
Analyse numérique d'une formulation mixte de la magnétostatique linéaire

Christian Daveau

Laboratoire d'Analyse Numérique

Université Paris-Sud

F-91405 Orsay Cedex

Christian.Daveau@math.u-psud.fr

RÉSUMÉ. Dans ce papier, on étudie les équations de Maxwell dans le cadre de la magnétostatique. On établit une formulation mixte de la magnétostatique et on montre en établissant une condition inf-sup que le problème est bien posé. On approche ensuite le problème continu avec une méthode mixte conforme d'éléments finis et on étudie le problème discret. On donne ensuite des résultats numériques en les comparant à la solution analytique, pour une sphère. Puis on traite le cas où le domaine est constitué de deux régions aux propriétés magnétiques différentes.

ABSTRACT. In this paper, we study magnetostatic problem. We establish a mixed formulation in magnetostatics and we show that the problem is well-posed with Brezzi-Babuska theory, an inf-sup condition is proved. A mixed Raviart-Thomas finite element method of minimal order is used to approximate the continuous problem in $H(\text{div}) \times L^2$. Numerical tests are implemented to validate the method. First, we consider a sphere in a homogeneous source field then a domain in which the permeability is not constant.

MOTS-CLÉS : magnétostatique, éléments finis mixtes, condition inf sup.

KEYWORDS: magnetostatic, mixed finite elements, inf sup condition.

1. Introduction

De nombreux papiers ont été publiés sur l'étude du problème de la magnéto-électrostatique tridimensionnel. Dans [KIK 89] et [TROU 90], les auteurs ont établi une formulation mixte du problème et étudié l'existence et l'unicité de la solution. Dans cet article, on présente une formulation analogue mais les démonstrations, pour montrer que les problèmes continus et discrets sont bien posés, sont différentes.

Dans ce travail, on considère un domaine borné Ω supposé simplement connexe ainsi que son complémentaire Ω' , mis en présence d'un inducteur Ω^s . L'inducteur est parcouru par un courant j indépendant du temps qui crée un champ source noté h^s . A l'extérieur du domaine Ω la perméabilité μ est constante et vaut μ_0 . A l'intérieur du domaine, μ est une fonction de $x = (x_1, x_2, x_3)$ strictement positive. Le problème étudié est de trouver (b, h) tel que :

$$\text{rot } h = j, \quad \text{div } b = 0, \quad b = \mu h \text{ dans } \Omega$$

où les vecteurs h et b représentent respectivement le champ magnétique et l'induction magnétique. Sur le bord du domaine, Γ , on impose $b \cdot n = 0$.

Dans le paragraphe 2, nous introduisons quelques notations et espaces fonctionnels. Dans le paragraphe 3, nous établissons une formulation mixte avec l'induction magnétique comme inconnue principale et nous montrons que le problème est bien posé en établissant une condition "inf-sup". Dans le paragraphe 4, on approche le problème par une méthode mixte d'éléments finis et on démontre une condition inf-sup discrète. Pour finir, on donne des résultats numériques dans le paragraphe 5. Tout d'abord, on traite le cas d'une sphère plongée dans un champ homogène. A l'intérieur de la sphère la perméabilité est supposée constante. Puis on traite le cas de deux régions dans lesquelles la perméabilité est différente.

2. Notations et espaces de Hilbert

Nous notons par n une normale dirigée vers l'extérieur de Γ et nous considérons les espaces fonctionnels :

$$L^2_0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \text{ tel que } \int_{\Omega} u(x) dx = 0\}$$

équipé du produit scalaire usuel noté $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$;

$$H(\text{div}; \Omega) = \{u \in L^2(\Omega)^3; \text{div } u \in L^2(\Omega)\}$$

muni du produit scalaire $\|u\|_{H(\text{div}; \Omega)} = (\|u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\text{div } u\|_{L^2(\Omega)}^2)^{1/2}$;

$$H(\text{rot}; \Omega) = \{u \in (L^2(\Omega))^3; \text{rot } u \in L^2(\Omega)^3\}$$

muni du produit scalaire $\|u\|_{H(\text{rot}; \Omega)} = (\|u\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\text{rot } u\|_{L^2(\Omega)^3}^2)^{1/2}$;

$$H_0(\text{div}; \Omega) = \{u \in H(\text{div}; \Omega); u \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

$$H(\text{rot}^0; \Omega) = \{u \in H(\text{rot}; \Omega); \text{rot } u = 0 \text{ dans } \Omega\}.$$

