mince, simulation numérique de l'emboutissage.

*KEYWORDS:* finite element, thin shell, numerical sheet forming analysis.

---

## 1. Introduction

Il est évident que des pièces aux formes très variées peuvent être obtenues par emboutissage d'une tôle mince. La simulation numérique de ce procédé ne correspond donc pas à l'étude de coques particulières (cylindriques, sphériques), mais au cas de coques de forme générale.

Si, pour des raisons de simplicité et de réduction du temps de calcul, on exclut les éléments à côtés courbes, seules les facettes planes triangulaires sont à même de discrétiser ce type de coque. En effet, quand un élément quadrangulaire est utilisé, les quatre nœuds ne restent pas dans un même plan au cours de la déformation, ce qui déclenche plus ou moins tôt le remaillage de la zone concernée.

En outre, et toujours dans un souci de gain de temps de calcul malgré les performances sans cesse accrues des ordinateurs, la plupart des codes spécialisés n'utilisent qu'un point d'intégration dans le plan du rectangle – avec contrôle des modes à énergie nulle –, ce qui restreint encore l'intérêt d'un élément à quatre nœuds par rapport à un triangle qui peut être naturellement à déformations constantes.

Bien que l'utilisation de quadrangles soit parfois recommandée par les éditeurs des codes industriels, des éléments triangulaires sont cependant disponibles dans des codes commerciaux. Ainsi, la plupart des codes aptes à simuler complètement le procédé d'emboutissage proposent le triangle « C0 » dû aux travaux de Belytschko [BEL 84]. Des codes basés sur la méthode inverse proposent l'élément « DKT6 » dû aux importants travaux de Batoz en la matière [BAT 92, BAT 98]. Récemment mis sur le marché, le code explicite STAMPACK n'utilise, lui, que l'élément « BPT » formulé par Oñate [OÑA 93].

Ces triangles à déformations constantes ne se distinguent que par la formulation des effets de flexion, ceux de membrane correspondant à l'élément « CST ».

La formulation de l'élément « C0 » ne sera pas reprise ici, car l'objectif de cet article est la mise en évidence de mécanismes simples régissant le comportement en flexion. Cette approche inhabituelle est d'abord appliquée au triangle DKT6, qui sert alors de référence pour formuler l'élément simplifié « S3 » [SAB 95], qui conduit lui-même à l'élément BPT. Dans ces trois éléments, les courbures sont exprimées grâce à trois « angles de flexion » pris dans les directions des trois côtés du triangle.

Pour DKT6, ces angles sont obtenus par soustraction, aux degrés de liberté en rotation, d'angles correspondant à un mouvement de solide rigide. L'extrapolation à l'élément S3 impose l'utilisation d'un mécanisme intermédiaire faisant intervenir un triangle voisin par côté concerné. L'élément BPT apparaît alors comme une légère simplification du triangle S3.

Implémentés dans le même environnement logiciel, ces triangles donnent lieu à des comparaisons objectives, tant en termes de précision qu'en temps de calcul.

## 2. Aspect cinématique préliminaire

### 2.1. Présentation

La base locale  $(x, y, z)$  est liée au triangle dans sa position initiale. Ne nous intéressant qu'au phénomène de flexion, le déplacement du triangle considéré comme indéformable est envisagé à un mouvement parallèle au plan moyen  $(P)$  près et, notamment, à une rotation près autour de l'axe  $z$  perpendiculaire à ce plan.

Pour les nœuds 1, 2, 3, les petits déplacements envisageables  $(\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3)$  sont donc pris parallèles  $(w_1 \cdot \vec{z}, w_2 \cdot \vec{z}, w_3 \cdot \vec{z})$  et considérés compatibles, au second ordre près, avec une petite rotation  $\vec{\alpha}$  de l'élément.

Le problème posé est d'abord de trouver  $\alpha$  en fonction de  $w_1, w_2, w_3$  et d'en déduire les rotations  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  du triangle autour des ses côtés.

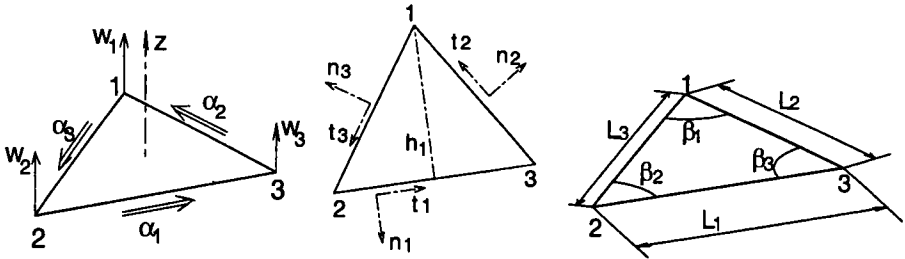


Figure 1. Paramètres et géométrie

Le déplacement global du triangle est considéré comme le résultat de trois rotations successives autour des côtés  $[2, t_1], [3, t_2], [1, t_3]$  d'angles  $\alpha' \cdot t_1, \alpha'' \cdot t_2, \alpha''' \cdot t_3$ .

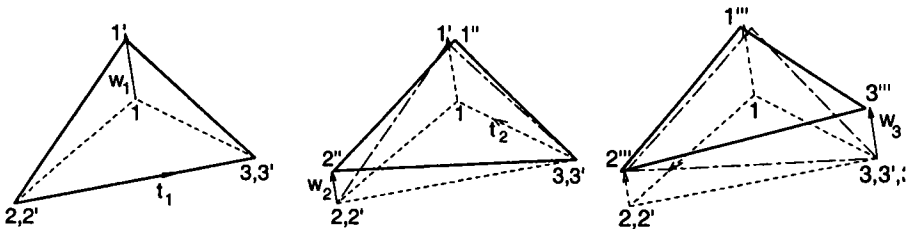


Figure 2. Décomposition initiale

Les vecteurs  $\vec{d}11', \vec{d}2'2''$  et  $\vec{d}3''3'''$  peuvent donc être identifiés, au second ordre près, aux petits déplacements  $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$  normaux au plan moyen  $(P)$ .

En appelant  $h_1, h_2, h_3$  les hauteurs du triangle, les rotations successives sont :

$$\alpha^1 = \frac{w_1}{h_1}, \alpha^2 = \frac{w_2}{h_2}, \alpha^3 = \frac{w_3}{h_3} \text{ et donc : } \vec{\alpha} = \alpha^1 \cdot \vec{t}_1 + \alpha^2 \cdot \vec{t}_2 + \alpha^3 \cdot \vec{t}_3$$

REMARQUE.—  $\alpha^i$  est écrite avec un indice supérieur, comme s'il s'agissait d'une composante contravariante. Ce n'est pas tout à fait le cas, puisque  $t_1, t_2, t_3$  ne constituent pas une base, mais cela s'apparente à une décomposition dans une base.

On obtient la rotation  $\alpha_1$  en posant :  $\alpha_1 = \vec{\alpha} \cdot \vec{t}_1 = \alpha^1 + \alpha^2 \vec{t}_2 \cdot \vec{t}_1 + \alpha^3 \vec{t}_3 \cdot \vec{t}_1$   
avec :  $\vec{t}_2 = -\sin \beta_3 \cdot \vec{n}_1 - \cos \beta_3 \cdot \vec{t}_1$  et  $\vec{t}_3 = \sin \beta_2 \cdot \vec{n}_1 - \cos \beta_2 \cdot \vec{t}_1$

En procédant de façon analogue pour  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ , on trouve finalement :

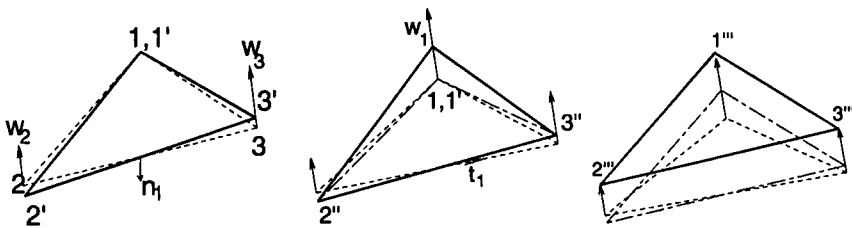
$$\alpha_1 = \frac{w_1}{h_1} - \frac{w_2}{h_2} \cos \beta_3 - \frac{w_3}{h_3} \cos \beta_2$$

$$\alpha_2 = \frac{w_2}{h_2} - \frac{w_3}{h_3} \cos \beta_1 - \frac{w_1}{h_1} \cos \beta_3 \tag{1}$$

$$\alpha_3 = \frac{w_3}{h_3} - \frac{w_1}{h_1} \cos \beta_2 - \frac{w_2}{h_2} \cos \beta_1$$

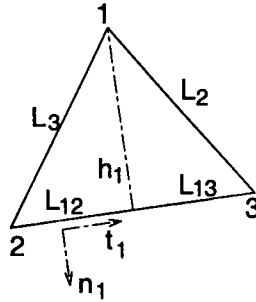
**2.2. Autre méthode**

On peut aussi considérer le déplacement global du triangle comme une rotation  $\gamma_i$  autour de  $(i, \vec{n}_i)$  suivie d'une rotation  $\alpha_i$  autour de  $t_i$ , complétée enfin par une translation parallèle à  $z$ , les trois figures suivantes correspondant au cas où  $i = 1$ .



**Figure 3. Autre décomposition possible**

En se référant aux figures précédentes :  $\gamma_1 = \frac{w_3 - w_2}{L_1}$



**Figure 4.** Découpage du côté 2-3

La translation suivant  $z$  sera égale à :  $d_z = \frac{w_3 \cdot L_{12} + w_2 \cdot L_{13}}{L_1}$ .

La rotation suivant  $\vec{t}_1$  devient donc :  $\alpha_1 = (w_1 - d_z) / h_1$ .

Elle apparaît comme une composante covariante, d'où l'indice inférieur.

Avec  $h_1 \cdot L_1 = h_2 \cdot L_2 = h_3 \cdot L_3 = 2 \cdot \text{Aire}$ , on obtient :

$$\alpha_1 = \frac{w_1}{h_1} - \frac{w_2}{h_2} \cos \beta_3 - \frac{w_3}{h_3} \cos \beta_2.$$

Les décompositions  $(\gamma_2 \cdot \vec{n}_2 + \alpha_2 \cdot \vec{t}_2)$  et  $(\gamma_3 \cdot \vec{n}_3 + \alpha_3 \cdot \vec{t}_3)$  donnent  $\alpha_2$  et  $\alpha_3$ .

### 2.3. Autres expressions utiles

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= c_1 \cdot \vec{x} + s_1 \cdot \vec{y} \\ \vec{t}_1 &= -s_1 \cdot \vec{x} + c_1 \cdot \vec{y} \end{aligned} \quad \text{où } c_1 = \frac{y_{32}}{L_1} = \frac{y_3 - y_2}{L_1} \quad \text{et } s_1 = -\frac{x_{32}}{L_1} = -\frac{x_3 - x_2}{L_1}$$

$$\begin{aligned} \vec{n}_2 &= c_2 \cdot \vec{x} + s_2 \cdot \vec{y} \\ \vec{t}_2 &= -s_2 \cdot \vec{x} + c_2 \cdot \vec{y} \end{aligned} \quad \text{où } c_2 = \frac{y_{13}}{L_2} = \frac{y_1 - y_3}{L_2} \quad \text{et } s_2 = -\frac{x_{13}}{L_2} = -\frac{x_1 - x_3}{L_2} \quad [2]$$

$$\begin{aligned} \vec{n}_3 &= c_3 \cdot \vec{x} + s_3 \cdot \vec{y} \\ \vec{t}_3 &= -s_3 \cdot \vec{x} + c_3 \cdot \vec{y} \end{aligned} \quad \text{où } c_3 = \frac{y_{21}}{L_3} = \frac{y_2 - y_1}{L_3} \quad \text{et } s_3 = -\frac{x_{21}}{L_3} = -\frac{x_2 - x_1}{L_3}$$

$$\begin{aligned}
 \cos\beta_1 &= \frac{\vec{V}_{12} \cdot \vec{V}_{13}}{L_3 \cdot L_2} = \frac{x_{21}}{L_3} \frac{x_{31}}{L_2} + \frac{y_{21}}{L_3} \frac{y_{31}}{L_2} = -s_3 \cdot s_2 - c_3 \cdot c_2 \\
 \cos\beta_2 &= \frac{\vec{V}_{23} \cdot \vec{V}_{21}}{L_1 \cdot L_3} = \frac{x_{32}}{L_1} \frac{x_{21}}{L_3} + \frac{y_{32}}{L_1} \frac{y_{21}}{L_3} = -s_1 \cdot s_3 - c_1 \cdot c_3 \\
 \cos\beta_3 &= \frac{\vec{V}_{31} \cdot \vec{V}_{32}}{L_2 \cdot L_1} = \frac{x_{13}}{L_2} \frac{x_{23}}{L_1} + \frac{y_{13}}{L_2} \frac{y_{23}}{L_1} = -s_2 \cdot s_1 - c_2 \cdot c_1 \\
 \cos\beta_1 &= \frac{L_3^2 + L_2^2 - L_1^2}{2 \cdot L_3 \cdot L_2}; \quad \cos\beta_2 = \frac{L_1^2 + L_3^2 - L_2^2}{2 \cdot L_1 \cdot L_3}; \quad \cos\beta_3 = \frac{L_2^2 + L_1^2 - L_3^2}{2 \cdot L_2 \cdot L_1}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

#### 2.4. Complément

Bien que n'étant pas spécifiquement relative à l'aspect cinématique étudié précédemment, une relation de changement de base est précisée dans ce paragraphe.

En considérant une matrice représentative d'un tenseur du second ordre, définie dans la base  $(n_i, t_i)$ , après changement de base dans  $(X, Y)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{xy} & A_{yy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_i & -s_i \\ s_i & c_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{ni} & A_{nt} \\ A_{nt} & A_{ti} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_i & s_i \\ -s_i & c_i \end{bmatrix} = [R_i]^T \cdot [A_i] \cdot [R_i] \\
 \begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{yy} \\ A_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_i^2 & s_i^2 & -2 \cdot c_i \cdot s_i \\ s_i^2 & c_i^2 & 2 \cdot c_i \cdot s_i \\ c_i \cdot s_i & -c_i \cdot s_i & c_i^2 - s_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_{ni} \\ A_{ti} \\ A_{nt} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

Si seule la composante  $A_{ni}$  est non nulle et dans le cas où une sommation pour  $i$  allant de 1 à 3 doit être effectuée pour obtenir  $[A]$ , on arrive à :

$$\begin{aligned}
 [A] &= [R_1]^T \cdot [A_1] \cdot [R_1] + [R_2]^T \cdot [A_2] \cdot [R_2] + [R_3]^T \cdot [A_3] \cdot [R_3] \\
 \begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{yy} \\ 2 \cdot A_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 \\ 2 \cdot c_1 \cdot s_1 & 2 \cdot c_2 \cdot s_2 & 2 \cdot c_3 \cdot s_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_{n1} \\ A_{n2} \\ A_{n3} \end{Bmatrix} = [R_{nt}] \cdot \begin{Bmatrix} A_{n1} \\ A_{n2} \\ A_{n3} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

### 3. Elément DKT6

#### 3.1. Degrés de liberté

Six degrés de liberté (ddl) sont nécessaires à la formulation de la flexion : les trois translations des nœuds-sommets  $w_1, w_2, w_3$  normales au plan et les trois rotations des nœuds-intermédiaires  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$  respectivement suivant les côtés 1-2 (de longueur  $L_3$ ), 2-3 (de longueur  $L_1$ ) et 3-1 (de longueur  $L_2$ ).

