
Contact et frottement en dynamique des systèmes de corps rigides

Jean Jacques Moreau

*Laboratoire de Mécanique et Génie Civil
Université Montpellier II/CNRS, UMR 5508
Case 048, Université Montpellier II, F.34095 Montpellier cedex 5.
moreau@lmgc.univ-montp2.fr*

RÉSUMÉ. Une formulation de la dynamique de collections de corps rigides, prenant en compte le caractère unilatéral des liaisons d'impénétrabilité, le frottement sec en cas de contact et certaines lois de restitution en cas de collision est présentée. Elle débouche sur le calcul numérique de l'évolution par des algorithmes à temps discrétisés de type implicite, capables à l'heure actuelle de traiter sur micro-ordinateur des systèmes présentant plusieurs dizaines de milliers de contacts.

ABSTRACT. A formulation of the dynamics of rigid body collections, taking into account the unilateral character of non-interpenetrability constraints, dry friction at possible contact points and certain restitution laws in the event of collision is presented. It results in time-stepping algorithms of the implicit type for calculating evolution, presently enabling one to treat systems with several ten thousands of contacts on a micro-computer.

MOTS-CLÉS : contact, collisions, frottement de Coulomb, éléments discrets, éléments distincts.

KEYWORDS: contact, collisions, Coulomb friction, discrete element, distinct element.

1. Introduction

Le présent article fait suite à une conférence générale donnée au 4^e *Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, 18-21 mai 1999. Il reprend donc quelques éléments du texte inséré dans les Actes de ce Colloque [Mor 99a], mais fournit davantage d'information sur l'implémentation des techniques numériques. On a aussi renoncé à certaines simplifications faites alors dans un but "pédagogique". En revanche, l'illustration de la méthode par des applications à la *Mécanique des Granulats* n'a pas été reprise ici faute de place.

Dans des domaines d'application divers, le besoin apparaît de calculer le mouvement, ou de discuter l'équilibre, de collections de corps rigides ou déformables entre lesquels des contacts, usuellement affectés de frottement, sont susceptibles de s'établir ou de se rompre. La réflexion théorique sur de tels problèmes de Dynamique en présence de *liaisons unilatérales* remonte à E. Delassus [DEL 17], dans le premier quart de ce siècle. Quant aux techniques numériques, il faut citer le travail de pionnier de P. Cundall [Cun 71], motivé par la géomécanique.

La situation peut être qualifiée de *non régulière* pour les raisons suivantes.

Les conditions géométriques de non-interpénétration des membres du système et, éventuellement, celles de leur confinement unilatéral par des parois extérieures s'expriment par une famille d'inégalités concernant les paramètres de position. Dans la variété Q de ces paramètres, l'ensemble des positions permises, au lieu d'être une sous-variété régulière comme dans la Mécanique Analytique traditionnelle, est une région de Q dont la frontière est faite de morceaux d'hypersurfaces (des millions de tels morceaux dans les applications usuelles aux granulats) se rejoignant selon des "arêtes". Cela peut s'appeler la *non-régularité spatiale*.

La réalisation mécanique des liaisons d'imperméabilité implique des *forces de contact*, gouvernées par des lois très peu régulières. Par exemple, dans le cas le plus simple, celui d'un contact ponctuel à frottement nul, la loi consiste en la relation suivante entre le vecteur force de contact \mathbf{r} et l'*interstice* $g \geq 0$: si $g > 0$ on a $\mathbf{r} = 0$ tandis que si $g = 0$, \mathbf{r} est quelque part sur la demi-droite normale aux corps en contact. Par ailleurs, si un frottement sec est pris en compte, il introduit une relation entre la force de contact et la vitesse relative locale des corps concernés dont le graphe n'est pas une variété régulière, mais est fait de parties à première vue hétéroclites. Tout cela peut s'appeler la *non-régularité en loi*. Noter que les relations en question ne permettent d'exprimer aucune des variables concernées comme fonction univoque des autres.

