

---

# Un modèle de gauchissement pour les plaques piézo-électriques

**Hedi Hassis\* — Ramana Pidaparti\*\***

*\* Laboratoire de Modélisation et Calcul des Structures  
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis  
B.P 37 Le Belvédère - 1002 Tunis - Tunisie*

*\*\* Department of Mechanical Engineering, Purdue University  
723 West Michigan Street Indianapolis, Indiana USA*

---

**RÉSUMÉ.** On présente un modèle de gauchissement, pour les plaques (composites) piézo-électriques, en utilisant le principe du modèle de gauchissement développé pour les plaques et les coques homogènes et multicouches. Les résultats obtenus de ce modèle sont comparés à ceux obtenus par la théorie de Mindlin et les résultats exacts disponibles dans la littérature. Une plaque composite monocouche et une plaque composite à deux couches sont analysées pour montrer les effets du gauchissement sur le champ de déplacement, les contraintes et le potentiel électrique. Les résultats obtenus montrent que le modèle de gauchissement donne des résultats plus réalistes que les modèles classiques.

**ABSTRACT.** A warping theory for the piezoelectric composite plates is presented using a previously developed model for laminated composite plates. The warping theory takes into account the effects of non linear distribution of the displacements through the thickness and also the transverse shear deformation. The results from the present theory are compared to the low-order theory of Mindlin and exact solutions available in the literature. Examples of a one layer and two layer composite plates were presented to illustrate the thickness effects on displacements, stresses and electric potential. The results obtained indicate that warping theory gives more realistic predictions as compared to lower order theories of piezoelectric composite plates.

**MOTS-CLÉS :** piézo-électriques, composite, plaques, gauchissement.

**KEYWORDS:** Piezoelectric, Composite, Plates, Warping.

---

### 1. Introduction

La théorie de base des plaques composites piézo-électriques est bien illustrée dans de nombreuses références [EER 67, TIE 69, TSO 89, LAM 91, TSO 93, HEY 94-a]. Dans ces dernières, les modèles de Kirchhoff-Love et de Mindlin sont utilisés. Seulement pour les plaques minces le modèle de Kirchhoff-Love ou celui de Mindlin aboutissent à des résultats satisfaisants concernant l'évolution du déplacement et des contraintes en fonction de l'épaisseur [PAG 69, LO 77-a, Lo 77-b]. Pour obtenir une bonne représentation du déplacement et des contraintes des plaques composites piézo-électriques, Heyliger [HEY 94-b] a proposé un modèle discrétisant en couches l'épaisseur. Ruan *et al.* [RUA 99] a développé une solution analytique utilisant les fonctions d'Airy pour l'analyse du comportement statique des plaques composites piézo-électriques simplement appuyées.

Dans cette étude, le modèle de gauchissement développé par Hassis [HAS 98, HAS 99-a, HAS 99-b] pour les plaques homogènes et composites est étendu pour les plaques composites piézo-électriques. Le principe des travaux virtuels est utilisé pour déterminer les équations d'équilibre (mécaniques et électriques) et les conditions aux limites. Une plaque monocouche et une plaque bicouche, simplement appuyées, sont analysées. Les résultats, électriques et mécaniques, obtenus par ce modèle sont comparés à ceux obtenus par le modèle de Mindlin et la solution exacte. L'importance du gauchissement, pour les plaques composites piézo-électriques, est discutée.

### 2. Les lois physiques

Le champ électrique,  $E_j$ , et le potentiel,  $\Psi$ , sont reliés, pour chaque direction,  $j$  par la relation :

$$E_j = -\frac{\partial \Psi}{\partial x^j} \tag{1}$$

La loi de comportement des plaques composites piézo-électriques, est décrite par :

$$\begin{cases} X_{ij} = [c] \varepsilon_{ij} - [e]^t E_j \\ D_j = [e] \varepsilon_{ij} + [s] E_j \end{cases} \tag{2}$$

$X_{ij}$  sont les composantes du tenseur des contraintes induites par la combinaison des effets mécaniques et électriques (les composantes mécaniques du tenseur des

contraintes seront notées par la notation classique  $\sigma_{ij}^m$  et seront définies ultérieurement). Le vecteur contrainte a six composantes ordonnées comme suit :

$$[X]^T = [X_{11} \quad X_{22} \quad X_{33} \quad X_{13} \quad X_{23} \quad X_{12}]$$

Le vecteur  $D_j$  est le déplacement électrique ;  $[c]$  est la matrice d'élasticité ;  $[e]$  est la matrice des constantes piézo-électriques ;  $[s]$  est la matrice diélectrique.

Pour les matériaux piézo-électriques avec symétrie hexagonale et qui sont polarisés dans la direction de l'épaisseur, les matrices  $[c]$ ,  $[e]$  et  $[s]$  sont définies comme suit :

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad [3]$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [s] = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{bmatrix}$$

La contrainte totale est décomposée en deux parties :

$$X_{ij} = \sigma_{ij}^m - \sigma_{ij}^e \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma_{ij}^m = [c] \varepsilon_{ij} \\ \sigma_{ij}^e = [e]^t E_j \end{cases} \quad [4]$$

Les lois physiques précédentes seront utilisées pour le développement de la théorie de gauchissement associée aux plaques composites piézo-électriques.

### 3. Le modèle de gauchissement

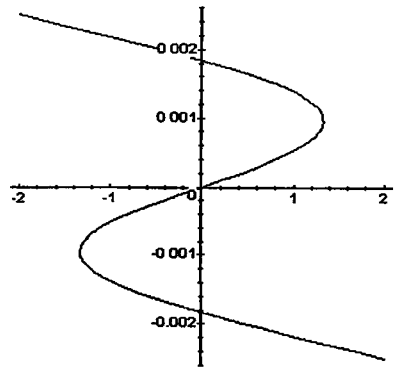
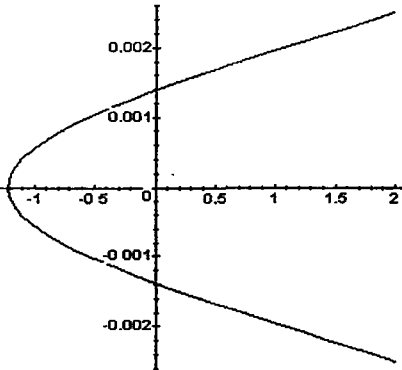
Les équations d'équilibre, associées au modèle de gauchissement, des plaques composites piézo-électriques sont obtenues en utilisant le principe des travaux virtuels. Les expressions du champ de déplacement, du tenseur de déformations, et des efforts généralisés sont explicitées dans les paragraphes suivants.