#### 3.2. Interpolations

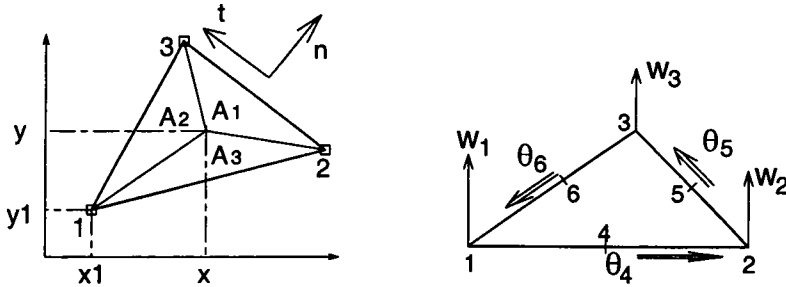


Figure 5. Degrés de liberté et fonctions d'aire

$$\frac{A_1}{A} = \frac{1}{2A} (x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2 + x_3 \cdot y - x \cdot y_3 + x \cdot y_2 - x_2 \cdot y)$$

$$\frac{A_2}{A} = \frac{1}{2A} (x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 + x_1 \cdot y - x \cdot y_1 + x \cdot y_3 - x_3 \cdot y)$$

$$\frac{A_3}{A} = \frac{1}{2A} (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 + x_2 \cdot y - x \cdot y_2 + x \cdot y_1 - x_1 \cdot y)$$

$$w = \frac{A_1}{A} \cdot w_1 + \frac{A_2}{A} \cdot w_2 + \frac{A_3}{A} \cdot w_3$$

$$\theta_x = \left(1 - \frac{2 \cdot A_3}{A}\right) \cdot \theta_{x4} + \left(1 - \frac{2 \cdot A_1}{A}\right) \cdot \theta_{x5} + \left(1 - \frac{2 \cdot A_2}{A}\right) \cdot \theta_{x6} \quad [5]$$

$$\theta_y = \left(1 - \frac{2 \cdot A_3}{A}\right) \cdot \theta_{y4} + \left(1 - \frac{2 \cdot A_1}{A}\right) \cdot \theta_{y5} + \left(1 - \frac{2 \cdot A_2}{A}\right) \cdot \theta_{y6}$$

### 3.3. Courbures

Avec les relations [2] relatives à  $\bar{n}_1, \bar{t}_1, \bar{n}_2, \bar{t}_2, \bar{n}_3$  et  $\bar{t}_3$ , on peut exprimer  $\theta_{x4}, \theta_{y4}, \theta_{x5}, \theta_{y5}, \theta_{x6}$  et  $\theta_{y6}$  en fonction de  $\theta_4, \theta_5$  et  $\theta_6$ .

$$\theta_{x4} = -s_3 \cdot \theta_4 + c_3 \cdot \frac{w_2 - w_1}{L_3} \text{ et } \theta_{y4} = c_3 \cdot \theta_4 + s_3 \cdot \frac{w_2 - w_1}{L_3} \quad [6]$$

Par permutation des indices, on obtient aussi aisément  $\theta_{x5}, \theta_{y5}, \theta_{x6}$  et  $\theta_{y6}$ .

$$\{\mathbf{K}\} = \begin{Bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{A} \cdot \begin{bmatrix} & y_{21} & & y_{32} & & y_{13} \\ x_{21} & & x_{32} & & x_{13} & \\ y_{12} & x_{12} & y_{23} & x_{23} & y_{31} & x_{31} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_{x4} \\ \theta_{y4} \\ \theta_{x5} \\ \theta_{y5} \\ \theta_{x6} \\ \theta_{y6} \end{Bmatrix} \quad [7]$$

$$\{\mathbf{K}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{xx} \\ \mathbf{K}_{yy} \\ 2 \cdot \mathbf{K}_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_\theta] \cdot \begin{Bmatrix} \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix} + [\mathbf{B}_w] \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \{\mathbf{K}_\theta\} + \{\mathbf{K}_\alpha\} \quad [8]$$

$$[\mathbf{B}_\theta] = \frac{1}{A} \cdot \begin{bmatrix} c_3^2 \cdot L_3 & c_1^2 \cdot L_1 & c_2^2 \cdot L_2 \\ s_3^2 \cdot L_3 & s_1^2 \cdot L_1 & s_2^2 \cdot L_2 \\ 2 \cdot c_3 \cdot s_3 \cdot L_3 & 2 \cdot c_1 \cdot s_1 \cdot L_1 & 2 \cdot c_2 \cdot s_2 \cdot L_2 \end{bmatrix} \quad [9]$$

$$[\mathbf{B}_w] = \frac{1}{A} \cdot \begin{bmatrix} c_2 \cdot s_2 - c_3 \cdot s_3 & c_3 \cdot s_3 - c_1 \cdot s_1 & c_1 \cdot s_1 - c_2 \cdot s_2 \\ c_3 \cdot s_3 - c_2 \cdot s_2 & c_1 \cdot s_1 - c_3 \cdot s_3 & c_2 \cdot s_2 - c_1 \cdot s_1 \\ 2 \cdot (c_3^2 - c_2^2) & 2 \cdot (c_1^2 - c_3^2) & 2 \cdot (c_2^2 - c_1^2) \end{bmatrix} \quad [10]$$

$$\{\mathbf{K}_\theta\} = [\mathbf{B}_\theta] \cdot \begin{Bmatrix} \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3^2 & c_1^2 & c_2^2 \\ s_3^2 & s_1^2 & s_2^2 \\ 2 \cdot c_3 \cdot s_3 & 2 \cdot c_1 \cdot s_1 & 2 \cdot c_2 \cdot s_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 2 \cdot \theta_4 / h_3 \\ 2 \cdot \theta_5 / h_1 \\ 2 \cdot \theta_6 / h_2 \end{Bmatrix}$$

$$\{\mathbf{K}_\alpha\} = [\mathbf{B}_w] \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3^2 & c_1^2 & c_2^2 \\ s_3^2 & s_1^2 & s_2^2 \\ 2 \cdot c_3 \cdot s_3 & 2 \cdot c_1 \cdot s_1 & 2 \cdot c_2 \cdot s_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -2 \cdot \alpha_3 / h_3 \\ -2 \cdot \alpha_1 / h_1 \\ -2 \cdot \alpha_2 / h_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{On pose : } \theta_1 = \theta_5 - \alpha_1 ; \theta_2 = \theta_6 - \alpha_2 ; \theta_3 = \theta_4 - \alpha_3 \quad [11]$$



$$\{\mathbf{K}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{xx} \\ \mathbf{K}_{yy} \\ 2.\mathbf{K}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ s_1^2 & s_2^2 & s_3^2 \\ 2.c_1.s_1 & 2.c_2.s_2 & 2.c_3.s_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1/(h_1/2) \\ \theta_2/(h_2/2) \\ \theta_3/(h_3/2) \end{Bmatrix} \quad [12]$$

**3.4. Déformations**

Compte tenu des expressions [4] et [12] des courbures obtenues précédemment, les déformations à la cote z dans l'épaisseur t (pour  $-t/2 \leq z \leq t/2$ ) sont donc :

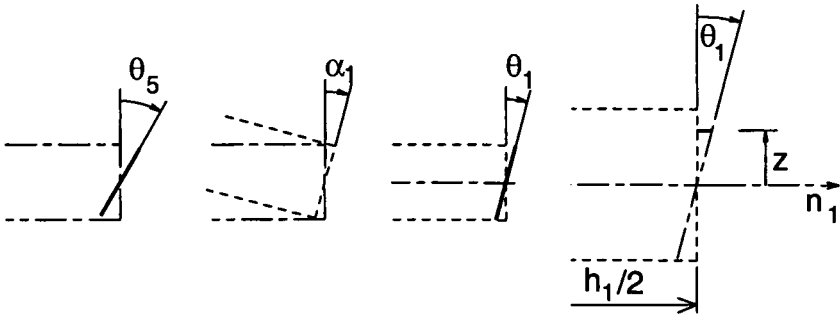
$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = z.\{\mathbf{K}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} \\ 2.\boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{R}_{nt}] \cdot \begin{Bmatrix} z.\theta_1/(h_1/2) \\ z.\theta_2/(h_2/2) \\ z.\theta_3/(h_3/2) \end{Bmatrix} = [\mathbf{R}_{nt}] \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{n1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n2} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{n3} \end{Bmatrix} \quad [13]$$

Dans le repère local de l'élément de plan moyen  $(\bar{x}, \bar{y})$ , elles apparaissent alors comme une *superposition des déformations*  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n1}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n2}$ , et  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n3}$  prises dans les directions  $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \bar{n}_3$  normales à chacun des côtés.

En ayant à l'esprit la nécessité des changements de base, on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} & \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy} & \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y})} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{n1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{n}_1, \bar{t}_1)} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{n2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{n}_2, \bar{t}_2)} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{n3} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{n}_3, \bar{t}_3)}$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n1} = \frac{z.\theta_1}{(h_1/2)}$  ;  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n2} = \frac{z.\theta_2}{(h_2/2)}$  ;  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n3} = \frac{z.\theta_3}{(h_3/2)}$  [14]



**Figure 6.** Déformation dans la direction  $n1$

L'expression des courbures en fonction des *angles de flexion*  $\theta_1, \theta_2$  et  $\theta_3$  devient :

$$\{\mathbf{k}\} = [\mathbf{R}_{nt}] \begin{bmatrix} 2/h_1 & & \\ & 2/h_2 & \\ & & 2/h_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{R}_{nt}] [\mathbf{H}_e] \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad [15]$$

NOTA.– On trouvera dans [OÑA 93] une généralisation de cette notion où est utilisée une relation entre une intégrale de surface et une intégrale sur le contour.

#### 4. Élément S3

##### 4.1. Particularité

L'originalité de l'élément S3 est le calcul des déformations  $\epsilon_{n1}, \epsilon_{n2}, \epsilon_{n3}$  sans utiliser les degrés de liberté  $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ , mais avec les déplacements  $w_4, w_5, w_6$  des nœuds des triangles voisins.

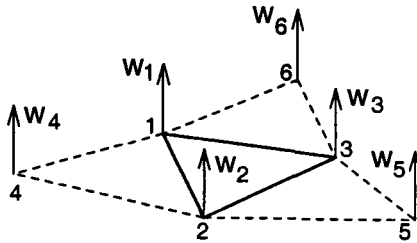


Figure 7. Triangles voisins de l'élément S3

L'élément est géométriquement un triangle à trois nœuds mais les nœuds 4, 5 et 6 des éléments voisins, s'ils existent, sont utilisés pour formuler la flexion dans l'élément (1, 2, 3) grâce aux six translations :  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$ .

Toutefois, en chaque nœud de la structure, il n'y a que *trois degrés de liberté* : trois translations dans le repère global, ce qui diminue considérablement le nombre total de degrés de liberté. En première approximation, ce nombre est divisé par deux par rapport au cas d'une structure discrétisée avec des éléments DKT6.

Le second avantage est qu'il n'y a pas à distinguer les nœuds « sommets » à trois degrés de liberté en translation et les nœuds « intermédiaires » à un seul degré de liberté en rotation dans une direction particulière, ce qui simplifie notablement la programmation, surtout en cas de remaillage.

#### 4.2. Rotations de solide rigide

Les translations normales  $w_1, w_2, w_3$  permettent de déterminer les rotations  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  comme le précisent les relations [1], tandis que  $w_4, w_5, w_6$  permettent la détermination des rotations  $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  respectivement du triangle (1,4,2) autour du côté 2-1, du triangle (2,5,3) suivant le côté 3-2 et du triangle (3,6,1) suivant la direction 1-3 (voir figure 8).

Les relations entre  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  et  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$  sont écrites sous la forme matricielle développée dans l'équation [16] :  $\{\alpha\} = [C]\{w\}$ .

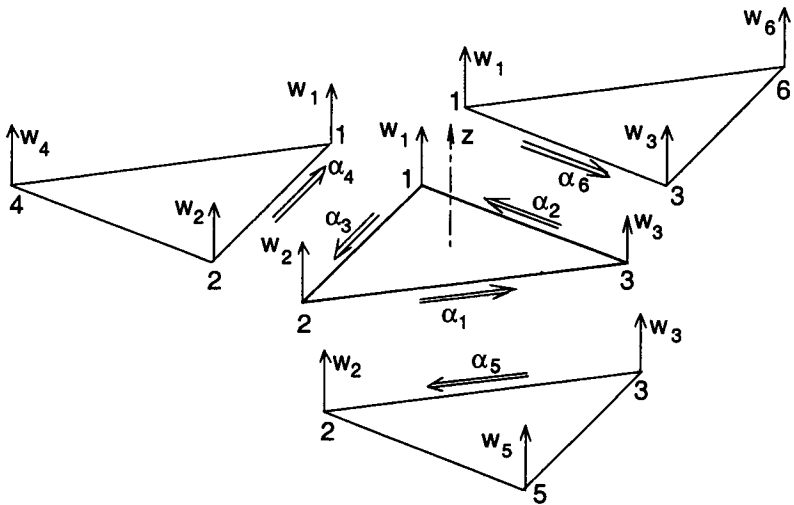


Figure 8. Rotations de solide rigide

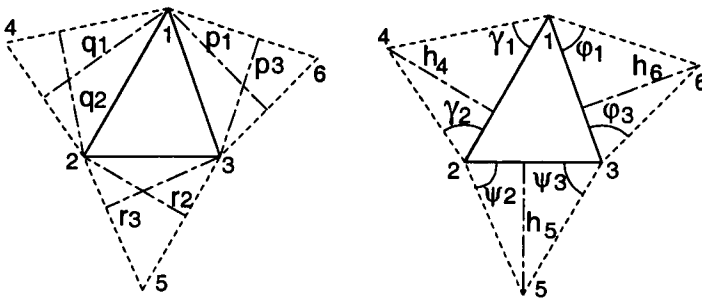
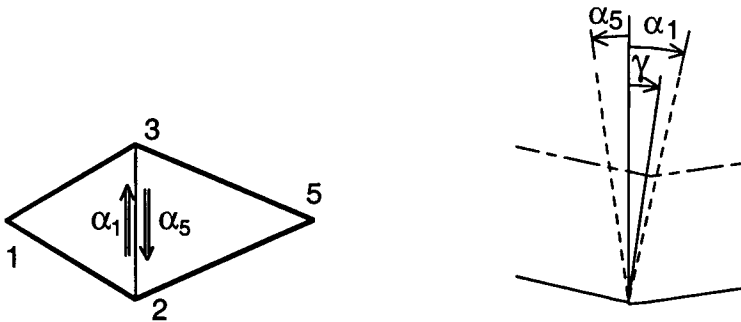


Figure 9. Géométrie des triangles voisins

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h_1} & -\cos\beta_3 & -\cos\beta_2 & & & \\ -\cos\beta_3 & \frac{1}{h_2} & -\cos\beta_1 & & & \\ \frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_3} & & & \\ -\cos\beta_2 & -\cos\beta_1 & \frac{1}{h_3} & & & \\ \frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_3} & & & \\ -\cos\gamma_2 & -\cos\gamma_1 & & \frac{1}{h_4} & & \\ q_1 & q_2 & & & & \\ & -\cos\psi_3 & -\cos\psi_2 & & \frac{1}{h_5} & \\ & r_2 & r_3 & & & \\ -\cos\varphi_3 & & -\cos\varphi_1 & & & \frac{1}{h_6} \\ p_1 & & p_3 & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{Bmatrix} \quad [16]$$

**4.3. Angles de flexion**

En considérant, par exemple, que le triangle (1,2,3) a tourné de l'angle  $\alpha_1$  suivant 2-3 et que le triangle (3,2,5) a tourné de  $\alpha_5$  suivant 3-2, il est nécessaire de trouver la nouvelle position de la fibre commune dans l'épaisseur, soit, ici, l'angle  $\gamma$ .



**Figure 10.** Position de la fibre commune dans l'épaisseur

Pour trouver cet angle  $\gamma$ , qui correspondrait au degré de liberté  $\theta_5$  pour DKT6, une analogie avec une poutre à inertie variable est effectuée. En appui en 2 et 3, le déplacement  $w_1$  est imposé en 1 et le déplacement  $w_5$  est imposé en 5.