Enfin, si une *collision* survient entre des corps traités comme rigides, on attend des sauts de vitesse [BRO 99] : c'est la *non-régularité temporelle*.

Dans la majorité des techniques numériques employées à ce jour, ces difficultés sont abordées au moyen d'approximations régularisantes. L'imperméabilité des corps est remplacée par des lois de répulsion suffisamment abruptes qui entrent en jeu lorsque deux d'entre eux s'approchent. De même, la loi de Coulomb est usuellement

adoucie. On est ainsi ramené à des équations différentielles justiciables de techniques numériques classiques. Mais, dans chaque cas d'espèce, un compromis doit être accepté entre l'exigence de précision et la raideur des équations approximantes. Cette raideur impose des pas de discrétisation très petits et, souvent, des inerties où des viscosités artificielles sont introduites pour assurer la stabilité numérique. L'application d'une telle stratégie de calcul à des situations proprement dynamiques demande beaucoup de précautions et de savoir-faire. Son application est moins problématique dans la recherche d'états d'équilibre ou le calcul d'évolutions quasi-statiques, indifférentes à ce que la dynamique invoquée pour passer d'un quasi-équilibre à un autre peut avoir d'artificiel.

Les techniques numériques basées sur la régularisation des liaisons d'impénétrabilité sont souvent désignées par le sigle *MD* (pour *Molecular Dynamics*, en référence à leur usage dans les simulations numériques de dynamique moléculaire [Wal 84]).

Noter que, dans des logiciels de dynamique des machines, des approximations régularisantes sont communément appliquées aussi à des liaisons bilatérales, si les fonctionnalités du programme font introduire ces liaisons dans un système mécanique antérieurement paramétrisé [Hau 89].

Dans ce dernier domaine d'applications, le nombre d'objets concernés restant modéré, une mise en équations exacte des problèmes à liaisons unilatérales reste également praticable. On cherchera à identifier des intervalles de temps sur lesquels l'ensemble des contacts effectifs demeure constant. Sur chacun de ces intervalles, le mouvement est calculé comme s'il s'agissait de liaisons bilatérales classiques, éventuellement avec frottement. On surveille les signes des composantes normales des réactions : si l'un d'entre eux devient incompatible avec l'unilatéralité, on conclut que le mouvement subséquent doit être calculé autrement. Delassus montra qu'en présence de plusieurs contacts, ceux qui cessent ne sont pas nécessairement ceux qui ont déclenché l'alerte et proposa un mode de détermination du nouveau statut des contacts n'exigeant pas l'essai de toutes les combinaisons. Aujourd'hui, les arguments de Delassus sont remplacés par ce qu'on appelle, en Analyse Non Régulière, des *problèmes de complémentarité* [Mor 63] [PFE 96].

Le frottement sec, ou tout autre phénomène impliquant des lois à seuil, peut de la même façon faire apparaître des instants critiques.

Un autre signal exigeant que les équations écrites soient reconsidérées est l'apparition d'un nouveau contact, c'est-à-dire une *collision*. Le calcul du nouvel état de vitesse exige des informations phénoménologiques sur le processus de choc. Il est facile d'en concevoir sous la forme de relations entre les vitesses avant et après le choc, mais leur conformité à la réalité reste à discuter selon les circonstances [STO 96].

L'approche décrite ci-dessus est communément désignée par le sigle *ED* (pour *Event Driven*).

Le présent exposé vise à donner une idée d'une technique numérique plus récente [Mor 86] [Mor 88b] intitulée *CD* (pour *Contact Dynamics*), basée elle aussi sur la mise

en équations exacte, mais capable au stade actuel de traiter des systèmes d'une quinzaine de milliers de solides. Elle permet de prendre en compte aussi la déformabilité des corps en présence [JEA 95] [ACA 98]. Elle incorpore des procédures très simples pour traiter les collisions, mais la validité phénoménologique de ces procédures appelle naturellement les mêmes réserves que celle des autres formalisations.