3. Formulation mixte de la magnéto-statique linéaire

Nous pouvons écrire le problème de la magnéto-statique avec l'induction magnétique comme variable :

$$\text{rot } \nu b = j \text{ dans } \Omega,$$

$$\text{div } b = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$b \cdot n = 0 \text{ sur } \Gamma$$

où ν est la réductivité magnétique qui vérifie :

$$0 < \nu_0 \leq \nu(x) \leq m$$

avec $m \in \mathbb{R}$. D'autre part, le courant j crée le champ source h^s qui vérifie :

$$\text{rot } h^s = j,$$

$$\text{div } h^s = 0.$$

Nous allons maintenant établir la formulation mixte pour le problème de la magnéto-statique. Tout d'abord, on peut remarquer que $\text{rot } (\nu b - h^s) = 0$ dans Ω . D'après le lemme de Poincaré, comme Ω est supposé simplement connexe, il existe alors $p \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$\nu b - h^s = \text{grad } p.$$

En multipliant par une fonction test b' et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$(\nu b, b')_{(L^2(\Omega))^3} + (\text{div } b, p)_{L^2(\Omega)} = (h^s, b)_{(L^2(\Omega))^3}.$$

De la seconde équation on a :

$$(\text{div } b, p)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

La formulation faible du problème est alors :

Problème (A).

Soit h^s dans $(H^1(\mathbb{R}^3))^3$, trouver $(b, p) \in H_0(\text{div}; \Omega) \times L_0^2(\Omega)$:

$$\begin{cases} \tilde{a}(b, b') + \tilde{b}(b', p) = \tilde{f}(b) & \forall b' \in H_0(\text{div}; \Omega), \\ \tilde{b}(b, p') = 0 & \forall p' \in L_0^2(\Omega). \end{cases} \quad [1]$$

avec $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ et $\tilde{b}(\cdot, \cdot)$ deux formes bilinéaires continues définies respectivement sur $H_0(\text{div}; \Omega) \times H_0(\text{div}; \Omega)$ et $H_0(\text{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$ par :

$$\tilde{a}(b, b') = (\nu b, b')_{(L^2(\Omega))^3} ;$$

et

$$\tilde{b}(b, p) = (\text{div } b, p)_{L^2(\Omega)} ,$$

et $\tilde{f}(\cdot)$ la forme linéaire sur $H_0(\text{div}; \Omega)$ tel que :

$$\tilde{f}(b) = (h^s, b)_{(L^2(\Omega))^3} .$$

Dans la suite, on va montrer que le problème est bien posé en utilisant la théorie de Babuska-Brezzi, [BRE 91]. On va démontrer que la forme bilinéaire \tilde{a} est continue et coercive sur le noyau de \tilde{b} , et que la forme bilinéaire \tilde{b} est continue et vérifie une condition inf-sup.

REMARQUE. — On peut écrire :

$$\int_{\Omega} \text{div } b p \, dx = p \int_{\Gamma} b \cdot n \, d\sigma = 0$$

si p est une constante. Donc on n'aurait pas pu avoir la condition inf-sup avec $L^2(\Omega)$ comme espace des fonctions test pour p .

3.1. Etude du problème continu

On peut remarquer que la forme bilinéaire \tilde{b} est continue et que son noyau est :

$$\begin{aligned} N(\tilde{b}) &= \{b \in H_0(\text{div}, \Omega+); \tilde{b}(b, p) = 0, \forall p \in L_0^2(\Omega)\} \\ &= \{b \in H_0(\text{div}; \Omega); \text{div } b = 0 \text{ dans } \Omega\}. \end{aligned}$$

Nous avons le résultat suivant au sujet de la forme bilinéaire \tilde{a} .

Lemme 3.1 *La forme bilinéaire $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ définie précédemment est continue et coercive sur $N(\tilde{b})$.*

Preuve.

