
Modèles de plasticité et viscoplasticité pour le chargement cyclique

Lotfi Chorfi — Adnan Ibrahimbegovic

*Ecole Normale Supérieure de Cachan
Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan
61, av. du président Wilson, F-94235 Cachan Cedex
adnan.ibrahimbegovic@lmt.ens-cachan.fr*

RÉSUMÉ. Les modèles classiques de plasticité et de viscoplasticité des métaux, présentant une anisotropie dans leur comportement lors d'un chargement cyclique, doivent réserver à l'écrouissage cinématique une place prépondérante afin de décrire l'effet Bauschinger observé dans l'expérimental. Dans cet article, nous abordons l'implantation numérique d'un tel modèle d'écrouissage cinématique non linéaire de type Armstrong-Frederick ou Chaboche. L'algorithme d'intégration des contraintes et le module tangent cohérent garantissant la convergence quadratique sont présentés. Quelques exemples numériques sont présentés pour montrer l'efficacité de notre formulation.

ABSTRACT. The classical models of plasticity and viscoplasticity of metals, exhibiting anisotropic behavior under cyclic loading, ought to invariably include kinematic hardening in order to capture the Bauschinger effect observed experimentally. In this paper we discuss the numerical implementation of one such model of kinematic hardening, known as Armstrong-Frederick or Chaboche nonlinear kinematical hardening. Stress integration algorithm and the consistent tangent modulus ensuring the quadratic convergence rate are presented. Several numerical examples are presented to illustrate the efficiency of our formulation.

MOTS-CLÉS : plasticité/viscoplasticité, chargement cyclique, éléments finis.

KEYWORDS: plasticity/viscoplasticity, cyclic loading, finite elements.

1. Introduction

Le premier modèle phénoménologique de plasticité qui soit capable de refléter les traits saillants du comportement des matériaux métalliques est un modèle élastique parfaitement plastique, gouverné par les équations de Prandtl-Reuss (*e.g.* voir Hill [HIL 50]). Les ingrédients de base d'un tel modèle sont : une décomposition additive de la déformation totale en ses parties réversible (élastique) et irréversible (plastique ou viscoplastique), une relation linéaire entre la contrainte et la déformation élastique (loi de Hooke) et une loi d'écoulement normale de Levy-St. Venant. La modification la plus importante dans ce modèle, qui a contribué à l'extension de son domaine d'application, est l'écrouissage isotrope pour capturer le comportement post-élastique et l'écrouissage cinématique de Prager-Ziegler pour tenir compte des effets du chargement cyclique tels que l'effet Bauschinger. La sensibilité au taux de déformation a été introduite par Perzyna [PER 68] conduisant ainsi au modèle viscoplastique. Le développement d'un tel modèle a continué dans les années 70 et 80 pour lui permettre de bien représenter le phénomènes apparaissant lors d'un chargement cyclique (voir Armstrong et Frederick [ARM 66] et Chaboche [CHA 86]).

En ce qui concerne l'implantation numérique, Nguyen et Bui [NGU 74] en Europe et Naghdi et Trapp [NAG 75] aux Etats-Unis ont été les premiers à noter qu'il n'est pas souhaitable d'utiliser les modèles classiques pour résoudre les problèmes aux valeurs propres et que les variables de type déformations doivent être utilisées à la place des contraintes, favorisant ainsi l'écriture de la plasticité dans l'espace des déformations plutôt que dans l'espace des contraintes. La même observation a été faite par la communauté de chercheurs qui se sont intéressés à l'implantation numérique de tels modèles donnant naissance à l'algorithme du retour radial (*e.g.*, voir Wilkins [WIL 64], Krieg and Krieg [KRI 77]) ou l'algorithme rafle de convexe (*e.g.*, voir Moreau [MOR 76] ou Nguyen [NGU 77]).

D'autres points essentiels dans l'implantation numérique des modèles classiques concernent les accommodations nécessaires à introduire pour résoudre les problèmes de blocage numérique qui apparaissent avec des interpolations isoparamétriques standards et qui sont apparentés aux limitations de quasi-incompressibilité imposées sur le champ de déformations (visco)plastiques (Nagtegaal, Parks and Rice [NAG 74]). Certaines des méthodes déjà proposées sont capables de surmonter ce problème, mais jamais d'une manière satisfaisante. Par exemple, la méthode *B-bar* (*e.g.*, voir Hughes [HUG 80]) nécessite une reformulation considérable des équations fondamentales où il faut séparer les effets déviatoriques et volumétriques, tandis que la méthode basée sur l'intégration réduite (Malkus et Hughes [MAL 78], Zienkiewicz et Taylor [ZIE 89], Touzout et Dabounou [TOU 93]), risque de générer et propager des modes de déformation à énergie nulle.

Notre objectif principal dans ce travail est de construire des modèles de plasticité et viscoplasticité robustes capables de capturer les effets de rochet en utilisant un mo-

dèle d'érouissage cinématique non linéaire de type Armstrong-Frederick (*e.g.* voir Armstrong et Frederick [ARM 66]) développé notamment par Chaboche (*e.g.* voir [CHA 86] ou [CHA 94]) et traité par la suite par d'autres chercheurs (*e.g.* [HAR 93], [DOG 93], [AUR 94], [CHA 55], [HAR 97], [SAX 97]) et d'implanter ces modèles de plasticité et viscoplasticité dans un cadre numérique efficace (voir [IBR 98]). En particulier, nous élaborons :

(i) un choix particulier des variables d'état comprenant la déformation totale, la déformation (visco)plastique et les variables internes qui contrôlent l'érouissage. Il est à noter que de la déformation (visco)plastique est absente de la liste des variables internes¹. Ce choix s'avérera plus cohérent avec la formulation de la plasticité et de la viscoplasticité en grandes transformations (voir Ibrahimbegovic et Chorfi [IBR 00]). Comme observé par Drucker [DRU 88], ce choix est facilement justifié pour la plasticité parfaite, où la déformation plastique ne vient pas affecter l'état de contraintes ;

(ii) la méthode de résolution séquentielle (*e.g.*, voir Chorin *et al.* [CHO 78]) qui est utilisée pour simplifier le calcul des variables d'état dans le temps. Nous retrouvons non seulement le résultat dans l'opérateur tangent cohérent garantissant une convergence quadratique (Simo et Taylor [SIM 85]) mais aussi une procédure systématique pour sa construction qui peut être appliquée à des modèles plus complexes. Cette même procédure est étendue à la viscoplasticité.