En mécanique des granulats, des géomatériaux ou des maçonneries, les simulations numériques basées sur la prise en compte individuelle des grains ou des blocs, qu'elles soient de type *MD*, *ED* ou *CD*, sont qualifiées de méthodes *DEM* (pour *Discrete Element Method* ou *Distinct Element Method*), par opposition avec la stratégie *FEM* (*Finite Element Method*) utilisée lorsqu'une loi de comportement homogénéisée a été choisie, assimilant le granulat ou la maçonnerie à un milieu continu.

Eviter que cette terminologie induise à confusion avec les travaux numériques concernant un milieu continu classique, maillé en éléments finis et soumis à des contacts unilatéraux frottants. Ces dernières études, motivées notamment par la mise en forme des matériaux, ont souvent été restreintes à des évolutions quasi-statiques, mais les problèmes dynamiques y prennent une place grandissantes (voir références dans [VOL 98]).

2. Exemple élémentaire : une particule ponctuelle en dimension 3

2.1. Confinement sans frottement : première approche

Le cas particulier suivant fournit une introduction à la méthode *CD*.

Dans l'espace rapporté aux axes galiléens Ox_1, x_2, x_3 , une particule ponctuelle Q de masse m , soumise à un champ de forces dépendant éventuellement du temps $(t, x) \mapsto X(t, x)$, est confinée dans la région $\Phi(t) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(t, x) \leq 0\}$ par une paroi matérielle ayant un mouvement imposé, d'équation $f(t, x) = 0$. L'inconnue principale de la dynamique est la fonction *vitesse* $t \mapsto u \in \mathbb{R}^3$, dont la fonction *position* $t \mapsto q$ se déduit par :

$$q(t) = q(t_0) + \int_{t_0}^t u(s) ds. \quad [1]$$

Sur tout intervalle de temps où u est suffisamment régulière (précisons : *absolument continue*), l'équation de la dynamique s'écrit :

$$m \frac{du}{dt} = X(t, q(t)) + r. \quad [2]$$

L'inconnue $r \in \mathbb{R}^3$ est la *force de liaison*, c'est-à-dire la réaction de la paroi en cas de contact. Dans cette Section, on la suppose régie par les conditions suivantes :

Le confinement dont l'effet géométrique est

$$f(t, q) \leq 0 \quad [3]$$

est supposé réalisé par *contact*,

$$f(t, q) < 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0. \quad [4]$$

On admet de plus que le contact éventuel est *sans frottement*, *i.e.*

$$f(t, q) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbf{R} : r = \lambda \nabla f(t, q) \quad [5]$$

(le *gradient* $\nabla f(t, q)$, vecteur de \mathbf{R}^3 normal à la paroi dans le sens sortant de $\Phi(t)$, sera supposé non nul). Enfin le contact est déclaré *non adhésif*,

$$\lambda \leq 0. \quad [6]$$

Le système de conditions [3] à [6] constitue une *relation*, vérifiée à tout instant, entre les inconnues q et r et en laquelle se résume dans le cas présent la totalité des informations disponibles concernant la liaison invoquée. On va voir que ces conditions ne sont pas aussi hétéroclites qu'il paraît.

Pour tout q appartenant à la surface frontière $f = 0$, la demi-droite engendrée dans \mathbf{R}^3 par le vecteur $\nabla f(t, q)$ constitue le *cône normal sortant* de la région $\Phi(t)$ au point q , noté $N_{\Phi(t)}(q)$. Il se révèle cohérent d'étendre comme suit la définition de ce cône pour tout q dans \mathbf{R}^3 : on pose $N_{\Phi(t)}(q) = \emptyset$ si $q \notin \Phi(t)$ et $N_{\Phi(t)}(q) = \{0\}$ si q est intérieur à $\Phi(t)$. Moyennant quoi on constate que le système de conditions [3] à [6] se condense en

$$-r \in N_{\Phi(t)}(q). \quad [7]$$

L'objectif traditionnel de la Mécanique Analytique, à savoir l'élimination des réactions des liaisons sans frottement, est atteint ici en rapprochant [2] et [7]: les mouvements recherchés sont les solutions de l'*inclusion différentielle*

$$X(t, q(t)) - m \frac{du}{dt} \in N_{\Phi(t)}(q(t)), \quad [8]$$

plus précisément une *inclusion intégral-différentielle*, compte tenu de [1]. Noter que cette écriture implique $q(t) \in \Phi(t)$, puisqu'autrement le second membre serait vide.

