
Génération de maillage et adaptation de maillage par optimisation locale

Thierry Coupez

École Supérieure des Mines de Paris,
CEMEF, umr CNRS 7635,
BP n°207, 06 904 Sophia Antipolis,
Thierry.Coupez@cemef.cma.fr

RÉSUMÉ. La méthodologie de maillage décrite dans cet article est illustrée par des exemples d'applications dans le domaine de la mise en forme des matériaux. On introduit la définition d'un maillage à partir d'un argument de volume minimal que l'on démontre. On montre qu'il est possible d'améliorer des maillages au départ non conformes. On donne une forme générique à l'algorithme optimisation global, basé sur la combinaison d'amélioration locale autour des nœuds et des arêtes. L'introduction d'un ensemble d'éléments frontières virtuels permet de coupler fortement les remaillages surfacique et volumique. La taille de maille est directement introduite dans le facteur de forme des éléments. L'optimisation du maillage conduit alors à respecter des tailles prescrites et produit donc un maillage adapté. Le cycle d'adaptation consiste à calculer une carte de maille, à adapter le maillage, recalculer la carte de maille et adapter de nouveau le maillage jusqu'à convergence. Des exemples d'adaptation statique et dynamique sont présentés.

ABSTRACT. The need of meshing in forming processes motivated the development of the meshing method which is described in this paper. A new definition for a mesh is introduced using minimal volume principle which is proven. It is shown that non conform meshes can be improved to recover a conform mesh. The generic form of the global optimization algorithm is given, based on the combination of local improvement of the neighborhood of the nodes and the edges. A layer of virtual boundary elements is introduced in order to couple the surface and the volume remeshing. A mesh size map can be introduced directly in the shape factor of elements. The mesh optimization of the modified shape factor provides implicitly the adapted mesh. Finally the adaptation cycle is presented, which consists in computing a mesh size map on the current mesh, to adapt the mesh, to compute again the mesh size map and to adapt again until a convergence state is reached. Examples in static and dynamic adaptation are given.

MOTS-CLÉS : génération de maillage, adaptation, optimisation de maillage, mise en forme, grande déformation

KEY WORDS : mesh generation, mesh adaptivity, mesh optimisation, forming, large deformation

1. Introduction

1.1. *Grandes déformations et adaptation de maillage*

Cette approche a été initialement développée pour résoudre de façon automatique l'étape de remaillage, en grandes déformations [COU92b, COU94b, COU95]. Dans ce cas, le solveur 3D grandes déformations est basé sur une formulation mixte vitesse pression utilisant une variante du mini élément, ce qui permet d'avoir des maillages triangles et tétraèdres et d'utiliser des solveurs itératifs [COU97b]. En grandes déformations, le maillage étant déformé comme la matière, il dégénère assez rapidement. Le contact matière/outil, unilatéral, géré par une technique de pénalisation, nécessite d'adapter continuellement le maillage afin de capturer les détails géométriques des surfaces en contact. En effet, les maillages des surfaces représentant la frontière des outils rigides et le maillage du domaine déformable ne coïncident pas. De plus, le maillage du domaine déformable, glisse le long de la surface de l'outil et doit donc être ajusté en conséquence. Ceci signifie que l'adaptation de maillage a d'abord lieu en surface et se propage ensuite dans le volume. Les remaillages surfaciques et volumiques sont couplés. Ceci conduit à la nécessité d'une solution complète en maillage adaptatif (incluant aussi la parallélisation du remaillage [COU96a, COU96b]), comme on le montre dans les exemples qui suivent.

La figure 1 représente la simulation du forgeage d'une pièce automobile. Le maillage, quoique relativement homogène, est périodiquement amélioré. Plus la fréquence de remaillage est élevée et moins il y a de changements. Le coût de remaillage décroît, la robustesse du solveur augmente et l'interpolation des variables d'un maillage à l'autre devient plus précise.

Cette stratégie s'oppose à celle de remaillage statique, qui consiste à refaire un maillage complet à partir d'une définition géométrique extrapolée à partir de la frontière du maillage déformé. Cette technique d'adaptation locale permet d'aller très loin en terme de déformation, jusqu'à la prédiction des bavures.

L'exemple de la figure 2 correspond à la simulation de la coupe d'un jonc de polymère qui veut représenter ce qui se passe en sortie d'une filière de granulation (qui sert à faire des grains de polymère). Le matériau se comporte comme un fluide jusqu'à la sortie de la filière où il est brutalement refroidi et sectionné à l'aide d'un couteau (visible sur la figure). On vérifie que la coupe (nécessairement 3D étant données les géométries en présence) peut être modélisée par une déformation très localisée. Le filament formé par le passage du couteau représente assez bien les défauts d'aspect observés sur des grains réels. De plus, le jet qui se forme à l'arrière du couteau correspond aussi à un défaut d'aspect asymétrique également observé. Cet exemple montre bien l'avantage en terme d'application d'une solution adaptative. On trouvera d'autres exemples d'adaptation de maillage en mise en forme des matériaux dans [COU98b, COU98a] qui utilisent la technologie de maillage développée ici.

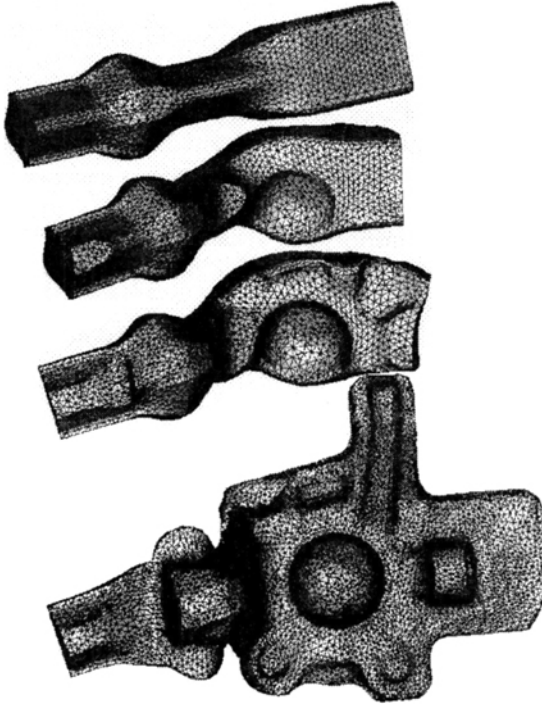


Figure 1. *Simulation du forgeage (pièce de direction), code Forge3 (TRANSVALOR) incluant les techniques de remaillage présentées dans cet article*

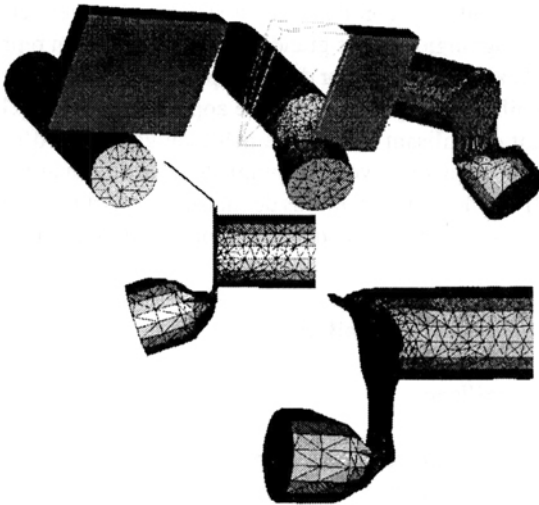


Figure 2. *Simulation de la coupe d'un jonc de polymère (procédé de granulation)*

1.2. *Technique adaptative*

L'objet de ce papier est de montrer que les outils développés sont généraux, utilisables autant pour des problèmes de maillages statiques que dynamiques. Dans ce travail on donne quelques indications fournissant une base théorique plus avérée à la technique de maillage développée par l'auteur depuis quelques années [COU94b, COU96a, COU97a].

