
Simulation numérique par une méthode d'éléments finis optimale des équations de Navier-Stokes en formulation $\psi - \omega$

Fatteh Allah Ghadi* — Vitoriano Ruas** — Mohamed Wakrim*

*Equipe d'Analyse Numérique et Calcul Scientifique

Département de Mathématiques,

Faculté des Sciences, Université Ibn Zohr, Agadir, Maroc

**Université de Saint-Etienne, Faculté des Sciences et Techniques

& Laboratoire de modélisation en mécanique

UPMC, URA 229, 4^e étage, F. 75252, Paris,

{ghadi, wakrim }@esta.ac.ma, Ruas@lmm.jussieu.fr

RÉSUMÉ. Dans le cadre de la formulation mixte à trois champs des équations de Navier-Stokes exprimées en termes de la fonction de courant ψ et du tourbillon ω introduite par les deux premiers auteurs dans [GHA 94, RUA 91], une décomposition de la fonction tourbillon ω en deux parties, dont l'une est harmonique est adoptée. En utilisant les résultats de Brezzi-Raviart [BRE 76], la méthode d'éléments finis sous-jacente pour le problème de Stokes, tout comme celle proposée par Ciarlet-Raviart, induit des estimations d'erreurs d'ordre $O(h^{k-1})$ $k \geq 2$. Des estimations d'erreurs dans le cas $k = 1$, d'ordre $O(h^{\frac{1}{2}} L_n(h))$, ont été établies moyennant un résultat de Scholz [GHA 95]. Dans cet article, des résultats numériques obtenus avec notre approche mixte, dans le cas $k = 1$, pour le problème de la cavité entraînée, ainsi que de la marche sont présentés. Afin de mettre en évidence la performance de notre méthode une comparaison avec des résultats existant dans la littérature est réalisée.

ABSTRACT. This paper present numerical results for the Navier-Stokes problem in terms of the stream-function and the vorticity, obtained by our mixte approach [GHA 95] based on the decomposition of the vorticity function, in the case $k = 1$, for the problem of the driven cavity and the backstep problem. In order to prove the performance of this method a comparision with the existing results is done.

MOTS-CLÉS : Cavité entraînée, élément fini, équations de Navier-Stokes, fonction de courant, fonction tourbillon, formulation mixte, problème de la marche.

KEY WORDS : Driven cavity, finite element, Navier-Stokes equations, stream - function, vorticity, mixed approach, backstep problem

1. Introduction

On s'intéresse à la résolution des équations de Navier-Stokes stationnaires et incompressibles en formulation fonction de courant tourbillon, notée $(\psi - \omega)$ dans des domaines bornés simplement connexes de R^2 . Ce choix est motivé par plusieurs raisons telles les suivantes :

- la condition d'incompressibilité est implicitement vérifiée contrairement à la formulation vitesse pression où cette condition est délicate à mettre en œuvre numériquement ;
- le nombre d'inconnues est réduit, on passe de trois inconnues, à savoir les deux composantes de la vitesse et la pression, à deux inconnues qui sont la fonction de courant et la fonction tourbillon, ce qui se traduit par un gain en place mémoire et en temps de calcul au niveau du problème discret.

Malgré ces avantages, la formulation $(\psi - \omega)$ se trouve confrontée à d'autres types de difficultés, entre autres, le manque de conditions aux limites sur la fonction tourbillon ainsi que le couplage des équations.

Dans le deuxième paragraphe on rappelle le cadre variationnel de cette formulation, en tenant en compte de la décomposition de la fonction tourbillon, en la somme d'une composante à trace nulle sur la frontière et d'une composante harmonique (Cf. [GHA 94, GHA 95, RUA 91]). On montre l'existence et l'unicité de la solution. Le troisième paragraphe est consacré à la construction d'un espace élément fini permettant d'approcher l'espace contenant la partie harmonique. Le quatrième paragraphe est consacré à la mise en œuvre de l'algorithme dans le cas du problème de Stokes. L'algorithme proposé dans le cas de Navier-Stokes est présenté dans le cinquième paragraphe. Dans le dernier paragraphe, on présente les résultats numériques pour le problème de la cavité entraînée et celui de la marche descendante ainsi que les résultats publiés par d'autres auteurs afin de valider notre approche.

2. Formulation variationnelle

Soit Ω un ouvert borné plan de frontière Γ lipschitzienne. En termes de $\psi - \omega$ le problème de Stokes s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\omega & = \text{curl}(f) \quad \text{dans } \Omega \\ -\Delta\psi & = \omega \quad \text{dans } \Omega \\ \psi & = g_0 \quad \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial\psi}{\partial n} & = g_1 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad [1]$$

où $f \in [L^2(\Omega)]^2$ et $g_i \in H^{\frac{3}{2}-i}(\Gamma)$, $i = 0, 1$.

Pour travailler dans un cadre variationnel naturel (Cf. [RUA 91]), à savoir $\omega \in$

$L^2(\Omega)$ avec $\Delta\omega \in H^{-1}(\Omega)$ et $\psi \in H_0^1(\Omega)$ on introduit :

$$X(\Omega) = \{\chi \in L^2(\Omega) / \Delta\chi \in H^{-1}(\Omega)\}$$

On définit sur $X(\Omega)$ la norme

$$\|\chi\|_X = \left\{ \|\chi\|_{0,\Omega}^2 + \|\Delta\chi\|_{-1,\Omega}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

associée au produit scalaire

$$(\chi, \chi)_X = (\chi, \chi)_0 + (\nabla\chi_0, \nabla\chi_0)_0$$

où χ_0 désigne le représentant de Riesz de $\Delta\chi$ dans $H_0^1(\Omega)$. Ainsi défini, $X(\Omega)$ est un espace d'Hilbert.