Le plan de l'article est comme suit. Dans la section suivante, nous donnons une description des modèles de comportement élastoplastique et élastoviscoplastique, avec érouissage cinématique non linéaire. Dans la section 3, nous montrons, d'une manière systématique, le calcul des variables d'état ainsi qu'une description spatiale des modèles considérés. Dans la même section nous construisons le modèle tangent cohérent élastoplastique et élastoviscoplastique. Plusieurs simulations numériques illustratives sont présentées dans la section 4, et quelques remarques concluantes sont données dans la section 5.

2. Modèle de plasticité et viscoplasticité cyclique

En considérant que la compliance élastique instantanée est largement déterminée par la structure primaire cristalline et insensible aux processus irréversibles (*e.g.*, voir [LUB 72]), nous retrouvons la décomposition additive de la déformation totale en une partie réversible et une partie irréversible, *i.e.*

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad [1]$$

La réponse élastique est décrite par la loi de Hooke, qui s'écrit comme :

$$\sigma = \mathbf{C} : \epsilon^e \quad [2]$$

1. Le même choix sur la déformation élastique est aussi fait par Besson *et al.* [BES 98].

avec :

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} ; C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad [3]$$

où \mathbf{I} et $\mathbf{1}$ sont, respectivement, des tenseurs unité du quatrième et du second ordre et λ et μ sont les coefficients de Lamé.

Le critère de charge de von Mises est défini en fonction du tenseur de contraintes σ , le tenseur de contraintes de rappel cinématique α et le flux d'érouissage isotrope q :

$$\phi(\sigma, q, \alpha) := \|\text{dev}[\sigma] + \alpha\| - \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma_y - q) = 0 \quad [4]$$

où :

$$\text{dev}[\sigma] = \sigma - \frac{1}{3}(\mathbf{1} : \sigma)\mathbf{1} \quad [5]$$

est le tenseur de contrainte déviatorique, σ_y est la contrainte limite uniaxiale et $\|\bullet\|$ la norme, *i.e.* $\|\bullet\| := \sqrt{\bullet : \bullet}$. Tandis que le flux d'érouissage isotrope s'écrit en fonction de la variable d'état interne qui contrôle l'érouissage isotrope ξ comme :

$$q = -k(\xi) \quad [6]$$

Nous rappelons que α est représenté par un tenseur déviatorique :

$$\alpha : \mathbf{1} = 0 \quad [7]$$

Les équations d'évolution de la déformation élastique et de la variable d'érouissage isotrope s'écrivent :

$$\dot{\epsilon}^e = \dot{\epsilon} - \dot{\gamma} \mathbf{n} \quad [8]$$

$$\dot{\xi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \dot{\gamma} \quad [9]$$

où \mathbf{n} est un tenseur déviatorique du second ordre ($\mathbf{n} : \mathbf{1} = 0$) qui définit la normale à la surface de charge :

$$\mathbf{n} = \partial_\sigma \phi \quad [10]$$

et $\dot{\gamma}$ est le multiplicateur de Lagrange soumis à des conditions de charge/décharge :

$$\dot{\gamma} \geq 0 \quad ; \quad \phi \leq 0 \quad ; \quad \dot{\gamma}\phi = 0 \quad [11]$$

En viscoplasticité, nous définissons le multiplicateur $\dot{\gamma}$ par son équation d'évolution :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} \langle \phi \rangle \quad [12]$$

où η est le coefficient de viscosité.

Le choix fait dans [12] pour définir $\dot{\gamma}$ est motivé surtout par une uniformité d'écriture pour des modèles de viscoplasticité de Duvaut et Lions et de Perzyna [PER 68]. Pour le plupart de matériaux réels, on est plutôt obligé d'utiliser une généralisation non linéaire (*e.g.* une fonction puissance); Une telle modification n'apporte pas de difficultés majeures et ne nous empêche pas d'appliquer le même type de simplification du calcul d'écoulement viscoplastique comme il est décrit par la suite.

L'équation d'évolution de la contrainte de rappel cinématique s'écrit comme :

$$\dot{\alpha} = -H(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}^e) + \bar{\beta}\dot{\xi}\alpha \quad [13]$$

avec H et $\bar{\beta}$ des coefficients du matériau.

3. Approximation discrète

Dans cette section nous traitons l'algorithme d'intégration du retour radial proposé par Wilkins [WIL 64] pour la plasticité parfaite ou l'algorithme rafle de convexe proposé par Moreau [MOR 76], ainsi que leurs extensions pour prendre en compte les écrouissages isotrope et cinématique de Krieg et Krieg [KRI 77] et Nguyen [NGU 77]. Cette extension correspond à celle proposée par Simo et Taylor [SIM 85], mais notre choix de variables d'état, avec la déformation élastique qui remplace la déformation plastique, apporte plus de transparence sur les traits saillants de la procédure de résolution séquentielle.

3.1. Discrétisation spatiale

Premièrement, nous élaborons la solution du problème aux valeurs aux limites, qui comprend la formulation faible des équations d'équilibre et les équations d'évolution [8], [9] et [13]. Nous utilisons la procédure de semi-discrétisation standard pour construire une approximation éléments finis de type déplacement (*e.g.*, voir [ZIE 89] ou [BAT 92])

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \Big|_{B^e} = \sum_{a=1}^{n_{en}} \mathbf{N}_a^e(\mathbf{x}) \mathbf{u}_a(t) \quad [14]$$

où n_{en} est le nombre d'éléments total, $\mathbf{N}_a^e(\mathbf{x})$ sont les fonctions de forme et $\mathbf{u}_a(t)$ est le vecteur de déplacements nodaux. En remplaçant cette approximation dans la forme faible des équations d'équilibre, nous pouvons intégrer les variables spatiales réduisant la forme faible à un ensemble d'équations différentielles ordinaires en temps :

$$G := \sum_{e=1}^{n_{el}} \hat{A} \left\{ \int_{B^e} \nabla^s \mathbf{N}^e : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{x}, t), \xi(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}, t)) d\mathcal{B} \right. \\ \left. + \int_{B^e} \mathbf{N}^e \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\mathcal{B} + \int_{S^e} \mathbf{N}_s^e \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) d\mathcal{S} \right\} = 0 \quad [15]$$

où \hat{A} indique la procédure d'assemblage éléments finis standards (e.g., voir [ZIE 89]) sur le nombre d'éléments total n_{el} . Les intégrales dans [15] sont calculées en utilisant une procédure d'intégration numérique (e.g., points de Gauss, voir [ZIE 89], [DHA 84]) conduisant à :

$$G := \sum_{e=1}^{n_{el}} \hat{A} \left\{ \sum_{l=1}^{n_{ip}} (w_l \nabla^s \mathbf{N}(\mathbf{x}_l) : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}_l, t), \boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{x}_l, t), \xi(\mathbf{x}_l, t), \boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}_l, t)) \right. \\ \left. - w_l \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_l) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}_l, t) + \sum_{l=1}^{n_{ip}} w_l^s \mathbf{N}_s^e(\mathbf{x}_l^s) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{x}_l, t) \right\} = 0 \quad [16]$$

où w_l sont les poids et \mathbf{x}_l sont les abscisses des points de Gauss à l'ordre choisi. L'intégration numérique apporte une simplification cruciale concernant le calcul des variables internes d'état, dont les valeurs ont besoin d'être obtenues seulement aux points d'intégration numérique. Les valeurs calculées des variables internes, obtenues pour une valeur du pseudo-temps particulier, sont ensuite stockées à chaque point d'intégration pour chaque pas de temps. Les valeurs de déformations totales aux points d'intégration \mathbf{x}_l , n'ont pas besoin d'être stockées puisqu'elles sont tout simplement récupérées de l'approximation du déplacement choisie dans [14], comme :