2.2. Confinement sans frottement : seconde approche

L'inclusion différentielle [8] est d'un traitement difficile, tant du point de vue analytique [Aub 84] [Mon 93] (existence et unicité éventuelle des solutions, convergence des approximations, etc.) que numérique. L'essence de la méthode *CD* est de lui substituer un équivalent plus traitable.

Pour un instant t_1 tel que $f(t_1, q(t_1)) < 0$, la permanence de [3] n'impose rien à la vitesse $u(t_1)$. Mais si $f(t_1, q(t_1)) = 0$, la vitesse à droite $u^+(t_1)$, supposée exister, vérifie nécessairement (formule des fonctions composées)

$$f'_t(t_1, q(t_1)) + u^+(t_1) \cdot \nabla f(t_1, q(t_1)) \leq 0$$

et la vitesse à gauche $u^-(t_1)$ l'inégalité opposée. Quels que soient t et q , même n'assurant pas [3], posons

$$W(t, q) : = \begin{cases} \{v \in \mathbf{R}^3 \mid f'_t(t, q) + v \cdot \nabla f(t, q) \leq 0\} & \text{si } f(t, q) \geq 0 \\ \mathbf{R}^3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme on l'a dit, l'équation différentielle de la Dynamique est, dans cette Section, entendue au sens propre, postulant l'absolue continuité de la fonction u (on exclut l'éventualité de collisions). Donc $u(t_1) = u^-(t_1) = u^+(t_1)$, élément qui, si $f(t_1, q(t_1)) = 0$, doit appartenir à la fois à $W(t_1, q(t_1))$ et à l'ensemble défini symétriquement en remplaçant \geq par \leq . C'est dire que $u(t_1)$ appartient dans ce cas au plan frontière du demi-espace fermé $W(t_1, q(t_1))$. Le cône normal au point $u(t_1)$ à ce demi-espace est la demi-droite engendrée par $\nabla f(t_1, q(t_1))$; on a vu que cette demi-droite est aussi le cône normal au point $q(t_1)$ à $\Phi(t_1)$. Par ailleurs, si $f(t_1, q(t_1)) < 0$, ces deux cônes sont trivialement égaux au singleton $\{0\}$.

L'inclusion [8] implique donc

$$X(t, q) - m \frac{du}{dt} \in N_{W(t, q)}(u). \quad [9]$$

Si $q \in \Phi(t)$, on vérifie immédiatement que $N_{W(t, q)}$, évalué en n'importe quel point u , est contenu dans $N_{\Phi(t)}(q)$. Pourvu que $q(t) \in \Phi(t)$ soit assuré, l'inclusion [9] implique donc réciproquement l'inclusion [8].

Or [9] garantit $u \in W(t, q)$, sans quoi le second membre serait vide et il est facile d'établir [Mor 88b] [Mor 99b]:

Lemme de Viabilité. Soit u , Lebesgue-intégrable sur un intervalle I d'origine t_0 et soit q construit par [1]. Si $q(t_0) \in \Phi(t_0)$ et si pour presque tout $t \in I$ on a $u(t) \in W(t, q(t))$, alors $q(t) \in \Phi(t)$ pour tout $t \in I$.

Bref, moyennant la spécification initiale $q(t_0) \in \Phi(t_0)$, [9] est équivalente à [8]. Observer que ce Lemme s'attache à l'orientation du temps : si $f(t, q) \leq 0$, l'ensemble $W(t, q)$ est constitué des valeurs de la vitesse à droite compatibles avec le maintien ultérieur de cette condition.