On introduit l'espace

$$X_H(\Omega) = \{\chi \in L^2(\Omega) / \Delta\chi = 0\}$$

et on montre facilement, en utilisant le théorème de représentation de Riesz, (Cf. [GHA 94]) que :

$$\forall \chi \in X(\Omega) \exists! \chi_0 \in H_0^1(\Omega) \exists! \chi_H \in X_H(\Omega) \text{ tel que}$$

$$\chi = \chi_0 + \chi_H.$$

Soit donc :

$$\omega = \omega_0 + \omega_H \text{ où } \omega_0 \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \omega_H \in X_H(\Omega).$$

Dans le cadre variationnel décrit ci-dessus, [1] se ramène au problème [2] suivant : (Cf. [GHA 94, RUA 91])

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\omega_0, \omega_H, \psi) \in H_0^1(\Omega) \times X_H(\Omega) \times H_{g_0}^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \text{i) } (\nabla\omega_0, \nabla\varphi)_0 = (f, \text{curl } \varphi)_0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \text{ii) } (\omega_H, \chi_H)_0 = -(\omega_0, \chi_H)_0 - (g_1, \chi_H)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \left\langle g_0, \frac{\partial \chi_H}{\partial n} \right\rangle_{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}, \quad \forall \chi_H \in X_H(\Omega) \\ \text{iii) } (\nabla\psi, \nabla\chi_0)_0 = (\omega_0 + \omega_H, \chi_0)_0, \quad \forall \chi_0 \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad [2]$$

Proposition : Le problème [2] admet une solution unique $(\omega_0, \omega_H, \psi)$, de plus $(\psi, \omega_0 + \omega_H)$ est l'unique solution du système [1].

Preuve :

1) Montrons que le problème [2] admet une solution unique.

Par application du théorème de Lax-Milgram, on montre facilement que le problème [2]-i) admet une solution unique ω_0 dans $H_0^1(\Omega)$.

Le fait que $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ définit une norme sur l'espace $X_H(\Omega)$, nous permet de montrer que le problème [2]-ii) admet une solution unique, par application directe du théorème de Lax-Milgram.

De la même façon, on montre que [2]-iii) admet une solution unique.

2) Montrons que $(\psi, \omega_0 + \omega_H)$ est l'unique solution du système [1].

L'équation [2]-i) implique $-\Delta\omega_0 = \text{curl } f$ dans Ω , et vu que ω_H est harmonique, alors $-\Delta\omega = \text{curl } f$ dans Ω .

L'équation $-\Delta\psi = \omega$ dérive directement de [2]-iii).

Soit $\chi \in H^1(\Omega)$. Il existe donc un $\chi_0 \in H_0^1(\Omega)$ et un $\chi_H \in X_H(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ tels que $\chi = \chi_0 + \chi_H$.

En prenant comme fonction test la composante χ_0 dans l'équation [2]-iii) et la composante χ_H dans l'équation [2]-ii) et en additionnant les deux équations, moyennant la relation $(\psi, \chi_H)_1 = \left\langle g_0, \frac{\partial \chi_H}{\partial n} \right\rangle_{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}$, on obtient :

$$(\psi, \chi)_1 = (\omega, \chi)_0 + (g_1, \chi)_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}.$$

et par la suite $\frac{\partial \psi}{\partial n} = g_1$ sur Γ .

Donc $(\psi, \omega_0 + \omega_H)$ est solution de [1] et puisque ce dernier admet une solution unique on a donc l'équivalence.

REMARQUES. – L'avantage de cette décomposition est qu'elle permet de récupérer les conditions aux limites manquantes sur la fonction tourbillon, sous forme d'une équation intégrale, de plus, elle permet de calculer ω_0, ω_H et ψ de façon découplée, et ce, en particulier dans la résolution des équations de Navier-Stokes.

Le problème [2]-ii) est un problème à contrainte, $\omega_H \in X_H(\Omega)$, il peut être transformé en un problème sans contrainte, moyennant un multiplicateur de Lagrange. Pour plus de détails voir [GHA 95].

3. Approximation par éléments finis

L'approximation par éléments finis, standards ou mixtes a été largement étudiée par plusieurs auteurs (Cf. [ACH 92, BER 92, BRE 80, BRE 76, GHA 95, GLO 73, GLO 79, MER 74, MIY 73]). Différentes approches ont été proposées et des résultats de convergence ont été établis (Cf. [ACH 92, BER 92, BRE 91, CIA 78, GHA 95, GLO 79, GIR 86, QUA 93]).

On note que l'approximation par éléments finis des problèmes [2]-i) et [2]-iii) est classique, contrairement au problème [2]-ii) qui présente des difficultés à cause de l'espace $X_H(\Omega)$. L'approximation de ce dernier nécessite la construction d'un espace élément fini dont les éléments de sa base sont harmoniques ou "faiblement harmoniques". L'objet de ce paragraphe est de construire un espace élément fini approchant l'espace $X_H(\Omega)$.

Pour pouvoir couvrir tout le domaine, on suppose que Ω est un polygône borné. On définit une triangulation régulière de Ω formée par des triangles ou des quadrangles convexes qu'on note $\{\mathfrak{T}_h\}$. Soit $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_h} K$.

Bien que le traitement des quadrangles soit classique et ne présente aucune difficulté majeure, on se restreint ici au cas des triangles. Ainsi, en désignant par $P^k(K)$ l'espace de polynômes de degré inférieur ou égal à k dans un triangle K , pour tout entier positif k , on introduit les espaces V_h et M_h qui sont définis par :

$$V_h = \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) / v_{h/K} \in P^k(K) \forall K \in \mathfrak{S}_h\}$$

$$M_h = V_h \cap H_0^1(\Omega).$$

On note par \sum_h l'intersection de \mathfrak{S}_h avec Γ , i.e.

$$\sum_h = \bigcup_{K \in \mathfrak{S}_h} \{K \cap \Gamma\}$$

Ainsi définie, \sum_h est constituée par des segments qu'on note Γ_i , soit :

$$\sum_h = \bigcup_{i=1, \dots, N^h} \Gamma_i$$

avec N^h un entier qui dépend de h et désigne le nombre de segments qui constituent \sum_h .