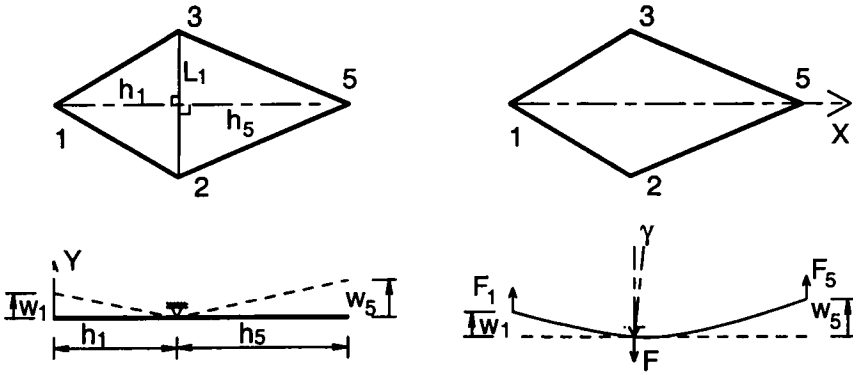


Figure 11. Analogie avec une poutre à inertie variable

Au signe près, l'angle  $\gamma$  correspond donc à la rotation de la section droite de la poutre, c'est-à-dire à la pente de la déformée à l'abscisse  $x = h_1$ .

On remarquera qu'ici, les hauteurs  $h_1$  et  $h_3$  sont « confondues »; il en est autrement dans un maillage réel, sans toutefois remettre en cause les résultats obtenus.

En exprimant  $F_1$  et  $F_5$  en fonction de  $F$ ,  $h_1$  et  $h_5$  et en considérant la variation de largeur, il est aisé de montrer que la courbure  $\kappa$  – constante dans toute la poutre – est de la forme :  $\kappa = -w'' = -\frac{12}{E.t^3} \cdot F \cdot \frac{h_5}{L_1} \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_5}$  [17]

Avec les conditions  $w(0) = w_1$ ,  $w(h_1) = 0$  et  $w(h_1 + h_5) = w_5$ , on obtient l'équation de la déformée de la ligne moyenne de la poutre :

$$w(x) = \left( \frac{w_5}{h_5} + \frac{w_1}{h_1} \right) \cdot (x - h_1) \cdot \frac{x}{h_1 + h_5} - \frac{w_1}{h_1} \cdot (x - h_1) \quad [18]$$

Dans ce cas particulier d'étude où  $w_2 = 0$  et  $w_3 = 0$  :  $\alpha_1 = \frac{w_1}{h_1}$  et  $\alpha_5 = \frac{w_5}{h_5}$

L'angle recherché est :  $\gamma = -w'(h_1) = \alpha_1 \cdot \frac{h_5}{h_1 + h_5} - \alpha_5 \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_5}$  [19]

L'angle de flexion  $\theta_1$  est donné par :  $\theta_1 = \gamma - \alpha_1$  (voir figure 10) [20]

$$\text{Ce qui conduit à l'expression : } \theta_1 = -\alpha_1 \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_5} - \alpha_5 \cdot \frac{h_1}{h_1 + h_5} \quad [21]$$

$$\text{Et donc, pour un triangle, à : } \theta_2 = -\alpha_2 \cdot \frac{h_2}{h_2 + h_6} - \alpha_6 \cdot \frac{h_2}{h_2 + h_6} \quad [22]$$

$$\theta_3 = -\alpha_3 \cdot \frac{h_3}{h_3 + h_4} - \alpha_4 \cdot \frac{h_3}{h_3 + h_4} \quad [23]$$

Ce qui s'écrit, pour le triangle complet, sous forme matricielle :  $\{\theta\} = [H_v] \cdot \{\alpha\}$

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-h_1}{h_1 + h_5} & 0 & 0 & 0 & \frac{-h_1}{h_1 + h_5} & 0 \\ 0 & \frac{-h_2}{h_2 + h_6} & 0 & 0 & 0 & \frac{-h_2}{h_2 + h_6} \\ 0 & 0 & \frac{-h_3}{h_3 + h_4} & \frac{-h_3}{h_3 + h_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad [24]$$

$$\text{Pour la poutre : } F = \frac{E.t^3}{12} \cdot \frac{2.L_1}{h_1.h_5} \cdot (\alpha_1 + \alpha_5) \text{ et } \kappa = -\frac{2}{h_1 + h_5} (\alpha_1 + \alpha_5) \quad [25]$$

#### 4.4. Courbures

Les matrices  $[R_{nt}]$ ,  $[H_e]$ ,  $[H_v]$  et  $[C]$  étant respectivement précisées dans les équations [12], [15], [24] et [16], les relations [15] donnent les courbures  $\{K\}$  :

$$\{K\} = \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \\ 2.K_{xy} \end{Bmatrix} = [R_{nt}] [H_e] \cdot \{\theta\} = [R_{nt}] [H_e] [H_v] \cdot \{\alpha\} = [R_{nt}] [H] [C] \cdot \{W\}$$

$$\text{où } [H] = \begin{bmatrix} \frac{-2}{h_1 + h_5} & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{h_1 + h_5} & 0 \\ 0 & \frac{-2}{h_2 + h_6} & 0 & 0 & 0 & \frac{-2}{h_2 + h_6} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{h_3 + h_4} & \frac{-2}{h_3 + h_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [26]$$

Courbures  $\{\mathbf{K}\}$  et déplacements  $\{\mathbf{W}\}$  –  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$  – sont reliés par la matrice  $[\mathbf{B}_b]$  dont l'expression finale est :  $[\mathbf{B}_b] = [\mathbf{R}_{nt}][\mathbf{H}][\mathbf{C}]$  [27]

#### 4.5. Matrice de raideur en flexion

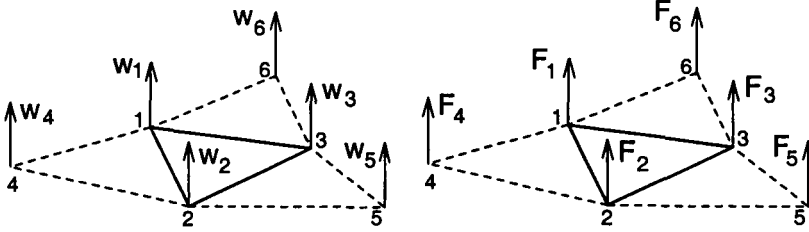


Figure 12. Déplacements et efforts normaux

Cette matrice, qui relie les efforts  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$  aux déplacements  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$ , s'obtient en utilisant le principe des travaux virtuels.

En considérant, par exemple, le cas de l'élasticité linéaire isotrope où contraintes et déformations sont reliées par la matrice  $[\mathbf{D}]$  en état plan de contraintes, on a :

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{yy}} \\ \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xy}} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & & \\ & 1 & & \\ & & \frac{1-\nu}{2} & \\ & & & \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{yy}} \\ \frac{\epsilon_{xy}}{2\epsilon_{xy}} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}]\{\epsilon\} \text{ avec : } \{\epsilon\} = z.\{\mathbf{K}\} \quad [28]$$

$$\text{On recherche } [\mathbf{K}_b] \text{ telle que : } \{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}_b]\{\mathbf{W}\}; \quad \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = [\mathbf{K}_b] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{Bmatrix} \quad [29]$$

$$\iiint \{\hat{\epsilon}\}^T \cdot \{\sigma\} dv = \{\hat{\mathbf{W}}\}^T \cdot \left[ \iiint z^2 \cdot [\mathbf{B}_b]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{B}_b] dv \right] \{\mathbf{W}\} \quad [30]$$

$$\{\hat{\mathbf{W}}\}^T \cdot \{\mathbf{F}\} = \{\hat{\mathbf{W}}\}^T \cdot [\mathbf{K}_b] \{\mathbf{W}\} \quad [31]$$

En écrivant l'égalité entre [30] et [31] et compte tenu que la matrice  $[B_b]$  est à coefficients constants (relation [27]), on obtient la relation [32], où  $A$  est l'aire de l'élément et  $t$  son épaisseur :

$$[K_b] = [B_b]^T \cdot [D_b] \cdot [B_b] A \text{ où } [D_b] = \frac{t^3}{12} [D] \text{ et } [B_b] = [R_{nt}] [H] [C] \quad [32]$$

#### 4.5.1. Bord « libre » non bloqué en rotation

Si un des côtés (1-2), (2-3) ou (3-1) ne constitue pas une frontière commune avec un autre élément, la rotation suivant ce côté peut être considérée libre ou non.

Par exemple, si l'élément (3, 2, 5) n'existe pas et si le côté (2-3) est « libre », on a  $\epsilon_{n1} = 0$  et donc  $\theta_1 = 0$  (relation [14]) ce qui impose (voir relation [21]) :

$$\alpha_1 = -\alpha_5 .$$

La 5<sup>e</sup> ligne de la matrice  $[C]$  devient :

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} -1 & \cos\beta_3 & \cos\beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad [33]$$

#### 4.5.2. Bord bloqué en rotation

Dans le cas de l'élément S3, une rotation imposée ne peut être qu'égal à zéro.

Par exemple (voir figure 10), si l'élément (3, 2, 5) n'existe pas et si la rotation suivant le côté (2-3) est imposée égale à zéro (pour une symétrie, pas exemple), l'angle  $\gamma$  est nul et donc  $\theta_1 = \alpha_1$  (relation [20]), ce qui implique :  $\alpha_1 = \alpha_5$ .

La 5<sup>e</sup> ligne de la matrice  $[C]$  est :

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & -\cos\beta_3 & -\cos\beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad [34]$$

#### 4.5.3. Conséquence

Les 4<sup>e</sup>, 5<sup>e</sup> ou 6<sup>e</sup> lignes de la matrice  $[C]$  prennent des formes différentes suivant que les côtés (1-2), (2-3) ou (3-1) sont une frontière avec un autre élément, ou un bord bloqué ou non en rotation.

Ainsi, de manière inhabituelle, c'est la matrice de raideur – dépendante de  $[C]$  – qui rend compte de ces trois possibilités. Ce qui n'est évidemment pas le cas de l'élément DKT6, pour lequel la matrice de raideur garde la même forme que l'on impose ou non  $\theta_4 = 0$ ,  $\theta_5 = 0$  ou  $\theta_6 = 0$  (voir figure 5).

Dans un schéma d'intégration explicite – où la matrice  $[K_b]$  n'est pas calculée – seule  $[B_b]$  est utilisée, mais c'est justement cette matrice qui dépend de  $[C]$ .



#### 4.5.4. Coque facettisée

La présentation précédente correspond, dans son entier, à une formulation « plaque », mais il est aisé d'en déduire une formulation « coque » quand les éléments voisins ne sont pas coplanaires avec l'élément (1,2,3) étudié (voir figures 8 et 9).

Bien que non détaillée ici, la méthode reste la même une fois calculés les angles de rotation de solide rigide :  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ . La seule modification vient donc du calcul des ces angles qui fait intervenir les composantes des déplacements dans la base globale :  $U_{Xi}, U_{Yi}, U_{Zi}$ , pour  $i$  allant de 1 à 6. La matrice de raideur, obtenue directement dans le repère global, relie alors ces 18 composantes de déplacements aux 18 composantes d'efforts :  $F_{Xi}, F_{Yi}, F_{Zi}$ , pour  $i$  allant de 1 à 6.

Si l'on utilise les exposants e, I, II, III respectivement pour les éléments (1,2,3), (1,4,2), (2,5,3), (3,6,1) et si les projections de la normale à l'élément (1,4,2) dans le repère global sont notées :  $Z_X^I, Z_Y^I, Z_Z^I$ , on arrive aux relations :

$$\begin{aligned}\alpha_4 &= \frac{-\cos \gamma_2}{q_1} w_1^I + \frac{-\cos \gamma_1}{q_2} w_2^I + \frac{1}{h_4} w_4^I \\ \alpha_5 &= \frac{-\cos \psi_3}{r_2} w_2^{II} + \frac{-\cos \psi_2}{r_3} w_3^{II} + \frac{1}{h_5} w_5^{II} \\ \alpha_6 &= \frac{-\cos \phi_3}{p_1} w_1^{III} + \frac{-\cos \phi_1}{p_3} w_3^{III} + \frac{1}{h_6} w_6^{III}\end{aligned}\quad [35]$$

où :  $w_4^I = Z_X^I \cdot U_{X4} + Z_Y^I \cdot U_{Y4} + Z_Z^I \cdot U_{Z4}$  ; de même pour indices 1 et 2 au lieu de 4.

La relation [16] et les composantes  $w_1^{\check{}}, w_2^{\check{}}, w_3^{\check{}}$  donnent  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .

## 5. Élément BPT

### 5.1. Comparaison avec l'élément S3

L'élément S3 a été publié pour la première fois en juin 1993 [BRU 93] à l'occasion du congrès FEMCAD CRASH'93 de Paris. Au mois de décembre de la même année, l'élément BPT était aussi publié [OÑA 93]. Dans cette publication, les auteurs citaient effectivement l'élément S3, mais commettaient un légère erreur en le classant dans une catégorie où il n'avait pas à figurer.

Bien qu'ayant présenté ensuite des papiers dans les mêmes congrès, chacun est resté avec l'idée que les éléments S3 et BPT étaient formulés très différemment. Or, tout au contraire, ils sont très proches, puisque l'élément BPT (*Basic Plate Triangle*)

peut être obtenu comme un cas particulier de l'élément S3 : c'est ce qui est montré dans ce qui suit.

Les relations entre angles  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  et déplacements normaux  $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6$  demeurent inchangées (voir relation 16). Mais il n'y a pas d'analogie avec une poutre à inertie variable ; les *angles de flexion*  $\theta_1, \theta_2$ , et  $\theta_3$  sont obtenus directement par une *moyenne* des angles  $\alpha_i$  de rotation de solide rigide (voir figure 8). Par rapport à l'élément S3, tout se passe donc comme si l'on avait  $h_1 = h_5$  dans la poutre à inertie variable considérée (voir figure 11).

$$\begin{aligned}
 \text{L'équation [24] donne alors : } \quad & \theta_1 = -(\alpha_1 + \alpha_5) / 2 \\
 & \theta_2 = -(\alpha_2 + \alpha_6) / 2 \\
 & \theta_3 = -(\alpha_3 + \alpha_4) / 2
 \end{aligned}
 \tag{36}$$

### 5.2. Conséquence

Pour l'élément S3, la matrice obtenue par le produit  $[R_{nt}][H]$  est :

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 \frac{-2.c_1^2}{h_1 + h_5} & \frac{-2.c_2^2}{h_2 + h_6} & \frac{-2.c_3^2}{h_3 + h_4} & \frac{-2.c_3^2}{h_3 + h_4} & \frac{-2.c_1^2}{h_1 + h_5} & \frac{-2.c_2^2}{h_2 + h_6} \\
 \frac{-2.s_1^2}{h_1 + h_5} & \frac{-2.s_2^2}{h_2 + h_6} & \frac{-2.s_3^2}{h_3 + h_4} & \frac{-2.s_3^2}{h_3 + h_4} & \frac{-2.s_1^2}{h_1 + h_5} & \frac{-2.s_2^2}{h_2 + h_6} \\
 \frac{-4.c_1.s_1}{h_1 + h_5} & \frac{-4.c_2.s_2}{h_2 + h_6} & \frac{-4.c_3.s_3}{h_3 + h_4} & \frac{-4.c_3.s_3}{h_3 + h_4} & \frac{-4.c_1.s_1}{h_1 + h_5} & \frac{-4.c_2.s_2}{h_2 + h_6}
 \end{array} \right]
 \tag{37}$$

La matrice correspondante pour l'élément BPT est obtenue avec les égalités :

$$h_5 = h_1 ; \quad h_6 = h_2 \quad \text{et} \quad h_4 = h_3
 \tag{38}$$

Ce qui donne l'expression des courbures  $\{K\}$  que l'on peut d'ailleurs obtenir directement à l'aide des relations [12] :

$$\{K\} = \left\{ \begin{array}{l} K_{xx} \\ K_{yy} \\ 2.K_{xy} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c|c|c}
 \frac{-c_1^2}{h_1} & \frac{-c_2^2}{h_2} & \frac{-c_3^2}{h_3} \\
 \frac{-s_1^2}{h_1} & \frac{-s_2^2}{h_2} & \frac{-s_3^2}{h_3} \\
 \frac{-2.c_1.s_1}{h_1} & \frac{-2.c_2.s_2}{h_2} & \frac{-2.c_3.s_3}{h_3}
 \end{array} \right] \cdot \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_5 \\ \alpha_2 + \alpha_6 \\ \alpha_3 + \alpha_4 \end{array} \right\}
 \tag{39}$$

Compte tenu des égalités [16] qui demeurent inchangées, le terme de la matrice  $[B_b]$  (voir équation [27]) qui relie  $\kappa_{xx}$  à  $w_4$ , par exemple, est égal à :  $-\frac{c_3^2}{h_3 \cdot h_4}$ .