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}_l, t) = \sum_{a=1}^{n_{en}} \nabla^s \mathbf{N}_a^e(\mathbf{x}_l) \mathbf{u}_a(t) \\ = \nabla^s \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_l) \mathbf{u}^e(t) \quad [17]$$

3.2. Intégration des variables internes d'état pour la plasticité

Comme résultat de l'utilisation de la procédure de semi-discretisation, les équations d'évolution [8], [9] et [13] deviennent des équations différentielles ordinaires

en temps. En intégrant ces équations dans l'intervalle de temps qui nous intéresse, $[0, T]$, nous pouvons tracer l'évolution des variables internes d'état. Cette intégration numérique est effectuée en utilisant le schéma du retour radial. La solution est obtenue pour une valeur choisie du pseudo-temps dans une séquence incrémentale : $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < T$. Il suffit d'élaborer la procédure de résolution sur un incrément de temps typique. Par conséquent, nous notons par :

$$\epsilon_n = \epsilon(t_n), \quad \epsilon_n^e = \epsilon^e(t_n), \quad \xi_n = \xi(t_n), \quad \alpha_n = \alpha(t_n) \quad \Big|_{\mathbf{x}_i} \quad [18]$$

les valeurs connues des variables d'état à l'instant t_n , et $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ est l'incrément de temps donné. Le problème est d'obtenir les nouvelles valeurs des variables d'état à l'instant t_{n+1} :

$$\epsilon_{n+1}, \quad \epsilon_{n+1}^e, \quad \xi_{n+1}, \quad \alpha_{n+1} \quad \Big|_{\mathbf{x}_i} \quad [19]$$

Dans l'esprit de la procédure de résolution séquentielle (operator split) (e.g. voir [CHO 78]), nous supposons que nous avons l'incrément de déformation totale $\Delta \epsilon_{n+1}^{(i)}$ qui correspond à la meilleure estimation de la valeur de déplacement $\mathbf{u}^{(i)}$, avec (i) le nombre d'itérations. La première partie du calcul se réduit à une simple actualisation triviale du champ de déformation totale :

$$\epsilon_{n+1}^{(i)} = \epsilon_n + \Delta \epsilon_{n+1}^{(i)} \quad [20]$$

Le calcul des variables d'état restantes s'effectue en appliquant la méthode d'Euler implicite sur les équations d'évolution [8], [9] et [13] pour cette valeur de déformation totale fixée, ensuite nous recalculons la nouvelle valeur de la déformation totale obtenue pour les valeurs admissibles des variables d'état. Cependant, comme la valeur du multiplicateur plastique $\dot{\gamma}_{n+1} \geq 0$ reste, *a priori*, inconnue, nous procédons comme suit. Nous commençons le calcul en supposant que le pas reste élastique et posons $\dot{\gamma}_{n+1}^{tr} = 0$, ce qui génère un *état d'essai*. Nous donnons les *valeurs d'essai* des variables d'état :

$$\epsilon_{n+1}^{e\ tr} = \epsilon_n^e + \Delta \epsilon_{n+1}^{(i)} \quad [21]$$

$$\xi_{n+1}^{tr} = \xi_n \quad [22]$$

$$\alpha_{n+1}^{tr} = \alpha_n \quad [23]$$

Les équations de comportement [2] et [6] sont ensuite utilisées pour le calcul des valeurs d'essai des contraintes et du flux d'écroutissage isotrope :

$$\sigma_{n+1}^{tr} = \mathbf{C} : \epsilon_{n+1}^{tr} \quad [24]$$

$$q_{n+1}^{tr} = -k(\xi_{n+1}^{tr}) \quad [25]$$

Si le critère de plasticité est satisfait pour les valeurs d'essai choisies :

$$\phi(\sigma_{n+1}^{tr}, q_{n+1}^{tr}, \alpha_{n+1}^{tr}) \leq 0 \quad ; \quad \gamma_{n+1}^{tr} = 0 \quad [26]$$

alors l'état d'essai est un état admissible et les valeurs d'essai des variables d'état dans [21] à [23] peuvent être acceptées comme des valeurs finales² :

$$\bar{\epsilon}_{n+1} = \epsilon_{n+1}^{(i)}, \bar{\epsilon}_{n+1}^e = \epsilon_{n+1}^{e tr}, \bar{\xi}_{n+1} = \xi_{n+1}^{tr} \quad \text{et} \quad \bar{\alpha}_{n+1} = \alpha_{n+1}^{tr}$$

Dans le cas contraire, si le critère de plasticité est violé avec ces valeurs d'essai, nous devons calculer la nouvelle valeur correcte (*positive*) de $\gamma_{n+1} > 0$, qui établira l'admissibilité des variables d'état à l'instant t_{n+1} . Par conséquent, en intégrant les équations d'évolution [8], [9] et [13] avec le schéma d'Euler implicite, nous pouvons obtenir :

$$\epsilon_{n+1}^e = \epsilon_n^e + \Delta \epsilon_{n+1} - \gamma_{n+1} \mathbf{n}_{n+1} \quad [27]$$

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma_{n+1} \quad [28]$$

$$\text{où } \gamma_{n+1} = \Delta t \dot{\gamma}_{n+1} > 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{n}_{n+1} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \sigma_{n+1}}$$

Ensuite, nous pouvons calculer les valeurs des variables dépendantes comme :

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \mathbf{C} : \epsilon_{n+1}^e \\ &= \mathbf{C} : \epsilon_{n+1}^{e tr} - \mathbf{C} : \gamma_{n+1} \mathbf{n}_{n+1} \\ &= \sigma_{n+1}^{tr} - \gamma_{n+1} 2\mu \mathbf{n}_{n+1} \end{aligned} \quad [29]$$

$$q_{n+1} = -k(\xi_{n+1}) \quad [30]$$

Si nous appliquons le schéma d'Euler implicite sur l'équation d'évolution de la contrainte de rappel cinématique dans [13] et en exploitant les équations [27] et [28], nous obtenons :