On associe à \sum_h l'ensemble, noté S^h , défini par :

$$S^h = \left\{ v \in C^0(\Gamma) / v_{/\Gamma_i} \in P^k(\Gamma_i) \forall \Gamma_i \in \sum_h \right\}$$

Soit E^h , l'ensemble des nœuds qui servent à définir les degrés de liberté de l'espace V_h et qui appartiennent à Γ . Le nombre de ces nœuds est kN^h . Pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq kN^h$, on définit les fonctions σ_i et χ_i respectivement par :

$$\begin{cases} \sigma_i \in S^h \\ \sigma_i(P_j) = \delta_{ij} \quad \forall P_j \in E^h \quad 1 \leq j \leq kN^h \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta \chi_i = 0 & \text{dans } \Omega \\ \chi_i = \sigma_i & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

χ_i peut être approchée par des éléments finis classiques de Lagrange, son approximation χ_i^h vérifie :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \chi_i^h \in V_{h, \sigma_i} \text{ tel que} \\ (\nabla \chi_i^h, \nabla v_h)_0 = 0 \quad \forall v_h \in M_h \end{cases}$$

avec $V_{h, \sigma_i} = \{v_h \in V_h / v_h = \sigma_i \text{ sur } \Gamma\}$

On note que $\{\chi_i^h\}_{i=1}^{i=kN^h}$ définit une base de l'espace

$$X_H^h(\Omega) = \{v_h \in V_h / (\nabla v_h, \nabla u_h)_0 = 0 \forall u_h \in M_h\}$$

Le problème approché s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\omega_0^h, \omega_H^h, \psi_h) \in M_h \times X_H^h(\Omega) \times V_{h,g_0} \text{ tel que} \\ (\nabla \omega_0^h, \nabla \varphi_h)_0 = (f, \text{curl } \varphi_h)_0, \quad \forall \varphi_h \in M_h \\ (\omega_H^h, \chi_H^h)_0 = -(\omega_0^h, \chi_H^h)_0 - \langle g_1, \chi_H^h \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^h + \left\langle g_0, \frac{\partial \chi_H^h}{\partial n} \right\rangle_{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}, \quad \forall \chi_H^h \in X_H^h(\Omega) \\ (\nabla \psi_h, \nabla \chi_0^h)_0 = (\omega_0^h + \omega_H^h, \chi_0^h)_0, \quad \forall \chi_0^h \in M_h \end{array} \right.$$

avec :

$$V_{h,\varphi} = \left\{ v_h \in V_h / v_h = \prod_h \varphi \text{ sur } \Gamma, \text{ avec } \prod_h \varphi(P) = \varphi(P) \forall P \in E^h \right\}$$

On vérifie facilement que le problème discret ci-dessus admet une solution unique $(\omega_0^h, \omega_H^h, \psi_h)$.

4. Implémentation numérique

L'algorithme suivant décrit comment calculer ω_0^h, ω_H^h et ψ_h approximations de ω_0, ω_H et ψ respectivement, pour résoudre un seul problème de Stokes. Une modification simple et naturelle de cette procédure s'applique au cas des équations de Navier-Stokes, comme on verra au paragraphe 5.1.

Etape 1

Pour $i = 1, \dots, kN^h$ calculer χ_i^h , solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \chi_i^h \in V_{h,\sigma_i} \text{ tel que} \\ (\nabla \chi_i^h, \nabla v_h)_0 = 0, \quad \forall v_h \in M_h \end{array} \right.$$

Notons que cette étape est certainement la plus coûteuse, en effet le calcul de la base de l'espace $X_H^h(\Omega)$ passe par la résolution de kN^h systèmes linéaires. La résolution de ces derniers est faite à l'aide de la méthode directe de Crout. Cette méthode est très intéressante dans la mesure où nous avons à résoudre plusieurs fois le même système, pour des seconds membres différents. L'étape la plus coûteuse est la décomposition de la matrice qui se fait donc une seule fois.

Etape 2

Calculer ω_0^h en résolvant le système linéaire associé au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \omega_0^h \in M_h \text{ tel que} \\ (\nabla \omega_0^h, \nabla v_h)_0 = (f, \text{curl}(v_h))_0, \quad \forall v_h \in M_h \end{array} \right.$$

Etape 3

Calculer la partie harmonique $\omega_H^h = \sum_{i=1}^{kN^h} \alpha_i \chi_i^h$, en résolvant le système linéaire

$$AX = b$$

avec

$$\begin{cases} A_{ij} = (\chi_i^h, \chi_j^h)_0 & 1 \leq i, j \leq kN^h \\ b_i = -(\omega_0^h, \chi_i^h)_0 + \oint_{\Gamma} g_0 \frac{\partial \chi_i^h}{\partial n} - \oint_{\Gamma} g_1 \chi_i^h \\ X = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq kN^h} \end{cases}$$

La matrice A associée à ce système est une matrice pleine et symétrique définie positive. Le système $AX = b$ peut être résolu par des méthodes directes type Cholesky comme il peut être résolu par des méthodes itératives, en particulier la méthode du gradient conjugué.

*Etape 4*Calculer ψ_h solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \psi_h \in V_{h,g_0} \text{ tel que} \\ (\nabla \psi_h, \nabla v_h)_0 = (\omega_0^h + \omega_H^h, v_h)_0, \forall v_h \in M_h \end{cases}$$

REMARQUE. — A première vue, le calcul des éléments χ_i^h , $1 \leq i \leq kN^h$ pour le problème de Stokes apparaît très coûteux. Notons que notre objectif est la résolution des équations de Navier-Stokes et dans ce cas le calcul de ces fonctions ainsi que la matrice associée à l'étape 3 se fait une seule fois au début de l'exécution de l'algorithme, comme décrit dans le paragraphe suivant.

5. Algorithme pour la résolution des équations de Navier-Stokes

En termes de variables fonction de courant-tourbillon, les équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible s'écrivent :

$$\begin{cases} -\nu \Delta \omega + \text{curl}(\omega \cdot \nabla \psi) & = \text{curl}(f) & \text{dans } \Omega \\ -\Delta \psi & = \omega & \text{dans } \Omega \\ \psi & = g_0 & \text{sur } \Gamma \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} & = g_1 & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Le problème ci-dessus peut être traité comme un problème de Stokes dont le second membre est $\text{curl}(f - \omega \cdot \nabla \psi)$, approche introduite par Brezzi *et al.* ([BRE 80]). Comme il a été étudié par Bernardi *et al.* ([BER 92]) pour approcher des solutions non singulières, on peut appliquer les travaux de Brezzi *et al.* ([BRE 80]).