REMARQUE. – Le terme "viabilité" est employé plus généralement pour désigner l'obligation faite à la trajectoire d'un processus de demeurer dans un ensemble donné. On pourra trouver dans [Aub 90] un exposé de ce sujet, développé d'ailleurs dans un contexte topologique trop raffiné pour qu'un énoncé aussi élémentaire que le Lemme ci-dessus y trouve place.

2.3. Un exemple primitif d'algorithme CD

Soit $[t_i, t_f]$, de longueur h , un pas de temps ('i' comme *initial*, 'f' comme *final*). Le pas antécédent ayant livré des valeurs u_i and q_i pour les fonctions u et q à $t = t_i$, l'objectif est d'évaluer u_f et q_f . On adopte $q_m := q_i + \frac{1}{2}h u_i$ comme estimation de la position à l'instant milieu $t_m := t_i + \frac{1}{2}h$ et on discrétise [9] sous une forme *implicite* relativement à l'inconnue u_f

$$X(t_m, q_m) - \frac{m}{h}(u_f - u_i) \in N_{W(t_m, q_m)}(u_f). \quad [10]$$

Cette inclusion, réécrite

$$u_i + \frac{h}{m}X(t_m, q_m) - u_f \in N_{W(t_m, q_m)}(u_f),$$

(on omet le facteur strictement positif $\frac{h}{m}$ au second membre, puisque ce second membre est un cône) caractérise classiquement u_f comme *point proximal* de l'élément connu $u_i + \frac{h}{m}X(t_m, q_m)$ dans l'ensemble convexe fermé $W(t_m, q_m)$

$$u_f = \text{prox}(W(t_m, q_m), u_i + \frac{h}{m}X(t_m, q_m)), \quad [11]$$

de calcul immédiat dans le cas présent où W est soit un demi-espace, soit l'espace entier.

On termine le pas par

$$q_f = q_m + \frac{h}{2} u_f.$$

Cet algorithme gère automatiquement la cessation possible du contact : c'est ce qui arrive si $u_i + \frac{h}{m}X(t_m, q_m)$ tombe dans l'intérieur de $W(t_m, q_m)$.

Le maintien de la condition d'impenétrabilité [3] est également assuré, pourvu que cette dernière soit satisfaite à l'instant initial. Pour le problème théorique, on a vu que cela résulte du Lemme de Viabilité. Ici, le même argument ne se retrouve qu'à travers la discrétisation et on pourrait craindre, de pas en pas, une accumulation de violations de la condition [3]. En pratique, si h n'est pas trop grand, on constate un effet d'*autocorrection* évitant cette accumulation.

La précision de l'algorithme ci-dessus, *de type implicite* par rapport à u , doit beaucoup à ce que, alors que les positions q sont évaluées aux extrémités de l'intervalle $[t_i, t_f]$, le traitement de u s'effectue à mi-pas.

Il se trouve aussi qu'à sa manière, l'algorithme gère les *collisions* éventuelles. Si $f(t_m, q_m) < 0$, l'ensemble $W(t_m, q_m)$ égale \mathbf{R}^3 entier et [11] reflète simplement la dynamique d'un point libre soumis au champ X . S'il n'en est plus de même au pas suivant, [11] se charge de mettre u_f en conformité avec la liaison d'impenétrabilité. Cette nouvelle vitesse appartient au demi-plan frontière de $W(t_m, q_m)$, c'est-à-dire

que la collision est traitée comme de *restitution nulle* [Mor 85]. On reviendra plus loin sur un traitement plus général des restitutions.

Noter que, à la différence d'une approche du problème du mouvement d'un point dans une surface par les méthodes traditionnelles de la dynamique, l'algorithme n'invoque pas la courbure de la paroi. Cette courbure se manifeste implicitement par le fait que, d'un pas au suivant, ∇f change de direction.

