Indicateurs d'erreur pour l'équation de la chaleur

Christine Bernardi * – Brigitte Métivet **

* *Analyse Numérique, B.C. 187, C.N.R.S. & Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, F-75252 Paris cedex 05*

** *Électricité de France – D.E.R./I.M.A./M.M.N. 1 avenue du Général de Gaulle, F-92141 Clamart cedex*

bernardi@ann.jussieu.fr, Brigitte.Metivet@edf.fr

RÉSUMÉ. *Dans cet article, nous rappelons la discrétisation usuelle de l'équation de la chaleur bi- ou tri-dimensionnelle par éléments finis et schéma d'Euler implicite, ainsi que ses propriétés de stabilité. Puis nous proposons une famille d'indicateurs d'erreur spatiale, construits à partir du résidu de l'équation semi-discrétisée en temps, et nous établissons son optimalité.*

ABSTRACT. *In this paper, we recall the standard discretization of the two- or three-dimensional heat equation by finite elements and Euler's implicit scheme, together with its stability properties. Next we propose a familly of spatial error indicators which are built from the residual of the equation already discretized with respect to the time variable, and we prove that they satisfy some optimal estimates.*

MOTS-CLÉS : *Équation de la chaleur, indicateurs d'erreur, estimations a posteriori.*

KEYWORDS: *Heat equation, error indicators, a posteriori estimates.*

1. Introduction

L'adaptation de maillage est maintenant utilisée dans la plupart des discrétisations par éléments finis, puisqu'elle permet de retrouver la même précision à moindre coût grâce au choix d'une triangulation appropriée. La construction de cette triangulation repose le plus souvent sur des estimations *a posteriori*, plus exactement sur leur forme locale : les indicateurs d'erreur. Un premier calcul sur un maillage grossier permet en effet d'associer à chaque élément de la triangulation un "indicateur" que l'on peut calculer exactement à partir des données et de la première solution discrète. Le raffinement s'effectue alors localement en fonction de la taille de ces indicateurs.

Différents types d'indicateurs ont été proposés et étudiés, voir [VE2] et les références qui y sont contenues. On s'intéresse ici plus particulièrement aux indicateurs dits "par résidu", on renvoie à R. Verfürth [VE1][VE2] pour leur construction et leur analyse détaillée dans le cas de problèmes elliptiques. En particulier, ces indicateurs sont optimaux pour un grand nombre d'équations, au sens précisé dans [BMV].

Le but de cet article est d'indiquer les principales idées pour étendre aux équations paraboliques la construction et l'analyse numérique d'indicateurs d'erreur spatiale par résidu. Pour cela, nous traitons le cas modèle de l'équation de la chaleur avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes, discrétisée par éléments finis de Lagrange en espace et schéma d'Euler implicite en temps. La famille d'indicateurs d'erreur que nous proposons est basée sur les résidus locaux de l'équation déjà discrétisée en temps. Ces indicateurs ne font intervenir que les données et la solution discrétisée en temps et en espace. On prouve l'équivalence de la somme hilbertienne des indicateurs avec la partie spatiale de l'erreur exacte globale, les constantes d'équivalence étant indépendantes des paramètres de discrétisation en espace et en temps. Ces estimations sont donc optimales, toujours au sens de [BMV].

La Section II comporte une série de rappels sur la discrétisation de l'équation de la chaleur, ses propriétés de stabilité et les majorations d'erreur *a priori*. Dans la Section III, on décrit les indicateurs d'erreur et on prouve leurs propriétés optimales.

2. Présentation du problème

Soit Ω un ouvert lipschitzien borné de $\mathbb{R}^d$, $d = 2$ ou 3, et T un réel positif fixé. On considère l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega\times]0,T[, \\ u(.,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \quad t \in]0,T[, \\ u(.,0) = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \qquad [1]$$

On présente les propriétés de stabilité de ce problème, ce qui permet de déterminer les normes dans lesquelles on va travailler. Puis on étudie une semi-discrétisation en temps par schéma implicite et la discrétisation totale obtenue par l'utilisation d'éléments finis en espace.

2.1. *Le problème continu*

Pour toute donnée f somme d'une fonction intégrable sur $]0, T[$ à valeurs dans $L^2(\Omega)$ et d'une fonction de $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et pour toute donnée initiale u_0 dans $L^2(\Omega)$, le problème admet une solution unique u dans l'espace

$$L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega)),$$

avec la propriété de stabilité correspondante.