En utilisant les relations [2] et les notations introduites au paragraphe 4.5.4, on obtient :

$$-\frac{c_3^2}{h_3 \cdot h_4} = -\frac{c_3}{h_3} \frac{c_3}{h_4} = -\frac{y_{21}}{L_3 \cdot h_3} \cdot \frac{y_{21}}{L_3 \cdot h_4} = -\frac{y_{21}}{2 \cdot A_e} \cdot \frac{y_{21}}{2 \cdot A_1} \quad [40]$$

où  $A_e$  et  $A_1$  sont les aires des triangles (1,2,3) et (2,4,3).

L'expression [40], ainsi que tous les autres termes de la matrice  $[B_b]$ , sont donnés dans [OÑA 93]. Il est à noter que les termes correspondant à  $w_1, w_2, w_3$  ne se retrouvent pas aussi aisément que ceux relatifs à  $w_4, w_5, w_6$ , mais on peut vérifier numériquement, pour des maillages aléatoires, l'égalité des matrices  $[B_b]_{BPT}$  et  $[B_b]_{S3}$  quand les égalités [38] sont introduites dans [H].

### 5.3. Mécanisme équivalent

En considérant les triangles (1,2,3) et (2,5,3) indéformables, le comportement en flexion peut être simulé par un mécanisme constitué de deux ressorts de raideurs  $K_1$  et  $K_5$  agissant sur le côté commun articulé suivant la direction 2-3.

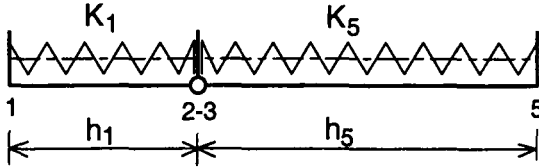


Figure 13. Mécanisme équivalent

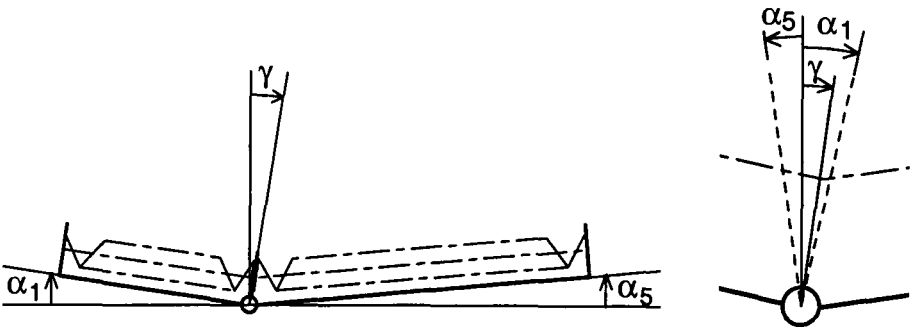


Figure 14. Position du côté commun de deux triangles

Pour des petits angles  $\alpha_i$ , l'équilibre impose :  $K_1 \cdot (\alpha_1 - \gamma) = K_5 \cdot (\alpha_5 + \gamma)$  [41]

Dans le cas de l'élément S3, la raideur des ressorts est la même par unité de longueur, c'est-à-dire que l'on a :  $\frac{K_1}{h_1} = \frac{K_5}{h_5}$ . [42]

Compte tenu de [41], on retrouve donc la relation [19] qui donne l'expression de  $\gamma$ .

Dans le cas de l'élément BPT, on impose :  $K_1 = K_5$  [43]

Ce qui, compte tenu de [41], entraîne :  $\gamma = (\alpha_1 - \alpha_5)/2$  [44]

Comme  $\theta_1 = \gamma - \alpha_1$ , on retrouve :  $\theta_1 = -(\alpha_1 + \alpha_5)/2$  (voir relation [36]).

#### 5.4. Effets de membrane

Dans tout ce qui précède, seule la flexion a été prise en compte. Pour les effets de membrane, un système équivalent, constitué de poutres articulées et de ressorts (type compas de dessinateur) a été proposé par Argyris [ARG 77] (voir figure 15).

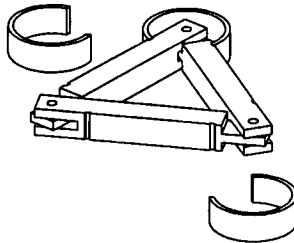


Figure 15. Elément TRUMP

NOTA.– Si la flexion de ces poutres est prise en compte, cela conduit à la formulation de l'élément TRUMP pour plaques minces et plaques épaisses [SAB 94].

#### 6. Exemples

Dans ce qui précède, seule la formulation « plaque » distingue les éléments, les effets de membrane correspondant à l'élément CST à six degrés de liberté. La quasi-totalité des exemples suivants faisant intervenir une formulation « coque », l'élément DKT6 sera désigné par DKT12, conformément aux ouvrages de Batoz et Dhait.

En plus des éléments « TRUMP », « DKT18 », « C0 » et « S3 » qui avaient permis, dans [SAB 94], de présenter de nombreux exemples tant en petites perturbations élastiques qu'en non-linéarités géométrique et matérielle, les éléments « DKT12 » et « BPT » ont été implémentés dans le même environnement afin que les comparaisons soient objectives. A un nombre restreint d'exemples repris ici sont ajoutés des calculs de mise en forme suivis ou non d'un calcul de retour élastique.

## 6.1. Tests de base

### 6.1.1. Plaque en flexion-torsion

Plaque carrée ( $100 \times 100 \times 1$  mm) ;  $E = 200\,000$  N/mm<sup>2</sup> ;  $\nu = 0.3$  ; Force :  $F_c = 1$  N.

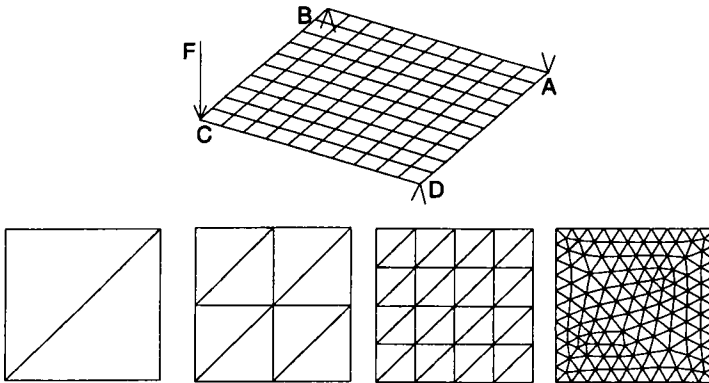


Figure 16. Plaque carrée et différents maillages

Maillage	1 × 1	2 × 2	4 × 4	5 × 5	10 × 10	Auto.
S3	0,136	0,218	0,288	0,305	0,344	0,378
DKT	0,390	0,390	0,390	0,390	0,390	0,390

Tableau 1. Résultats du déplacement vertical du point C (en mm)

CONSEQUENCE.— Contrairement aux triangles DKT12 et DKT18 – où, pour ce dernier, la flexion est décrite par un déplacement  $w$  et deux rotations par nœud [BAT 92] –, l'élément S3 (et donc BPT) ne passe pas avec succès ce test, même s'il y a convergence quand le nombre d'éléments croît.

NOTA.– L'élément S3 n'ayant que trois ddl par nœud – 3 translations –, il est particulièrement délicat d'effectuer des *patch-tests* de forme B (cinématique) imposés sur les nœuds du contour  $w(x,y)$  et les rotations  $w,x$  et  $w,y$  [BAT 92].

6.1.2. Analogie avec une poutre à inertie variable

Poutre :  $b_c = 20$  mm ;  $AC = L_A = 17,3205$  mm ;  $CB = L_B = 37,3205$  mm ;  
 $E = 200\ 000$  Mpa ;  $\nu = 0,3$  ;  $t = 0,25$  mm ;  $F = 2$  N (1 N en C' et 1 N en C'').

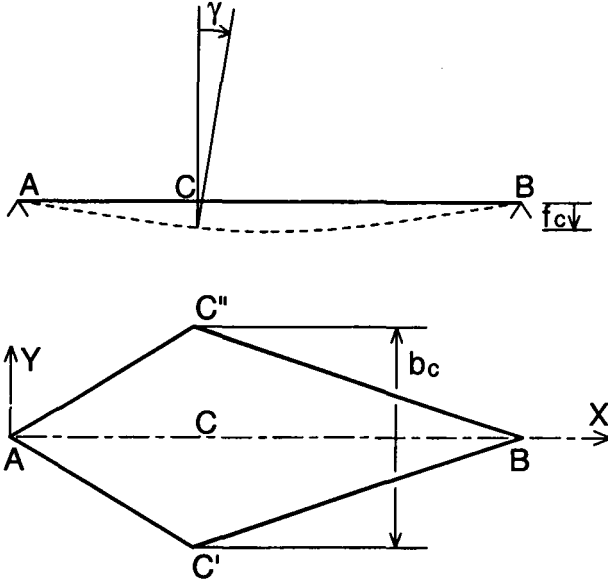


Figure 17. Analogie avec une poutre à inertie variable

	BPT	S3	DKT12	DKT18*	Théorie
flèche $f_c$ (mm)	1,1571	1,3361	1,6614	1,4075	1,3361
pente $\gamma$ (radians)	0,0179	0,0413	0,0443	0,0399	0,04134

\* Rotations/ X bloquées pour les nœuds situés en C' et C''

Tableau 2. Résultats de la flèche  $f_c$  (en mm) et de la pente  $\gamma$  (en radians)

Les valeurs théoriques sont obtenues à l'aide des équations [25] à l'exception du facteur  $(1 - \nu^2)$  dû à la formulation « plaque » en état plan de contraintes.

$$F = \frac{E.t^3}{12.(1-\nu^2)} \cdot \frac{2.b_c}{L_A.L_B} . (\alpha_A + \alpha_B) ; \gamma = \alpha_A \cdot \frac{L_B}{L_A + L_B} - \alpha_B \cdot \frac{L_A}{L_A + L_B}$$

avec, dans ce cas simplifié :  $\alpha_A = \frac{f_c}{L_A}$  et  $\alpha_B = \frac{f_c}{L_B}$ .

## 6.2. Petites perturbations élastiques

### 6.2.1. Plaque carrée appuyée

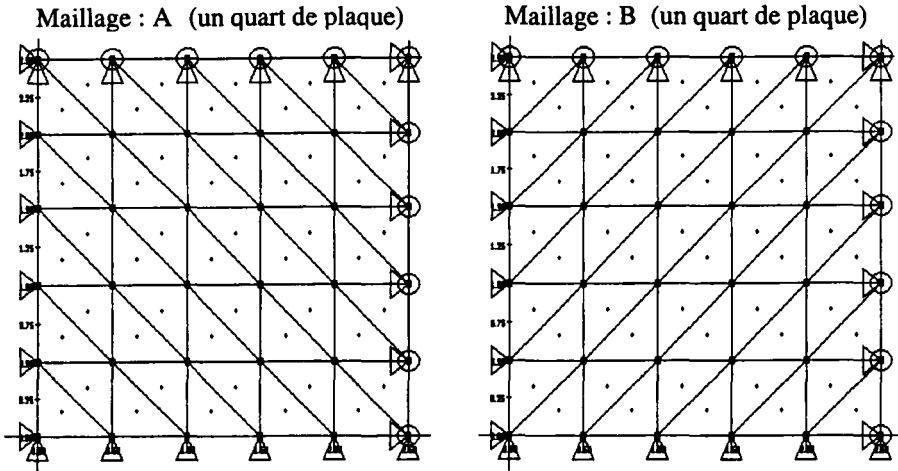


Figure 18. Plaque carrée appuyée

Ce cas correspond au premier exemple présenté dans [OÑA 93] pour illustrer les résultats fournis par l'élément BPT. Ici, il permet de montrer que ces résultats sont identiques à ceux donnés par l'élément S3, compte tenu de la régularité du maillage qui entraîne directement les égalités [38]. Le déplacement du centre de la plaque donné par BPT, S3 et d'autres éléments, tous implémentés dans le même code, est comparé à la valeur théorique donnée dans [TIM 79]. On pourra se reporter à la publication d'Oñate et al. citée précédemment pour voir l'influence du maillage.

Plaque :  $5 \times 5 \times 0,2$  mm ;  $E = 200\ 000,0$  Mpa ;  $\nu = 0,3$  ;

Charge normale au plan : pression  $p = 5,0$  Mpa ou  $F = 10$  N au centre de la plaque.

Pression p	BPT/S3	DKT12	DKT18	TRUMP	C0	Théorie
Maillage A	0,07926	0,08892	0,08543	0,08615	0,08415	0,08664
Maillage B	0,08077	0,09009	0,08869	0,08814	0,08511	0,08664

Effort F	BPT/S3	DKT12	DKT18	TRUMP	C0	Théorie
Maillage A	0,01969	0,02291	0,02026	0,02043	0,01959	0,01979
Maillage B	0,02012	0,02204	0,01984	0,02042	0,01922	0,01979

Tableaux 3 et 4. Résultat du déplacement normal du centre de la plaque

Paramètres	BPT/S3	DKT12	DKT18	TRUMP	C0
nddl	108	193	216	216	216
ldb - A	39	40	42	42	42

Tableau 5. Demi-largeur de bande (ldb) et nombre de degrés de liberté (nddl)

6.2.2. Cylindre pincé avec extrémités libres

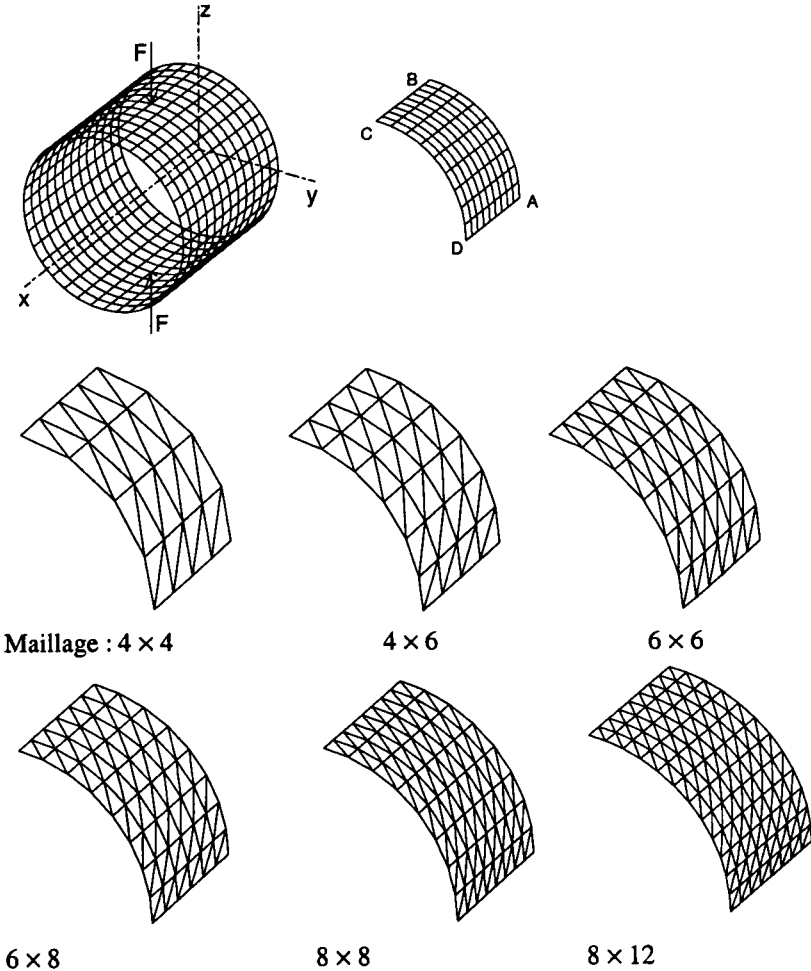


Figure 19. Cylindre avec extrémités libres

Données : géométrie : longueur  $L = 10,35$ , rayon  $R = 4,953$ , épaisseur  $h = 0,094$  ;  
 matériau :  $E = 10,5 E6$ ,  $\nu = 0,3125$  ;  
 charge : deux forces égales et opposées  $F = 100$ .