En tenant compte de notre décomposition $\omega = \omega_0 + \omega_H$, les équations de Navier-Stokes sont à nouveau couplées. En s'inspirant des techniques de découplage, nous

avons proposé un algorithme, que nous avons testé numériquement et qui donne de bons résultats en comparaison avec les résultats présentés par d'autres auteurs. Des résultats de convergence de cet algorithme vers une solution stationnaire pour le problème continu correspondant sont donnés dans [RUA 951].

5.1. Algorithme de résolution

L'algorithme de résolution utilisé pour résoudre le système d'équations associé aux équations de Navier-Stokes est le suivant :

On initialise toutes les inconnues à zéro : $\omega_{0,h}^0 = \omega_{H,h}^0 = \psi_h^0 = 0$

Connaissant $\omega_{H,h}^{n-1}$ et ψ_h^{n-1} on calcule

$\omega_{0,h}^n \in M_h, \omega_{H,h}^n \in X_H^h(\Omega)$ et $\psi_h^n \in V_{h,g_0}$ comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu(\nabla\omega_{0,h}^n, \nabla\varphi_h)_0 + ((\omega_{0,h}^n \cdot \nabla\psi_h^{n-1}), \text{curl}(\varphi_h))_0 = (f, \text{curl} \varphi_h)_0 - \\ \quad ((\omega_{H,h}^{n-1} \cdot \nabla\psi_h^{n-1}), \text{curl}(\varphi_h))_0, \forall \varphi_h \in M_h \\ (\omega_{H,h}^n, \chi_H^h)_0 = -(\omega_{0,h}^n, \chi_H^h)_0 - \langle g_1, \chi_H^h \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} + \\ \quad \left\langle g_0, \frac{\partial \chi_H^h}{\partial n} \right\rangle_{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}}, \forall \chi_H^h \in X_H^h(\Omega) \\ (\nabla\psi_h^n, \nabla\varphi_h)_0 = (\omega_{0,h}^n + \omega_{H,h}^n, \varphi_h)_0, \forall \varphi_h \in M_h \end{array} \right.$$

6. Résultats numériques

Nous avons choisi comme cas tests, le problème de la cavité entraînée et celui de la marche descendante. L'élément fini utilisé dans les essais numériques rapportés dans cet article est l'élément fini (P_1, P_1, P_1) , autrement dit, celui basé sur l'élément fini de Lagrange conforme de degré 1. Quant à l'intégration numérique, nous avons utilisé un schéma d'intégration qui donne une intégration exacte pour des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 ([DHA 81]).

6.1. Cavité entraînée : cas de Stokes

La géométrie et les conditions aux limites sont représentées dans la figure 1.

Les figures 2 et 3 représentent respectivement les isovaleurs de ψ et celles de ω dans le cas du problème de Stokes.

Sur les figures 2 et 3 on vérifie les propriétés de symétrie de l'écoulement par rapport à l'axe vertical ($x = 0.5$), ainsi que la loi de conservation de la fonction tourbillon à savoir $\int_{\Omega} \omega d\Omega = -1$.

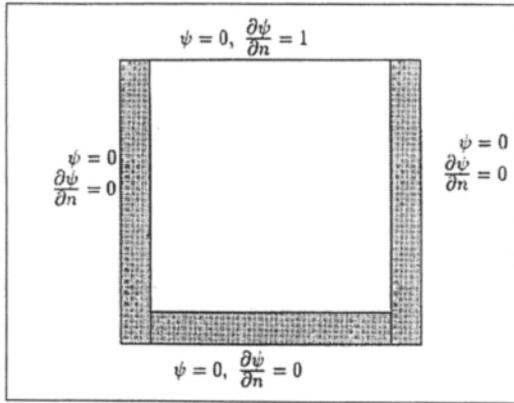


Figure 1. Géométrie et conditions aux limites du problème de la cavité entraînée

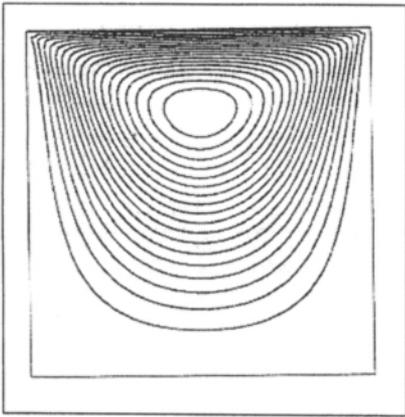


Figure 2. Isovaleurs de la fonction de courant : cas de Stokes

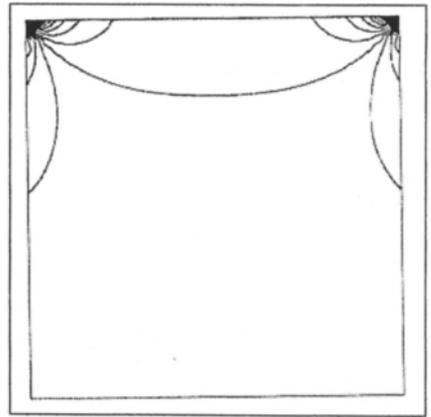


Figure 3. Isovaleurs de la fonction tourbillon : cas de Stokes

Différents tests ont été réalisés avec différents maillages. On note que la position et la valeur minimale (ou maximale) de la fonction ψ dépend du maillage. Dans le tableau 1, on présente les résultats correspondants aux maillages 20×20 , 30×30 et 40×40 de type Criss-Cross ([GHA 94]).

A titre comparatif, le tableau 2 montre quelques résultats obtenus par d'autres méthodes.