2. Les valeurs finales (convergentes) sont notées pas une barre superposée.

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \gamma_{n+1} \left(-H \mathbf{n}_{n+1} + \bar{\beta} \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_{n+1} \right) \quad [31]$$

Ecrire le critère de von Mises à l'instant t_{n+1} revient à calculer $dev[\sigma_{n+1}] + \alpha_{n+1}$. En exploitant les équations [29] et [31], nous obtenons :

$$dev[\sigma_{n+1}] + \alpha_{n+1} = dev[\sigma_{n+1}^{tr} + \alpha_n] - \gamma_{n+1} \left[(2\mu + H) \mathbf{n}_{n+1} - \bar{\beta} \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_{n+1} \right] \quad [32]$$

Afin d'éliminer α_{n+1} dans [32] qui est toujours inconnue, nous rajoutons à l'équation [32] le terme suivant :

$$\gamma_{n+1} \bar{\beta} \sqrt{\frac{2}{3}} (dev[\sigma_{n+1}] - dev[\sigma_{n+1}])$$

Par la suite, en regroupant les termes, et en exploitant les résultats dans [4] et [29], nous pouvons écrire à partir de l'équation [32] la forme explicite de la fonction de charge et de la normale d'écoulement à l'instant t_{n+1} , respectivement :

$$\phi_{n+1} = \|\lambda_{n+1}\| - \gamma_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} (\sigma_y + k(\xi_{n+1})) = 0 \quad [33]$$

et :

$$\mathbf{n}_{n+1} = \frac{\lambda_{n+1}}{\|\lambda_{n+1}\|} \quad [34]$$

où :

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \gamma_2 dev[\sigma_{n+1}^{tr}] + \alpha_n \quad ; \quad \gamma_2 = 1 - \gamma_{n+1} \bar{\beta} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \gamma_1 &= \delta \gamma_{n+1} \quad ; \quad \delta = 2\mu + H - \gamma_{n+1} 2\mu \bar{\beta} \sqrt{\frac{2}{3}} - \bar{\beta} \frac{2}{3} (\sigma_y + k(\xi_{n+1})) \end{aligned} \quad [35]$$

Après l'obtention des valeurs convergentes des variables internes d'état nous procédons à la mise à jour des variables dépendantes σ_{n+1} et q_{n+1} à partir des équations [29] et [30], respectivement. Tandis que α_{n+1} se calcule comme suit :

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{1 - \bar{\beta} \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\gamma}_{n+1}} [\alpha_n - \bar{\gamma}_{n+1} H \mathbf{n}_{n+1}] \quad [36]$$

Il est très important de noter que la résolution du système d'équations algébriques non linéaires se réduit à résoudre une seule équation scalaire non linéaire dont l'inconnue est γ_{n+1} (voir [IBR 98]). Ceci nous permet de garantir la robustesse du calcul effectué localement.

3.3. *Implantation numérique de la viscoplasticité*

L'objectif principal dans cette section est de montrer que la base de calcul numérique établie dans la section précédente pour le modèle de plasticité classique peut facilement être élargie pour inclure le modèle de viscoplasticité. Les variables d'état restent les mêmes que pour la plasticité. La seule différence par rapport à la plasticité classique est que la déformation plastique ϵ^p est remplacée par la déformation viscoplastique ϵ^{vp} , qui s'écrit :

$$\epsilon_n^{vp} = \epsilon_n - \epsilon_n^e \quad [37]$$

Nous notons que dans la viscoplasticité, toutes les valeurs des contraintes sont admissibles, et le paramètre de consistance pour la plasticité classique est remplacé par le paramètre $\dot{\gamma}$, défini par l'équation constitutive dans [12]. L'intégration par un schéma d'Euler implicite de l'équation [12] nous donne sa forme discrète qui s'écrit comme :

$$\gamma_{n+1} = \frac{\Delta t}{\eta} < \phi_{n+1} > \quad [38]$$

Par conséquent, avec cette forme explicite du multiplicateur viscoplastique, toutes les équations gouvernantes pour le modèle de viscoplasticité s'écrivent d'une manière identique à celles définies pour le modèle de plasticité classique. La seule différence concerne l'équation [35]₂ qui s'écrit pour la viscoplasticité comme :

$$\gamma_1 = \left(\delta + \frac{\eta}{\Delta t} \right) \gamma_{n+1} \quad [39]$$

3.4. *Module tangent cohérent*

Avec les valeurs admissibles des variables d'état calculées pour la valeur donnée de l'incrément de déformation totale, nous procédons à la vérification des équations d'équilibre dans [16] :

$$G_{n+1}^{(i)} := G(\epsilon_{n+1}^{(i)}, \bar{\epsilon}_{n+1}^e, \bar{\xi}_{n+1}, \bar{\kappa}_{n+1}) \doteq 0 \quad [40]$$

Si cette dernière équation est satisfaite, nous concluons que la procédure globale itérative (avec (i) le nombre d'itérations) a convergé. Dans le cas contraire, nous calculons

une nouvelle estimation itérative de l'incrément de déformation $\Delta \epsilon_{n+1}^{(i)}$ en résolvant la forme linéarisée des équations d'équilibre :

$$L[G_{n+1}^{(i)}] := G_{n+1}^{(i)} + DG_{n+1}^{(i)} = 0 \quad [41]$$

Le dernier terme dans l'équation précédente est calculé comme la dérivée directionnelle de $G_{n+1}^{(i)}$ dans la direction des déplacements incrémentaux, et qui peut être explicitement écrit comme :

$$DG_{n+1}^{(i)} := \underset{e=1}{\overset{n_{el}}{A}} \left\{ \sum_{l=1}^{n_{ip}} \nabla^s \mathbf{N}^e(\mathbf{x}_l) : \mathbf{C}_{n+1}^{ep(i)} \right\} \bigg|_{\mathbf{x}_l, \bar{\epsilon}_{n+1}^e, \bar{\xi}_{n+1}, \bar{\kappa}_{n+1}} : \Delta \epsilon_{n+1}^{(i)}(\mathbf{x}_l) w_l \quad [42]$$

Le nouvel ingrédient-clé à calculer dans l'équation ci-dessus est le module tangent élastoplastique, \mathbf{C}_{n+1}^{ep} , qui peut être calculé comme la dérivée partielle de la contrainte par rapport à la déformation totale :

$$\mathbf{C}_{n+1}^{ep(i)} = \partial_{\epsilon} \sigma_{n+1}^{(i)} \bigg|_{\epsilon_{n+1}^{(i)}, \bar{\epsilon}_{n+1}^e, \bar{\xi}_{n+1}, \bar{\kappa}_{n+1}} \quad [43]$$