Nous avons d'une part :

$$|\tilde{a}(b, b')| \leq m \|b\|_{H(\text{div}; \Omega)} \|b'\|_{H(\text{div}; \Omega)} .$$

D'autre part :

$$\tilde{a}(b, b) \geq \nu_0 \|b\|_{H(\text{div}; \Omega)}^2, \forall b \in N(\tilde{b}).$$

Il reste à montrer la condition inf-sup. Nous avons le résultat suivant, [GIR 86].

Lemme 3.2 *Il existe une constante $C > 0$ telle que :*

$$\|b\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C(\|div b\|_{L^2(\Omega)} + \|rot b\|_{L^2(\Omega)^3}) \quad \forall b \in H_0(div, \Omega) \cap H(rot, \Omega).$$

Nous en déduisons alors le résultat.

Lemme 3.3 *Il existe une constante $C > 0$ tel que :*

$$\|b\|_{H(div, \Omega)} \leq C\|div b\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall b \in H_0(div, \Omega) \cap H(rot^0, \Omega).$$

On va alors pouvoir établir la condition inf-sup.

Lemme 3.4 *Il existe une constante $\beta > 0$ telle que :*

$$\sup_{b \in H_0(div, \Omega) \setminus \{0\}} \frac{\tilde{b}(b, p)}{\|b\|_{H(div, \Omega)}} \geq \beta \|p\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall p \in L_0^2(\Omega), \quad \beta > 0,$$

Preuve : Soit $p \in L_0^2(\Omega)$ et ϕ la solution du problème de Neumann :

$$\begin{cases} \Delta \phi & = & p \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} & = & 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad [2]$$

Alors on a $\phi \in H^1(\Omega)$.

Soit la fonction vectorielle $b_0 = \text{grad} \phi$. D'où $b_0 \in H_0(div; \Omega) \cap H(rot^0, \Omega)$, et on a :

$$\tilde{b}(b_0, p) = \|p\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En utilisant le lemme (3.3), on peut dire qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que :

$$\tilde{b}(b_0, p) \geq \beta \|p\|_{L^2(\Omega)} \|b_0\|_{H(div, \Omega)}.$$

Par conséquent, on peut conclure avec le théorème suivant, [BRE 91] :

Théorème 3.1 *Le Problème (A) a une unique solution dans $H_0(div; \Omega) \times L_0^2(\Omega)$.*

Nous allons utiliser une méthode mixte d'éléments finis pour approcher le problème (A).

4. Approximation du problème continu

Soit $h > 0$ le pas de la discrétisation. Nous considérons tout d'abord une triangulation régulière \mathcal{T}_h^1 du domaine Ω construite avec des tétraèdres K . Ensuite, avec tous les tétraèdres qui ont trois sommets sur Γ , on construit une triangulation \mathcal{T}_h^2 de Γ . Pour discrétiser le champ b , on utilise des éléments finis conformes dans $H(\text{div}; \Omega)$, [GIR 86]:

$$W_h = \{b_h \in H_0(\text{div}; \Omega); b_h|_K = \alpha + \beta x, \forall K \in \mathcal{T}_h^1, \alpha \in (P_0)^3, \beta \in P_0\}$$

où P_0 est l'espace des polynomes de degré inférieur ou égal à 0.

Pour le potentiel scalaire p qui se trouve dans $L_0^2(\Omega)$:

$$P_h = \{p_h \in L_0^2(\Omega), p_h|_K \in P_0, \forall K \in \mathcal{T}_h^1\}.$$

Les degrés de liberté correspondants sont alors :

$$\Sigma_f(\Omega) = \{\sigma_f(b) = \int_f b \cdot n \, d\gamma, f \text{ facette interne de } \mathcal{T}_h^1\},$$

$$\Sigma_t(\Omega) = \{\sigma_t(p) = p_T, T \text{ tétraèdre de } \mathcal{T}_h^1\},$$

Nous allons étudier le problème approché :

Problème (A_h) .