Maillage	20×20	30×30	40×40
ψ	0.10005	0.10004	0.10006
ω	3.19	3.13	3.26
X	0.5	0.482	0.487
Y	0.763	0.758	0.769

Tableau 1. Résultats de ψ_{\max} et ω_{\max} ainsi que leurs coordonnées pour différents maillages

	Quartapelle. [QUA 93]	Burggraf. [BUR 66]	Buffat. [BUF 91]
	ψ/ω	ψ/ω	ψ/ω
Problèmes de Stokes	0.0995/3.21	0.0998/3.20	0.100

Tableau 2. Résultats de ψ_{\max} et ω_{\max} obtenus par d'autres auteurs

6.2. Cavité entraînée : cas de Navier-Stokes

Les figures 4, 6 et 8 (resp. Les figures 5, 7 et 9) représentent les isovaleurs de ψ (resp. les isovaleurs de ω) pour les différents nombres de Reynolds considérés, à savoir 100, 400 et 1000.

La figure 10 représente la recirculation droite pour $Re=400$. Les figures 11 et 12 représentent respectivement les recirculations droite et gauche pour $Re=1000$.

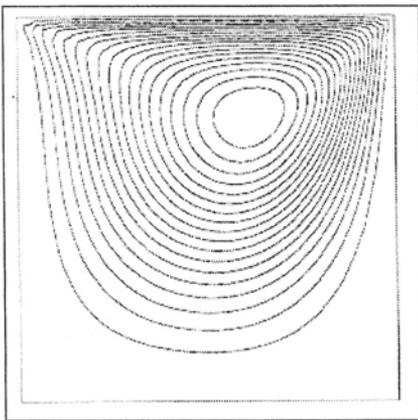


Figure 4. Lignes de courant : cas Navier-Stokes. $Re = 100$, maillage 30×30

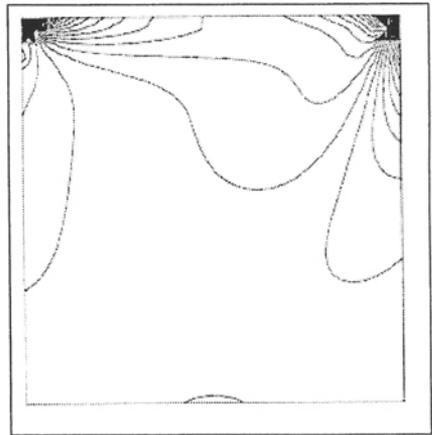


Figure 5. Isovaleurs de ω : cas Navier-Stokes. $Re = 100$, maillage 30×30

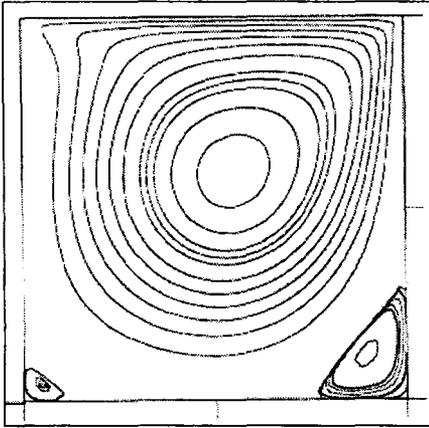


Figure 6. Lignes de courant : cas Navier-Stokes. $Re = 400$, maillage 40×40

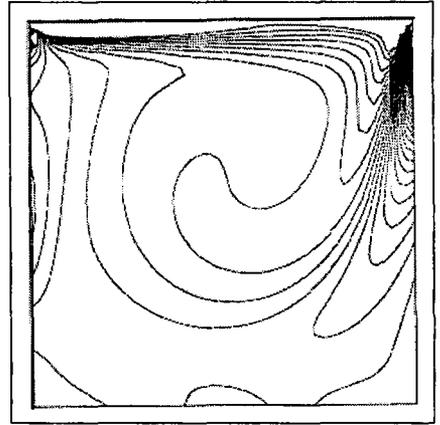


Figure 7. Isovaleurs de ω : cas Navier-Stokes. $Re = 400$, maillage 40×40

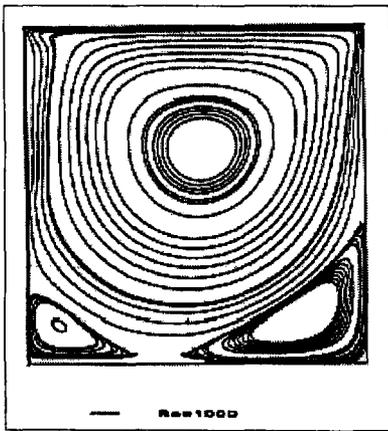


Figure 8. Lignes de courant : cas Navier-Stokes. $Re = 1000$, maillage 50×50

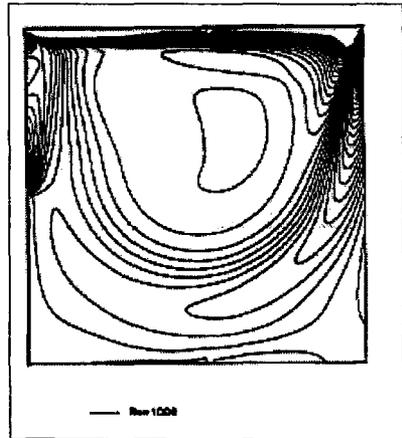


Figure 9. Isovaleurs de ω : cas Navier-Stokes. $Re = 1000$, maillage 50×50

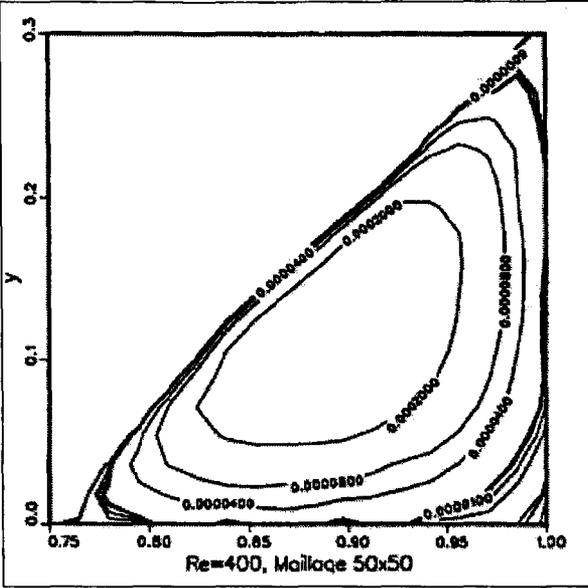


Figure 10. Recirculation coin droit. $Re = 400$

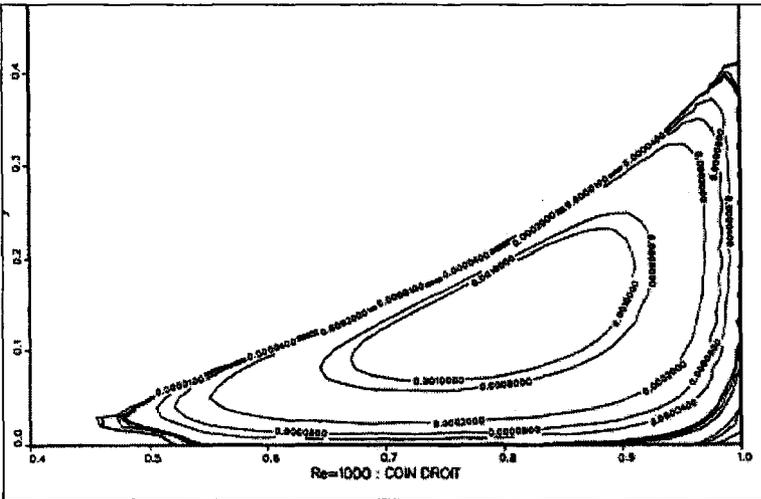


Figure 11. Recirculation coin droit. $Re = 1000$

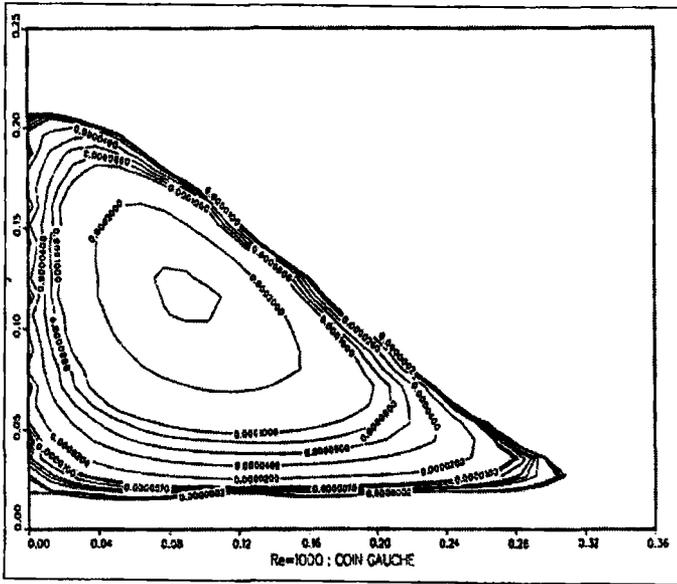


Figure 12. Recirculation coin gauche. $Re = 1000$

On observe :

- décentrage du tourbillon primaire, noté P, dû aux forces d'inertie, qui sont représentées par le terme convectif ;