Finalement, nous obtenons :

$$\mathbf{C}_{n+1}^{ep(i)} = \mathbf{C} - \omega_1 (\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - \omega_2 (\mathbf{n}_{n+1} \otimes \mathbf{n}_{n+1}) - \omega_3 (dev[\sigma_{n+1}^{tr}] \otimes \mathbf{n}_{n+1}) \quad [44]$$

avec :

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \bar{\gamma}_{n+1} \frac{(2\mu)^2 \gamma_2}{\|\lambda_{n+1}\|} \\ \omega_2 &= (2\mu)^2 \frac{\gamma_2}{\gamma_3 \|\lambda_{n+1}\|} \left[\|\lambda_{n+1}\| - \bar{\gamma}_{n+1} (\gamma_3 + \bar{\beta} \sqrt{\frac{2}{3}} tr(dev[\sigma_{n+1}^{tr}] \mathbf{n}_{n+1})) \right] \\ \omega_3 &= \bar{\gamma}_{n+1} \frac{(2\mu)^2 \gamma_2}{\gamma_3 \|\lambda_{n+1}\|} \bar{\beta} \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad [45]$$

tels que λ_{n+1} et γ_2 sont définis dans les équations [35]₁ et [35]₃, respectivement, et γ_3 est donné par la relation suivante :

$$\gamma_3 = \delta + \gamma_{n+1} \bar{\beta} \sqrt{\frac{2}{3}} (2\mu + \frac{2}{3} \bar{k}'_{n+1}) + \frac{2}{3} \bar{k}'_{n+1} - \bar{\beta} \sqrt{\frac{2}{3}} tr(dev[\sigma_{n+1}^{tr}] \mathbf{n}_{n+1}) \quad [46]$$

où δ est donnée par [35]₄.

Il est très important de noter que dans le cas d'un écrouissage cinématique non linéaire de type Armstrong-Frederick que nous perdons la symétrie du module tangent élastoplastique et élastoviscoplastique.

Pour les modèles viscoplastiques nous notons la différence dans la Table 1.4 pour le calcul itératif de γ_{n+1} , tandis que le module tangent élastoviscoplastique garde la même forme que dans [44] avec :

$$\gamma_3 = \delta + \frac{\eta}{\Delta t} + \gamma_{n+1} \bar{\beta} \sqrt{\frac{2}{3}} (2\mu + \frac{2}{3} \bar{k}'_{n+1}) + \frac{2}{3} \bar{k}'_{n+1} - \bar{\beta} \sqrt{\frac{2}{3}} \text{tr}(\text{dev}[\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr}] \mathbf{n}_{n+1}) \quad [47]$$

4. Simulations numériques

Dans cette section nous présentons quelques simulations numériques dans le but d'appuyer les considérations théoriques discutées précédemment et illustrer quelques traits saillants des approches proposées. Tous les calculs numériques sont effectués au sein du code de calcul FEAP³, (e.g. voir [ZIE 89] pour la description de la version PC).

L'approximation éléments finis utilisée est basée sur la méthode des modes incompatibles, conçus au départ pour résoudre les problèmes de blocage numérique en cisaillement transverse (e.g., voir Wilson *et al.* [WIL 73]) et qui se sont ensuite avérés capables aussi de résoudre les problèmes de blocage numérique apparentés aux contraintes quasi incompressibles imposées sur le champ de déformations (visco)plastiques (e.g., voir Ibrahimbegovic et Wilson [IBR 91]). Nous montrerons qu'en exploitant l'idée de la résolution séquentielle, nous serons capable d'éliminer un stockage secondaire associé aux modes incompatibles (voir [IBR 98]).

4.1. Cylindre axisymétrique sous pression

Nous considérons un cylindre axisymétrique soumis à une pression interne. La Figure 1 représente la géométrie et le maillage éléments finis.

3. Le logiciel Finite Elements Analysis Program développé par R.L. Taylor à UC Berkeley.

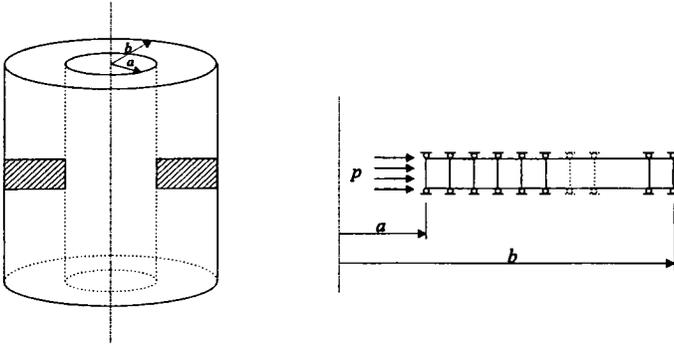


Figure 1. *Cylindre axisymétrique : géométrie et maillage EF*

Le chargement s'effectue sur deux étapes. La première consiste en un chargement monotone croissant, en imposant une pression interne, durant 10 secondes jusqu'à atteindre une pression finale $p = 300$ [MPa]. Dans la deuxième étape, nous maintenons cette pression constante à la valeur atteinte dans la phase précédente durant 1000 secondes (voir Figure 2.). Les propriétés matérielles et géométriques sont définies sur la Figure 2. Ces paramètres sont identifiés pour l'acier X5CrNi18-9 (e.g. voir [HAR 97]). La simulation est effectuée avec 20 éléments $Q4$ enrichis avec les modes incompatibles (e.g. voir [IBR 98]) et 2×2 points d'intégration.

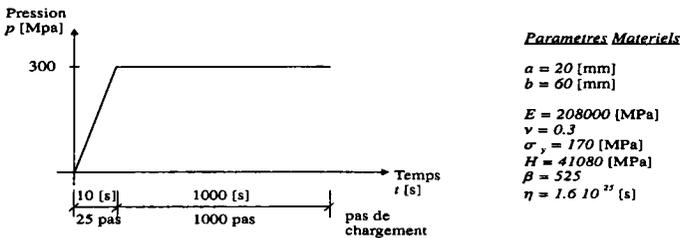


Figure 2. *Cylindre axisymétrique : chargement et paramètres matériels*

Sur la Figure 3, nous montrons l'évolution du déplacement du rayon interne $u(a)$ normalisé par le rayon interne a pour les deux modèles de plasticité et viscoplasticité. Durant la deuxième phase de chargement, nous maintenons la pression constante. La solution viscoplastique tend à rejoindre la solution plastique. A la fin de la première séquence de chargement, et pour l'analyse plastique, le cylindre est entièrement plastifié, tandis qu'en viscoplasticité il n'est que partiellement plastifié, voir Figure 4.