Soit h^s dans $(H^1(\mathbb{R}^3))^3$, trouver $(b, p) \in W_h \times P_h$:

$$\begin{cases} \tilde{a}(b, b') + \tilde{b}(b', p) = \tilde{f}(b) & \forall b' \in W_h, \\ \tilde{b}(b, p') = 0 & \forall p' \in P_h. \end{cases} \quad [3]$$

5. Etude du problème discret

Nous allons établir le résultat suivant.

Théorème 5.1 *Il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$\tilde{b}(b_h, p_h) = 0 \forall p_h \in P_h \Rightarrow \tilde{a}(b_h, b_h) \geq \alpha \|b_h\|_{H(\text{div}; \Omega)}^2$$

et il existe une constante positive β telle que :

$$\sup_{p_h \in W_h \setminus \{0\}} \frac{\tilde{b}(b_h, p_h)}{\|b_h\|_{H(\text{div}; \Omega)}} \geq \beta \|p_h\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall p_h.$$

Ainsi le problème (A_h) a une unique solution.

Preuve. Comme $W_h \subset H_0(\text{div}; \Omega)$, la coercivité de \tilde{a} est immédiate. Soit, maintenant p_h dans P_h , on lui associe $\phi \in H^1(\Omega)$ la solution de :

$$\begin{cases} \Delta \phi &= p_h \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad [4]$$

Soit $b_0 = \text{grad } \phi$. Alors $b_0 \in H_0(\text{div}; \Omega)$. Maintenant, posons $b_h = \Pi_h^1 b_0$, où Π_h^1 est l'opérateur d'interpolation associé à l'élément fini de Raviart-Thomas restreint à $H_0(\text{div}; \Omega)$. Ainsi on a :

$$\begin{aligned} \tilde{b}(b_h, p_h) &= \tilde{b}(b_0, p_h) = \|p_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \beta \|p_h\|_{L^2(\Omega)} \|b_0\|_{H(\text{div}; \Omega)}, \\ &\geq \beta \|p_h\|_{L^2(\Omega)} \|b_h\|_{H(\text{div}; \Omega)} \end{aligned}$$

car Π_h^1 est continu. Ainsi, nous avons le résultat voulu.

6. Résultats numériques

6.1. Test I : μ_r est constante

On va calculer l'induction magnétique b dans une sphère qui est plongée dans un champ magnétique h^s supposé homogène. Sur le bord de la sphère, on va imposer $b \cdot n = g$ où g est une fonction donnée. La condition de bord est modifiée mais la méthode reste identique. La solution analytique est, [DUR 68] :

$$b = \frac{3\mu}{\mu_r + 2} h^s$$

où μ_r est la perméabilité relative dans la sphère. Nous définissons les erreurs :

$$\begin{aligned} \text{Errb} &= \left[\frac{1}{V} \int_{\Omega} \frac{|b_n - b_a|^2}{|b_a|^2} dx \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \text{Div} &= \left[\frac{1}{V} \int_{\Omega} \frac{|\text{div } b_n|^2}{|b_a/R|^2} dx \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

où b_n est la solution numérique donnée par le code. Pour cette étude, on utilise un maillage de la sphère ($R=1$. m) dont la maille moyenne est $m = .353$ m et il y a 360 tétraèdres dans Ω et 120 triangles sur Γ , (cf figure 1).

Après cette discrétisation, on obtient un système linéaire mixte que l'on résout avec l'algorithme d'Uzawa. Le tableau (1) donne les erreurs avec des valeurs différentes du μ_r dans la sphère. Il donne notamment une estimation de l'erreur sur $\text{div } b$. Dans chaque tétraèdre de la triangulation de Ω , $\text{div } b = a_1 - a_2 + a_3 - a_4$ où a_i est le flux de b sur la facette i du tétraèdre. On peut remarquer que les résultats numériques sont obtenus avec une bonne précision.