Bien que basée sur des améliorations locales, il s'agit aussi d'une méthode de génération de maillage basée sur un principe différent des trois moteurs habituels : Delaunay, frontal ou octree.

Un maillage est redéfini de manière indirecte à l'aide d'un argument géométrique de type volume minimal. Ceci permet de proposer une définition moins géométrique et plus analytique d'un maillage. L'équivalence entre cette définition et la définition classique géométrique, est démontrée dans cet article.

L'algorithme mise en œuvre repose sur la possibilité d'opérer sur les topologies de maillage sans restriction géométrique, les maillages intermédiaires pouvant être non conformes. Les mécanismes locaux permettant d'échanger sous certaines conditions les topologies de maillage sont en partie démontrés.

Une fois décrit le principe d'optimisation, la création et la destruction de nœuds deviennent implicites à la méthode.

Le raccordement surface volume peut être simplifié à l'aide d'une nouvelle approche. Le maillage surfacique est traité implicitement comme la trace au bord du maillage volumique. Cette méthode bien que très simple, est très puissante, et est en mesure de traiter des triangulations surfaces contenant des triangles dégénérés, voire certains types de replis.

La construction d'un maillage adapté se fait soit de façon dynamique dans les calculs instationnaires, soit de façon itérative en statique. Le premier cas est bien illustré par l'approche Lagrangienne des grandes déformations bien représenté par le code Forge3. Le second cas sera illustré par des exemples. Dans ce dernier cas, plutôt que de reconstruire un maillage complet, qui est une approche possible [GEO98], on adapte le maillage courant en utilisant toujours la méthode générique d'optimisation locale. L'effet obtenu est que dans un cycle adaptatif, le coût de remaillage décroît avec les itérations puisqu'il y a de moins en moins de modifications à faire. De plus, le maillage change peu entre deux itérations lorsqu'on s'approche du maillage optimal.

2. Définition analytique d'un maillage

2.1. *Topologie de maillage*

On a besoin d'introduire différentes notions permettant de décrire ce qu'est une topologie de maillage. Ces notions sont importantes d'abord pour comprendre le principe général du fonctionnement du mailleur décrit ici, ensuite pour établir les démonstrations qui devraient donner une base théorique mieux avérée de la méthode exposée.

Un maillage est défini par un ensemble ordonné de coordonnées (le tableau des coordonnées des nœuds) et par un ensemble d'éléments, chaque élément étant défini par le numéro des nœuds formant ses sommets. La connectivité et les propriétés s'y rattachant définit ce qui sera dit : une topologie du maillage. Elle peut être traitée indépendamment des coordonnées qui y sont associées ou non. L'objet de cette partie est de définir précisément ce que sont les propriétés des topologies de maillage et de définir ce qu'est un maillage.

Soit donc $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ un ensemble fini de nœuds réduit simplement à un ensemble de numéros. Soit $\mathcal{P}_D(\mathcal{N})$ l'ensemble des parties de \mathcal{N} composées de D nœuds différents et qui forme donc l'ensemble de tous les éléments possibles qui peuvent être construits sur \mathcal{N} .

On définit \mathcal{T} , une topologie de maillage, comme un ensemble d'éléments, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}_D(\mathcal{N})$, vérifiant certaines propriétés données ci-après. On définit l'ensemble des nœuds de \mathcal{T} comme le sous-ensemble de nœuds atteint par ses éléments :

$$\mathcal{N}(\mathcal{T}) = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} T$$

On ne considère désormais que des topologies de maillages simpliciales, c'est-à-dire celles associées aux triangulations de d -simplexes (i.e. segment, triangles, tétraèdres,...) composés de $D = d + 1$ sommets. Chaque élément T de \mathcal{T} possède un bord ∂T défini par l'ensemble des sous-ensembles de $D - 1$ nœuds de T (pour un d -simplexe l'ensemble des $(d-1)$ -simplexes qui peuvent être construits à partir des sommets du simplexe : les 3 arêtes du triangle ou les 6 faces du tétraèdre). L'ensemble des faces de \mathcal{T} est alors :

$$\mathcal{F}(\mathcal{T}) = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \partial T.$$

On utilisera la notation suivante pour désigner l'ensemble des éléments ayant un groupe de nœuds η en commun (un nœud, une arête ou une face) :

$$\mathcal{T}(\eta) = \{T \in \mathcal{T}, \eta \subset T\}$$

On pose enfin la définition suivante indépendante des coordonnées de maillage :

Définition 1 *\mathcal{T} est une topologie de maillage si*

$$(\text{card}(\mathcal{T}(F)) \leq 2, \forall F \in \mathcal{F})$$

sa frontière est alors :

$$\partial \mathcal{T} = \{F \in \mathcal{F}, \text{card}(\mathcal{T}(F)) = 1\}$$

Cette définition, associée à une propriété géométrique forte, permet de traiter la génération de maillage comme un problème d'optimisation pouvant être traité localement.

2.2. Théorème du volume minimal

Dans cette partie, on construit une relation utilisable entre topologie de maillage et maillage véritable. Il faut pour cela associer des coordonnées aux nœuds de la topologie à l'aide d'une application de l'ensemble des nœuds de la topologie dans \mathbb{R}^d :

$$X : \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}^d (d = 2, 3).$$

On désigne par $X(T)$, l'ensemble des D sommets associés à chaque élément de \mathcal{T} et on note Ω_T le d -simplexe défini comme l'enveloppe convexe de ces D points. Un ensemble (\mathcal{T}, X) n'engendre pas forcément un maillage et c'est l'objet du résultat suivant de préciser dans quelles conditions ceci est réalisé. Toutefois, cet ensemble génère un domaine $\Omega(\mathcal{T}, X)$ et le bord de la topologie génère une surface $\Gamma(\partial\mathcal{T}, X)$:

$$\Omega(\mathcal{T}, X) = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \Omega_T$$

$$\Gamma(\partial\mathcal{T}, X) = \bigcup_{F \in \partial\mathcal{T}} \Gamma_F$$

$\Gamma(\partial\mathcal{T}, X)$ peut être différent de $\partial\Omega(\mathcal{T}, X)$ et nous allons préciser sous quelles conditions il y a bien égalité.