Si on suppose la donnée f dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ par exemple, on obtient en multipliant l'équation par $u(t)$ et en intégrant sur $]0, t[$ pour tout t, $0 \le t \le T$,

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t |u(s)|_{H^1(\Omega)}^2 \, ds \le \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \, ds. \qquad [2]$$

Toutefois, lorsque la donnée f appartient à $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et la valeur initiale u_0 à $H_0^1(\Omega)$, on déduit, en multipliant par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et en intégrant, la majoration plus forte suivante, pour tout t, $0 \le t \le T$,

$$|u(t)|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_0^t \|(\frac{\partial u}{\partial t})(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds \le |u_0|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds. \qquad [3]$$

Dans ce qui suit, on utilisera de façon alternative ces deux types d'inégalités : le premier sera dit "faible", le second sera dit "fort".

2.2. *Semi-discrétisation en temps*

On suppose désormais la donnée f continue sur $[0, T]$ à valeurs dans $H^{-1}(\Omega)$. On fixe un pas de temps δt tel que $T/\delta t$ soit un entier N. La semi-discrétisation en temps du problème [1] par un schéma d'Euler implicite, mène au problème suivant : trouver une suite $(u^n)_{0 \le n \le N}$ telle que

$$\begin{cases} \frac{u^{n+1} - u^n}{\delta t} - \Delta u^{n+1} = f(., (n+1)\delta t) & \text{dans } \Omega, \quad 0 \le n \le N-1, \\ u^{n+1} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \quad 0 \le n \le N-1, \\ u^0 = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \qquad [4]$$

Ce problème admet une solution unique.

La stabilité de type faible s'obtient en multipliant la première équation de [4] par u^{n+1} et en utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\|u^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta t\,|u^{n+1}|^2_{H^1(\Omega)}$$
$$\leq \frac{1}{2}\|u^{n+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta t}{2}\,|u^{n+1}|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\delta t}{2}\,\|f(.,(n+1)\,\delta t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)},$$

puis en sommant sur n. On obtient ainsi, pour $0 \leq n \leq N$,

$$\|u^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta t \sum_{m=1}^{n} |u^m|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta t \sum_{m=1}^{n} \|f(.,m\,\delta t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}. \quad [5]$$

D'autre part, en supposant la fonction f continue à valeurs dans $L^2(\Omega)$ et la fonction u_0 dans $H^1_0(\Omega)$ et en multipliant la première équation de [4] par $\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t}$, on voit que

$$|u^{n+1}|^2_{H^1(\Omega)} + \delta t\,\|\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t}\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq \frac{1}{2}|u^{n+1}|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{1}{2}|u^n|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\delta t}{2}\|\frac{u^{n+1}-u^n}{\delta t}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\delta t}{2}\|f(.,(n+1)\,\delta t)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit, pour $0 \leq n \leq N$,

$$|u^n|^2_{H^1(\Omega)} + \delta t \sum_{m=1}^{n} \|\frac{u^m - u^{m-1}}{\delta t}\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq |u_0|^2_{H^1(\Omega)} + \delta t \sum_{m=1}^{n} \|f(.,m\,\delta t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \quad [6]$$

REMARQUE. — Les derniers termes des inégalités [5] et [6] sont des sommes de Riemann qui tendent, lorsque δt tend vers 0, vers les derniers termes des inégalités [2] et [3]. En outre, si l'on introduit la fonction $u_{\delta t}$ affine par morceaux sur chaque intervalle $[n\,\delta t,(n+1)\,\delta t]$ et égale à u^n en $n\,\delta t$, on observe que les membres de gauche de [5] et [6] coïncident exactement avec ceux de [2] et [3] à condition de remplacer u par $u_{\delta t}$.