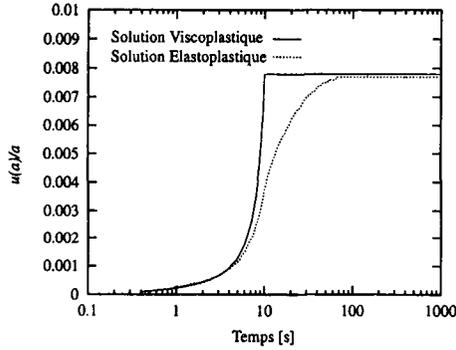


Figure 3. *Cylindre axisymétrique : déplacement normalisé du rayon interne*

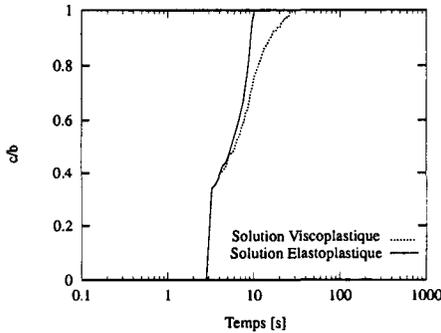


Figure 4. *Cylindre axisymétrique : évolution de la zone plastifiée*

Les distributions des contraintes après 10 et 1010 [s] sont décrites sur les Figures 5 et 6, pour la plasticité et la viscoplasticité, respectivement. Nous remarquons que l'état de contrainte dans la solution plastique reste constant à la fin du chargement monotone croissant. Pour la viscoplasticité, ce n'est plus le cas et l'état de contrainte évolue durant la deuxième phase en maintenant la pression fixe, à cause du phénomène de relaxation.

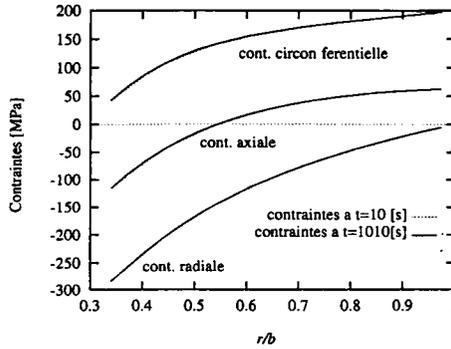


Figure 5. *Cylindre axisymétrique : distribution des contraintes après le chargement croissant et le chargement fixe - Solution plastique*

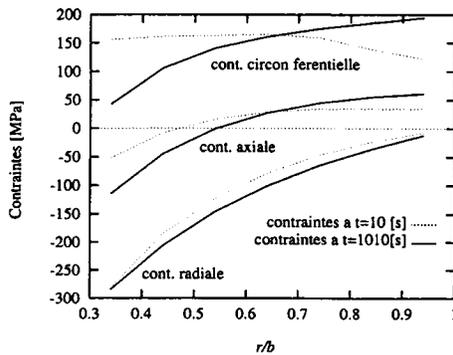


Figure 6. *Cylindre axisymétrique : distribution des contraintes après le chargement croissant et le chargement fixe - Solution viscoplastique*

Un exemple de taux de convergence quadratique sur un pas de temps est représenté dans la Table 1.

Table 1. *Cylindre axisymétrique - Taux de convergence quadratique*

Itération	1	2	3	4
Résidu	$1,697 \times 10^2$	$8,229 \times 10^1$	$2,834 \times 10^{-1}$	$3,059 \times 10^{-6}$

4.1.1. Tube épais sous chargement cyclique

Nous considérons un tube épais en état de déformations planes de rayon interne de 30 [mm] et rayon externe de 60 [mm]. En raison de la nature symétrique du problème, nous ne modélisons que le quart du tube avec 36 éléments Q4 enrichis avec des modes

incompatibles (voir Figure 7). L'intrados du tube est soumis à un chargement cyclique sous forme de déplacement imposé d'une valeur de $|d| = 0,437\text{mm}$ comme illustré sur la Figure 7. Le matériau est considéré comme élastoplastique, avec un module de Young $E = 210000\text{[N/mm}^2\text{]}$, un coefficient de Poisson $\nu = 0,3$ et une limite d'élasticité $\sigma_y = 300\text{[N/mm}^2\text{]}$. L'écroûissage cinématique est du type Armstrong-Frederick dont les constantes sont $H = 20000\text{[N/mm}^2\text{]}$ et $\beta = 60$ (voir [SAX 97]).

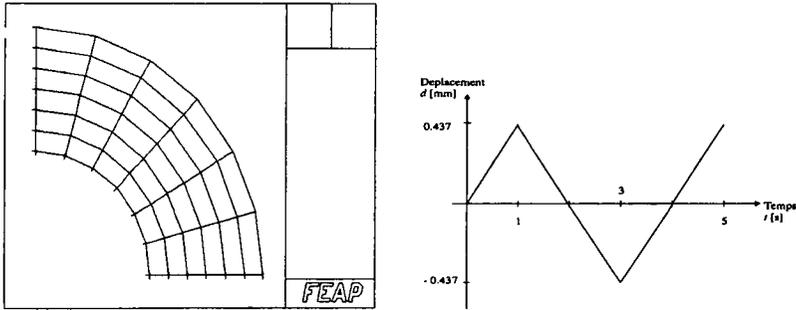


Figure 7. Tube épais : a) Maillage EF et conditions aux limites - b) Chargement

L'analyse est effectuée avec un pas de temps de $\Delta t = 0,05\text{s}$. Sur la Figure 8, nous représentons la pression en fonction du déplacement de l'intrados du tube. Le taux typique de convergence de la méthode de Newton est représenté sur la Table 2.

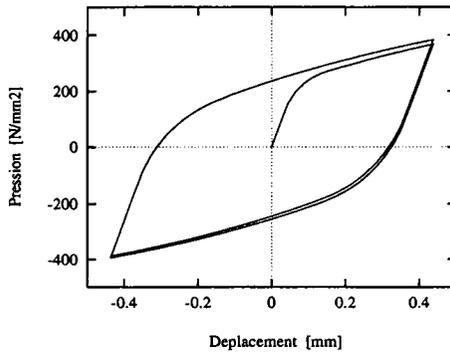


Figure 8. Tube épais : réponse cyclique du tube - Pression vs. Déplacement

Table 2. Taux de convergence quadratique

Itération	1	2	3	4
Résidu	$2,049 \times 10^4$	$1,596 \times 10^1$	$1,205 \times 10^{-3}$	$1,614 \times 10^{-8}$

4.1.2. Membrane de Cook

Le dernier exemple concerne une membrane de Cook en état de déformations planes. Cet exemple est un test standard qui permet de vérifier la qualité des approximations par éléments finis dans le cas dominé par la flexion. Il représente un comportement très compliqué vu l'état de déformation non homogène qu'il génère. Le test consiste à soumettre un panneau conique à une charge de cisaillement appliquée à son extrémité libre d'une valeur totale de $F = 1,8[kN]$, tandis que l'autre bord est encastré (voir Figure 9). Le matériau est considéré viscoplastique avec un écrouissage cinématique non linéaire. Les paramètres matériels sont résumés sur la Figure 9.