**3.1. Champ de déplacement**

Le champ de déplacement utilisé est défini par :

$$\begin{cases} U_1(x^1, x^2, x_3) = u_1(x^1, x^2) + x_3\beta_1(x^1, x^2) + W_1^n \phi_n(x_3) \\ U_2(x^1, x^2, x_3) = u_2(x^1, x^2) + x_3\beta_2(x^1, x^2) + W_2^n \phi_n(x_3) \\ U_3(x^1, x^2, x_3) = u_3(x^1, x^2) + W_3^k \Phi_k(x_3) \end{cases} \quad [5]$$

$\{\phi_n\}$  et  $\{\Phi_k\}$  sont respectivement le  $n^{\text{ème}}$  mode transverse et le  $k^{\text{ème}}$  mode longitudinal (voir annexe 1). Les fonctions  $(W_1^n, W_2^n, W_3^k)$  représentent l'intensité du gauchissement de la fibre normale. Les figures 1(a) et (b) montrent les deux premiers modes transverses et longitudinaux (axe horizontal) en fonction de la coordonnée normale normalisée  $x^3/h$  (axe vertical). Le nombre de modes dépend de l'ordre de la théorie qu'on souhaite construire. Dans cette étude, on a utilisé deux modes transverses et un mode longitudinal, tenant compte des bons résultats obtenus dans des études précédentes [HAS 98, HAS 99].



**Figure 1.a** – Premier mode transverse

**Figure 1.b** – Second mode transverse

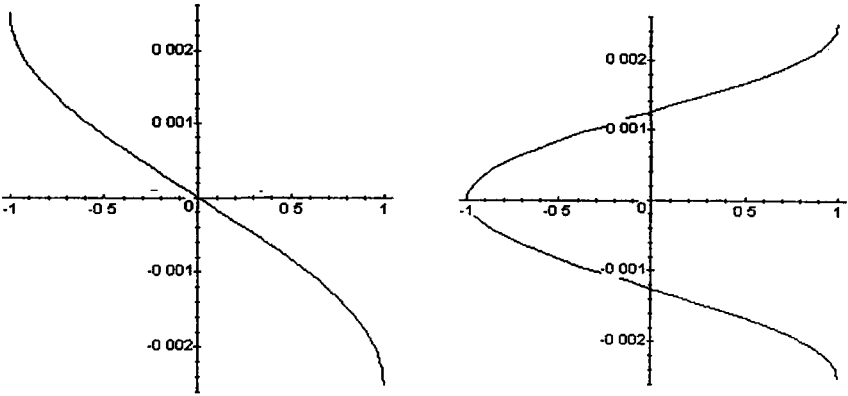


Figure 1.c. Premier modèle longitudinal Figure 1.d. Second modèle longitudinal

### 3.2. Tenseur des déformations

Le tenseur des déformations associé au champ de déplacement [5] est :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= u_{1,1} + x^3 \beta_{1,1} + W_{1,1}^n \phi_n \\
 \varepsilon_{22} &= u_{2,2} + x^3 \beta_{2,2} + W_{2,2}^n \phi_n \\
 2\varepsilon_{12} &= u_{1,2} + u_{2,1} + x^3(\beta_{1,2} + \beta_{2,1}) + (W_{1,2}^n + W_{2,1}^n) \phi_n \quad \text{avec } f_{,i} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad [6] \\
 2\varepsilon_{13} &= \gamma_{13} = u_{3,1} + \beta_1 + W_{1,3}^n \phi_{n,3} + W_{3,1}^k \Phi_k \\
 2\varepsilon_{23} &= \gamma_{23} = u_{3,2} + \beta_2 + W_{2,3}^n \phi_{n,3} + W_{3,2}^k \Phi_k \\
 \varepsilon_{33} &= W_3^k \Phi_{k,3}
 \end{aligned}$$

### 3.3. Principe des travaux virtuels

Pour une plaque piézo-électrique, le travail des efforts intérieurs est :

$$\begin{aligned}
 W_i &= \int_{\omega} \left[ (N_m^{\alpha\lambda} - N_e^{\alpha\lambda})_{,\lambda} u_\alpha + (M_m^{\alpha\lambda} - M_e^{\alpha\lambda})_{,\lambda} \beta_\alpha + (P_m^{\alpha\lambda} - P_e^{\alpha\lambda})_{,n,\lambda} W_\alpha^n \right] d\omega \\
 &- \int_{\omega} \left[ -(T_m^\alpha - T_e^\alpha)_{,\alpha} u_3 + (T_m^\alpha - T_e^\alpha) \beta_\alpha + (Q_m^\alpha - Q_e^\alpha)_n W_\alpha^n - (S_m^\alpha - S_e^\alpha)_{,k,\alpha} W_k^3 \right] d\omega \\
 &- \int_{\omega} (R_m^k - R_e^k) W_k^3 d\omega + \int_V D^i{}_{,i} \Psi dV \\
 &- \int_{\delta\omega} \left[ (N_m^{\alpha\lambda} - N_e^{\alpha\lambda})_{,\lambda} v_\alpha u_\alpha + (M_m^{\alpha\lambda} - M_e^{\alpha\lambda})_{,\lambda} v_\lambda \beta_\alpha + (P_m^{\alpha\lambda} - P_e^{\alpha\lambda})_{,n} u_\alpha W_\alpha^n \right] d\Gamma \\
 &- \int_{\delta\omega} \left[ (T_m^\alpha - T_e^\alpha)_{,\alpha} v_\alpha u_3 + (S_m^\alpha - S_e^\alpha)_{,k} v_\alpha W_k^3 \right] d\Gamma - \int_{\delta V} D^i{}_{,i} \Psi d\delta V
 \end{aligned}$$