On considère ici le cas d'un domaine Ω à frontière polyédrique défini par une triangulation conforme de sa frontière. On peut alors caractériser toute topologie de maillage dont la frontière est imposée.

On suppose que $\Gamma(\partial\mathcal{T}, X) = \partial\Omega$ et que \mathcal{T} est une topologie orientable. L'orientabilité de la topologie doit être admise comme propriété supplémentaire. Tout maillage d'un domaine régulier est orientable, au sens où il est possible de décrire un élément par une numérotation locale de ses nœuds qui induit une normale aux faces de l'élément. Les deux éléments induisent une orientation inverse de la face qu'ils partagent. Cette propriété est indépendante des coordonnées du maillage. Une topologie orientée induit deux descriptions de la face commune à deux éléments, déductibles l'une de l'autre à une permutation près.

Théorème 2.1 *Soit (\mathcal{T}, X) tels que définis précédemment, \mathcal{T} est supposée orientable. On suppose que $(\partial\mathcal{T}, X)$ engendre une triangulation conforme de la frontière d'un domaine Ω (i.e. $\Gamma(\partial\mathcal{T}, X) = \partial\Omega$). Alors*

(a): $\sum_{T \in \mathcal{T}} |\Omega_T| \geq |\Omega|$

(b): (\mathcal{T}, X) engendre un maillage de Ω si et seulement si :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} |\Omega_T| = |\Omega|$$

et

$$|\Omega_T| > 0 \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

Démonstration

(a):

on note par $|\Omega|$ le volume du domaine Ω , la frontière étant supposée régulière (continue, Lipschitzienne) il est donné par :

$$|\Omega| = \int_{\Omega} dx = \int_{\Omega} \frac{1}{d} \operatorname{div} x \, dx = \frac{1}{d} \int_{\partial\Omega} x \cdot n \, dx$$

n étant la normale extérieure du domaine. Si $(\partial\mathcal{T}, X)$ définit une triangulation (orientée) de la frontière alors on a :

$$\int_{\partial\Omega} x \cdot n \, dx = \sum_{F \in \partial\mathcal{T}} \int_{\Gamma_F} x \cdot n \, d\gamma$$

On a ensuite $\sum_{T \in \mathcal{T}} | \Omega_T | \geq \sum_{T \in \mathcal{T}} s(T) | \Omega_T |$ pour tout choix arbitraire de $(s(T) = \pm 1, T \in \mathcal{T})$

$$\begin{aligned} d \times \sum_{T \in \mathcal{T}} s(T) | \Omega_T | &= \sum_{T \in \mathcal{T}} s(T) \sum_{F \in \partial T} \int_{\Gamma_F} x \cdot n_T \, d\gamma \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}(\mathcal{T})} \sum_{T \in \mathcal{T}(F)} s(T) \int_{\Gamma_F} x \cdot n_T \, d\gamma \\ &= \sum_{F \in \mathcal{F}(\mathcal{T})} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}(F)} s(T) n_T \cdot n_F \right) \int_{\Gamma_F} x \cdot n_F \, d\gamma \end{aligned}$$

n_F étant une normale à la face choisie arbitrairement si la face est intérieure (i.e.: partagée par 2 éléments), choisie comme étant orientée vers l'extérieur du domaine si elle est au bord.

On suppose ici que la topologie de maillage est orientable au sens suivant :

$$\exists (s(T) = \pm 1, T \in \mathcal{T})$$

tel que :

$$\left(\sum_{T \in \mathcal{T}(F)} s(T) n_T \cdot n_F \right) = 0$$

pour toute face intérieure,

$$s(T) n_T \cdot n_F = 1$$

pour toute face frontière ($F \in \partial\mathcal{T}$).

Dans ce cas toutes les contributions sur les faces intérieures s'éliminent et il ne reste que les contributions des faces frontières :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} |\Omega_T| \geq \frac{1}{d} \sum_{F \in \partial \mathcal{T}} \int_{\Gamma_F} x \cdot n_F \, d\gamma = |\Omega|$$

ce qui termine la démonstration du (a).

(b):

Il faut montrer que $\sum_{T \in \mathcal{T}} |\Omega_T| = |\Omega|$ et $|\Omega_T| > 0 \, \forall T \in \mathcal{T}$ impliquent un maillage de

Ω . C'est-à-dire que la réunion des éléments recouvre exactement Ω et qu'il n'y a pas d'intersection autre que par les sommets, les arêtes ou les faces. La difficulté est de démontrer que l'on ne peut pas être dans la situation de gauche de la figure mais bien toujours dans le cas de droite.

Considérons le domaine formé par la réunion des simplexes.

$$\tilde{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}} \Omega_T$$

Par construction la frontière du domaine est dans l'adhérence de ce domaine :

$$\partial \Omega \subset \bar{\tilde{\Omega}}$$

Par définition, tout point de $\partial \tilde{\Omega}$ appartient au bord d'un simplexe. Il suffit donc d'examiner les points des faces $(\mathcal{F}(\mathcal{T}), X)$.

\mathcal{T} étant orientable, il existe une orientation (une numérotation locale des nœuds de chaque simplexe) telle que, comme précédemment, les normales aux éléments partageant une face s'opposent. Soit donc $(s(T), T \in \mathcal{T})$ le signe de chaque élément associé à cette orientation.

D'après (a) on a :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} s(T) |\Omega_T| = |\Omega|$$

et donc puisque $|\Omega_T| > 0, \forall T$:

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} |\Omega_T| = |\Omega| \Rightarrow s(T) = 1 \, \forall T \in \mathcal{T}$$

On en déduit que les normales qui sont les normales extérieures aux simplexes s'annulent. Les deux simplexes partageant une face sont donc de part et d'autre de cette face. La frontière de $\tilde{\Omega}$ est donc définie par les faces n'appartenant qu'à un seul élément. On a donc :

$$\partial \tilde{\Omega} = \partial \Omega$$

3. Optimisation de topologie de maillage

3.1. Opérateurs dans l'ensemble des topologies de maillage

La figure 3 illustre le théorème précédent. On part d'un contour donné, et on génère une topologie initiale en connectant un nœud à tous les autres. Le maillage ainsi formé n'est visiblement pas conforme (en haut à gauche de la figure). On modifie localement ce maillage en choisissant à chaque fois une configuration qui minimise l'aire des triangles. On peut voir de haut en bas et de gauche à droite quelques maillages intermédiaires, qui ne sont pas conformes mais s'approchent progressivement de la solution. La relation d'Euler Poincaré montre que le nombre de triangles ne change pas du début à la fin de ce processus. Il n'est plus possible de minimiser le volume du maillage final (en bas à droite) qui en est bien un.