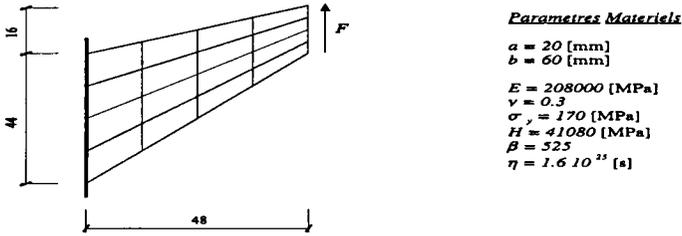


Figure 9. Membrane de Cook : géométrie et paramètres matériels

Sur la Figure 10, nous traçons le graphique de la convergence du déplacement de l'extrémité en fonction du nombre d'éléments par côté. Nous remarquons une bien meilleure convergence avec des éléments $Q4$ avec des modes incompatibles comparativement à des éléments isoparamétriques standards.

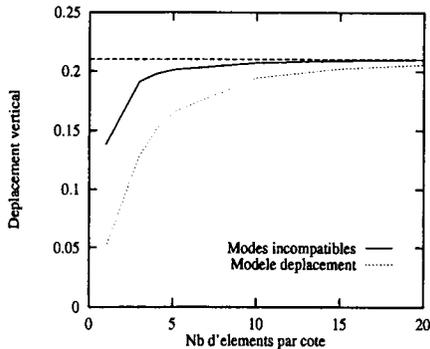


Figure 10. Membrane de Cook : convergence de la solution EF

Si nous imposons un chargement sous forme de pics, *i.e.* monotone croissant jusqu'à atteindre la valeur de $F = 1,8[kN]$, puis une décharge jusqu'à revenir à une charge nulle. Nous représentons sur la Figure 11 l'évolution des régions plastifiées⁴

4. La région plastifiée est représentée par les points de Gauss où la plastification apparaît.

de la membrane en fonction du chargement (ou du temps). Les régions inélastiques dans la partie inférieure sont prédominantes.

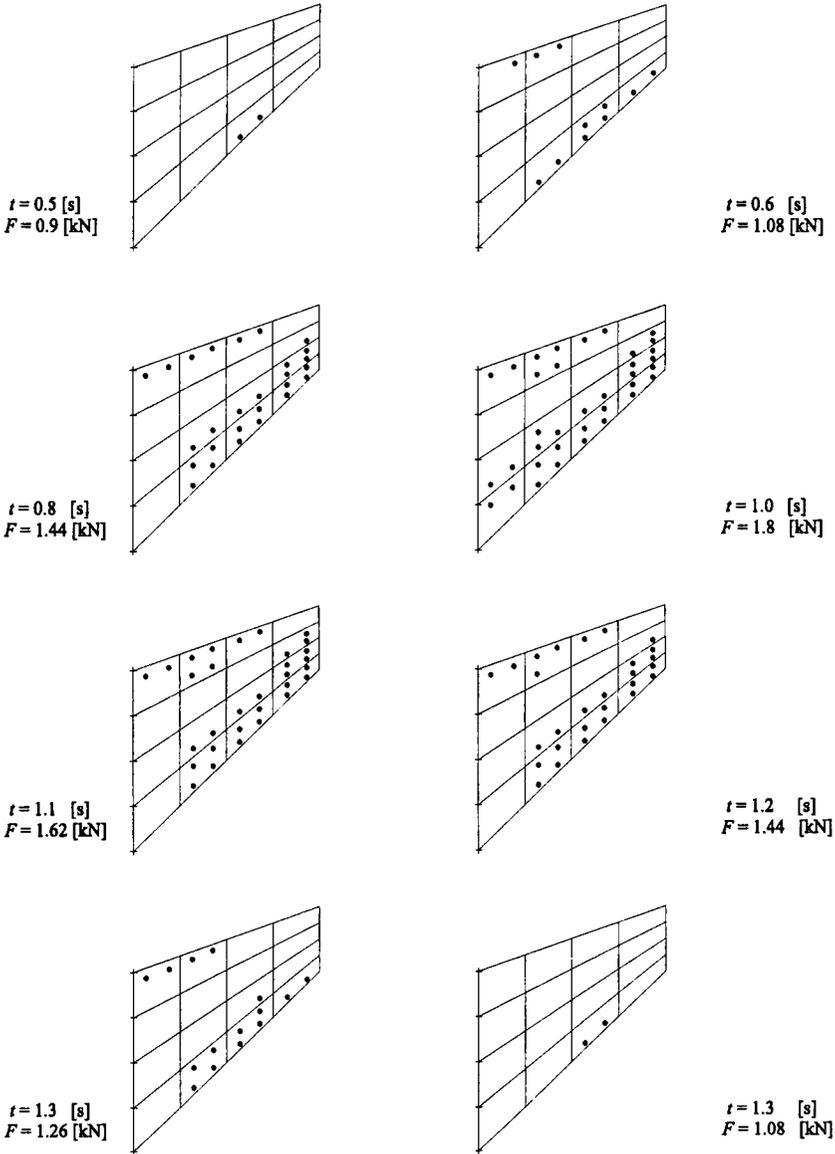


Figure 11. Membrane de Cook : évolution des régions plastifiées

5. Conclusion

Dans ce travail nous avons présenté un modèle de plasticité et de viscoplasticité avec écrouissage cinématique non linéaire, ainsi qu'un cadre général de son implantation numérique efficace.

Le résultat le plus important porte sur la robustesse du calcul global (équations d'équilibre) et du calcul local (calcul des variables internes en chaque point de Gauss). La présentation systématique du calcul des variables internes et de l'opérateur tangent cohérent garantissent la robustesse du calcul global en assurant une convergence quadratique de la procédure de résolution itérative globale. En plus, la réduction du système d'équations algébriques non linéaire en une équation scalaire non linéaire garantit, quant à elle, la robustesse de la procédure de résolution locale.

Remerciements

Ce travail a été subventionné par les Ministères de l'Enseignement Supérieur et la Recherche de la France et de l'Algérie (le financement géré par ainsi le CROUS d'Amiens), le CNRS et la Coopération Scientifique Franco-Québécoise.