- la naissance de deux tourbillons secondaires situés dans le coin inférieur gauche et le coin inférieur droit, notés respectivement BL et BR, ceci dès les plus bas nombres de Reynolds ;
- la recirculation inférieure droite (BR) se développe plus vite que celle du côté inférieur gauche (BL).

Nous prenons comme référence les résultats dus à Ghia *et al.* ([GHI 89]) que nous reportons dans le tableau 3.

Pour pouvoir faire une comparaison, nous reportons nos résultats dans le tableau 4. Après avoir examiné les deux tableaux, nous pouvons conclure que nos résultats sont en assez bon accord avec ceux de Ghia *et al.* ([GHI 89]). La différence entre les résultats peut s'expliquer par le fait qu'on utilise des niveaux de maillage différents.

Dans le tableau 5 nous présentons les résultats publiés par d'autres auteurs.

P	Re	100	400	1000
	ψ_{\min}	-0.103	-0.113	-0.118
	ω	-3.166	-2.294	-2.049
	x, y	0.617,0.734	0.5547,0.6055	0.5313,0.5625
BL	ψ_{\max}	1.74E-06	1.42E-05	2.31E-04
	ω	1.55E-02	5.697E-02	0.361
	x, y	0.0313,0.0391	0.0508,0.0469	0.0859,0.0781
BR	ψ_{\max}	1.25E-05	6.42E-04	1.75E-03
	ω	3.30E-02	4.33E-01	1.154
	x, y	0.9453,0.0625	0.8906,0.125	0.8594,0.1094

Tableau 3. Résultats obtenus par Ghia et al

P	Re	100	400	1000
	ψ_{\min}	-0.1029	-0.1032	-0.118
	ω	-3.157	-2.045	-2.69
	x, y	0.6206,0.724	0.551,0.6025	0.5217,0.6376
BL	ψ_{\max}	1.97E-06	1.08E-05	2.19E-04
	ω	1.58E-02	6.7E-02	0.237
	x, y	0.0344,0.0344	0.0512,0.0512	0.0869,0.1159
BR	ψ_{\max}	1.19E-05	8.18E-04	1.76E-03
	ω	5.41E-02	3.69E-01	0.646
	x, y	0.931,0.0689	0.897,0.128	0.811,0.14

Tableau 4. Résultats obtenus par Ghadi et al

Re		[HUG 93]	[KIM 85]
100	ψ_{\min}		-0.103
	ω		-3.177
	Grille		65 × 65
400	ψ_{\min}	-0.114	-0.112
	ω	-2.301	-2.260
	Grille	40 × 40	65 × 65
1000	ψ_{\min}		-0.116
	ω		-2.026
	Grille		97 × 97

Tableau 5. Résultats publiés par d'autres auteurs

6.3. Problème de la marche

Les conditions aux limites sont les suivantes :