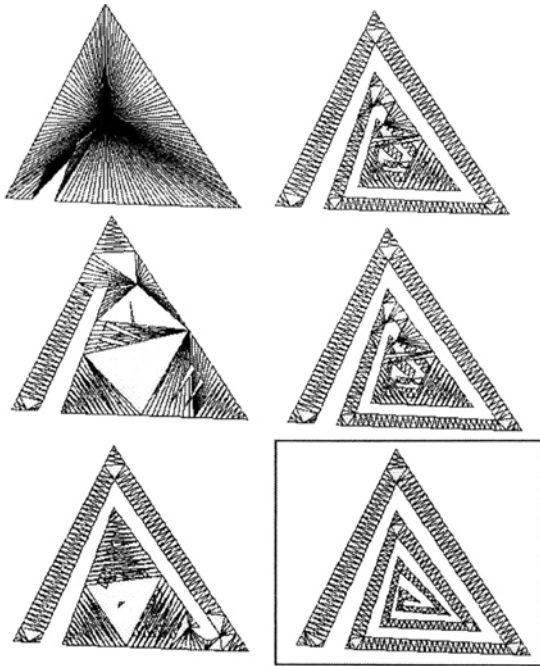


Figure 3. Génération d'un maillage sans nœud interne respectant une frontière donnée par minimisation de l'aire des triangles

Faire des modifications dans une topologie de maillage, revient à décrire des opérations d'extraction et de remplacement de type :

$$\mathcal{T} \leftarrow \mathcal{T} - a + b$$

a étant un sous-ensemble d'éléments choisis dans \mathcal{T} et b un ensemble d'éléments créés en remplacement. Ceci amène naturellement à la définition d'opérateurs dans l'ensemble des topologies de maillage. On désignera donc par \mathcal{E} l'ensemble des topologies de maillage et par $\mathcal{E}(\partial\mathcal{S})$ l'ensemble des topologies de maillage de frontière $\partial\mathcal{S}$.

Il faut décrire deux types d'opérateur : les opérateurs d'extraction et les opérateurs de génération. La localité des méthodes d'amélioration réside dans le choix des opérateurs d'extraction. Remarquons qu'un algorithme de Delaunay standard entre dans cette description, a correspondant à l'ensemble des éléments dont le cercle circonscrit contient un certain point géométrique tandis que b est l'ensemble des éléments obtenus par étoilement de ce point. De façon précise, une opération locale de type $\mathcal{T} - a + b$ suppose $a \subset \mathcal{T}$ et $b \in \mathcal{E}(\partial(a))$. De plus, ce type d'opération définit bien un opérateur à condition que le résultat obtenu soit une topologie de maillage et c'est ici la partie la plus délicate de la méthode exposée. Cela dépend uniquement du choix des sous-topologies a et b .

On considère dans la suite, les ensembles d'éléments autour d'un nœud ou d'une arête (les coquilles) : $a = \mathcal{T}(n)$ ou $a = \mathcal{T}(\{n, m\})$. Les opérateurs de génération doivent préserver la frontière interne créée par extraction pour pouvoir assurer le raccordement. On verra que cette condition, bien que nécessaire, n'est pas suffisante quand il s'agit de topologies de maillage non sous-tendues par des propriétés géométriques.

On peut générer une topologie de maillage qui respecte un bord en reliant un nœud particulier à toute les faces frontières ne le contenant pas. C'est l'opérateur d'étoilement $\mathcal{T}^*(,)$ défini comme suit :

$$\mathcal{T}^*(n, \partial\mathcal{T}) = \{T : | : T = \{\{n\} \cup F\}, : F \in \partial\mathcal{T}, n \notin F\}$$

On a le résultat suivant :

Lemme 3.1 *Dans le cas de triangles ($d=2$ et $D = 3$), et si on ne considère que des topologies de maillage sans nœud interne ($\mathcal{N} = \mathcal{N}(\partial\mathcal{S})$) alors si \mathcal{T} est une topologie de maillage alors $\mathcal{T} - \mathcal{T}(\{n\}) + \mathcal{T}^*(m, \partial(\mathcal{T}(n)))$ et $\mathcal{T} - \mathcal{T}(\{n_1, n_2\}) + \mathcal{T}^*(m, \partial(\mathcal{T}(\{n_1, n_2\})))$ sont toujours des topologies de maillage.*

La démonstration est donnée dans [COU91].

Par contre, dès que l'on rajoute des nœuds internes ce n'est plus vrai et ce n'est pas vrai, ni pour $D > 3$. En fait, il faut vérifier dans quelles conditions la réunion $A + a$ de deux topologies de maillage A et a est une topologie de maillage. On donne dans la suite des conditions plus pratiques à vérifier.

Proposition 3.2 *Soit \mathcal{T} une topologie de maillage sans bord ($\partial\mathcal{T} = \emptyset$). Soit a un sous ensemble d'éléments de \mathcal{T} , tel que ∂a est une topologie de maillage et :*

$$\tilde{\partial}a = \{F = T \cap \mathcal{N}(a), \text{card}(F) = D - 1, T \in \mathcal{T}\}.$$

Si $\tilde{\partial}a = \partial a$ alors $\mathcal{T} - a + \mathcal{T}^(n, \partial a)$ est une topologie de maillage $\forall n \in \mathcal{N}(a)$*

Démonstration :

Posons $b = \mathcal{T}^*(n, \partial a)$. Il s'agit de vérifier que :

$$\text{card}(F) \leq 2 \quad \forall F \in \mathcal{F}(\mathcal{T} - a + b).$$

Par construction tous les éléments de b sont construits à partir de nœuds de a :

$$\forall T \in b, T \subset \mathcal{N}(a).$$

Il est clair que puisque ∂a est une topologie de maillage alors b en est une (c'est la partie la plus restrictive de cette démonstration puisque la frontière d'une topologie de maillage n'en est pas forcément une, 2 tétraèdres reliés par une arête forment un ensemble correct, pourtant sa frontière présente une arête partagée par 4 faces).

S'il existe F telle que $\text{card}(\mathcal{T}(F)) > 2$, et que $\mathcal{T} - a$ et b sont des topologies de maillage, cela veut dire que F est face de $\mathcal{T} - a$ et de b .

$$\Rightarrow F \subset \mathcal{N}(a)$$

et de plus, il existe un élément T de $\mathcal{T} - a$ contenant F et donc $D - 1$ nœuds de $\mathcal{N}(a)$,

$$\Rightarrow T \cap \mathcal{N}(a) \in \tilde{\partial} a$$

puisque

$$\tilde{\partial} a = \partial a \Rightarrow F \in \partial a$$

Il est clair que par construction, toute face F de ∂a est telle que $\text{card}((\mathcal{T} - a)(F)) = 1$ et $\text{card}(b(F)) = 1$. Il s'ensuit donc une contradiction.

REMARQUE : Une topologie de maillage n'est pas sans bord, mais si on lui rajoute l'ensemble des éléments formés à partir des faces frontières connectées à un nœud fictif (le nœud 0 par exemple) alors on se retrouve bien dans les conditions énoncées ci-dessus. Cette opération sera sous-entendue dans la suite.

D'un point de vue pratique, il est plus facile de construire $\tilde{\partial} a$ que ∂a puisqu'il suffit de compter le nombre de nœuds de $\mathcal{N}(a)$ de chaque élément, ce qui se fait par marquage.