6. Bibliographie

- [ARM 66] ARMSTRONG P., FREDERICK C., « A Mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect », Rapport de recherche n° RD/B/N731, 1966, Berkeley Nuclear Laboratories.
- [AUR 94] AURUCCHIO F., TAYLOR R., « A generalized elastoplastic plate theory and its algorithmic implementation », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 37, n° 6, 1994, p. 2583-2608, John Wiley, Londres.
- [BAT 92] BATOZ J., DHATT G., *Modélisation des structures par la méthode des éléments finis. Vol 1*, Edition Hermès, Paris, 1992.
- [BEN 87] BENALLAL A., « On the stability of some time-integration schemes in quasi-static hardening elasto-viscoplasticity », *Engrg. Anal.*, vol. 4, n° 1, 1987, p. 95-99.
- [BES 98] BESSON J., LERICHE R., FOERCH R., CAILLETAUD G., « Object-oriented programming applied to the finite element method, part II: Application to material behaviors », *Revue européenne élém. finis*, vol. 5, n° 4, 1998, p. 567-588, Editions Hermès, Paris.
- [CHA 55] CHABOCHE J., CAILLETAUD G., « Integration methods for complex plastic constitutive equations », *Comp. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 133, n° 2, 125-155, Elsevier, Amsterdam.
- [CHA 86] CHABOCHE J., « Time-independent constitutive theories for cyclic plasticity », *Int. J. Plasticity*, vol. 2, n° 1, 1986, p. 149-188, Elsevier, Amsterdam.
- [CHA 94] CHABOCHE J., CAILLETAUD G., « On the calculation of structures in cyclic plasticity and viscoplasticity », *Comput. Struct.*, vol. 23, n° 1, 1994, p. 23-31, Elsevier, Amsterdam.

- [CHO 78] CHORIN A., HUGHES T., MCCRACKEN M., MARSDEN J., « Product Formulas and Numerical Algorithms », *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 31, n° 2, 1978, p. 205-256, Elsevier, Amsterdam.
- [DHA 84] DHATT G., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S.A. Editeur, Paris, 1984.
- [DOG 93] DOGHRI I., « Fully implicit integration and consistent tangent modulus in elastoplasticity », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 36, n° 11, 1993, p. 3915-3932, John Wiley, Londres.
- [DRU 88] DRUCKER D., « Conventional and Unconventional Plastic Response and Representation », *Appl. Mech. Rev.*, vol. 41, 1988, p. 151-167, Elsevier, Amsterdam.
- [HAR 93] HARTMANN S., HAUPT P., « Stress Computation and Consistent Tangent Operator Using Non-Linear Kinematic Hardening Models », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 36, 1993, p. 3801-3814, John Wiley, Londres.
- [HAR 97] HARTMANN S., LÜHRS G., HAUPT P., « An Efficient Stress Algorithm with Applications in Viscoplasticity and Plasticity », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 40, 1997, p. 991-1013, John Wiley, Londres.
- [HIL 50] HILL R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, Londres, 1950.
- [HUG 80] HUGHES T., « Generalization of the Selective Integration Procedure to Anisotropic and Nonlinear Media », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 15, 1980, p. 1413-1418, John Wiley, Londres.
- [IBR 91] IBRAHIMBEGOVIC A., WILSON E., « A Modified Method of Incompatible Modes », *Commun. Numer. Methods Eng.*, vol. 7, 1991, p. 187-194, John Wiley, Londres.
- [IBR 98] IBRAHIMBEGOVIC A., GHARZEDDINE F., CHORFI L., « Classical Plasticity and Viscoplasticity Models Reformulated : Theoretical Basis and Numerical Implementation », *Int. J. Numer. Methods*, vol. 42, 1998, p. 1499-1435, John Wiley, Londres.
- [IBR 00] IBRAHIMBEGOVIC A., CHORFI L., « Viscoplasticity Model at Finite Deformations with Combined Isotropic and Kinematic Hardening », *Comput. Struct.*, vol. 77, 2000, p. 509-525, Elsevier, Amsterdam.
- [KRI 77] KRIEG R., KRIEG D., « Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic-Perfectly Plastic Model », *ASME J. Press. Vessel Tech.*, vol. 99, 1977, p. 510-515.
- [LUB 72] LUBLINER J., « On the Thermodynamic Foundations of Non-linear Solid Mechanics », *Int. J. Non-linear Mech.*, vol. 7, 1972, p. 237-254.
- [MAL 78] MALKUS D., HUGHES T., « Mixed Finite Element Methods-Reduced and Selective Integration Technics : A Unification of Concepts », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 15, n° 1, 1978, p. 63-81, Elsevier, Amsterdam.
- [MOR 76] MOREAU J., « Application of convex analysis to the treatment of elastoplastic systems », *Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics*, Berlin, 1976, Springer-Verlag, p. 56-89.
- [NAG 74] NAGTAGAAL J., PARK D., RICE J., « On Numerically Accurate Finite Element Solutions in Fully Plastic Range », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 4, n° 2, 1974, p. 153-177, Elsevier, Amsterdam.
- [NAG 75] NAGHDI P., TRAPP J., « The Significance of Formulating Plasticity Theory With Reference to Loading Surfaces in Strain Space », *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 13, 1975, p. 785-797, Elsevier, Amsterdam.

- [NGU 74] NGUYEN Q., BUI H., « Sur les matériaux élastoplastiques à écrouissage positif ou négatif », *J. de Mécanique*, vol. 13, 1974, p. 321-342.
- [NGU 77] NGUYEN Q., « On the Elastic Plastic Initial-Boundary Value Problem and Its Numerical Integration », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 11, 1977, p. 817-832, John Wiley, Londres.
- [PER 68] PERZYNA P., « Fundamental problems in Viscoplasticity », *Advances Appl. Mech.*, vol. 9, 1968, p. 243-322.
- [SAX 97] DE SAXCÉ G., HJIAJ M., « Sur l'intégration numérique de la loi d'écrouissage cinématique non linéaire », *3^{ème} Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, 1997, Editions Hermès, Paris, p. 124-128.
- [SIM 85] SIMO J., TAYLOR R., « Consistent Tangent Operators for Rate Independent Plasticity », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 48, 1985, p. 101-118, Elsevier, Amsterdam.
- [TOU 93] TOUZOT G., DABOUNOU J., « Intégration Numérique des Lois de Comportement Elastoplastiques », *Revue Europ. Elemts. Finis*, vol. 2, 1993, p. 465-494, Editions Hermès, Paris.
- [WIL 64] WILKINS M., « Calculation of elastic-plastic flow », *Methods of Computational Physics*, vol. 3, 1964, p. 211-272, Academic Press.
- [WIL 73] WILSON E., TAYLOR R., DOHERTY W., GHABOUSSI J., « Incompatible Displacement Models », *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, Academic Press, 1973, p. 43-57.
- [ZIE 89] ZIENKIEWICZ O., TAYLOR R., *The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems*, McGraw-Hill, Londres, 1989.