[7]

$v_\lambda$  est la  $\lambda^{ème}$  composante du vecteur normal au contour,  $\delta\omega$ , du plan moyen,  $\omega$ , de la plaque et appartenant, en même temps, à celui-ci. Le travail des efforts extérieurs est :

$$W_e = \int_{\omega} [f^\alpha u_\alpha + m^\alpha \beta_\alpha + f_n^\alpha W_n^\alpha + f^3 u_3 + f_k^3 W_k^3] d\omega + \int_{\delta\omega} [f_s^\alpha u_\alpha + m_s^\alpha \beta_\alpha + (F_n^\alpha)_s W_n^\alpha + f_s^3 u_3 + (f_k^3)_s W_k^3] d\Gamma - \int_{\delta V} [Q_e \phi] d\delta V \quad [8]$$

Qe est la charge électrique appliquée sur la frontière. Pour une plaque piézo-électrique, et en négligeant les termes de second ordre le travail des efforts d'inertie est :

$$W_j = - \int_{\omega} \left[ \rho h \ddot{u}^\alpha u_\alpha + \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\beta}^\alpha \beta_\alpha + \rho h \Sigma_n \ddot{W}_n^\alpha W_n^\alpha + \rho h f^3 \ddot{u}_3 + \rho h \xi_k \ddot{W}_k^3 W_k^3 \right] d\omega \quad [9]$$

### 3.4. Equations d'équilibre et conditions aux limites

En utilisant le principe des travaux virtuels, les équations d'équilibre sont :

$$\begin{cases} \text{sur } \omega & \left\{ \begin{aligned} (N_m^{\alpha\lambda} - N_e^{\alpha\lambda})_{,\lambda} + f^\alpha &= \rho h \ddot{u}^\alpha \\ (M_m^{\alpha\lambda} - M_e^{\alpha\lambda})_{,\lambda} - (T_m^\alpha - T_e^\alpha) + m^\alpha &= \rho \frac{h^3}{12} \ddot{\beta}^\alpha \\ (T_m^\alpha - T_e^\alpha)_{,\alpha} + f^3 &= \rho h \ddot{u}_3 \\ (P_m^{\alpha\lambda} - P_e^{\alpha\lambda})_{n,\lambda} - (Q_m^\alpha - Q_e^\alpha)_n + f_n^\alpha &= \rho h \Sigma_n \ddot{W}_n^\alpha \\ (S_m^\alpha - S_e^\alpha)_{k,\alpha} - (R_m^k - R_e^k) + f_k^3 &= \rho h \xi_k \ddot{W}_k^3 \end{aligned} \right. \quad [10] \\ \text{sur } V & \{ D^i_{,i} = 0 \end{cases}$$

avec :  $\Sigma_n = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_n^2 dx^3$  et  $\xi_k = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Phi_k^2 dx^3$



$$\begin{bmatrix} N_e^{11} & N_e^{22} \\ M_e^{11} & M_e^{22} \\ (P_e^{11})_n & (P_e^{22})_n \end{bmatrix} = \frac{h}{2} \int \begin{bmatrix} 1 \\ x^3 \\ -\frac{h}{2} \phi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{31} E_3 & e_{31} E_3 \end{bmatrix} dx^3$$

$$\begin{bmatrix} T_e^1 & T_e^2 \\ (Q_e^1)_n & (Q_e^2)_n \\ (S_e^1)_k & (S_e^2)_k \end{bmatrix} = \frac{h}{2} \int \begin{bmatrix} 1 \\ \phi_{n,3} \\ -\frac{h}{2} \Phi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{15} E_1 & e_{15} E_2 \end{bmatrix} dx^3$$

[13.b]

$$R_e^k = \frac{h}{2} \int \Phi_{k,3} e_{33} E_3 dx^3$$

REMARQUE.-  $N_e^{12} = 0; M_e^{12} = 0; (P_e^{12})_n = 0$

### 3.5. Formulation élément fini

La technique standard des éléments finis est suivie en discrétisant la solution du domaine totale sous la forme :

$$U(d) = \sum_{n=1}^{NE} U_e(d) \tag{14}$$

où U et U<sub>e</sub> sont respectivement l'énergie totale du système et celui d'un élément. Le vecteur déplacement d défini par :

$$[d]^T = [u_1 \ u_2 \ \beta_1 \ \beta_2 \ u_3 \ W_1^a \ W_2^a \ \psi] \tag{15}$$

En utilisant les définitions des efforts généralisés, l'énergie interne d'un élément (en tenant compte de la traction-compression, de la flexion et du gauchissement) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_A [\varepsilon^0 N + \kappa M + \chi P + \gamma^0 T + \gamma^a Q_n] dA + \frac{1}{2} \int_A [D^0 \nabla \psi] dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A [d^T B^T Q B d] dA \end{aligned} \tag{16}$$