A partir d'un sous-ensemble d'élément a de \mathcal{T} on définit l'ensemble suivant :

$$\bar{a} = \{T \in \mathcal{T}, T \subset \mathcal{N}(a)\}.$$

Il est clair que si $\bar{a} \neq a$ alors $\tilde{\partial} \bar{a} \neq \partial a$. Toutefois on peut montrer que l'on n'a pas systématiquement $\tilde{\partial} \bar{a} = \partial a$.

Définissons alors un opérateur local θ de la manière suivante. Soit $\eta \subset \mathcal{N}$ et $m \in \mathcal{N}$:

$$\theta_{\eta}^m(\mathcal{T}) = \mathcal{T} - \overline{\mathcal{T}(\eta)} + \mathcal{T}^*(m, \bar{a})$$

On peut alors définir les suites suivantes :

$$\mathcal{T}^{k+1} = \theta_{\{n^k\}}^{m^k}(\mathcal{T}^k),$$

ce qui revient à travailler autour des nœuds et dans le cas suivant autour des arêtes.

$$\mathcal{T}^{k+1} = \theta_{\{n_1^k, n_2^k\}}^{m^k}(\mathcal{T}^k),$$

Ces suites sont définies dès que le choix de $(n^k, m^k), k = 1..∞$ est établi. Elles décrivent les algorithmes d’optimisation que l’on étudie dans la suite.

3.2. Génération de maillage sans nœud interne par optimisation de volume

Soit un maillage frontière donné : $(\partial\mathcal{S}, X), \mathcal{N} = \mathcal{N}(\partial\mathcal{S})$. On recherche une topologie de maillage sans nœud interne qui fournisse un maillage du domaine défini par la frontière donnée. D’après ce qui précède, cela revient à chercher dans $\mathcal{E}(\partial\mathcal{S})$ une topologie qui réalise :

$$\min_{\mathcal{T} \in \mathcal{E}(\partial\mathcal{S})} \sum_{T \in \mathcal{T}} |\Omega_T|$$

On note :

$$Volume(a) = \sum_{T \in a} |\Omega_T|$$

Définissons

$$N^*(a) = \{n \in \mathcal{N}(a), Volume(\mathcal{T}^*(n, \partial a)) = \min_{i \in \mathcal{N}(a)} Volume(\mathcal{T}^*(i, \partial a))\}$$

On s’intéresse ici à l’algorithme de génération de maillage. On initialise la topologie de maillage en connectant un de ses nœuds frontières choisi au hasard, à toutes les faces frontières données. Le ”moteur ” principal de l’optimisation est la minimisation du volume. Toutefois, le volume minimal n’est pas suffisant pour garantir l’obtention d’un maillage, il faut encore que le volume de chaque élément soit non nul. Pour cela il suffit d’optimiser la forme des éléments. Il existe plusieurs façon de calculer la forme des éléments, on choisit le facteur de forme suivant qui à l’avantage d’être peu coûteux à calculer tout en étant suffisamment discriminant :

$$c(T) = \frac{|\Omega_T|}{h(T)^d}$$

$$h(T) = \sum_{i, j \in T} \|X(i) - X(j)\|$$

Ce facteur peut être normalisé à 1 pour le simplexe équilatéral. Plutôt que de définir une fonction coût à partir du facteur de forme des éléments, on munit l’ensemble des topologies de maillage d’une relation d’ordre.

Le facteur de forme permet d'ordonner les éléments pour chaque topologie :

$$T = a_i \in a, i = 1, \dots, |a|, c(a_i) \leq c(a_{i+1})$$

Et on compare deux topologies a et b par le plus petit élément différent :

$$a \in \mathcal{E}, b \in \mathcal{E}, a < b$$

$$\iff$$

$$\exists e, \forall i < e, a_i = b_i, \text{ et } a_e < b_e$$

L'avantage de ce choix est d'abord qu'il s'applique indifféremment localement et globalement sans changement. D'autre part il permet de comparer des topologies de maillage ayant un nombre quelconque d'éléments plats, en recherchant le premier élément non dégénéré.

Amélioration par nœuds (A1):

$$\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}^*(m^0, \partial\mathcal{S}), \mathcal{N} = \mathcal{N}(\partial\mathcal{S})$$

$$(1) \quad n^k \in \mathcal{N}, a^k = \overline{\mathcal{T}^k(\{n^k\})}$$

$$(2) \quad m^k \in \mathcal{N}^*(a^k), \theta_{n^k}^{m^k}(\mathcal{T}^k) < \theta_{n^k}^i(\mathcal{T}^k), \forall i \in \mathcal{N}^*(a^k)$$

$$(3) \quad \text{si } \theta_{n^k}^{m^k}(\mathcal{T}^k) < \mathcal{T}^k \text{ alors } \mathcal{T}^{k+1} = \theta_{n^k}^{m^k}(\mathcal{T}^k)$$

Amélioration par arêtes (A2):

$$\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}^*(m^0, \partial\mathcal{S}), \mathcal{N} = \mathcal{N}(\partial\mathcal{S})$$

$$(1) \quad n_1^k \in \mathcal{N}, n_2^k \in \mathcal{N}(\mathcal{T}(n_1^k)), a^k = \overline{\mathcal{T}^k(\{n_1^k, n_2^k\})}$$

$$(2) \quad m^k \in \mathcal{N}^*(a^k), \theta_{\{n_1^k, n_2^k\}}^{m^k}(\mathcal{T}^k) < \theta_{\{n_1^k, n_2^k\}}^i(\mathcal{T}^k), \forall i \in \mathcal{N}^*(a^k)$$

$$(3) \quad \text{si } \theta_{\{n_1^k, n_2^k\}}^{m^k}(\mathcal{T}^k) < \mathcal{T}^k \text{ alors } \mathcal{T}^{k+1} = \theta_{\{n_1^k, n_2^k\}}^{m^k}(\mathcal{T}^k)$$

En fait, ces suites sont finies au sens où au bout d'un certain nombre d'itérations aucun changement ne se produit. Plus précisément, il faut en (1) parcourir tous les nœuds et ne trouver aucune optimisation locale possible. Notons par $\mathcal{T}_{\mathbf{A1}}^\infty(\mathcal{T})$ la topologie de maillage dérivée de \mathcal{T} en utilisant l'algorithme **A1** jusqu'à stagnation. On définit de la même façon $\mathcal{T}_{\mathbf{A2}}^\infty(\mathcal{T})$. L'algorithme d'optimisation combinaison de l'amélioration par nœud et par arête est simplement décrit de la manière suivante.

Algorithme général (A3):

$$\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}^*(m^0, \partial\mathcal{S}), \mathcal{N} = \mathcal{N}(\partial\mathcal{S})$$

$$\mathcal{T}^{k+1} = \mathcal{T}_{\mathbf{A2}}^\infty(\mathcal{T}_{\mathbf{A1}}^\infty(\mathcal{T}^k))$$

Dans les exemples qui suivent, on donne le temps de calcul total obtenu sur un PC (PentiumII, 300 MH). Dans tous ces cas on part de la seule triangulation frontière, un nœud étant connecté à tous les autres et on obtient bien un maillage en fin de processus.