Les majorations d'erreur s'obtiennent en intégrant la première ligne du problème [1] entre $n\,\delta t$ et $(n+1)\,\delta t$ en effet, si e^n, $0 \leq n \leq N$, désigne le terme d'erreur $u(.,n\,\delta t) - u^n$, on constate que e^0 est nul et que

$$\frac{e^{n+1}-e^n}{\delta t} - \Delta e^{n+1} = \frac{1}{\delta t}\int_{n\,\delta t}^{(n+1)\,\delta t} (\frac{\partial u}{\partial t})(.,s)\,ds - (\frac{\partial u}{\partial t})(.,(n+1)\delta t).$$

Le second membre s'évalue aisément par la formule de Taylor. Il suffit alors d'appliquer [5] et [6] en remplaçant u^n par e^n pour obtenir les deux majorations d'erreur. En supposant par exemple que la solution u vérifie

$$u \in H^1(0,T;H^1_0(\Omega)) \cap H^2(0,T;H^{-1}(\Omega)), \quad [7]$$

– ou, de façon équivalente, que la donnée f est dans $H^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ –, on obtient

$$\|u(.,n\,\delta t)-u^n\|^2_{L^2(\Omega)}+\delta t\sum_{m=1}^{n}|u(.,m\,\delta t)-u^m|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq\frac{1}{3}(\delta t)^2\int_0^{n\,\delta t}\|(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})(.,s)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}\,ds. \qquad [8]$$

Si l'on fait l'hypothèse plus forte que

$$u\in H^2(0,T;L^2(\Omega)), \qquad [9]$$

– ou, de façon équivalente, que la donnée f est dans $H^1(0,T;L^2(\Omega))$ –, on déduit aussi que

$$|u(.,n\,\delta t)-u^n|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$+\delta t\sum_{m=1}^{n}\|\frac{\big(u(.,m\,\delta t)-u^m\big)-\big(u(.,(m-1)\,\delta t)-u^{m-1}\big)}{\delta t}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq\frac{1}{3}(\delta t)^2\int_0^{n\,\delta t}\|(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})(.,s)\|^2_{L^2(\Omega)}\,ds. \qquad [10]$$

Pour conclure, on observe que le problème [4] admet la formulation variationnelle suivante : trouver une suite $(u^n)_{0\leq n\leq N}$, avec u^0 égal à u_0 et u^n appartenant à $H^1_0(\Omega)$, $1\leq n\leq N$, telle que, pour $0\leq n\leq N-1$,

$$\forall v\in H^1_0(\Omega),\quad (u^{n+1},v)+\delta t\,a(u^{n+1},v)=(u^n,v)+\delta t\,\big(f(.,(n+1)\delta t),v\big), \qquad [11]$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et son extension comme produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H^1_0(\Omega)$, tandis que la forme $a(.,.)$ est définie par

$$a(u,v)=\int_\Omega \mathbf{grad}\,u\,.\,\mathbf{grad}\,v\,d\mathbf{x}.$$

2.3. ***Discrétisation en temps et en espace***

On suppose maintenant que le domaine Ω est un polygone ou un polyèdre. Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille régulière de triangulations de Ω (par des triangles ou des tétraèdres), h désignant le plus grand diamètre des éléments K de $\mathcal{T}_h$. Pour un entier $k\geq 1$ et un élément K de $\mathcal{T}_h$, on définit l'espace $\mathcal{P}_k(K)$ des polynômes de degré total $\leq k$ sur K. Puis on pose

$$X_h=\big\{v_h\in H^1_0(\Omega);\ \forall K\in\mathcal{T}_h,\ v_{h\,|K}\in\mathcal{P}_k(K)\big\}. \qquad [12]$$

On note π_h un opérateur de projection sur X_h.

Le problème discret consiste à trouver une suite $(u_h^n)_{0\leq n\leq N}$ de X_h, avec u_h^0 égal à $\pi_h u_0$, telle que, pour $0 \leq n \leq N-1$,

$$\forall v_h \in X_h, \quad (u_h^{n+1}, v_h) + \delta t\, a(u_h^{n+1}, v_h) = (u_h^n, v_h) + \delta t\,(f(.,(n+1)\delta t), v_h). \quad [13]$$

Il admet une solution unique.

Comme précédemment, la première propriété de stabilité s'écrit, pour $0 \leq n \leq N$,

$$\|u_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta t \sum_{m=1}^{n} |u_h^m|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|\pi_h u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta t \sum_{m=1}^{n} \|f(., m\,\delta t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}. \quad [14]$$

Toutefois, si on suppose la donnée f continue à valeurs dans $L^2(\Omega)$, on obtient également, pour $0 \leq n \leq N$,

$$|u_h^n|^2_{H^1(\Omega)} + \delta t \sum_{m=1}^{n} \|\frac{u_h^m - u_h^{m-1}}{\delta t}\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq |\pi_h u_0|^2_{H^1(\Omega)} + \delta t \sum_{m=1}^{n} \|f(., m\,\delta t)\|^2_{L^2(\Omega)}. \quad [15]$$