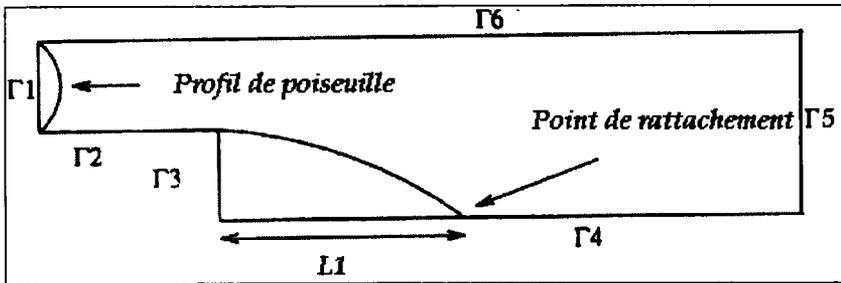


Figure 13. Géométrie du problème de la marche

$$\text{sur } \Gamma_1 : \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ et } \psi \text{ donnée}$$

$$\text{sur } \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 : \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ et } \psi = 0$$

$$\text{sur } \Gamma_6 : \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \text{ et } \psi = Cte$$

La difficulté liée à ce problème réside sur le choix des conditions aux limites, surtout à la sortie du domaine (Γ_5). Cette difficulté a fait l'objet de beaucoup de travaux, qui sont résumés par P. J. Roache [ROA 72]. Notre choix a porté sur les deux cas suivants :

1- On suppose que la sortie est suffisamment éloignée pour que l'écoulement soit établi et par la suite on impose un profil de Poiseuille à la sortie du domaine, ce qui nous permet d'avoir deux conditions aux limites sur ψ , à savoir $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ et ψ donnée à la sortie. Ce choix a été utilisé par beaucoup d'auteurs, tels [ODE 93], Kim et Moin [KIM 85] et Ghia *et al.* [GHI 89], entre autres.

2- Le deuxième cas consiste à imposer $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ et $\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$ sur Γ_5 .

REMARQUE. — On note que le deuxième cas est plus intéressant dans le cadre de notre méthode, du fait que les nœuds du maillage qui se trouvent sur Γ_5 n'interviennent pas dans le calcul de la base harmonique ; pour plus de détails voir [GHA 94]

Re	100	150	200
L1	2.28	3	3.5

Tableau 6. Résultats obtenus dans le cas de la marche

Dans ce cas test on s'intéresse particulièrement à la recirculation qui apparaît en bas de la marche, plus exactement au point de rattachement caractérisé par la distance L1.

Le tableau 6 met en évidence la dépendance de la distance L1 du nombre de Reynolds.

Pour la même géométrie Ghia *et al.* [GHI 89] ont trouvé, pour le nombre de Reynolds 150, une valeur de $L1=3.23$, ce qui est en accord avec la valeur figurant dans le tableau 6.

Les figures 13 et 14 représentent respectivement les isovaleurs de ψ et celles de ω , pour un nombre de Reynolds égal à 150, avec comme conditions aux limites à la sortie $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ et ψ donnée à la sortie.

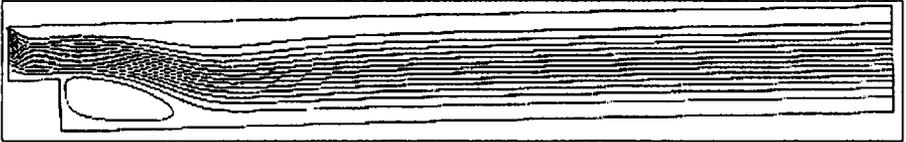


Figure 14. Isovaleurs de ψ : cas Navier-Stokes. $Re = 150$

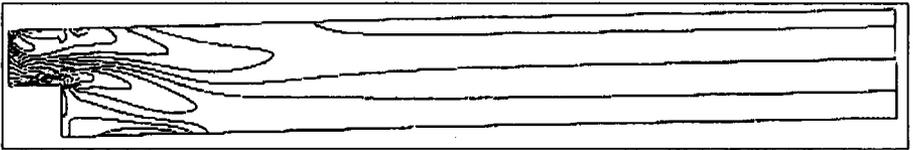


Figure 15. Les isovaleurs de ω : cas Navier-Stokes. $Re = 150$

7. Conclusion

Tel qu'observé depuis longtemps par d'autres auteurs ([GLO 79]), l'intérêt de la décomposition du tourbillon employée dans cet article, réside dans le fait qu'elle permet de récupérer les conditions aux limites sur ω en résolvant l'équation intégrale vérifiée par ω_H . On note que dans le cas du système de Stokes, notre méthode est plutôt coûteuse à cause du calcul de la base harmonique. Par contre, elle est beaucoup plus intéressante dans le cas des équations de Navier-Stokes, du fait que cette base est calculée une fois pour toutes au début de la résolution. Elle ne présente donc qu'une partie assez faible du temps de calcul global, et de plus elle peut servir à différents tests pourvu que la géométrie et le maillage restent inchangés.

Remarquons aussi que le type d'approximation basée sur des éléments finis P_1 pour toutes les variables en présence, est visiblement le plus tentant sur le plan de la mise en œuvre. Cependant, le manque d'optimalité des résultats de convergence pour cette approximation a incité les auteurs à rechercher d'autres types d'approximation. Il s'agit essentiellement d'une approximation de ω_H de degré plus élevé à l'intérieur du domaine que sur la frontière (où elle peut rester P_1 par exemple). Une analyse de cette méthode a été donnée dans [RUA 952]. Les premiers résultats numériques sur

quelques cas d'école décrits par un problème de Stokes, sont donnés dans [GHA 95] en rapport avec cette approche. Des essais numériques de celle-ci sur les problèmes résolus dans cet article parmi d'autres, sont envisagés dans un proche avenir, et devraient faire l'objet d'une future publication.