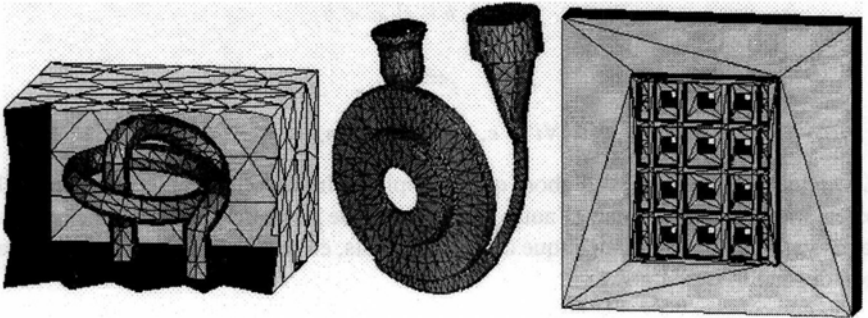


Figure 4. *Obtention d'un maillage sans nœud interne en partant d'un nœud connecté à toutes les faces données ; temps en secondes obtenu sur un PC Pentium II 300 MHz : de gauche à droite 11, 16 et 12 secondes.*

3.3. Création et destruction de nœud

On peut voir la création de nœud comme un moyen d'optimiser le maillage. La bonne stratégie est normalement de créer un maillage sans nœud interne puis d'insérer de nouveaux nœuds ensuite. Toutefois en 3D, il n'existe pas toujours de maillage sans nœud interne, et quelquefois l'existence d'un maillage passe par l'ajout d'un nœud en un endroit bien précis.

La création de nœud interne se fait de façon très simple. On ajoute un nouveau nœud dans la liste des nœuds à essayer localement. On associe à ce point les coordonnées du barycentre des nœuds présents.

$$\mathcal{N}'(a) = \mathcal{N}(a) \cup \{n'\}, \quad X(n') = \sum_{i \in \mathcal{N}(a)} X(i) / \text{card}(\mathcal{N}(a))$$

En échangeant $\mathcal{N}(a)$ par $\mathcal{N}'(a)$ dans les suites A1 et A2, on obtient le moyen de créer des nœuds internes par le bord dans A1 et de "casser" des arêtes dans A2. De plus, puisque dans A1 il est possible d'extraire l'ensemble d'éléments communs à un nœud et de le remplacer en "reconnectant" un autre nœud au bord obtenu, on élimine ce nœud s'il est interne. En résumé les nœuds sont créés détruits ou déplacés au barycentre de leurs voisins si, et seulement si, cela améliore le maillage.

4. Couplage surface volume

On s'intéresse ici à la possibilité de modifier la topologie d'une triangulation de la surface d'un domaine sans modifier ou en modifiant de façon contrôlée la géométrie qu'elle définit.

4.1. Couplage faible

Les techniques classiques consistent à redéfinir la frontière en utilisant un mailleur surfacique. On proposait précédemment une technique un peu moins radicale qui consistait à améliorer la surface du maillage en utilisant les techniques d'optimisation précédentes. La conservation de la géométrie était assurée par la conservation de la courbure, elle-même définie comme l'écart à 360° de la somme des angles aux sommets des triangles [COU92a] :

$$\pi(X(n)) = 360^\circ - \sum_{T \in \mathcal{T}(n)} \alpha_X(n, T)$$

Le raccordement était alors assuré par la création de couche d'éléments plats (ou à peu près), éliminé ensuite par le mailleur volumique [COU94a, COU94b].

Bien que cette technique soit utilisée dans la version commerciale du code Forge3, ses faiblesses sont de deux sortes. Il faut d'abord que la triangulation de la surface soit conforme. Elle peut, certes, être améliorée, mais les triangles les plus pauvres en termes de qualités, peuvent être interprétés comme des zones à forte courbure et sont donc conservés. Elle s'applique donc difficilement sur une triangulation dégénérée de la surface. Le second défaut est le raccordement faible entre surface et volume qui ne permet pas d'avoir une optimisation constante du maillage, on passe par des maillages intermédiaires de moins bonne qualité.

On propose dans la suite un moyen de coupler directement les opérations de volume et de surface en une unique boucle d'amélioration à l'aide de l'algorithme A3.

4.2. Couplage fort

Il est possible de coupler fortement la surface et le volume et finalement d'ignorer tout maillage surfacique, voire même d'admettre des triangulations frontières non conformes. On part du fait évident qu'une surface est un domaine de volume nul.

On crée un maillage "virtuel" s'appuyant sur le bord du maillage mais considéré comme extérieur. Pour cela il suffit de dupliquer "virtuellement" chaque nœud frontière et de le relier à son double, ce qui forme un ensemble de tétraèdres que nous dirons virtuels. Soit donc n un nœud frontière et n^v son double virtuel associé aux tétraèdres $\mathcal{T}^v(n^v)$ définis comme suit :

$$n \in \mathcal{N}(\partial\mathcal{T}), n^v, \mathcal{T}^v(n^v) = \mathcal{T}^*(n^*, (\partial\mathcal{T})(n))$$

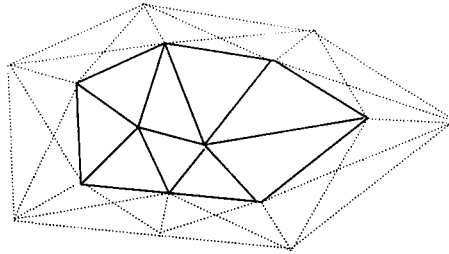


Figure 5. *les éléments virtuels (en pointillé de façon dilatée) sont obtenus en dupliquant les noeuds frontières. Tout changement doit simplement conserver un volume nul aux éléments virtuels. Sous cette condition, la triangulation frontière devient modifiable (incluant le raffinement et le déraffinement).*

La topologie de maillage ainsi formée (non conforme même après dilatation comme sur la figure 5), ferme la topologie de maillage.

Les noeuds frontières et les faces frontières de la topologie initiale sont désormais des noeuds intérieurs et des faces intérieures de cette topologie qui devient sans bord réel :

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \mathcal{T}^v$$

Réciproquement, on extrait la topologie réelle de la topologie sans bord, en éliminant les éléments virtuels qui sont tous ceux qui sont formés à partir d'au moins un noeud virtuel. On introduit donc \mathcal{N}^v l'ensemble des noeuds virtuels initialement constitué des doubles des noeuds frontières.

Soit \mathcal{T} une topologie de maillage telle que $\exists \mathcal{N}^v \subset \mathcal{N}(\mathcal{T})$ parfaitement identifié. \mathcal{T} est constituée d'une partie réelle et d'une partie virtuelle définies simplement par :

$$\mathcal{T}^v = \{T \in \mathcal{T}, T \cap \mathcal{N}^v \neq \emptyset\}$$

et

$$\mathcal{T}^r = \mathcal{T} - \mathcal{T}^v$$

Dans les suites associées aux algorithmes A1 et A2, le bord des topologies générées ne change pas $\partial \mathcal{T}^k = \partial \mathcal{T}^0$. En utilisant la topologie complétée, $(\partial \mathcal{T}^k)^r$ peut changer sans que $\partial \mathcal{T}^k$ ne change.