REMARQUE. — On choisit souvent pour π_h l'opérateur de projection orthogonale de $L^2(\Omega)$ sur X_h. Les conditions suffisantes sur la famille $(\mathcal{T}_h)_h$ pour que cet opérateur vérifie pour une constance c indépendante de h

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad |\pi_h v|_{H^1(\Omega)} \leq c\,|v|_{H^1(\Omega)} \quad [16]$$

sont données par M. Crouzeix et V. Thomée [CT] : l'inégalité est vraie avec une famille $(\mathcal{T}_h)_h$ uniformément régulière, toutefois cette condition peut être affaiblie. Sous l'hypothèse [16], on a pour toute fonction v assez régulière :

$$\|v - \pi_h v\|_{L^2(\Omega)} + h\,|v - \pi_h v|_{H^1(\Omega)} \leq c\,h^{s+1}\,\|v\|_{H^{s+1}(\Omega)}, \quad s \leq k. \quad [17]$$

Sous l'hypothèse [16] et si l'on suppose que la solution $(u^n)_{0\leq n\leq N}$ vérifie

$$u^n \in H^{s+1}(\Omega), \quad 0 \leq s \leq k,$$

la première estimation d'erreur *a priori* s'écrit, pour $0 \leq n \leq N$ (voir par exemple [CR] pour les démonstrations) :

$$\|u^n - u_h^n\|^2_{L^2(\Omega)} + \delta t \sum_{m=1}^{n} |u^m - u_n^m|^2_{H^1(\Omega)}$$

$$\leq c\,h^{2s}(h^2 + \delta t)\big(\sum_{m=0}^{n} \|u^m\|^2_{H^{s+1}(\Omega)}\big). \quad [18]$$

On prouve la seconde majoration d'erreur de façon similaire, pour $1 \leq n \leq N$:

$$|u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \delta t \sum_{m=1}^{n} \|\frac{(u^m - u_h^m) - (u^{m-1} - u_h^{m-1})}{\delta t}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leq c\, h^{2s}\big(\|u^n\|_{H^{s+1}(\Omega)}^2 + \delta t \sum_{m=1}^{n} \|\frac{u^m - u^{m-1}}{\delta t}\|_{H^s(\Omega)}^2\big). \qquad [19]$$

Sous l'hypothèse [16] et si l'on suppose que la solution u vérifie [7] et

$$u \in L^2(0,T; H^{s+1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(0,T; H^s(\Omega)), \quad 0 \leq s \leq k,$$

on obtient l'estimation d'erreur faible complète, pour $0 \leq n \leq N$:

$$\|u(.,n\,\delta t) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t \sum_{m=1}^{n} |u(.,m\,\delta t) - u_h^m|_{H^1(\Omega)}^2$$

$$\leq c\,\big(h^{2s} + (\delta t)^2\big)\, \|u\|_{H^2(0,n\,\delta t; H^{-1}(\Omega)) \cap L^2(0,n\,\delta t; H^{s+1}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(0,n\,\delta t; H^s(\Omega))}^2. \qquad [20]$$

Si l'on suppose que l'ouvert Ω est convexe et que la solution u vérifie [9] et

$$u \in \mathcal{C}^0(0,T; H^{s+1}(\Omega)) \cap H^1(0,T; H^s(\Omega)), \qquad [21]$$

on peut également prouver l'estimation d'erreur forte, pour $1 \leq n \leq N$:

$$|u(.,n\,\delta t) - u_h^n|_{H^1(\Omega)}^2$$

$$+\delta t \sum_{m=1}^{n} \|\frac{\big(u(.,m\delta t) - u_h^m\big) - \big(u(.,(m-1)\,\delta t) - u_h^{m-1}\big)}{\delta t}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leq c\,\big(h^{2s} + (\delta t)^2\big)\, \|u\|_{H^2(0,n\,\delta t; L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(0,n\,\delta t; H^{s+1}(\Omega)) \cap H^1(0,n\,\delta t; H^s(\Omega))}^2. \qquad [22]$$

REMARQUE. — Lorsque l'ouvert Ω n'est pas convexe, la majoration [22] est encore vraie à condition de supposer la solution u dans $H^1(0,T; H^{s+1}(\Omega))$.

Il s'agit maintenant d'écrire une estimation d'erreur *a posteriori* et de définir des indicateurs d'erreur.