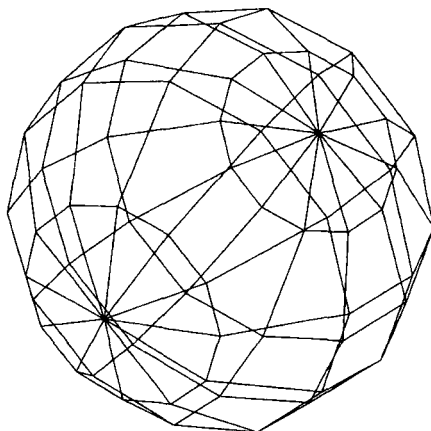


Figure 1. Maillage utilisé pour le test I

μ_r	Errb	Div	CPU
10	5.30E-04	7.44E-08	3.06
100	5.30E-04	6.85E-08	3.06
1000	5.30E-04	6.79E-08	3.06

Tableau 1. Test I: étude des erreurs

6.2. Test II: μ_r varie

On va traiter maintenant le cas où le domaine de calcul est constitué de deux régions aux propriétés magnétiques différentes. On considère une sphère de perméabilité relative $\mu_r = 10, 100, 1000$ plongée dans une boîte d'air ($\mu_r = 1$) qui elle aussi est sphérique, (cf figure 2). Cette boîte est plongée dans un champ source homogène h^s . La solution analytique à l'extérieur de la sphère est donnée dans [DUR 68]. Les conditions aux limites dues au champ source sont alors imposées sur les bords extérieurs de la boîte.

On calcule l'induction magnétique dans la boîte. Le maillage de la boîte contient 3 024 tétraèdres et il y a 6 264 triangles sur Γ , qui est le bord où l'on a les conditions aux limites.

On peut remarquer, voir tableau (2), que lorsqu'il y a une discontinuité de la perméabilité dans le domaine de calcul, les résultats numériques sont moins proches des résultats analytiques mais les résultats trouvés restent corrects. D'autre part, on peut remarquer que le temps CPU est beaucoup plus important lorsque la perméabilité augmente.

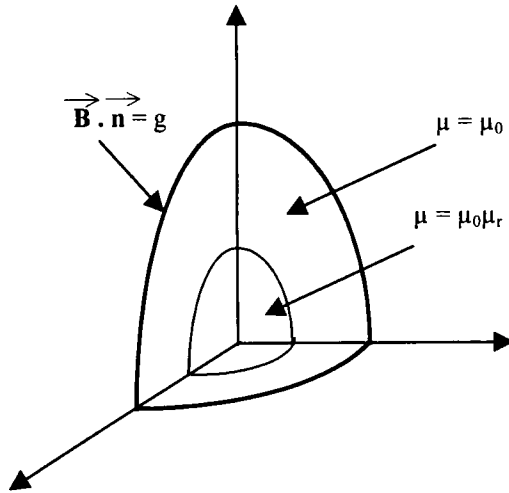


Figure 2. *Domaine discrétisé pour le test II*

μ_r	Errb	Div	CPU
10	4.85	3.75E-03	486
100	4.71	2.80E-03	1084
1000	4.71	1.00E-03	2281

Tableau 2. *Test II: étude des erreurs*

7. Conclusion

Nous avons étudié le problème de la magnéto-statique avec des conditions aux limites en utilisant la théorie de Babuska-Brezzi. Une formulation mixte a été établie où les inconnues sont l'induction magnétique et un potentiel scalaire p . La condition inf-sup du problème continu a été montrée. Dans le problème approché, l'induction magnétique b est discrétisée avec des éléments de facette et le potentiel scalaire par des éléments constants par tétraèdres. Avec ce type d'approximation, on a pu montrer la condition "inf-sup" discrète. Pour finir, des résultats numériques ont permis de valider la méthode sur un cas simple et de tester numériquement la formulation dans le cas d'un domaine de calcul constitué de deux régions ayant une perméabilité différente.

8. Bibliographie

[BRE 91] BREZZI F., FORTIN M., *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, New-York, 1991.

- [DUR 68] DURAND E., *Magnétostatique*, Masson, Paris, Dunod 1968.
- [GIR 86] GIRAULT V., RAVIART P. A., *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo, 1986.
- [KIK 89] KIKUCHI F., "Mixed formulations for finite element analysis of magnetostatic and electrostatic problems", *Japan J. Appl. Math.* 6, 1989, p 209-221.
- [TROU 90] TROUVE P., "Les méthodes variationnelles pour l'analyse et l'approximation des équations de la physique mathématique: les problèmes aux limites du type elliptique", *Revue Technique, Thomson-CSF*, vol 22, mars 1990.