L'ensemble des éléments d'un noeud $n \in \mathcal{N}, \mathcal{T}(\{n\})$, est donc fait de deux types d'élément, les éléments virtuels et les éléments réels. On fixe initialement $X(n^v) = X(n)$, le volume des éléments virtuels étant ainsi nul et donc :

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} |\Omega_T| = \sum_{T \in \mathcal{T}^r} |\Omega_T|$$

La condition d'obtention d'un maillage d'un domaine Ω peut être alors étendue de la manière suivante :

Proposition 4.1 *soit (\mathcal{T}, X) telle que $(\partial\mathcal{T}, X)$ forme une triangulation de la frontière de Ω alors (\mathcal{T}^r, X) engendre un maillage conforme de Ω si et seulement si :*

$$\sum_{T \in \mathcal{T}} |\Omega_T| = |\Omega|$$

et

$$\sum_{T \in \mathcal{T}^v(\mathcal{T})} |\Omega_T| = 0$$

On prend cette proposition comme une définition.

5. Adaptation de maillage

5.1. Carte de taille de maille et interpolation

Il s'agit ici de construire un maillage qui respecte une certaine carte de maille. Une bonne façon de représenter une carte de taille de maille dans une géométrie quelconque est encore de la définir à l'aide d'une interpolation éléments finis.

Soit donc H une carte de maille que l'on suppose définie comme une fonction de $H^1(\Omega)$. Soit $\mathcal{M} = (\mathcal{T}, \mathcal{X})$ un maillage de Ω . On désigne par \mathcal{H} l'ensemble des fonctions continues $P1$ par élément.

$$\mathcal{H}_h = \{H_h \in C^0(\Omega), H_h|_{\Omega_T} \in P^1(\Omega_T), \forall T \in \mathcal{T}\}$$

Soit donc $H_h \in \mathcal{H}_h$ l'interpolée de H et définie par $H_h(X(i))$, $i \in \mathcal{N}(\mathcal{T})$. On a alors :

$$\|H_h - H\|_{L^2(\Omega)} = O(h^2)$$

La taille naturelle d'un élément est son diamètre ou de façon équivalente, la longueur moyenne de ses arêtes. La taille du maillage en un point quelconque du domaine est normalement définie par la taille de l'élément le contenant, ce qui correspond en termes de champ à une définition P^0 par élément. Si on cherche à projeter la carte de maille continue sur les constantes par élément on trouve que :

$$H_T = \sum_{i \in \mathcal{T}} H_h(X(i)) / D$$

Il suffit donc de comparer et de minimiser l'écart entre la taille réelle de l'élément, $H(T)$, et la taille requise, H_T .

Pour cela on modifie la fonction de forme des éléments de la manière suivante :

$$C(T, H_T) = \frac{\min(|\Omega_T|, |\omega(H_T)|)}{\max(|\Omega_T|, |\omega(H_T)|)} c(T)$$

où $|\omega(H_T)|$ est le volume du simplexe équilatéral de taille H_T .

Les algorithmes **A1** et **A2** s'appliquent alors de façon inchangée, utilisant juste ce facteur de forme modifié pour ordonner les topologies de maillage. L'intérêt de passer par une représentation continue de la carte de maille, celle-ci étant fournie aux sommets du simplexe, est que la carte approchée est facilement prolongée quand des nœuds sont rajoutés. Un nouveau nœud créé au barycentre d'un sous-ensemble de nœuds est associé à la moyenne des tailles de maille correspondantes.

L'anisotropie est obtenue en introduisant une métrique dans le calcul des volumes et des longueurs du facteur de forme.

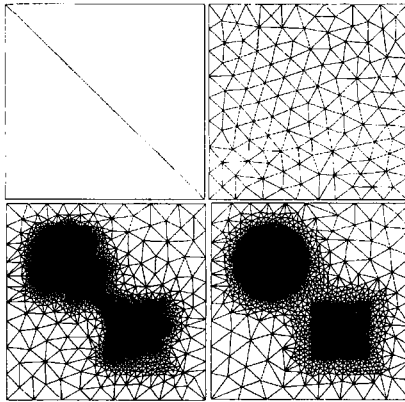


Figure 6. *Processus adaptatif: l'adaptation du maillage permet une meilleure capture de la carte de maille qui permet une adaptation de plus en plus fine*

Tout ceci est cohérent avec un solveur éléments finis du premier ordre. Dans ce cas un estimateur d'erreur fournit au mieux une indication par élément, ce qui conduit à prédire une taille uniforme par élément. On montre cela sur la figure 6. Sur le premier maillage qui ne comporte que 2 triangles, le gradient de H_h n'est représenté que par 2 vecteurs. Il est donc impossible de prédire directement le dernier maillage. Plus le maillage s'adapte et plus H_h approche H .

Dans le cas dynamique, les itérations précédentes sont masquées dans la boucle en temps. Ceci est illustré dans la figure 7 où un front de forme circulaire se propage à travers le maillage. Le maillage est raffiné au passage du front et déraffiné après.

La figure 8 représente à peu près la même chose en 3D. Un front sphérique se propage à l'intérieur d'un maillage 3D d'une géométrie elle-même déjà complexe. On voit le maillage surfacique adapté à différents instants et la trace des tétraèdres dans un plan de coupe.

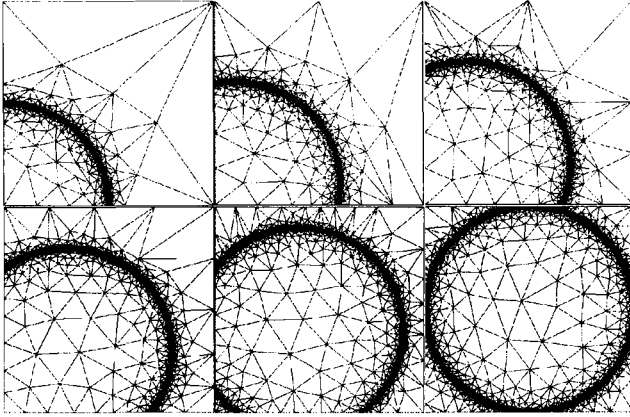


Figure 7. *Adaptation dynamique : propagation d'un front d'adaptation de maillage*

6. Conclusion

On décrit dans cet article une méthode d'optimisation locale de topologie de maillage, incluant la création et la destruction de nœuds. Cette technique utilise un unique opérateur de génération de topologie de maillage qui consiste à étoiler un nœud par rapport à une surface fermée. En appliquant cet opérateur successivement au voisinage de chaque nœud, puis à celui de chaque arête, on obtient un moyen de "visiter" un grand nombre de maillages possibles. On montre aussi comment opérer sur des topologies associées à des maillages non conformes. Dans ce cas les échanges locaux ne sont plus soumis à aucune règle géométrique mais subsistent des règles topologiques dont la vérification est délicate et pour laquelle on a donné quelques résultats.