3. Indicateurs par résidu

Pour un entier $m \geq 0$, on pose

$$W_h = \big\{f_h \in L^2(\Omega);\ \forall K \in \mathcal{T}_h,\ v_{h\,|K} \in \mathcal{P}_m(K)\big\}, \qquad [23]$$

puis on introduit une approximation f_h de f dans $\mathcal{C}^0(0,T; W_h)$.

On rappelle les notations suivantes (qui sont identiques à celles figurant dans l'article [BMV]) : pour tout élément K de $\mathcal{T}_h$, on désigne :
par $\mathcal{S}(K)$ l'ensemble des $d-1$ faces F de K qui ne sont pas contenues dans $\partial\Omega$,
– par h_K le diamètre de K et par h_F le diamètre de F,
– par ω_K, resp. ω_F, l'union des éléments de $\mathcal{T}_h$ qui partagent au moins une $d-1$ face avec K, respectivement F,
– par Δ_K l'union des éléments dont l'intersection avec K est non vide,
– par ψ_K, respectivement ψ_F, la fonction bulle sur K, respectivement sur F,
– par P_F un opérateur de relèvement sur K de traces sur F, construit à partir d'un opérateur de relèvement fixé sur l'élément de référence.
Finalement on pose

$$\mathcal{S}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{S}(K).$$

Par analogie avec le cas stationnaire, on associe à chaque élément K de $\mathcal{T}_h$ une suite d'indicateurs $\left(\eta^n(K)\right)_{1 \le n \le N}$ par la formule

$$\eta^{n+1}(K) = h_K \, \|f_h(.,(n+1)\delta t) - \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\delta t} + \Delta u_h^{n+1}\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{S}(K)} h_F^{\frac{1}{2}} \, \| [\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial n}] \, \|_{L^2(F)}. \qquad [24]$$

Les propriétés de cette suite sont données dans les propositions qui suivent, où sont énoncées

- les majorations de types faible et fort de l'erreur de discrétisation en espace en fonction de la somme en temps et espace des indicateurs,

- une majoration de l'indicateur en fonction de l'erreur locale provenant de la discrétisation en espace, d'où l'on peut déduire des inverses locaux des majorations précédentes.

PROPOSITION 1. — *Avec la définition* [24], *on a l'estimation pour* $0 \le n \le N$

$$\|u^n - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t \sum_{m=1}^{n} |u^m - u_h^m|_{H^1(\Omega)}^2 \le c \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big(\|u_0 - \pi_h u_0\|_{L^2(K)}^2 + \delta t \sum_{m=1}^{n} \left(\eta^m(K)^2 + h_K^2 \, \|(f - f_h)(., m\,\delta t)\|_{L^2(K)}^2 \right) \Big). \qquad [25]$$

DÉMONSTRATION : l'idée est de calculer, pour toutes fonctions v dans $H_0^1(\Omega)$ et v_h dans X_h,

$$
\begin{aligned}
&(u^{n+1} - u_h^{n+1}, v) + \delta t\, a(u^{n+1} - u_h^{n+1}, v) \\
&\quad = (u^n - u_h^n, v_h) + (u^{n+1} - u_h^{n+1}, v - v_h) + \delta t\, a(u^{n+1} - u_h^{n+1}, v - v_h) \\
&\quad = (u^n - u_h^n, v) \\
&\quad + \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (f(., (n+1)\delta t) - \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\delta t} + \Delta u_h^{n+1})(\mathbf{x})(v - v_h)(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\
&\qquad\qquad - \delta t \sum_{F \in \mathcal{S}_h} \int_F [\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial n}](\tau)(v - v_h)(\tau)\, d\tau.
\end{aligned}
$$

Puis on choisit v_h égal à l'image de v par exemple par l'opérateur de projection locale de P. Clément [CL] (voir aussi [BG]) et on utilise une inégalité triangulaire sur f :

$$
\begin{aligned}
&(u^{n+1} - u_h^{n+1}, v) + \delta t\, a(u^{n+1} - u_h^{n+1}, v) - (u^n - u_h^n, v) \\
&\quad \leq c\, \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta^{n+1}(K) \|v\|_{H^1(\Delta_K)} \\
&\qquad + c\, \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \, \|(f - f_h)(., (n+1)\,\delta t)\|_{L^2(K)} \|v\|_{H^1(\Delta_K)}. \qquad [26]
\end{aligned}
$$

On prend ensuite v égal à $u^{n+1} - u_h^{n+1}$ et on en déduit

$$
\begin{aligned}
&\|u^{n+1} - u_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \delta t\, |u^{n+1} - u_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 \\
&\quad \leq \|u^n - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + c\, \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\eta^{n+1}(K)^2 + h_K^2 \, \|(f - f_h)(., (n+1)\,\delta t)\|_{L^2(K)}^2\right).
\end{aligned}
$$

Il suffit de sommer cette équation pour conclure.