$Wz_{th.} = 0.1139$ [MAC 85]*	4 × 4	4 × 6	6 × 6	6 × 8	8 × 8	8 × 12
$Wz_C/Wz_{th.}$ (C0)	0,504	0,756	0,751	0,877	0,875	0,975
$Wz_C/Wz_{th.}$ (DKT12)	1,176	1,130	1,092	1,076	1,062	1,047
$Wz_C/Wz_{th.}$ (S3)	1,043	1,015	1,017	1,009	1,010	1,002

**Tableau 6.** Déplacement vertical du point C comparé à la solution théorique\*

### 6.3. Simulation de l'emboutissage

#### 6.3.1. Généralités

Les résultats précédents proviennent tous d'un code quasi statique implicite. Afin de valider numériquement toute la démarche proposée aux sections 3 à 5, deux programmations ont été effectuées :

- la première utilise directement les formulations publiées : [BAT 92] pour DKT6, [BRU 93] pour S3 et [OÑA 93] pour BPT, par exemple. A titre indicatif, la procédure de calcul de la matrice  $[B_b]$  pour l'élément BPT est placée en annexe, telle que publiée par Oñate et Cervera ;

- la seconde utilise la cinématique proposée dans la section 2 : calcul des angles de rotation de solide rigide  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  (équation [16]), puis  $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$  pour S3 et BPT (équation [35]), détermination des angles de flexion  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  (équation [11] pour DKT6, [24] pour S3, [36] pour BPT) et expression des courbures ([15]).

Pour ce qui concerne la simulation de l'emboutissage, deux codes sont utilisés :

- la mise en forme est assurée par un code basé sur une *méthode explicite* d'intégration par rapport au temps. Moins « pure » qu'une méthode implicite car il n'y a pas d'itération de correction d'équilibre après chaque incrément de chargement, elle permet justement de passer les caps difficiles d'un calcul incrémental, les fortes non-linéarités pouvant conduire à une divergence des itérations d'un code implicite ;

- lors du retrait des outils après l'opération de mise en forme, la configuration de la pièce emboutie évolue. Ce phénomène de « retour élastique » dû à la partie élastique des déformations est analysé par un code implicite afin d'éviter les oscillations. Ce code reprend directement les résultats des contraintes, des déformations et des efforts de contact calculés en fin d'emboutissage, efforts diminués progressivement jusqu'à la valeur nulle en évitant préalablement tout mouvement de corps rigide.

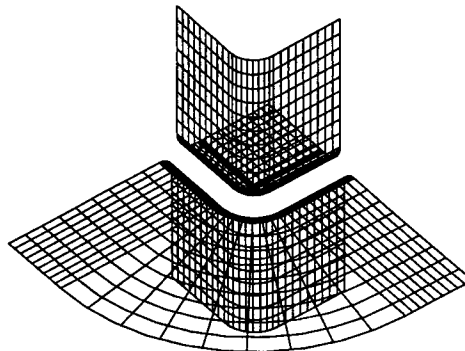
Sans entrer ici dans le détail du programme de mise en forme, il peut cependant être noté que les surfaces de l'outillage ne sont pas facettisées mais utilisées

directement sous forme d'entités CAO (surfaces rationnelles non uniformes NURBS). De même, les efforts de contact avec frottement ne sont pas calculés par pénalisation, mais par une méthode de projection dynamique, ceci afin d'éviter l'influence de ces paramètres (discrétisation des outils et coefficient de pénalisation).

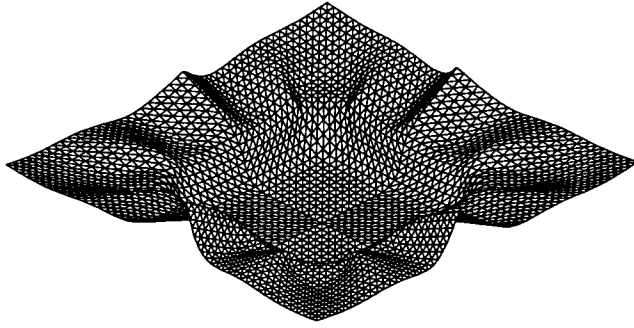
Concernant la plasticité, les codes industriels cités dans l'introduction utilisent la notion classique de contraintes calculées en un certain nombre de points dans l'épaisseur (trois au minimum, cinq en général, mais parfois plus pour l'étude du retour élastique). Outre cette méthode « locale », a été intégrée aussi une méthode « globale » basée sur une forme parabolique d'un critère d'écoulement [GRI 92] utilisant directement les efforts normaux et les moments de flexion afin de permettre un gain de temps en évitant une intégration en plusieurs points dans l'épaisseur.

### 6.3.2. *Avalement et plis*

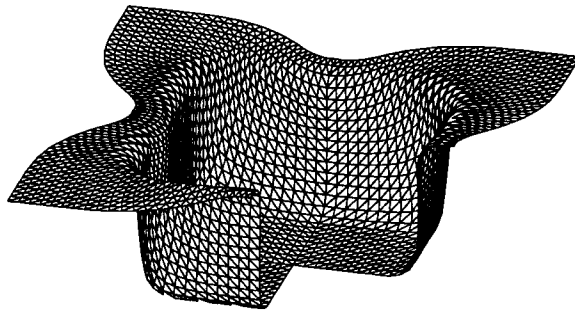
Outre les résultats classiques des états de contraintes et de déformations, est aussi attendue de la simulation numérique la mise en évidence de phénomènes spécifiques comme l'apparition de plis ou l'avalement. A titre d'exemple, un test simple proposé au congrès NumiSheet'93 est ici repris. Les figures suivantes correspondent donc aux surfaces actives du poinçon et de la matrice destinés à l'emboutissage d'une boîte carrée dont le phénomène d'avalement est bien visible, ainsi que la formation de plis dans le cas où l'effort exercé par le serre flan est insuffisant.



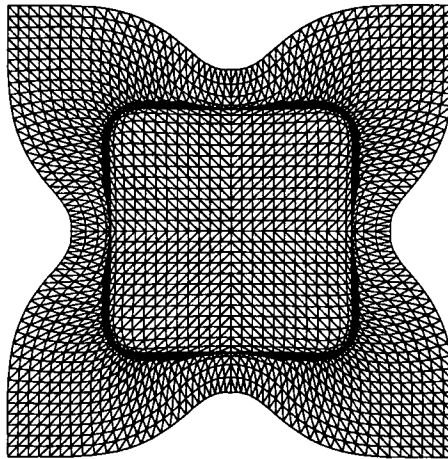
**Figure 20.** *Matrice et poinçon*



**Figure 21.** *Formation de plis quand l'effort de serrage est insuffisant*



**Figure 22.** *Perspective de la boîte, un quart enlevé, pour un embouti de 40 mm*



**Figure 23.** *Vue de dessous de la boîte complète*

Tôle : carrée de côté 150 mm et d'épaisseur 0,78 mm ; frottement :  $\mu = 0,144$  ;

Maillages :

- d'un quart de la structure avec conditions de symétrie :
- *planifié* (Mpla) : 1 250 éléments ( $25 \times 25 \times 2$ ) ;
- *non planifié* (Mnp) : 1 534 éléments (voir figure 25)

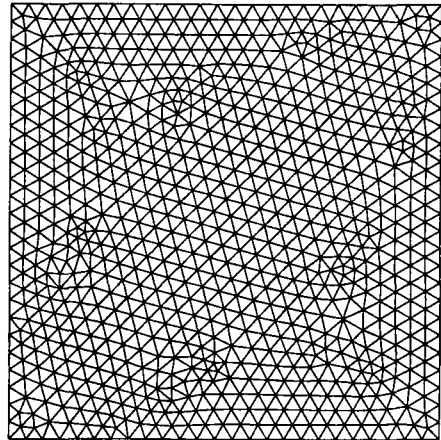
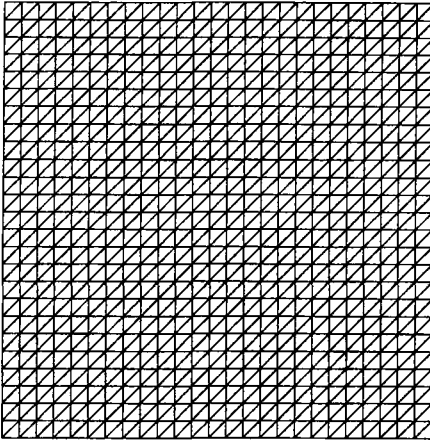


Figure 24. Maillage planifié (Mpla)

Figure 25. Maillage non planifié (Mnp)

Matériau :  $E = 206 \text{ GPa}$   $\nu = 0,3$  ;  $\sigma^{\text{eq}} = 565.32(0.007117 + \epsilon_p)^{0.2589}$

Coef. Hill :  $F = 0,283$  ;  $G = 0,358$  ;  $H = 0,642$  ;  $L = 1,5$  ;  $M = 1,5$  ;  $N = 1,289$

Serre flan : effort normal de retenue = 19 600 N (4 900 N pour 1/4 de la structure)

Paramètres : profondeur d'emboutissage de 40 mm à une vitesse de 10 m/s ;

$\rho = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$ , soit la masse volumique réelle du matériau ;

$\alpha = 0$  ( $[C] = \alpha \cdot [M]$ ) : amortissement dû à la plasticité, jugé

suffisant.

		Mpla		Mnp		NumiSheet'93
	S3/BPT	DKT12	C0	S3	DKT12	Expériences
Dh	28,37	28,58	27,71	28,93	29,18	27,96
Dv	28,99	29,18	27,80	29,61	29,82	27,95
Dd	16,67	17,13	16,97	17,07	17,13	15,36
Fp	12 100	12 020	12 690	11 730	11 280	(Moyennes)

Tableau 7. Résultats de l'avement en plasticité « globale » (Grisard-Ilyushin)

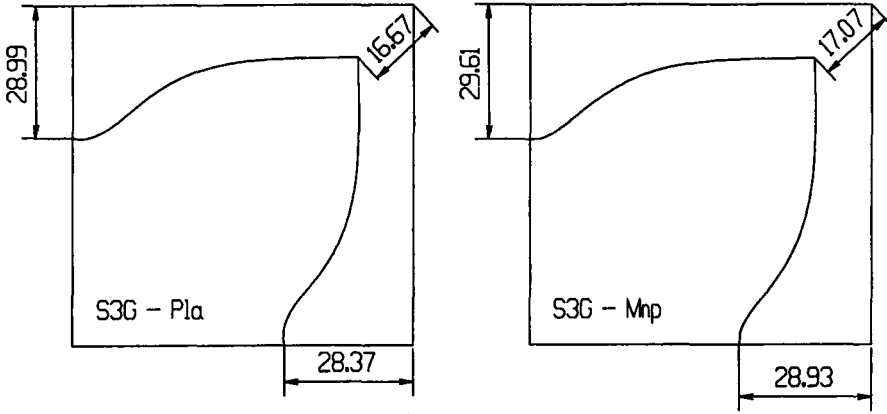


Figure 26. Valeurs d'avalement pour élément S3 (plasticité « globale »)

	Mpla			Mnp		NumiSheet'93
	S3/BPT	DKT12	C0	S3	DKT12	Simulations
Dh	28,66	28,70	27,18	29,25	29,37	28,08
Dv	29,27	29,31	27,89	29,84	29,89	28,16
Dd	16,91	16,89	16,68	17,33	17,37	15,86
Fp	13 020	12 930	13 600	12 560	12 040	(Moyennes)

Tableau 8. Résultats de l'avalement en plasticité « locale » (5 points de Lobatto)

	Mpla			Mnp	
	S3/BPT	DKT12	C0	S3	DKT12
nn	676	2 601	676	818	3 169
ndl	2 028	3 953	4 056	2 454	4 805

Tableau 9. Nombre de nœuds (nn) et de degrés de liberté (ndl)

NOTA.— Les moyennes – rapportées ici – des expériences et des simulations publiées lors du congrès NumiSheet'93 masquent de grandes disparités dans les résultats :

- Simulations :  $19.27 \leq Dx \leq 32.45$  ;  $18.43 \leq Dy \leq 32.24$  ;  $12.64 \leq Dd \leq 21.85$
- Expériences :  $26.75 \leq Dx \leq 29.6^\circ$  ;  $26.75 \leq Dy \leq 29.58$  ;  $14.60 \leq Dd \leq 16.31$

REMARQUE.— « Fp » est l'effort du poinçon en fin d'emboutissage. La valeur donnée ici doit être multipliée par 4 pour le flan complet, soit environ 50 000 N.

6.3.3. Striction

La prévision de ce phénomène de diminution localisée de l'épaisseur – précédant en général de peu la rupture – n'est pas assurée dans les codes industriels par un critère intrinsèque basé sur les caractéristiques du matériau ; ceci relève encore actuellement du domaine de la recherche universitaire. Lors de la mise en forme, une vérification est éventuellement effectuée à partir de courbes limites de formage (CLF) en déformations.

Afin d'illustrer cette vérification en cours de simulation, les caractéristiques du test LDH (*Limiting Dome Height*) proposé au congrès NumiSheet'96 de Detroit sont brièvement rappelées ici ainsi que les résultats correspondants ; l'analyse consistant à simuler le déplacement vertical d'un poinçon sphérique (voir figure 27) jusqu'à détection du phénomène de striction avec la courbe limite donnée figure 28.