Les matrices utilisées dans (16) sont définies par :

$$[Q] = \begin{bmatrix} A_e & A_{ef} & 0 & A_{ew}^n & 0 & A_{E1} \\ A_{ef}^T & A_f & 0 & A_{fw}^n & 0 & A_{E2} \\ 0 & 0 & A_s & 0 & A_{sw}^n & A_{E3} \\ A_{ew}^T & A_{fw}^T & 0 & A_w^n & 0 & A_{E4} \\ 0 & 0 & A_{sw}^{nT} & 0 & A_{sww}^n & A_{E5} \\ A_{E1} & A_{E2} & A_{E3} & A_{E4} & A_{E5} & A_{E6} \end{bmatrix}; [B] = \begin{bmatrix} L_E \\ L_B \\ L_S \\ L_W \\ L_{SW} \\ L_\Psi \end{bmatrix} \quad [17]$$

avec :

$$[A_e] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{C}_\omega] dx^3 \quad ; \quad [A_{ef}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 [\bar{C}_\omega] dx^3 \quad ; \quad [A_f] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (x^3)^2 [\bar{C}_\omega] dx^3$$

$$[A_{ew}^n] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \phi_n [\bar{C}_\omega] dx^3 \quad ; \quad [A_{fw}^n] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \phi_n x^3 [\bar{C}_\omega] dx^3 \quad ; \quad [A_w^n] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\phi_n)^2 [\bar{C}_\omega] dx^3$$

$$[A_s] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\bar{C}_{L\omega}] dx^3 \quad ; \quad [A_{sw}^n] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \phi_{n,3} [\bar{C}_{L\omega}] dx^3 \quad ; \quad [A_{ww}^n] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\phi_{n,3})^2 [\bar{C}_{L\omega}] dx^3$$

$$[A_{E1}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [e] \psi dx^3 \quad ; \quad [A_{E2}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x^3 [e] \psi dx^3 \quad ; \quad [A_{E3}] = [A_{E1}]$$

$$[A_{E4}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \phi_n [e] \psi dx^3 \quad ; \quad [A_{E5}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \phi_{n,3} [e] \psi dx^3 \quad ; \quad [A_{E6}] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\psi)^2 [S] dx^3$$

Les expressions des déformations généralisées utilisées dans [16] sont :

$$\begin{aligned} [\varepsilon^0] &= [L_E] d \quad ; \quad [\kappa] = [L_B] d \quad ; \quad [\chi] = [L_W] d \\ [\gamma^0] &= [L_S] d \quad ; \quad [\gamma^n] = [L_{SW}] d \quad ; \quad [\nabla\psi] = [L_\Psi] d \end{aligned}$$

Les expressions des différents termes sont explicitées en annexe 2. En utilisant les fonctions classiques d'interpolation utilisées pour les plaques, l'équation [16] peut être écrite :

$$U^e = \frac{1}{2} [a^T K^e a] \tag{18}$$

où  $K^e$  est la matrice de rigidité d'un élément  $e$  et  $a$  est le vecteur des déplacements nodaux.

#### 4. Applications

Sachant que les solutions exactes pour les plaques composites piézo-électriques sont généralement limitées à des exemples ayant une géométrie et des conditions aux limites simples, l'exemple d'une plaque composite piézo-électrique simplement appuyée a été choisi. La géométrie et les conditions aux limites sont illustrées par la figure 2. La surface supérieure de la plaque est soumise au chargement mécanique suivant

$$f^3(x^1, x^2) = \sin\left(\frac{\pi x^1}{L_1}\right) \tag{19}$$

$L_1$  est la longueur d'onde du chargement dans la direction  $x^1$ . La plaque n'est pas soumise à aucun potentiel électrique. Les propriétés électriques et mécaniques des matériaux utilisés dans cette étude sont données par le tableau 1.

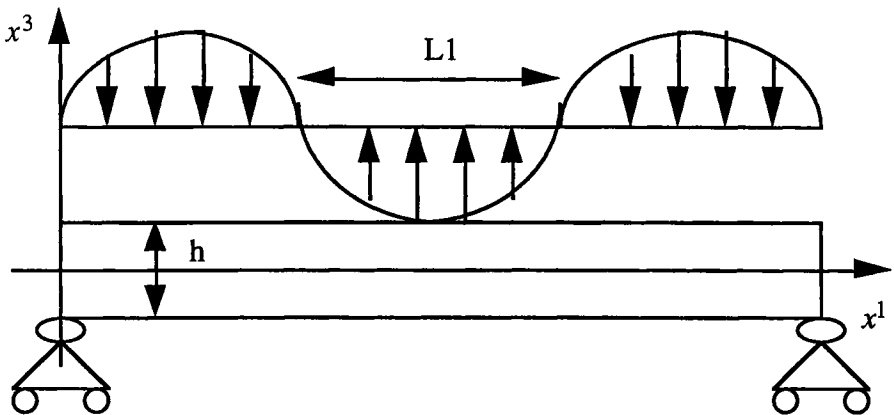


Figure 2.a. Géométrie et conditions aux limites des exemples considérés dans cette analyse

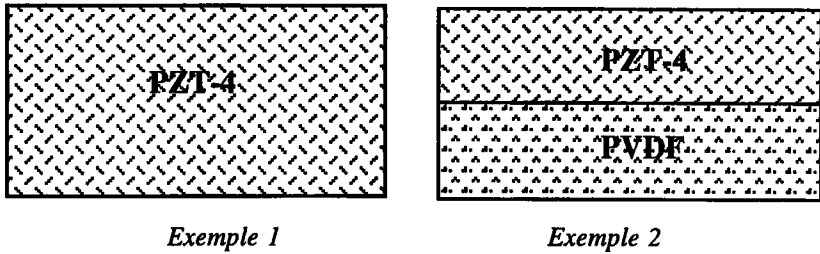


Figure 2.b. Matériau et composition de chaque plaque

Pour valider cette étude, l'exemple de la plaque monocouche, pour laquelle la solution exacte est disponible, est analysé. Après validation, une plaque bicouche composite est analysée pour illustrer les effets du gauchissement sur le champ de déplacement, sur les contraintes et sur le potentiel électrique.