La conformité du maillage est réintroduite à l'aide d'un argument géométrique indirect. Un maillage est de volume minimal dans l'ensemble des topologies de maillage ayant un bord donné. A partir de ce résultat prouvé, on montre des exemples de maillage utilisant un principe de minimisation du volume des éléments. La limitation du mailleur associé tient en sa phase initiale qui consiste à connecter un nœud à toutes les faces frontières. Cette initialisation est restreinte à toute triangulation connexe par face, c'est-à-dire aux surfaces fermées à une seule composante. Cette restriction ne concerne que l'application génération de maillage basée sur cette phase d'initialisation triviale.

En général, on découple complètement l'optimisation du maillage de surface de celle du maillage de volume. On a montré que l'on pouvait aborder ce problème autrement. L'optimisation de maillage à frontière imposée est étendue et la frontière est optimisée en même temps que le volume, toujours en utilisant l'opérateur d'étoilelement volumique. Ceci est réalisé par l'introduction d'éléments virtuels dont le volume est maintenu nul.

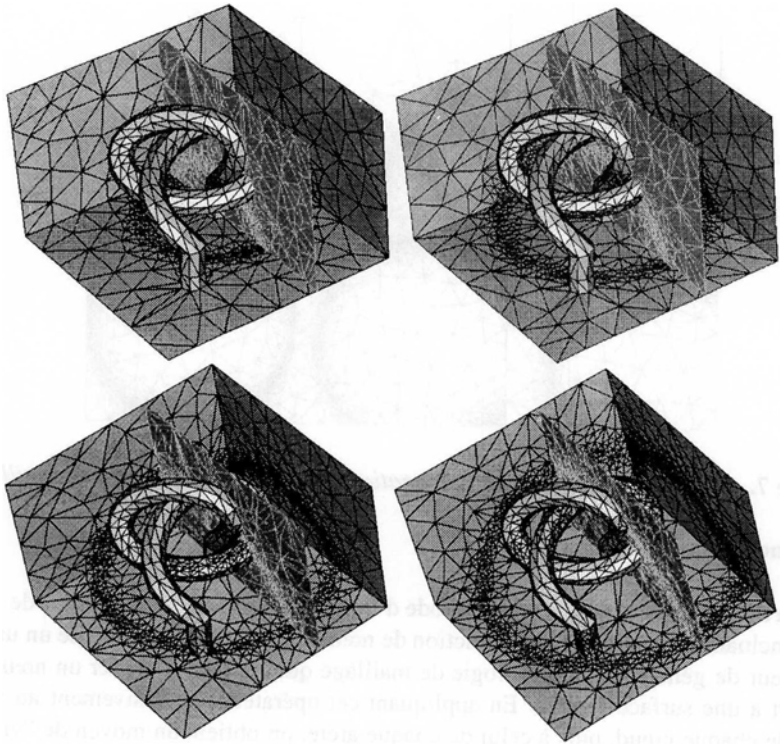


Figure 8. *Adaptation dynamique en volume : le maillage doit s'adapter au voisinage de la surface d'une sphère dont le rayon change au cours du temps. On voit l'intérieur du volume et principalement le maillage de surface trace du maillage volumique dont on a un aperçu dans un plan de coupe vertical.*

Le contrôle de la taille de maille et de la forme des mailles (anisotropie) se fait par une simple modification du critère de forme. On favorise la formation d'éléments de la taille et de la forme désirée. En fait il y a peu de restrictions sur le type de fonctions que l'on peut introduire pour mesurer la qualité d'un maillage et par là même l'optimiser (on peut par exemple optimiser le degré des nœuds). On montre enfin, sur des exemples d'adaptation, l'intérêt d'une méthode qui ne nécessite pas de reconstruire entièrement le maillage, mais permet de l'ajuster localement. Ceci est d'autant plus sensible en situation dynamique, où les solutions changent peu entre deux instants et où il est plus efficace d'adapter localement le maillage que de le refaire entièrement. C'est exactement ce qui se passe dans une application telle que le forgeage ou la granulation.

Références

- [COU91] COUPEZ T., Grandes transformations et remaillage automatique, PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, CEMEF, Sophia Antipolis, 1991.
- [COU92a] COUPEZ T., CHENOT J. L. , « Large deformations and automatic remeshing », In E. Hinton D.J.R. Owen, E. Onate, editor, *Computational Plasticity (COMPLASIII)*, p. 1077–1088, Pineridge Press, Swansea, 1992.
- [COU92b] COUPEZ T., CHENOT J. L. , « Mesh topology for mesh generation problems. application to three-dimensional remeshing », In O.C. Zienkiewicz J. L. Chenot, R.D. Wood, editor, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes (NUMIFORM)*, A.A. Balkema, 1992.
- [COU94a] COUPEZ T., Maillage et remaillage automatique 3d par une technique générale d'amélioration de topologie, In P.L. George et J.P. Pelle, editor, *vers l'automatisation des calculs éléments finis*, journée d'étude du CSMA, 1994.
- [COU94b] COUPEZ T., « A mesh improvement method for 3d automatic remeshing », In N.P. Weatherill et al., editor, *Numerical Grid Generation in Computational Fluid Dynamics and Related Fields*, p. 615–626. Pineridge Press, 1994.
- [COU95] COUPEZ T., « Automatic remeshing in three-dimensional moving mesh finite element analysis of industrial forming », In Shan-Fu Shen et al., editor, *Numerical Methods in Industrial Forming Processes - NUMIFORM 95*, p. 407–412. A.A. Balkema, 1995.
- [COU96a] COUPEZ T., « Parallel adaptive remeshing in 3d moving mesh finite element », In B.K. Soni et al., editor, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, volume 1, p. 783–792, Mississippi State University, 1996.
- [COU96b] COUPEZ T., MARIE S., DUCLOUX R., « Parallel 3d simulation of forming processes including parallel remeshing and reloading », In Désidéri et al., editor, *Numer. Meth. in Eng.*, pages 738–743, ECCOMAS, Wiley & Sons, 1996.
- [COU97a] COUPEZ T. « Mesh generation and adaptive remeshing by a local optimisation principle », In *NAFEMS world congress 97*, p. 1051–1060, NAFEMS Ltd, Glasgow, 1997.
- [COU97b] COUPEZ T., MARIE S., « From a direct solver to a parallel iterative solver in 3d forming simulation », *Int. J. of Supercomputer Applications*, 11(4):205–211, 1997.
- [COU98a] COUPEZ T. « Adaptive meshing for forming processes », In M. Cross et al, editor, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation*, U. of Greenwich, p. 3–20, Mississippi State University, 1998.
- [COU98b] COUPEZ T., FOURMENT L., CHENOT J. L., « Adaptive solutions in industrial forming process simulation », In P. Ladeveze and J. T. Oden, editors, *Advances in Adaptive Computational Methods in Mechanics*, p. 365–381. Cachan-Workshop, Elsevier, 1998.
- [GEO98] GEORGE P. L., « Automatic 3d mesh generation conforming a prescribed size map », In M. Cross et al, editor, *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulation*. U. of Greenwich, p. 21–32, Mississippi State University, 1998.