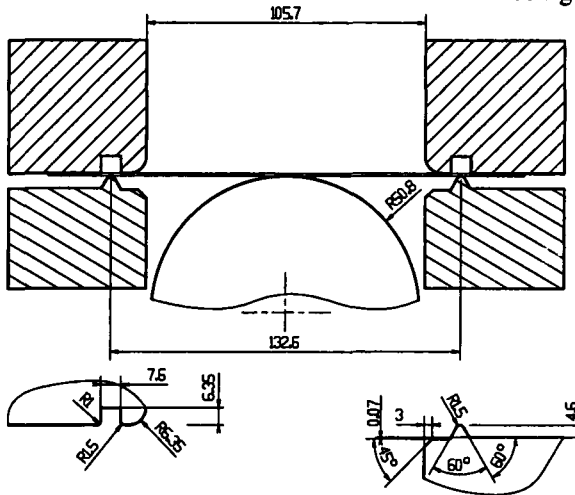


Figure 27. Géométrie de l'outillage

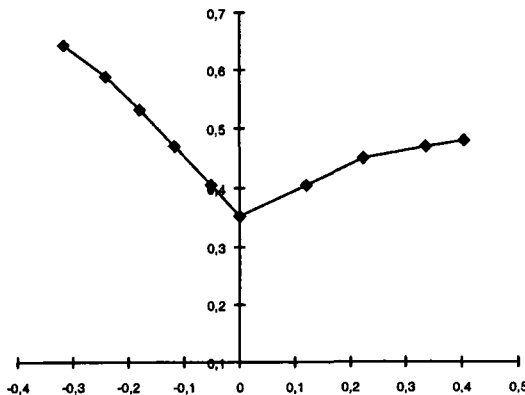


Figure 28. Courbe limite de formage ( $\epsilon_2, \epsilon_1$ )

$\epsilon_2$	-0,317	-0,241	-0,179	-0,117	-0,051	0,00	0,121	0,223	0,336	0,405
$\epsilon_1$	0,642	0,588	0,531	0,470	0,405	0,353	0,405	0,451	0,470	0,480

**Tableau 10.** Points définissant la courbe limite utilisée (IF Steel)

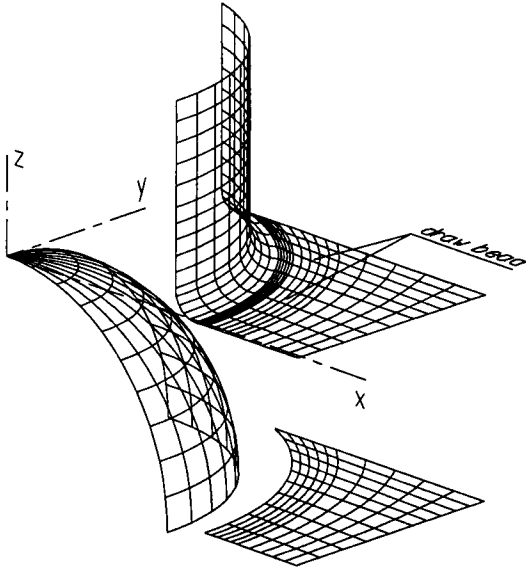
Matériau :  $\sigma_{eq} = B.(C + \epsilon_{eq}^p)^n$ , où  $B = 533,49$  ;  $C = 0,007815$  ;  $n = 0,2508$  ;  
 $E = 206 \text{ GPa}$  ;  $\nu = 0,3$  ;  $r_0 = 1,85$  ;  $r_{45} = 1,52$  ;  $r_{90} = 2,37$

Facteurs de Hill :  $H = \frac{r_0}{1+r_0}$  ;  $G = 1-H$  ;  $F = H \cdot \frac{1}{r_0}$  ;  $N = \frac{(r_0 + r_{90}) \cdot (2 \cdot r_{45} + 1)}{2 \cdot r_{90} \cdot (1 + r_0)}$

RAPPEL.– Si une traction uniaxiale est effectuée dans la direction  $x$  inclinée d'un angle  $\beta$  par rapport à la direction principale d'anisotropie 1,  $r_\beta = d\epsilon_{yy} / d\epsilon_{33}$ .

Flan : – compte tenu des symétries, seul un quart de la structure est maillé ;  
 – longueur : 90 mm ; largeur : 50 mm ; épaisseur : 1 mm ;  
 – maillage régulier : 1 440 éléments ( $36 \times 20 \times 2$ ) et 777 nœuds.

Outils : les surfaces actives sont représentées sur la figure 29. Les dimensions sont prévues avec une marge de 1 mm autour du flan. Deux carreaux de surface (NURBS) correspondent au jonc (*draw bead*). La surface représentative du jonc s'étend sur 5 mm de part et d'autre du rayon théorique de 66,3 mm. Au cours de la mise en forme, les nœuds qui passent en regard de ces carreaux sont soumis à des forces de retenue représentatives, au mieux, de l'action du jonc.



**Figure 29.** Surfaces actives de l'outillage

Calcul : vitesse de 10 m/s ;  $\rho = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$  ; amortissement  $\alpha = 0$  ( $C = \alpha \cdot M$ ) ; critère « global » de plasticité.

	S3/BPT	DKT12	C0	Expériences	Simulations
Déplacement (en mm)	42,22	42,74	43,26	40,2 mm	41,9 mm

Tableau 11. Déplacement maximal du poinçon à la détection de la striction

NOTA.– Les valeurs des colonnes « expériences » et « simulations » sont les moyennes des valeurs fournies par les participants au congrès déjà cité.

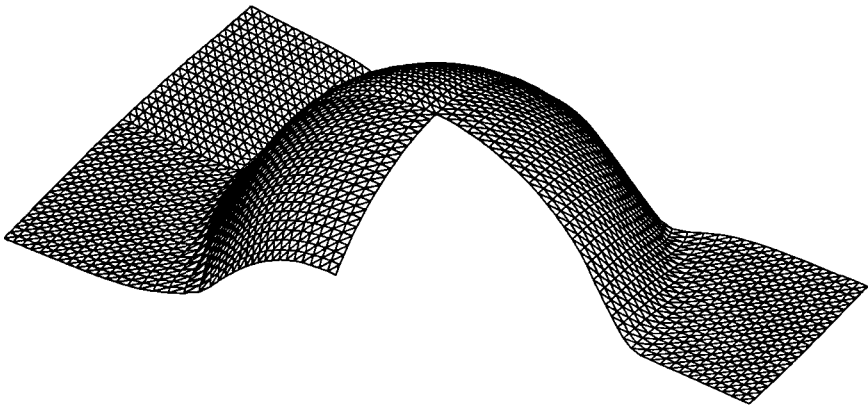


Figure 30. Déformée (un quart enlevé) pour le déplacement maximal détecté

#### 6.4. Retour élastique

Les deux exemples présentés précédemment sont avant tout destinés à valider le module de mise en forme du logiciel développé : géométrie de l'outillage, contact avec frottement, etc. Dans ces deux exemples, les effets de membrane sont prépondérants et les maillages sont suffisamment denses, ce qui ne permet pas de distinguer clairement la réponse en flexion des éléments concernés.

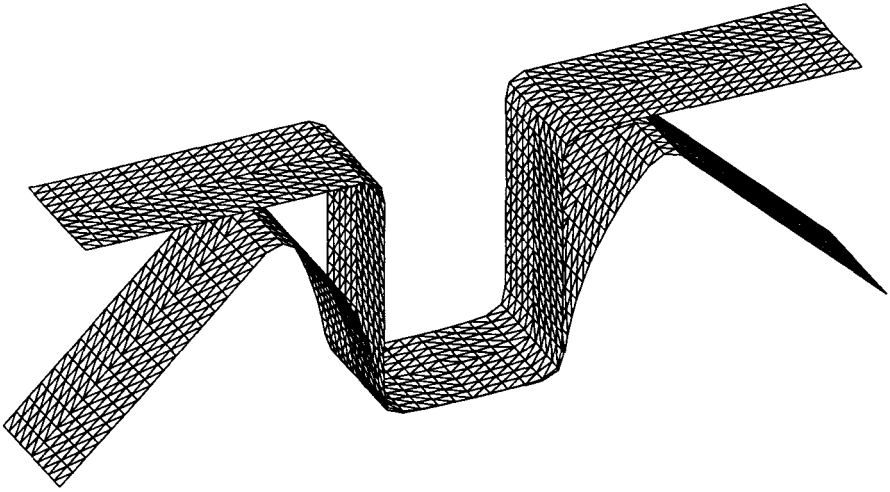
Les deux exemples qui suivent sont propres au retour élastique analysé par un code implicite afin d'éviter les oscillations. Cette étape de reprise implicite des résultats d'un calcul explicite de mise en forme peut conduire à des résultats erronés – ce qui sera montré – ou carrément diverger si les résultats obtenus en fin de mise en forme se révèlent trop inexacts.



En effet, du fait de la méthode « dynamique explicite » sans correction après chaque incrément de chargement, il se peut que les contraintes et les efforts de contact ne traduisent pas correctement l'équilibre du flan embouti.

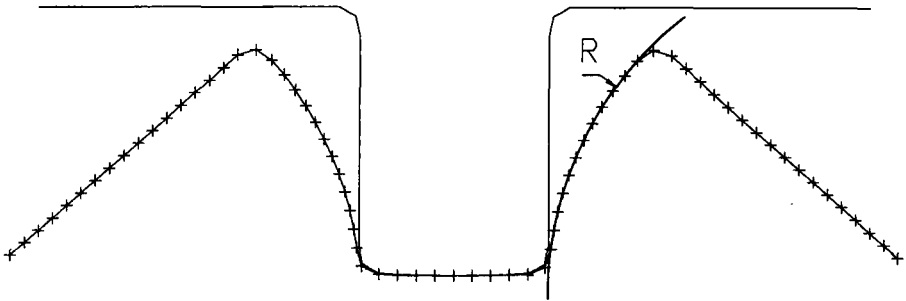
#### 6.4.1. Retour élastique d'un « U »

Les données et les résultats expérimentaux correspondent au test simple proposé au congrès NumiSheet'93, test devenu depuis une référence car il met bien en évidence l'influence du type d'élément ou de la densité du maillage sur les résultats du retour élastique.



**Figure 31.** Retour élastique d'un « U » après emboutissage

Il s'agit de donner la forme d'un « U » à une simple bande de tôle de largeur 35 mm et de longueur 350 mm. Après retrait des outils, la forme en « U » n'est pas conservée. Plusieurs paramètres (rayons, angles, distances) rendent compte de cette modification de forme, mais seul le rayon « R » donne lieu, ici, à des comparaisons.



**Figure 32.** Rayon résiduel R

- Matériau : – alliage d'aluminium :  $E = 71\ 000\ \text{Mpa}$  ;  $\nu = 0,33$  ;  
– paramètres de *Lankford* :  $r_0 = 0,71$  ;  $r_{45} = 0,58$  ;  $r_{90} = 0,7$  ;  
– écrouissage :  $\sigma = 576,79 \times (0,01658 + \epsilon^p)^{0,3593}$  ;  
– épaisseur : 0,81 mm.

- Maillages : – seul un quart de la structure est étudié du fait des deux symétries ;  
– le découpage du flan dans la largeur est de 3,5 mm et varie dans le sens de la longueur suivant 4 cas : 1,5 mm, 2,5 mm, 3,5 mm et 5 mm.

- Paramètres : – vitesse de descente du poinçon : 5 m/s ;  
– masse volumique :  $2,6 \times 10^{-6}$  (égale à celle du matériau) ;  
– pas d'amortissement déclaré ;  
– effort de serrage du serre flan = 2,45 kN pour le flan complet ;  
– coefficient de frottement entre flan et outils = 0,162 .

- Outillage : – dimensions principales données sur la figure 33 ;  
– jeu de 1 mm entre poinçon et matrice ;

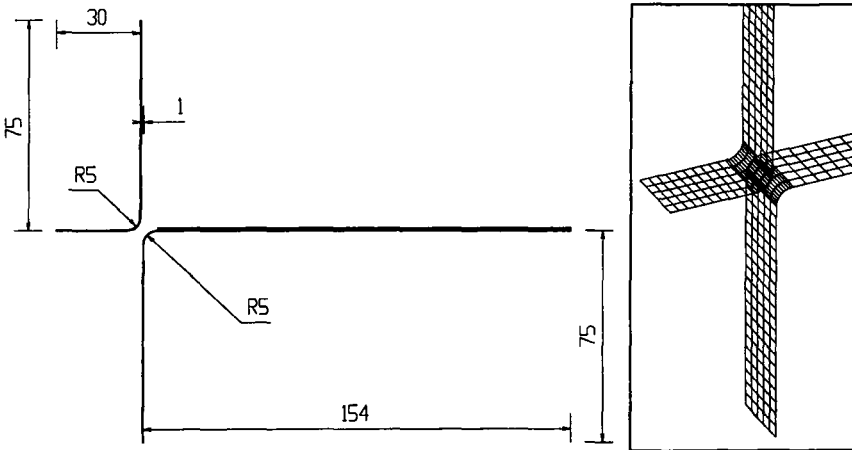


Figure 33. Dimensions principales des outils et vue partielle des surfaces

La méthode de détermination du rayon résiduel est résumée sur la figure 34. Sont définis : le point C par la distance de 15 mm, le point A par le rayon de 35 mm et le point B par une perpendiculaire au segment AC en son milieu. Le cercle de rayon R recherché passe par les points A, B et C.

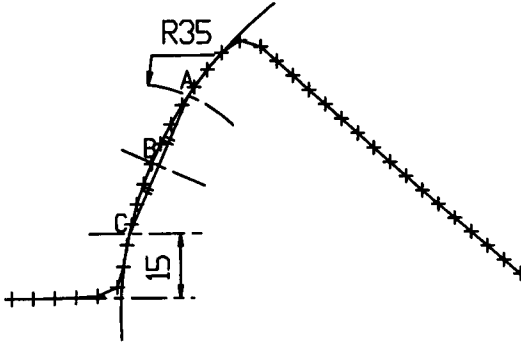


Figure 34. Méthode de détermination du rayon résiduel

	Maillages réguliers				NumiSheet'93
	« 1,5 mm »	« 2,5 mm »	« 3,5 mm »	« 5,0 mm »	Expériences
S3/BPT	85,85	86,30	93,6	89,96	mini : 75,7
DKT12	85,90	85,90	88,8	91,56	moy. : 88,7
C0	89,50	103,64	Spring-go	Spring-go	maxi : 99,0

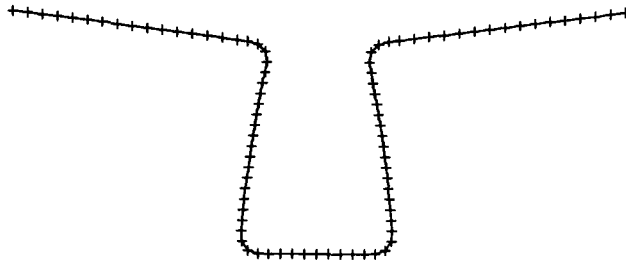
Tableau 11. Résultats du rayon résiduel (plasticité « globale » - Grisard-Ilyushin)

	Maillages réguliers				NumiSheet'93
	« 1,5 mm »	« 2,5 mm »	« 3,5 mm »	« 5,0 mm »	Simulations
S3/BPT	82,4	82,5	89,7	91,2	mini : 75,0
DKT12	89,8	81,9	83,5	93,5	moy.: 105,0
C0	88,6	87,6	Spring-go	Spring-go	maxi : 135,0

Tableau 12. Résultats du rayon résiduel (plasticité « locale » : 5 points de Lobatto)

NOTA.— Deux valeurs, visiblement erronées, ont été exclues des « expériences » et des « simulations » relevées dans les actes du congrès NumiSheet'93.

Le phénomène désigné par le terme *spring-go* est mis en évidence sur la figure 35 dans le cas du découpage de 3,5 mm dans la longueur. Le calcul implicite d'analyse du retour élastique converge, mais le résultat est erroné.



**Figure 35.** Retour élastique « inverse »

Temps de calcul : lors de la mise en forme (schéma explicite), il est très difficile de départager les éléments S3 et DKT12 ; le calcul relatif aux éléments voisins dans le premier cas étant compensé par le plus grand nombre de degrés de liberté dans le second.

La différence est plus sensible lors de l'analyse du retour élastique (schéma implicite). A titre indicatif, le tableau 13 regroupe les caractéristiques du maillage régulier « 1,5 mm » : demi-largeur de bande (dlb), nombre de degrés de liberté (ndl) et temps relatifs (tr1, tr5). « tr1 » correspond à un point d'intégration dans l'épaisseur (mise en forme utilisant la plasticité globale) et « tr5 » correspond à cinq points de Lobatto (mise en forme préalable utilisant classiquement une plasticité locale).

	<b>dlb</b>	<b>ndl</b>	<b>tr1</b>	<b>tr5</b>
<b>S3/BPT</b>	39	1 368	1,0	1,12
<b>DKT12</b>	41	2 573	1,47	1,55
<b>C0</b>	42	2 736	1,91	1,95

**Tableau 13.** Caractéristiques du maillage régulier « 1,5 mm »

Calcul implicite : le retour élastique a été mené avec les paramètres suivants :

– 100 incréments de déchargement des forces de contact, dont 50 pour 95 % du chargement ;

– précision sur la norme euclidienne des efforts :  $\frac{\|\Delta\vec{F}\|}{\|\vec{F}\|} = 10^{-4}$  ;

– pour les éléments DKT12 et C0, forces et moments sont traités séparément.