PROPOSITION 2. — *Avec la définition* [24], *on a l'estimation pour* $1 \leq n \leq N$

$$
\begin{aligned}
&|u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega)}^2 + 2\, \delta t \sum_{m=1}^{n} \|\frac{(u^m - u_h^m) - (u^{m-1} - u_h^{m-1})}{\delta t}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\quad \leq c \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big(|u_0 - \pi_h u_0|_{H^1(K)}^2 \\
&\qquad + \sum_{m=1}^{n} \left(\eta^m(K)^2 + h_K^2 \, \|(f - f_h)(., m\, \delta t)\|_{L^2(K)}^2\right)\Big). \qquad [27]
\end{aligned}
$$

DÉMONSTRATION : dans l'inégalité [26], on choisit v tel que

$$
v = \frac{(u^{n+1} - u_h^{n+1}) - (u^n - u_h^n)}{\delta t}.
$$

On obtient ainsi

$$\delta t \, \| \frac{(u^{n+1} - u_h^{n+1}) - (u^n - u_h^n)}{\delta t} \|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+ |u^{n+1} - u_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 - a(u^{n+1} - u_h^{n+1}, u^n - u_h^n)$$

$$\leq c \Big(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta^{n+1}(K)^2 + h_K^2 \, \|(f - f_h)(., (n+1)\,\delta t)\|_{L^2(K)}^2) \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$|(u^{n+1} - u_h^{n+1}) - (u^n - u_h^n)|_{H^1(\Omega)}.$$

En notant que

$$a(u^{n+1} - u_h^{n+1}, u^n - u_h^n) + \frac{1}{2} |(u^{n+1} - u_h^{n+1}) - (u^n - u_h^n)|_{H^1(\Omega)}^2$$

$$= \frac{1}{2} |u^{n+1} - u_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} |u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega)}^2,$$

on en déduit

$$2\delta t \, \| \frac{(u^{n+1} - u_h^{n+1}) - (u^n - u_h^n)}{\delta t} \|_{L^2(\Omega)}^2 + |u^{n+1} - u_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)}^2$$

$$\leq |u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega)}^2 + c' \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta^{n+1}(K)^2 + h_K^2 \, \|(f - f_h)(., (n+1)\,\delta t)\|_{L^2(K)}^2).$$

Là encore, il suffit de sommer pour conclure.

REMARQUE. — Par un argument légèrement différent, on peut également obtenir la majoration :

$$|u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \delta t \sum_{m=1}^{n} \| \frac{(u^m - u_h^m) - (u^{m-1} - u_h^{m-1})}{\delta t} \|_{H^1(\Omega)}^2$$

$$\leq c \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big(|u_0 - \pi_h u_0|_{H^1(K)}^2 + \sum_{m=1}^{n} (\eta^m(K)^2 + \delta t \, \|(f - f_h)(., m\,\delta t)\|_{L^2(K)}^2) \Big).$$

La démonstration de la dernière proposition repose sur la formule :

$$\forall w \in H_0^1(\Omega), \quad (u^{n+1} - u_h^{n+1}, w) - (u^n - u_h^n, w) + \delta t \, a(u^{n+1} - u_h^{n+1}, w)$$

$$= \delta t \, ((f - f_h)(., (n+1)\delta t), w)$$

$$+ \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Big(\int_K (f_h(., (n+1)\delta t) - \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\delta t} + \Delta u_h^{n+1})(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

$$+ \sum_{F \in \mathcal{S}(K)} \int_F (\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial n})(\tau) w(\tau) \, d\tau \Big). \qquad [28]$$

PROPOSITION 3. — *Avec la définition* [24], *on a l'estimation pour* $0 \leq n \leq N-1$

$$\eta^{n+1}(K) \leq c\Big(h_K \,\|\frac{(u^{n+1}-u_h^{n+1})-(u^n-u_h^n)}{\delta t}\|_{L^2(\omega_K)}$$
$$+|u^{n+1}-u_h^{n+1}|_{H^1(\omega_K)} + h_K\,\|(f-f_h)(.,(n+1)\delta t)\|_{L^2(\omega_K)}\Big). \quad [29]$$