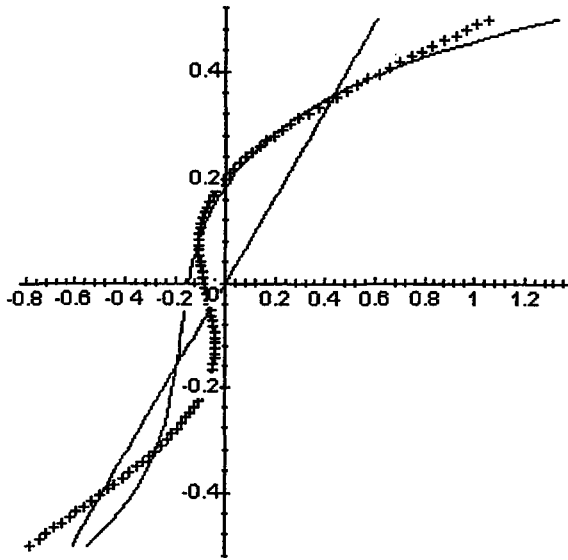
Le logiciel MAPLE est utilisé pour résoudre les équations associées aux exemples et en utilisant la formulation élément fini de la section 3.4. Dans l'ensemble des figures, l'axe vertical est la coordonnée normale normalisée  $x^3/h$  et l'axe horizontal est la variable définie par la figure correspondante.

#### 4.1. Exemple 1 : Plaque composite monocouche

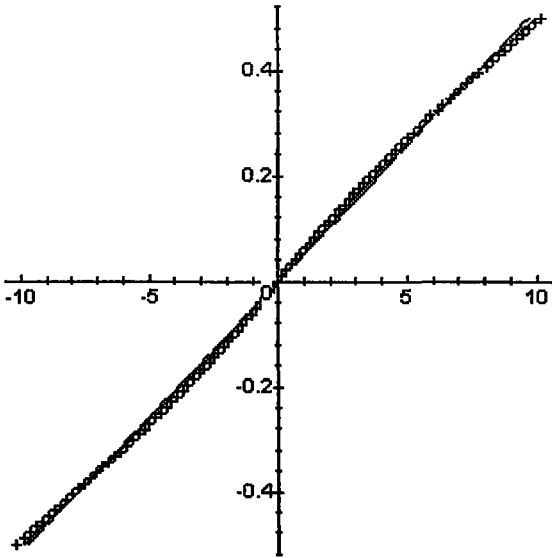
Il s'agit d'une plaque monocouche composée par le matériau PZT-4. Les propriétés mécaniques du matériau sont définies par le tableau 1. Pour valider nos résultats, la solution exacte a été obtenue en utilisant le développement de Ruan *et al.* [RUA 99]. La solution est obtenue pour une plaque monocouche piézo-électrique et cela pour deux rapports de  $L_1/h$ : 1 et 4. Pour ces rapports, la composante totale  $X_{11}$  du tenseur des contraintes est représentée dans les figures 3 (a) et (b). Sur ces mêmes figures, sont comparées la solution exacte, la solution de Mindlin et la solution associée au modèle de gauchissement. Contrairement à la solution de Mindlin, les figures 3 (a) et (b) montrent que la solution de gauchissement approxime très bien la solution exacte et cela même pour un rapport faible de  $L_1/h$ . Pour des rapports « importants » de  $L_1/h$  (figure 3.b), la solution de Mindlin converge vers la solution de gauchissement. L'évolution tridimensionnelle de la composante plane des contraintes  $X_{11}$  et celle du potentiel sont représentées en figure 4 (a) et (b) respectivement, et cela pour un rapport de  $L_1/h = 1$ .

Propriétés	Matériaux	
	PZT-4	PVDF
<b>Constantes piézo-électriques (C/m<sup>2</sup>)</b>		
e <sub>31</sub>	-5.2	-0.13
e <sub>32</sub>	-5.2	-0.14
e <sub>33</sub>	15.08	-0.28
e <sub>24</sub>	12.72	-0.01
e <sub>15</sub>	12.72	-0.01
<b>Permittivité relative</b> (s <sub>0</sub> = 8 85x10 <sup>-12</sup> C <sup>2</sup> /(Nm <sup>2</sup> ))		
s <sub>11</sub> /s <sub>0</sub>	1475	1.0
s <sub>22</sub> /s <sub>0</sub>	1475	1.0
s <sub>33</sub> /s <sub>0</sub>	1300	11.98
<b>Propriétés mécaniques</b>		
E <sub>11</sub> (GPa)	81.3	237.0
E <sub>22</sub> (GPa)	81.3	23.2
E <sub>33</sub> (GPa)	64.5	10.5
G <sub>23</sub> (GPa)	25.6	2.15
G <sub>22</sub> (GPa)	25.6	4.40
G <sub>33</sub> (GPa)	30.58	6.43
v <sub>12</sub>	0.329	0.154
v <sub>13</sub>	0.432	0.178
v <sub>21</sub>	0.329	0.015
v <sub>23</sub>	0.432	0.177
v <sub>31</sub>	0.343	0.008
v <sub>32</sub>	0.343	0.080
<b>Propriétés mécaniques</b>		
C <sub>11</sub> (GPa)	139.0	238.0
C <sub>22</sub> (GPa)	139.0	23.6
C <sub>33</sub> (GPa)	115.0	10.6
C <sub>12</sub> (GPa)	77.8	3.98
C <sub>13</sub> (GPa)	74.3	2.19
G <sub>23</sub> (GPa)	74.3	1.92
C <sub>44</sub> (GPa)	25.6	2.15
C <sub>55</sub> (GPa)	25.6	4.40
C <sub>66</sub> (GPa)	330.6	6.43

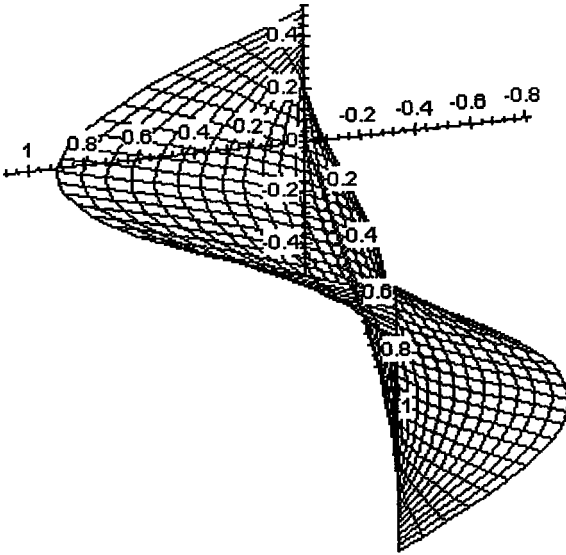
**Table 1.** Propriétés mécaniques et électriques des matériaux utilisés dans cette analyse