Avec ces paramètres, deux itérations de correction d'équilibre sont nécessaires en moyenne pour assurer la convergence après chaque incrément.

Maillages « non planifiés » : dans les quatre cas étudiés précédemment, chaque triangle a un côté « bien orienté » par rapport au pliage de la tôle, ce qui peut favoriser l'obtention de bons résultats, même pour des maillages grossiers. Trois autres études ont donc été menées avec des maillages « aléatoires » obtenus automatiquement après découpage de la frontière du flan tous les 2 mm, 3 mm et 4 mm (figure 36, vues partielles a, b, c).

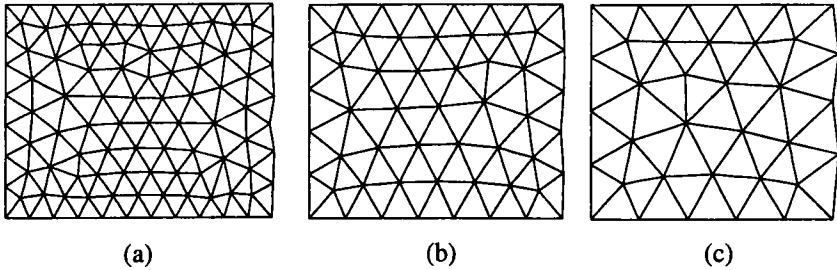


Figure 36. Maillages « non planifiés »

	Plasticité	globale	(Grisard)	Plasticité	locale	(5 points)
	« 2 mm »	« 3 mm »	« 4 mm »	« 2 mm »	« 3 mm »	« 4 mm »
S3	108,9	118,6	133,0	101,9	114,5	131,6
DKT12	85,7	87,5	95,4	83,9	85,6	93,2
C0	95,8	165,5	Spring-go	92,2	130,8	Spring-go

Tableau 14. Résultats du rayon résiduel pour des maillages non planifiés

Il est facile de constater que l'élément DKT12 est moins sensible à l'orientation du maillage que l'élément S3, ce dernier donnant quand même des résultats non erronés, contrairement à l'élément C0, doublement sensible à l'orientation et à la densité du maillage, qui restitue un retour inverse pour le découpage de 4 mm.

#### 6.4.2. Retour élastique après passage dans un jonc

La simulation comporte plusieurs étapes :

- une bande de tôle est placée entre trois rouleaux « supérieurs » et deux rouleaux « inférieurs ». Puis le rouleau central (de rayon 6 mm) est déplacé verticalement jusqu'à la distance de 7,4 mm entre les axes (voir figures 37 et 38), l'extrémité droite de ce flan étant maintenue fixe à une distance de 50 mm de ce rouleau mobile ;

- la bande de tôle est ensuite déplacée horizontalement sur une longueur de 100 mm ou 150 mm ;

– après retrait des « outils », le rayon résiduel  $R$  est mesuré après retour élastique (voir figure 39).

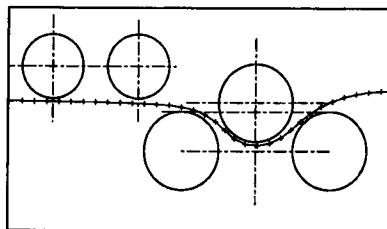
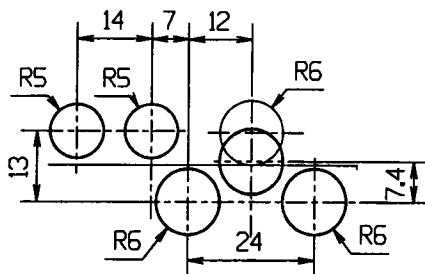


Figure 37. Position initiale des rouleaux

Figure 38. Descente du rouleau central

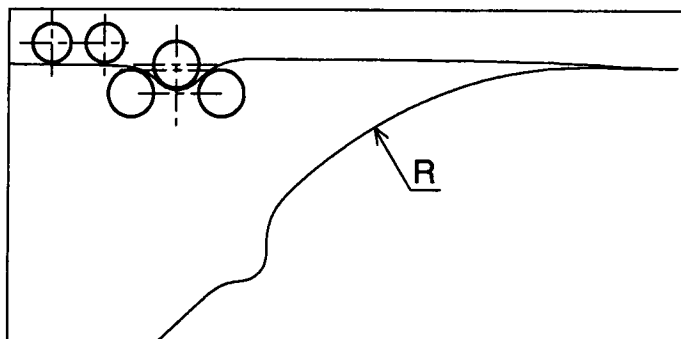


Figure 39. Retour élastique après déplacement de la bande de tôle

Aluminium :  $E$  (Young) = 69 000 Mpa ;  $\nu = 0,29$  ;  $\rho = 2\,800\text{ kg/m}^3$  ;  
 Anisotropie (Lankford) :  $r_0 = 0,73$  ;  $r_{45} = 0,58$  ;  $r_{90} = 0,86$  ;  
 Ecrouissage (Hollomon) :  $K = 431$  ;  $n = 0,215$  ;  $\sigma_0 = 146\text{ Mpa}$ .

Vitesse de déplacement de la tôle = 2,5 m/s.

Flan : – longueur = 300 mm ; largeur = 50 mm ;  
 – épaisseur = 1,12 mm ;  
 – maillage régulier de la moitié du flan en 3 000 éléments ( $150 \times 1 \times 2$ ) avec symétrie longitudinale imposée.

	S3/BPT	DKT122	C0
<b>Nombre de nœuds</b>	1 661	6 321	1 661
<b>Degrés de liberté</b>	4 983	9 643	9 966
<b>Demi largeur de bande</b>	69	71	72

Tableau 15. Maillages

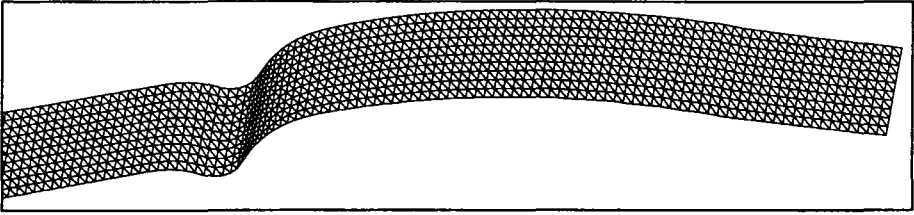


Figure 40. Vue partielle du maillage après retour élastique

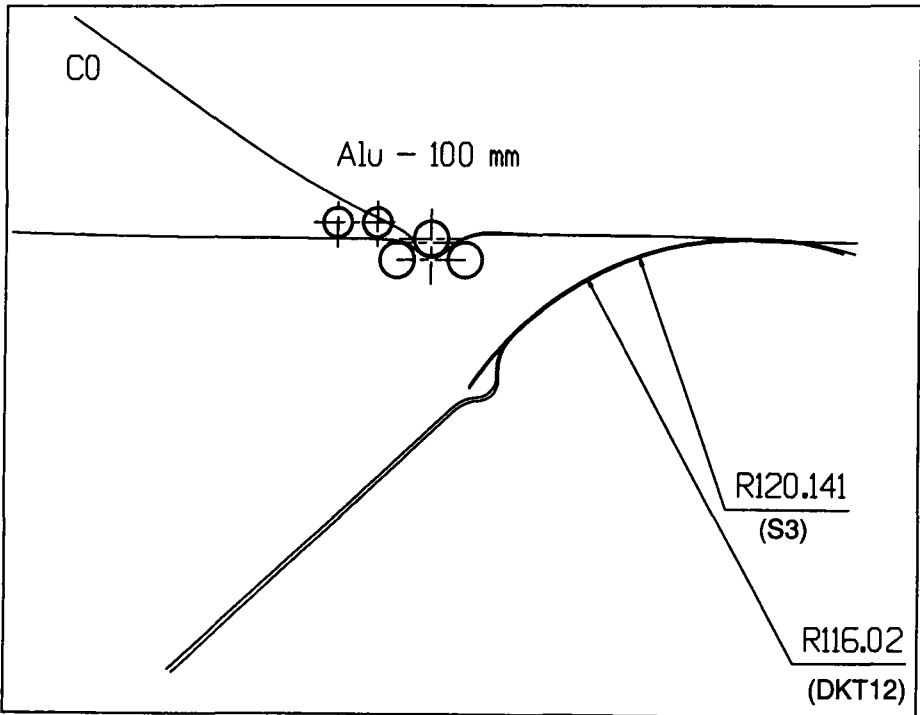


Figure 41. Configuration du flan après retour élastique (déplacement de 100 mm)

Alliage d'aluminium	S3/BPT	DKT12	C0	Expériences
déplacement 100 mm	120.14	116.02	Retour inverse (figure 41)	100 mm
déplacement 150 mm	117.85	119.09	Retour correct : 1 74.0	107 mm

Tableau 16. Résultats du rayon résiduel en mm (avec plasticité « globale »)

## 7. Conclusion

Trois éléments finis triangulaires – implémentés séparément dans des codes industriels de mise en forme – ont été regroupés ici dans un même environnement logiciel afin de donner lieu à des comparaisons objectives. La simulation de l'emboutissage utilise un schéma explicite pour la phase de mise en forme où sont pris en compte la forme des outils – décrite par des carreaux (NURBS) tangents –, les joncs de retenue, l'effort de serrage du serre flan, le frottement entre tôle et outillage et le comportement élasto-plastique du matériau avec anisotropie initiale s'il y a lieu. Le retour élastique est ensuite analysé avec un schéma implicite afin d'éviter les oscillations. Dans les deux cas (explicite et implicite), la plasticité est captée en plusieurs points dans l'épaisseur ou décrite globalement avec efforts normaux et moments de flexion.

L'élément « C0 » [BEL 84] est un triangle à trois nœuds dont la formulation « coque » – sans continuité des normales – nécessite six degrés de liberté (ddl) par nœud, dont deux en chaque nœud pour les effets de membrane comme tous les triangles évoqués ici. Il est sensible à l'orientation et à la densité du maillage (blocage en cisaillement) et c'est avec cet élément que le temps de calcul est le plus long.

L'élément « DKT12 » [BAT 92] nécessite six nœuds et six ddl pour décrire la flexion (une translation par « nœud-sommet » et une rotation par « nœud-milieu »), ainsi que six ddl pour les effets de membrane (deux translations par nœud-sommet). Pour un même découpage, le nombre de nœuds augmente alors considérablement. Ainsi, le nombre total de ddl est proche de celui correspondant à l'élément « C0 » et il en est de même pour la largeur de bande qui influence défavorablement le temps de calcul dans le cas implicite malgré la gestion dynamique par des listes chaînées. Basé sur des hypothèses de Kirchhoff discrètes, il est insensible à l'épaisseur et globalement, il présente le meilleur compromis précision-temps de calcul lors d'un calcul explicite. Cela en justifierait la disponibilité dans un code d'optimisation et de validation de l'emboutissage, comme c'est déjà le cas de l'élément BPT.

L'élément « BPT » [OÑA 93] – ou « BST » pour une formulation « coque » – est un triangle à trois nœuds qui n'a que trois ddl par nœud : trois translations. Il converge vers la solution plus vite que l'élément DKT12 quand la densité du maillage croît et le temps de calcul est largement diminué dans le cas d'un schéma implicite, puisque le nombre total de ddl est divisé par deux. Mais il se révèle parfois sensible à l'orientation du maillage et ne passe pas avec succès certains tests. En outre, il ne peut partager une frontière qu'avec un seul autre élément, mais ceci n'est pas une restriction pour le maillage d'une tôle emboutie. Il est à noter que les maillages présentés ici sont peu distordus car, comme pour l'élément « TRUMP » [ARG 77], il est préférable qu'aucun angle du triangle ne soit supérieur à 90°.

Il est enfin montré dans cet article comment, pour la flexion, de simples analogies avec des systèmes équivalents bien choisis permettent d'arriver à



l'élément BPT en partant de l'élément DKT12 ; ce, moyennant une étape intermédiaire correspondant à l'élément « S3 » [SAB 95], dont l'élément BPT n'est qu'un cas particulier, alors que les auteurs respectifs ont longtemps pensé que les formulations étaient très différentes.

## 8. Bibliographie

- [ARG 77] ARGYRIS, DUNNE, MALLEJANNAKIS, SCHELKLE, « A simple facet shell element with applications to linear and non-linear equilibrium and elasticity stability problems », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 10, p. 371-403, 1977.
- [BAT 92] BATOZ, DHATT, *Modélisation des structures par éléments finis - Plaques*, Hermès, 1992.
- [BAT 98] BATOZ, Guo, SHAKOURZADEH, « Analyse non linéaire de coques minces élastoplastiques avec l'élément DKT12 », *Revue européenne des éléments finis*, Vol. 7, N°1-2-3, p. 223-239, 1998.
- [BEL 84] BELYTSCHKO, STOLARSKI, CARPENTER, « A Co triangular plate element with one point quadrature », *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol. 20, p. 787-802, 1984.
- [BRU 93] BRUNET, SABOURIN, « Explicit dynamic analysis with a simplified three node triangular element », *FEMCAD CRASH*, p.15-20, 1993.
- [BRU 94] BRUNET, SABOURIN, « Prediction of necking and wrinkles with a simplified three node triangular element in sheet forming », *Int. Conf. Proc. Metal Forming Process Simulation*, Baden-Baden, p. 75-93, 1994.
- [GRI 92] GRISARD, *Int. Conf. Proc.*, NUMIFORM'92, p. 159-162, 1992.
- [MAC 85] MACNEAL, HARDER, « A proposed standard set of problems to test finite element accuracy », *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 1, p. 3-20, 1985.
- [MOR 71] MORLEY, « The constant plate-bending element », *J. of Strain Analysis*, Vol. 6, p. 20-24, 1971.
- [NUM 93] NUMERICAL SIMULATION OF 3-D SHEET FORMING PROCESSES, *Proceedings of the 2<sup>nd</sup> International Conference*, NUMISHEET'93, Isehara, Japan, 1993.
- [NUM 96] NUMERICAL SIMULATION OF 3-D SHEET FORMING PROCESSES, *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> International Conference*, NUMISHEET'96, Detroit, USA, 1996.
- [NUM 99] NUMERICAL SIMULATION OF 3-D SHEET FORMING PROCESSES, *Proceedings of the 4<sup>th</sup> International Conference*, NUMISHEET'99, Besançon, France, 1999.
- [OÑA 93] OÑATE, CERVERA, « Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node. A simple three node triangle », *Engineering Computations*, Vol. 10, 1993.
- [SAB 94] SABOURIN, Contribution à l'étude d'éléments finis triangulaires à trois nœuds, Thèse de doctorat, INSA de Lyon, France, 1994.

[SAB 95] SABOURIN, BRUNET, « Analysis of plates and Shells with a simplified three node triangular element », *Int. J. of Thin-Walled Structures*, Vol. 21, 1995.

[TIM 79] TIMOSHENKO, *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, 1979.