DÉMONSTRATION : elle est très semblable à celle du cas stationnaire, et comporte deux étapes.
1) On choisit d'abord la fonction w dans [28] égale à

$$w_K = \psi_K(f_h(.,(n+1)\delta t) - \frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\delta t} + \Delta u_h^{n+1}).$$

La propriété d'équivalence de normes, obtenue par passage à l'élément de référence :

$$\forall \varphi \in \mathcal{P}_{\sup\{k,m\}}(K), \quad \|\psi_K\,\varphi\|_{L^2(K)} \leq \|\varphi\|_{L^2(K)} \leq c\,\|\psi_K^{\frac{1}{2}}\,\varphi\|_{L^2(K)},$$

implique que

$$\|f_h(.,(n+1)\delta t) - \frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\delta t} + \Delta u_h^{n+1}\|^2_{L^2(K)}$$
$$\leq c\Big(\int_K (f_h(.,(n+1)\delta t) - \frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\delta t} + \Delta u_h^{n+1})(\mathbf{x})w_K(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\Big)$$
$$\leq c\Big(\big(\frac{(u^{n+1}-u_h^{n+1})-(u^n-u_h^n)}{\delta t}, w_K\big)$$
$$+a(u^{n+1}-u_h^{n+1}, w_K) - \big((f-f_h)(.,(n+1)\delta t), w_K\big)\Big).$$

En utilisant une inégalité inverse, on en déduit :

$$\|f_h(.,(n+1)h) - \frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\delta t} + \Delta u_h^{n+1}\|_{L^2(K)}$$
$$\leq c\Big(\|\frac{(u^{n+1}-u_h^{n+1})-(u^n-u_h^n)}{\delta t}\|_{L^2(K)}$$
$$+h_K^{-1}\,|u^{n+1}-u_h^{n+1}|_{H^1(K)} + \|(f-f_h)(.,(n+1)\delta t)\|_{L^2(K)}\Big).$$

2) En choisissant w dans [28] égal à $w_F = \psi_F\, P_F([\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial n}])$, en utilisant les équivalences

$$\forall \varphi \in \mathcal{P}_{k-1}(F), \quad \|\varphi\|_{L^2(F)} \leq c\,\|\psi_F^{\frac{1}{2}}\varphi\|_{L^2(F)}$$
$$\text{et} \quad \|\psi_F\, P_F\varphi\|_{L^2(\omega_F)} \leq c\,h_F^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{L^2(F)},$$

on obtient de la même façon

$$\| [\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial n}] \|_{L^2(F)} \leq c\, h_F^{\frac{1}{2}} \Big(\| \frac{(u^{n+1} - u_h^{n+1}) - (u^n - u_h^n)}{\delta t} \|_{L^2(\omega_K)}$$

$$+ h_K^{-1}\, |u^{n+1} - u_h^{n+1}|_{H^1(\omega_K)} + \|(f - f_h)(., (n+1)\delta t)\|_{L^2(\omega_K)}$$

$$+ \|f_h(., (n+1)\delta t) - \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\delta t} + \Delta u_h^{n+1}\|_{L^2(\omega_K)} \Big),$$

ce qui permet de conclure.

L'inégalité [29] ressemble à l'inverse local (en temps et espace) de [27]. D'autre part, en prenant le carré de l'inégalité [29], en multipliant par δt et en sommant sur n, on obtient une estimation qui ressemble à l'inverse local de [25].

REMARQUE. — On peut noter que, si la famille $(\mathcal{T}_h)_h$ est uniformément régulière,

$$\| \frac{(u^{n+1} - u_h^{n+1}) - (u^n - u_h^n)}{\delta t} \|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq c\, h^{-1}\, |u^{n+1} - u_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)} + \| \frac{(u^{n+1} - \pi_h u^{n+1}) - (u^n - \pi_h u^n)}{\delta t} \|_{L^2(\Omega)}.$$

On en déduit que

$$h\, \| \frac{(u^{n+1} - u_h^{n+1}) - (u^n - u_h^n)}{\delta t} \|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq c\, |u^{n+1} - u_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)} + c' \,\frac{h^2}{\delta t} \big(|u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega)} + |u^{n+1} - u_h^{n+1}|_{H^1(\Omega)} \big).$$

Par conséquent, sous la condition $h^2 \leq c\,\delta t$, le premier terme dans le membre de droite de [29] se comporte asymptotiquement comme la somme, sur $m = n$ et $n+1$, des erreurs $|u^m - u_h^m|_{H^1(\Omega)}$.