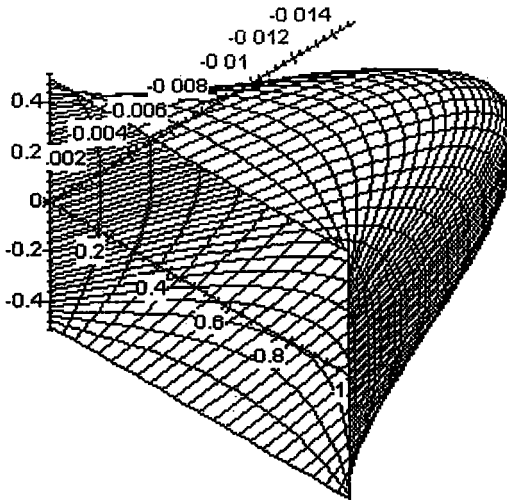
**Figure 3.a** – Composante totale  $X_{11}$  du tenseur des contraintes ;  $L_1/h = 1$ .  
 (—) Solution exacte, (xxxx) Modèle de gauchissement, (---) Modèle de Mindlin



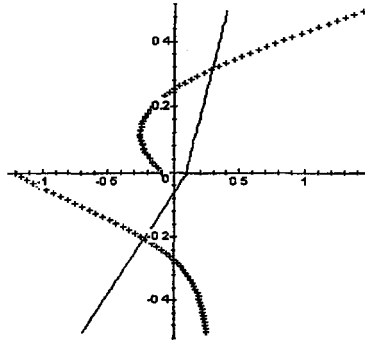
**Figure 3.b** – Composante totale  $X_{11}$  du tenseur des contraintes ;  $L_1/h = 4$ .  
 (—) Solution exacte, (xxxx) Modèle de gauchissement, (---) Modèle de Mindlin



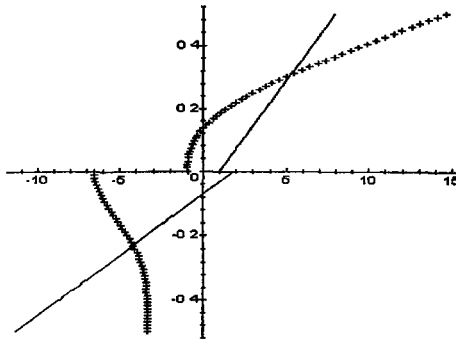
**Figure 4.a.** Représentation tridimensionnelle de la composante  $X_{11}$  du tenseur des contraintes pour une plaque monocouche piézo-électrique (PZT-4) ;  $L_1/h = 1$



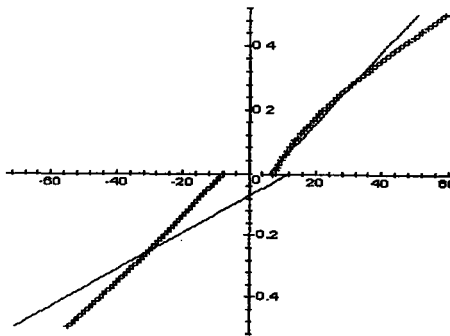
**Figure 4.b.** Représentation tridimensionnelle du potentiel électrique pour une plaque monocouche piézo-électrique (PZT-4) ;  $L_1/h = 1$



**Figure 5.a** – Composante  $X_{11}$  du tenseur des contraintes pour une plaque piézo-électrique à 2 couches (PZT-4, PVDF) ;  $L_1/h = 1$ . (xxxx) Modèle de gauchissement, (—) Modèle de Mindlin



**Figure 5.b** – Composante  $X_{11}$  du tenseur des contraintes pour une plaque piézo-électrique à 2 couches (PZT-4, PVDF) ;  $L_1/h = 4$ . (xxxx) Modèle de gauchissement, (—) Modèle de Mindlin



**Figure 5.c** – Composante  $X_{11}$  du tenseur des contraintes pour une plaque piézo-électrique à 2 couches (PZT-4, PVDF) ;  $L_1/h = 10$ . (xxxx) Modèle de gauchissement, (—) Modèle de Mindlin

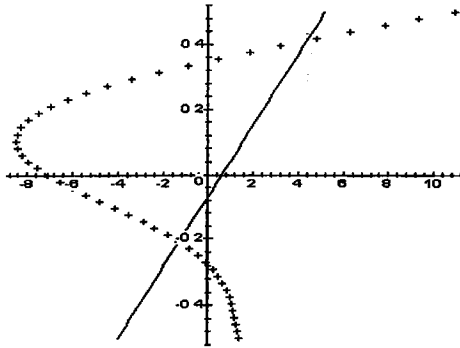


Figure 6.a – Déplacement  $U_1$  pour une plaque piézo-électrique à 2 couches (PZT-4, PVDF) ;  $L_1/h = 1$ . (xxxx) Modèle de gauchissement, (\_\_\_\_) Modèle de Mindlin

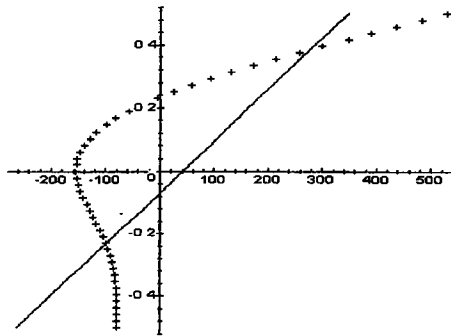


Figure 6.b – Déplacement  $U_1$  pour une plaque piézo-électrique à 2 couches (PZT-4, PVDF) ;  $L_1/h = 4$ . (xxxx) Modèle de gauchissement, (\_\_\_\_) Modèle de Mindlin