## 9. Annexes

### 9.1. Matrice [Bb] de l'élément BPT

```

PROCEDURE matrice_Bb_BPT (VAR Bb:matrice_3_6;
                          x1,y1,x2,y2,x3,y3,x4,y4,x5,y5,x6,y6:DOUBLE);
VAR   x12,x23,x31,x14,x42,x25,x53,x36,x61 : DOUBLE;
      y12,y23,y31,y14,y42,y25,y53,y36,y61 : DOUBLE;
      dA,dA4,dA5,dA6 : DOUBLE;
BEGIN
  dA :=x2*y3-x3*y2+x3*y1-x1*y3+x1*y2-x2*y1; {2xaire}
  y12:=y1-y2; y23:=y2-y3; y31:=y3-y1;
  x12:=x1-x2; x23:=x2-x3; x31:=x3-x1;

  dA4:=x4*y2-x2*y4+x2*y1-x1*y2+x1*y4-x4*y1;
  y42:=y4-y2; y14:=y1-y4;
  x42:=x4-x2; x14:=x1-x4;

  dA5:=x5*y3-x3*y5+x3*y2-x2*y3+x2*y5-x5*y2;
  y25:=y2-y5; y53:=y5-y3;
  x25:=x2-x5; x53:=x5-x3;

  dA6:=x6*y1-x1*y6+x1*y3-x3*y1+x3*y6-x6*y3;
  y36:=y3-y6; y61:=y6-y1;
  x36:=x3-x6; x61:=x6-x1;

  Bb[1,1]:=y12/dA*y42/dA4+y31/dA*y36/dA6;
  Bb[1,2]:=y23/dA*y53/dA5+y12/dA*y14/dA4;
  Bb[1,3]:=y31/dA*y61/dA6+y23/dA*y25/dA5;
  Bb[1,4]:=y12/dA*-y12/dA4;
  Bb[1,5]:=y23/dA*-y23/dA5;
  Bb[1,6]:=y31/dA*-y31/dA6;

  Bb[2,1]:=x12/dA*x42/dA4+x31/dA*x36/dA6;
  Bb[2,2]:=x23/dA*x53/dA5+x12/dA*x14/dA4;
  Bb[2,3]:=x31/dA*x61/dA6+x23/dA*x25/dA5;
  Bb[2,4]:=x12/dA*-x12/dA4;
  Bb[2,5]:=x23/dA*-x23/dA5;
  Bb[2,6]:=x31/dA*-x31/dA6;

  Bb[3,1]:=-x12/dA*y42/dA4-x31/dA*y36/dA6-
            y12/dA*x42/dA4-y31/dA*x36/dA6;
  Bb[3,2]:=-x23/dA*y53/dA5-x12/dA*y14/dA4-
            y23/dA*x53/dA5-y12/dA*x14/dA4;

```

```

Bb[3, 3] := -x31/dA*y61/dA6-x23/dA*y25/dA5-
           y31/dA*x61/dA6-y23/dA*x25/dA5;
Bb[3, 4] := -x12/dA*-y12/dA4-y12/dA*-x12/dA4;
Bb[3, 5] := -x23/dA*-y23/dA5-y23/dA*-x23/dA5;
Bb[3, 6] := -x31/dA*-y31/dA6-y31/dA*-x31/dA6;

```

END;

## 9.2. Élément de Morley

Comme précisé dans [BAT 92], la matrice [Bb] reliant les déformations aux déplacements est la même pour l'élément de Morley et l'élément DKT6. Or, il est plus facile de partir des fonctions d'interpolation originales données dans [MOR 71] pour démontrer la relation [12] ; c'est ce qui est décrit dans ce qui suit.

### 9.2.1. Degrés de liberté

Le déplacement normal ( $w$ ) au plan de l'élément d'un point courant du triangle est composé d'un déplacement de solide rigide ( $w^r$ ) – exprimé avec les translations des nœuds-sommets ( $w_1, w_2, w_3$ ) – et d'un déplacement dû aux courbures ( $w^b$ ) – exprimé avec les pentes au milieu de chacun des côtés ( $(w, n)_4, (w, n)_5, (w, n)_6$ ).

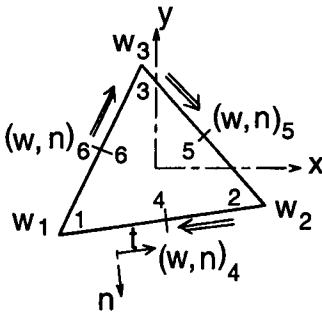


Figure 42. Degrés de liberté (flexion)



Figure 43. Déplacement normal



Figure 44. Déplacement de solide rigide

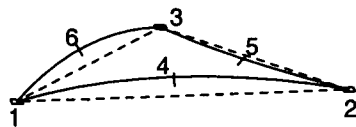


Figure 45. Déplacement dû aux courbures

9.2.2. Déplacement de solide indéformable

$$w^r = \frac{A_1}{A} w_1 + \frac{A_2}{A} w_2 + \frac{A_3}{A} w_3 \text{ où } A_i \text{ sont les fonctions d'aire (voir fig.5) .}$$

$$\left| \begin{aligned} w^r, x &= \frac{1}{A} (A_1, x, w_1 + A_2, x, w_2 + A_3, x, w_3) ; 2.A_1, x = y_2 - y_3 \\ w^r, y &= \frac{1}{A} (A_1, y, w_1 + A_2, y, w_2 + A_3, y, w_3) ; 2.A_1, y = x_3 - x_2 \end{aligned} \right.$$

Angles :  $\theta_t = \theta_x.c_k + \theta_y.s_k = (w, y).c_k - (w, x).s_k$  (voir figure 42) ;

car :  $\vec{\theta}^r = \theta_t^r \cdot \vec{t} + \theta_n^r \cdot \vec{n} = \theta_x^r \cdot \vec{x} + \theta_y^r \cdot \vec{y}$  ;  $\vec{x} = c_k \cdot \vec{t} + s_k \cdot \vec{n}$  ;  $\vec{y} = s_k \cdot \vec{t} - c_k \cdot \vec{n}$

d'où, sur le côté k :  $-(w, n) = (w, y).c_k - (w, x).s_k$  ; k = 4, 5, 6.

Avec, pour k = 4, par exemple :  $c_4 = \frac{x_{21}}{L_3} = \frac{x_2 - x_1}{L_3}$  et  $s_4 = \frac{y_{21}}{L_3} = \frac{y_2 - y_1}{L_3}$  .

En généralisant à k = 5 et k = 6, on obtient la relation :  $\begin{Bmatrix} (w^r, n)_4 \\ (w^r, n)_5 \\ (w^r, n)_6 \end{Bmatrix} = [C^r] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}$

$$\text{où } [C^r] = \begin{bmatrix} \frac{x_{32} \cdot x_{21} + y_{32} \cdot y_{21}}{2.A.L_3} & \frac{x_{13} \cdot x_{21} + y_{13} \cdot y_{21}}{2.A.L_3} & \frac{L_3}{2.A} \\ \frac{L_1}{2.A} & \frac{x_{13} \cdot x_{32} + y_{13} \cdot y_{32}}{2.A.L_1} & \frac{x_{21} \cdot x_{32} + y_{21} \cdot y_{32}}{2.A.L_1} \\ \frac{x_{32} \cdot x_{13} + y_{32} \cdot y_{13}}{2.A.L_2} & \frac{L_2}{2.A} & \frac{x_{21} \cdot x_{13} + y_{21} \cdot y_{13}}{2.A.L_2} \end{bmatrix}$$

$$x_{32} \cdot x_{21} + y_{32} \cdot y_{21} = -\vec{V}_{23} \cdot \vec{V}_{21} = -L_3 \cdot L_1 \cdot \cos \beta_2 ; 2.A = h_1 \cdot L_1 ;$$

$$x_{13} \cdot x_{21} + y_{13} \cdot y_{21} = -\vec{V}_{13} \cdot \vec{V}_{12} = -L_2 \cdot L_3 \cdot \cos \beta_1 ; 2.A = h_2 \cdot L_2 ; 2.A = h_3 \cdot L_3$$

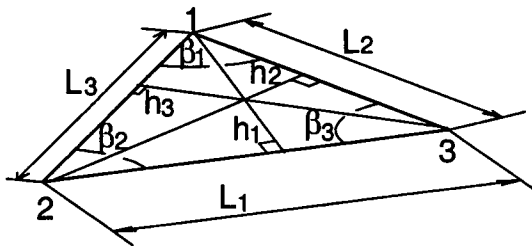


Figure 46. Paramètres géométriques du triangle

Au signe négatif près, on retrouve donc les relations [1] :

$$\begin{Bmatrix} (w^r, n)_4 \\ (w^r, n)_5 \\ (w^r, n)_6 \end{Bmatrix} = [C^r] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}; \quad \text{avec : } [C^r] = - \begin{bmatrix} -\frac{\cos\beta_2}{h_1} & -\frac{\cos\beta_1}{h_2} & \frac{1}{h_3} \\ \frac{1}{h_1} & -\frac{\cos\beta_3}{h_2} & -\frac{\cos\beta_2}{h_3} \\ -\frac{\cos\beta_3}{h_1} & \frac{1}{h_2} & -\frac{\cos\beta_1}{h_3} \end{bmatrix}$$

Utiliser les fonctions d'aire constitue donc une autre méthode pour déterminer les angles de rotation dus au mouvement de corps rigide du triangle autour de ses côtés ; il suffit de considérer :

$$\alpha_3 = -(w^r, n)_4; \alpha_1 = -(w^r, n)_5 \text{ et } \alpha_2 = -(w^r, n)_6.$$

### 9.2.3. Flexion

On pose :  $w^b = N_4.(w^b, n)_4 + N_5.(w^b, n)_5 + N_6.(w^b, n)_6$  ;

$$\begin{cases} w^b, x = N_4, x.(w^b, n)_4 + N_5, x.(w^b, n)_5 + N_6, x.(w^b, n)_6; \\ w^b, y = N_4, y.(w^b, n)_4 + N_5, y.(w^b, n)_5 + N_6, y.(w^b, n)_6; \end{cases}$$

Côté 1-2 :

$$A_3 = 0 \text{ et } w^b, n = w^b, x.s_4 - w^b, y.c_4 = (N_4, x.s_4 - N_4, y.c_4).(w^b, n)_4 + \dots$$

En 4 :  $A_1 = A/2$  et  $A_2 = A/2$  ; il faut donc que :  $N_4, x = s_4$  et  $N_4, y = -c_4$

$$\text{Cette condition est satisfaite si : } N_4 = -\frac{2.A}{L_3} \frac{A_3}{A} \left(1 - \frac{A_3}{A}\right);$$

En généralisant aux deux autres côtés, on obtient :

$$\begin{cases} w^b, x = +s_4.(1 - \frac{2.A_3}{A}).(w^b, n)_4 + s_5.(1 - \frac{2.A_1}{A}).(w^b, n)_5 + s_6.(1 - \frac{2.A_2}{A}).(w^b, n)_6 \\ w^b, y = -c_4.(1 - \frac{2.A_3}{A}).(w^b, n)_4 - c_5.(1 - \frac{2.A_1}{A}).(w^b, n)_5 - c_6.(1 - \frac{2.A_2}{A}).(w^b, n)_6 \end{cases}$$

$$\text{Courbures : } \{K\} = \begin{Bmatrix} -w^b, xx \\ -w^b, yy \\ -2.w^b, xy \end{Bmatrix} = \text{où } \begin{cases} 2.A_1, x = -s_5.L_1 \text{ et } 2.A_1, y = +c_5.L_1 \\ 2.A_2, x = -s_6.L_2 \text{ et } 2.A_2, y = +c_6.L_2 \\ 2.A_3, x = -s_4.L_3 \text{ et } 2.A_3, y = +c_4.L_3 \end{cases}$$

$$\text{Ce qui donne : } \{\mathbf{K}\} = [\mathbf{B}^b] \begin{Bmatrix} (w^b, n)_4 \\ (w^b, n)_5 \\ (w^b, n)_6 \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}^b] \begin{Bmatrix} (w, n)_4 - (w^r, n)_4 \\ (w, n)_5 - (w^r, n)_5 \\ (w, n)_6 - (w^r, n)_6 \end{Bmatrix}$$

$$\text{en considérant que : } [\mathbf{B}^b] = -\frac{1}{A} \begin{bmatrix} s_4^2.L_3 & | & s_5^2.L_1 & | & s_6^2.L_2 \\ c_4^2.L_3 & | & c_5^2.L_1 & | & c_6^2.L_2 \\ \hline -2.c_4.s_4.L_3 & | & -2.c_5.s_5.L_1 & | & -2.c_6.s_6.L_2 \end{bmatrix}$$

Soient  $\theta_3 = -(w^b, n)_4$ ;  $\theta_1 = -(w^b, n)_5$ ;  $\theta_2 = -(w^b, n)_6$  : les angles de flexion.

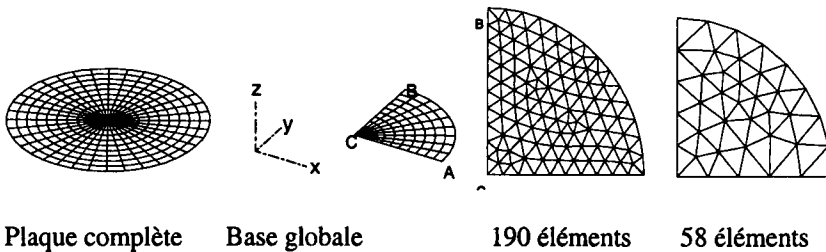
$$\text{On obtient alors : } \{\mathbf{K}\} = \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \\ 2.K_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_5^2 & | & s_6^2 & | & s_4^2 \\ c_5^2 & | & c_6^2 & | & c_4^2 \\ \hline 2.c_5.s_5 & | & 2.c_6.s_6 & | & 2.c_4.s_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_1 / (h_1 / 2) \\ \theta_2 / (h_2 / 2) \\ \theta_3 / (h_3 / 2) \end{Bmatrix}$$

Compte tenu des définitions de  $c_4, s_4, c_5, s_5, c_6$  et  $s_6$ , cette dernière expression est analogue à la relation [12].

### 9.3. Autre application

L'exemple présenté au paragraphe 6.4.1 pourrait laisser penser que les éléments S3 ou BPT ne donnent des résultats corrects qu'en cas de maillage régulier. Nous présentons donc ici une dernière application relative à une plaque circulaire encastrée, exemple qui permet aussi de mettre en évidence le blocage en cisaillement de l'élément C0 quand le maillage n'est pas suffisamment dense ainsi que l'influence de l'épaisseur.

#### 9.3.1. Données



**Figure 47.** Plaque circulaire encastrée à sa périphérie

- Géométrie : rayon  $R = 100$  mm, épaisseur  $h$  ( $0.01 \leq h \leq 20$  mm) ;
- Matériau isotrope :  $E = 200\,000$  N/mm<sup>2</sup>, coefficient de *Poisson*  $\nu = 0,3$  ;
- Charge : pression uniforme  $p = 0,01172 \times h^3$ , normale au plan.

Ce facteur multiplicateur de  $h^3$  est prévu pour donner un déplacement normal du centre C de la plaque égal à 1 mm en ne considérant que la flexion, c'est-à-dire en négligeant l'influence du cisaillement transversal.

Seul un quart de la plaque est étudié moyennant deux symétries (voir figure 47).

### 9.3.2. Résultats

Le tableau suivant regroupe les valeurs numériques  $W_{zc}$  et théoriques  $W_{zt}$  du point C suivant l'axe z. Il est à noter que la valeur théorique est calculée avec l'influence du cisaillement transversal.

	0,01	0,1	1	5	10	20
<b>p N/mm<sup>2</sup></b>	1,172E-8	1,172E-5	0,01172	1,4652	11,720	93,772
<b>Wzt en mm (Théorie)</b>	1,0000	1,0000	1,0005	1,0110	1,0457	1,1829
<b>Wzc (190 elts) : S3</b>	0,99949	0,99949	0,99949	0,9995	0,9995	0,9996
<b>Wzc (58 elts) : S3</b>	1,04031	1,04031	1,04031	1,0403	1,0403	1,0404
<b>Wzc (190 elts) : DKT6</b>	1,02733	1,02733	1,02733	1,0273	1,0273	1,0274
<b>Wzc (58 elts) : DKT6</b>	1,10086	1,10086	1,10086	1,1009	1,1009	1,1010
<b>Wzc (190 elts) : C0</b>	0,94742	0,98698	0,98960	1,0008	1,0349	1,1723
<b>Wzc (58 elts) : C0</b>	0,00499	0,28570	0,92470	0,9741	1,0096	1,1475

**Tableau 17.** Déplacement du centre de la plaque (point C)