8. Bibliographie

- [ACH 92] ACHDOU Y., GLOWINSKI R., PIRONNEAU O., « Tuning the mesh of mixed method for the Stream function Vorticity formulation of the Navier-Stokes equations », *Numer. Math*, 63, 145-163, 1992.
- [BER 92] BERNARDI C., GIRAULT V., MADAY Y., « Mixed Spectral element approximation of the Navier-Stokes equations in the Stream-function and Vorticity formulation », *IMA. J. Numer. Ana.* 12, 565-608, 1992.
- [BRE 80] BREZZI F., RAPPAZ J., RAVIART P. A., « finite Dimensional Approximation of Nonlinear problems », *Numer. Math*, 36, 1-25, 1980.
- [BRE 91] BREZZI F., FORTIN M., *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, 1991.
- [BRE 76] BREZZI F., RAVIART P. A., « Mixed finite Element Methods for 4th Order Elliptic Equations », *Topics in Numerical Analysis III* (J.J.H. Miller ed.) p. 33-56, London, Academic Press, 1976.
- [BUF 91] BUFFAT M., Etude de la simulation numérique par une méthode d'éléments finis des écoulements internes subsonique instationnaires bi et tri-dimensionnels, Thèse de Doctorat ès Sciences, Lyon, France, 1991.
- [BUR 66] BURGGRAB O. R., « Analytical and Numerical studies of the structure of steady separated flows », *J. Fluid Mech* Vol. 24, p. 113-152, 1966.
- [CIA 78] CIARLET P. G., *The finite element method for Elliptic problems* North-Holland publishing company. Amsterdam, New-York, Oxford, 1978/79.
- [DHA 81] DHATT G., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Les presses de l'Université Laval Québec Maloine S. A. éditeur Paris, 1981.
- [GHA 94] GHADI F., Résolution par la méthode des éléments finis des équations de Navier-Stokes en formulation $(\psi - \omega)$, Thèse de l'Université de Saint-Etienne, France, 1994.
- [GHA 95] GHADI F., RUAS V., WAKRIM M., « A mixed finite method to solve the Stokes problem in $(\psi - \omega)$ formulation », *Hiroshima Mathematical Journal* Vol. 28, N°3, November, 1998.
- [GLO 73] GLOWINSKI R., « Approximations externes, par éléments finis de lagrange d'ordre un et deux du problème de Dirichlet pour l'opérateur biharmonique. Méthode itérative de résolution des problèmes approchés», *topics in*

Numerical Analysis (J.J.H. Miller, editor), 123-171, Academic Press, London, 1973.

- [GLO 79] GLOWINSKI R., PIRONNEAU O., « Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two dimensional Stokes problem », *SIAM Review* 121, 167-212, 1979.
- [GHI 89] GHIA K. N., OSSWALD G. A., GHIA U., « Analysis of incompressible massively separated viscous flows using unsteady Navier-Stokes equations », *Int. J. for Numer. Methods in Fluids*, Vol. 9, 1025-1050, 1989.
- [GIR 86] GIRAULT V., RAVIART P. A., *finite Element Method for Navier-Stokes equations*, Springer, Berlin Heidelberg New-York, 1986.
- [HUG 93] HUGHES T. J. R., HAUKE G., JANSEN K., JOHAN Z., « Current reflections on stabilized finite element methods for computational fluid mechanics », Proceedings of the VIII international conference on finite elements in fluids, 20-23, September 1993, p. 44-63, Barcelona, CIMNE (Pineridge Press).
- [KIM 85] KIM J., MOIN P., « Application of fractional-step method to incompressible Navier-Stokes Equations », *J. Comput. Phys*, 59, 308-323, 1985.
- [MER 74] MERCIER B., « Numerical solution of the biharmonic problem by mixed finite elements of class C^0 », *Boll. U.M.I.* 10, (4), 133-149, 1974.
- [MIY 73] MIYOSHI T., « A finite element method for the solutions of fourth order partial differential equations », *Kunamoto. J. Sci.(Math)*, 9, 87-116, 1973.
- [ODE 93] ODEN J. T., WU W., LEGAT V., « An hp adaptive strategy for finite element approximation of the Navier-Stokes equations », Proceedings of the VIII international conference on finite elements in fluid, 20-23 September 1993, p. 32-43, Barcelona, CIMNE (Pineridge Press).
- [QUA 93] QUARTAPELLE L., *Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations*, Birkhäuser, Basel, 1993.
- [ROA 72] ROACHE P. J., *Computational Fluid Dynamic*, Hermosa, Albuquerque, N. M., 87108, 1972.
- [RUA 93] RUAS V., GHADI F., « Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations by optimally approximation the Stream function and the vorticity », Proceedings of the VIII international conference on finite elements in fluids, 20-23 September 1993, p. 156-165, Barcelona, CIMNE (Pineridge Press).
- [RUA 91] RUAS V., « Variational approaches to the two-dimensional Stokes system in termes of the vorticity », *Mech. Research Communications*, Vol. 18(6), 359-366, 1991.
- [RUA 94] RUAS V., « On Formulation of Vorticity systems for a viscous incompressible flow with numerical applications », *ZAMM. Z. Angew. Math. Mech.* 74, 1, 43-55, 1994.
- [RUA 951] RUAS V., « Iterative Solution of the Stationary Incompressible Navier-Stokes Equations in Stream Function-Vorticity Formulation », *CRAS de Paris*, t. 321, 381-386, 1995.

[RUA 952] RUAS V., « Approximating Harmonic Bases in a Decoupled Solution of Viscous Flow Equations in $\psi - \omega$ Formulation », *ZAMM. Z. Angew. Math. Mech.* 75, 5, 407-408, 1995.

Fatteh Allah Ghadi est professeur habilité à la faculté des Sciences et professeur associé à l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées ENSA, université Ibn Zohr, Agadir. Ces recherches actuelles portent sur l'analyse et la recherche d'éléments finis optimaux et d'algorithmes appliqués aux problèmes issus de la mécanique de fluides.

Mohamed Wakrim est professeur habilité à la faculté des Sciences et professeur associé à l'Ecole Nationale des Sciences Appliquées ENSA, université Ibn Zohr, Agadir. Ces recherches actuelles portent sur la modélisation des phénomènes issus de la mécanique de fluides.