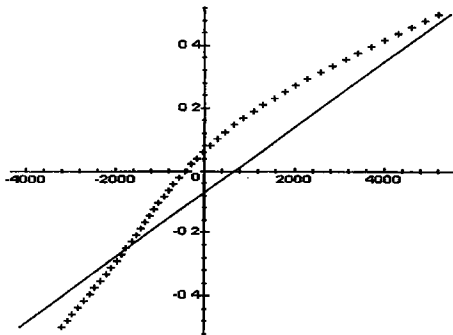


Figure 6.c – Déplacement  $U_1$  pour une plaque piézo-électrique à 2 couches (PZT-4, PVDF) ;  $L_1/h = 10$ . (xxxx) Modèle de gauchissement, (\_\_\_\_) Modèle de Mindlin

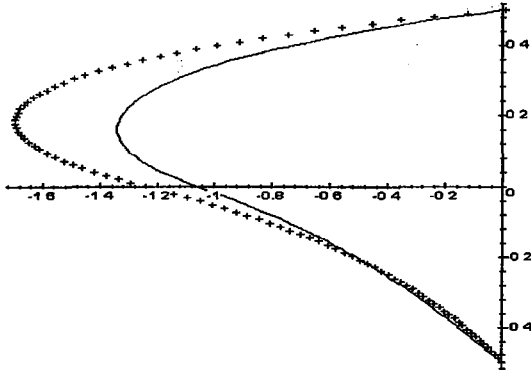


Figure 7a. Potentiel électrique pour une plaque piézo-électrique à 2 couches (PZT-4, PVDF) ;  $L_1/h = 1$ . (xxxx) Modèle de gauchissement, (—) Modèle de Mindlin

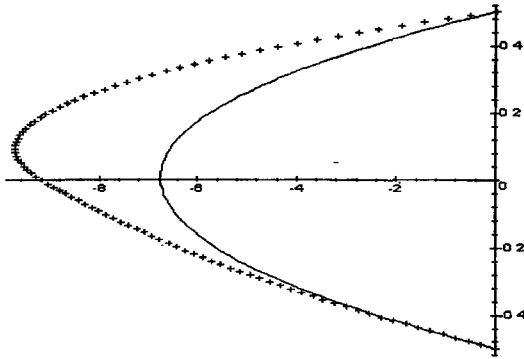


Figure 7b. Potentiel électrique pour une plaque piézo-électrique à 2 couches (PZT-4, PVDF) ;  $L_1/h = 4$ . (xxxx) Modèle de gauchissement, (—) Modèle de Mindlin

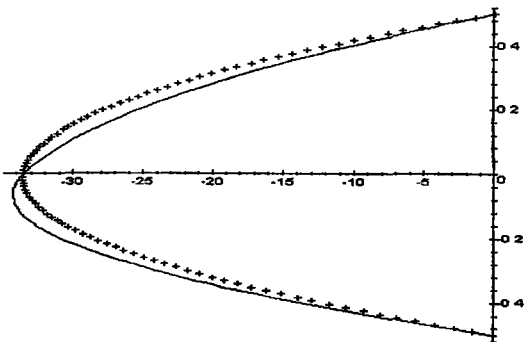
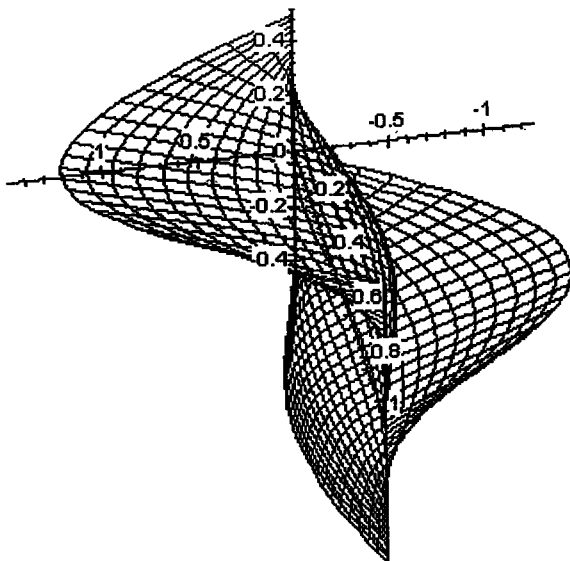
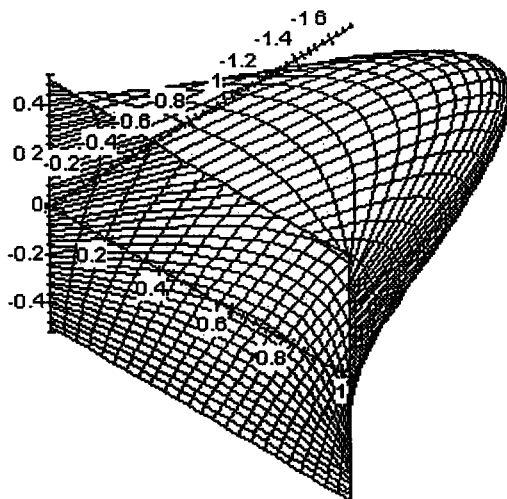


Figure 7c. Potentiel électrique pour une plaque piézo-électrique à 2 couches (PZT-4, PVDF) ;  $L_1/h = 10$ . (xxxx) Modèle de gauchissement, (—) Modèle de Mindlin



**Figure 8.a.** Représentation tridimensionnelle de la composante totale  $X_{11}$  du tenseur des contraintes pour une plaque piézo-électrique à 2 couches (PZT-4, PVDF) ;  $L_1/h = 1$



**Figure 8.b.** Représentation tridimensionnelle du potentiel électrique pour une plaque piézo-électrique à 2 couches (PZT-4, PVDF) ;  $L_1/h = 1$