Lorsque, dans l'équation [1], le terme $-\Delta u$ est multiplié par un coefficient de diffusion ν, ce coefficient apparaît ainsi dans la définition des indicateurs :

$$\eta_\nu^{n+1}(K) = h_K\, \|f_h(., (n+1)\delta t) - \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\delta t} + \nu\, \Delta u_h^{n+1}\|_{L^2(K)}$$

$$+ \frac{\nu}{2} \sum_{F \in \mathcal{S}(K)} h_F^{\frac{1}{2}}\, \| [\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial n}] \|_{L^2(F)}, \qquad [30]$$

puis dans les estimations :

$$\|u^n - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu\delta t \sum_{m=1}^{n} |u^m - u_h^m|_{H^1(\Omega)}^2$$

$$\leq c \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big(\|u_0 - \pi_h u_0\|_{L^2(K)}^2$$

$$+\frac{\delta t}{\nu} \sum_{m=1}^{n} (\eta_\nu^m(K)^2 + h_K^2 \,\|(f - f_h)(.,m\,\delta t)\|_{L^2(K)}^2)\Big), \qquad [31]$$

$$\nu\,|u^n - u_h^n|_{H^1(\Omega)}^2 + 2\,\delta t \sum_{m=1}^{n} \|\frac{(u^m - u_h^m) - (u^{m-1} - u_h^{m-1})}{\delta t}\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\leq c \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \Big(\nu\,|u_0 - \pi_h u_0|_{H^1(K)}^2$$

$$+\frac{1}{\nu} \sum_{m=1}^{n} (\eta_\nu^m(K)^2 + h_K^2 \,\|(f - f_h)(.,m\,\delta t)\|_{L^2(K)}^2)\Big), \qquad [32]$$

$$\eta_\nu^{n+1}(K) \leq c\Big(h_K \,\|\frac{(u^{n+1} - u_h^{n+1}) - (u^n - u_h^n)}{\delta t}\|_{L^2(\omega_K)}$$

$$+\nu\,|u^{n+1} - u_h^{n+1}|_{H^1(\omega_K)} + h_K \,\|(f - f_h)(.,(n+1)\delta t)\|_{L^2(\omega_K)}\Big). \qquad [33]$$

On peut donc facilement en tenir compte.

Cette étude pour l'équation de la chaleur, ainsi que les résultats obtenus dans [VE2] et [BMV] pour le problème de Stokes, ont permis de définir des indicateurs locaux d'erreur (spatiale) pour le problème de Navier-Stokes traité par un schéma en temps aux caractéristiques d'ordre 1. Ces indicateurs, par résidu, ont été introduits dans le code de thermo-hydraulique N3S et au vu des tests réalisés, ils offrent un comportement numérique satisfaisant [BBLM].

4. Bibliographie

[BBLM] C. Bernardi, O. Bonnin, C. Langouët, B. Métivet, "Residual error indicators for linear problems. Extension to the Navier–Stokes equations", *Proc. Int. Conf. Finite Elements in Fluids*, Venezia, 1995, 347-356.

[BG] C. Bernardi, V. Girault, "A local regularization operator for triangular and quadrilateral finite elements", *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 35, 1998, 1893–1916.

[BMV] C. Bernardi, B. Métivet, R. Verfürth, "Analyse numérique d'indicateurs d'erreur", Rapport Interne 93025, Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1993.

[CL] P. Clément, "Approximation by finite element functions using local regularization", *RAIRO Anal. Numér.*, vol. 9, 1975, 77–84.

[CR] M. CROUZEIX, P.-A. RAVIART, "Approximation des problèmes d'évolution", Rapport Interne de l'Université de Rennes, 1982.

[CT] M. CROUZEIX, V. THOMÉE, "The stability in L_p and W_p^1 of the L_2-projection onto finite element function spaces", *Math. Comput.*, vol. 48, 1987, 521–532.

[VE1] R. VERFÜRTH, "A posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 50, 1994, 67–83.

[VE2] R. VERFÜRTH, *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*, Wiley & Teubner, 1996.