#### 4.2. Exemple 2 : Plaque composite à deux couches

Il s'agit d'une plaque bicouche composée par les matériaux PZT-4 et PVDF. Les propriétés mécaniques des matériaux sont définies par le tableau 1. Chaque couche a une épaisseur de 0.0025m. La composante totale  $X_{11}$  du tenseur des contraintes est représentée en figures 5 (a), (b) et (c), respectivement pour un rapport de  $L_1/h$  égal à 1, 4 et 10. Le déplacement  $U_1$  est représenté en figures 6 (a), (b) et (c), respectivement pour un rapport de  $L_1/h$  égal à 1, 4 et 10. Le potentiel électrique  $\psi$  est représenté en figures 7 (a), (b) et (c), respectivement pour un rapport de  $L_1/h$  égale à 1, 4 et 10. Ici aussi, on remarque que pour des rapports « importants » de  $L_1/h$ , la solution de Mindlin converge vers la solution de gauchissement. La convergence, en déplacement et en potentiel, est plus lente que celle en contrainte.

L'évolution tridimensionnelle de la composante plane des contraintes  $X_{11}$  et celle du potentiel sont représentées sur les figures 8 (a) et (b) respectivement, et cela pour un rapport de  $L_1/h = 1$ .

### 5. Conclusions

Les équations et les conditions aux limites, des plaques composites piézo-électriques, associées au modèle de gauchissement ont été déterminées en utilisant le principe des travaux virtuels. Le comportement des plaques multicouches composites piézo-électriques a été analysé en utilisant ce modèle. Les résultats obtenus par ce modèle sont comparés à la solution exacte, quand c'est possible, et à ceux obtenus en adoptant le modèle de Mindlin. Les résultats sont validés par la solution exacte de Ruan et cela pour une plaque composite monocouche. Les résultats obtenus montrent que le modèle de gauchissement approxime bien la solution exacte du problème et cela même pour des rapports faibles de  $L_1/h$ . Le cas d'une plaque bicouche est ensuite considéré.

En se basant sur les résultats de cette analyse et ceux de [LO 77 et HAS 99], on peut remarquer que l'effet du gauchissement dans le cas des plaques composites multicouches est beaucoup plus important que celui dans le cas des plaques monocouches. Notons que l'implémentation numérique de ce modèle est facilitée par l'orthogonalité des modes propres.

### 6. Bibliographie

[EER 67] EER NISSE E.P., « Resonances of One-Dimensional Composite Piezoelectrical and Elastic Structures », *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, Vol. SU-14 No 2, 59-67, 1967.

[HAS 98] HASSIS H., A warping Theory of Plate Deformation, *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 17, issue 5, p. 843-853, 1998.

[HAS 99-a] HASSIS H., Un modele de gauchissement des coques, *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 8 N 1 p. 77-100, 1999.

[HAS 99-b] HASSIS H., « A high-order Model for Laminated Plates using a Warping Model », (presented to JSV).

[HEY 94-a] HEYLIGER P. RAMIRES P.R. and SARAVANOS D.A., « Coupled Discrete-layer Finite Elements for Laminated Piezoelectric Plates », *Communication in Numerical Methods in Engineering*, Vol. 10 No. 12, p. 971-981, 1994.

[HEY 94-b] HEYLIGER P., « Static behavior of Laminated Elastic/Piezoelectric Plates », *AIAA Journal*, Vol. 32 No. 12, p. 2481-2481, 1994.

[LAM 91] LAMERING R., « Application of a Finite Shell Element for Composite Containing Piezoelectric Polymers in Vibration Control », *Computer and Structure*, Vol 41 No 5, p. 1101-1109, 1991.

[LO 77-a] LO K. H., CHRISTENSEN R. M. and WU E. M., « A High Order Theory of Plate Deformation. Part 1: Laminated Plates », *J. Applied Mechanics*, 44, p. 663-676, 1977.

[LO 77-b] LO K. H., CHRISTENSEN R. M. and WU E. M., « A High Order Theory of Plate Deformation. Part 2: ??? », *J. Applied Mechanics* 44, p. ?, 1977.

[PAG 69] PAGANO N.J., « Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending », *J. Comp. Mats* 3, p. 398-411, 1969.

[RUA 99] RUAN X., DANFORTH S. C., Safari A. and Chou T.W., « A theoretical study of the coupling effects in piezoelectric ceramics », *International Journal of Solids and Structures* 36, p. 465-487, 1999.

[TIER 69] TIERSTON H.F., *Linear Piezoelectrical Plate Vibrations*, Plenum, 1969.

[TSO 89] TSOU H.S. and GADRE M., « Theoretical Analysis of a Multi-Layered Thin Shell Coupled with Piezoelectric Shell Actuators for Distributed Vibration Controls », *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 132 No 3, p. 433-450, 1989.

[TSO 93] TSOU H.S., *Piezoelectric Shells Distributed Sensing and Control of Continua*, Klumer Academic Publishers, 1993.

**Annexe 1**

Le mode transverse associé à une poutre géométrique libre-libre est :

$$\phi_n = \cos\left(\frac{\alpha_n x_3}{h}\right) + \cosh\left(\frac{\alpha_n x_3}{h}\right) - R_n \left[ \sin\left(\frac{\alpha_n x_3}{h}\right) + \sinh\left(\frac{\alpha_n x_3}{h}\right) \right]$$

Les coefficients  $\alpha_n$  et  $R_n$  sont donnés par :

$$R_1 = 0.9825; R_2 = 1.0008; R_3 = 1.0000; R_4 = 1.0000.$$

$$\alpha_1 = 4.730; \alpha_2 = 7.853; \alpha_3 = 10.996; \alpha_4 = 14.137.$$

Pour une poutre géométrique libre-libre, le mode longitudinal  $k$  est défini par :

$$\Phi_k = \cos\left(k\pi\left(\frac{x_3}{h} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

**Annexe 2**

$$[L_E] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[L_B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[L_w] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[L_s] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[L_{sw}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[L_\psi] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x^3} \end{bmatrix}$$