3. Systèmes à contacts multiples

3.1. Cas sans frottement

Au lieu de la simple inégalité [3], la dynamique d'une collection de corps met aux prises avec un systèmes d'inégalités exprimant leurs impénétrabilités mutuelles, avec même la possibilité de plusieurs contacts pour chaque paire de corps.

Déjà pour une simple particule confinée comme ci-dessus dans une région de \mathbf{R}^3 , la paroi peut se composer de κ parties régulières, éventuellement mobiles, imposant respectivement des inégalités de la forme

$$f_\alpha(t, q) \leq 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \kappa. \tag{12}$$

Si, par exemple, les parties $f_1 = 0$ et $f_2 = 0$ de cette paroi se rejoignent selon une arête anguleuse, une position q appartenant à cette arête est un point singulier de la frontière de la région $\Phi(t)$. En ce cas $N_{\Phi(t)}(q)$ est, par définition, le *cône convexe engendré* par les deux vecteurs $\nabla f_1(t, q)$ et $\nabla f_2(t, q)$, c'est-à-dire l'ensemble de leurs combinaisons linéaires à coefficients ≥ 0 . Si le contact avec chacune des deux portions de surface est sans frottement, l'ensemble des valeurs possibles pour la réaction totale égale donc $-N_{\Phi(t)}(q)$.

De façon générale, pour tout t et tout q , notons

$$J(t, q) := \{ \alpha \in \{1, \dots, \kappa\} \mid f_\alpha(t, q) \geq 0 \}. \tag{13}$$

Si $q \in \Phi(t)$, c'est l'ensemble des valeurs de α telles que [12] soit vérifiée comme égalité, c'est-à-dire le sous-ensemble de $\{1, \dots, \kappa\}$ correspondant à des portions de parois que le point touche. Et $N_{\Phi(t)}(q)$ se définit comme le cône convexe engendré par les $\nabla f_\alpha(t, q)$ pour $\alpha \in J(t, q)$ (selon une logique usuelle en Théorie de la Convexité, ce cône convexe engendré consiste dans le singleton $\{0\}$ si $J(t, q)$ est vide). Moyennant quoi, l'équation de la Dynamique du point confiné par ce système de parois s'écrit finalement sous la même forme qu'en [8].

On généralise la définition posée plus haut pour W en

$$W(t, q) := \{ v \in \mathbf{R}^3 \mid \forall \alpha \in J(t, q) : \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v \cdot \nabla f_\alpha \leq 0 \}, \tag{14}$$

(ensemble égal à \mathbf{R}^3 tout entier si $J(t, q)$ est vide), définition valable même pour des positions impliquant une violation de [12]. Un raisonnement un peu plus technique que

précédemment permet à nouveau, moyennant l'hypothèse $q(t_0) \in \Phi(t_0)$, de mettre l'équation de la Dynamique du point sous la forme équivalente [9].

En résumé, la description des circonstances mécaniques du contact sans frottement qui, dans l'écriture [7] se présentait comme une relation entre force de contact et position, est remplacée par

$$-r \in N_{W(t,q)}(u), \quad [15]$$

relation entre *force, position et vitesse*. On a vu en 2.3 l'intérêt algorithmique d'un tel détour. En outre, un avantage décisif de l'introduction de la vitesse est de fournir un cadre apte à prendre aussi en compte le frottement.

3.2. Lois de contact

Dans le cas d'une collection de corps, la non-pénétration s'exprime par des inégalités du type [12] concernant la configuration $q := (q^1, q^2, \dots, q^n)$ du système. L'éventualité $f_\alpha(t, q) = 0$ correspond à un contact affectant deux corps qu'on va noter \mathcal{B}_α (toujours un membre du système) et \mathcal{B}'_α (un autre membre du système ou un obstacle extérieur de mouvement imposé). Le contact est supposé localisé en un point isolé, soit M_α , mais l'éventualité d'autres contacts ponctuels entre ces deux mêmes corps n'est pas exclue.

Soit U_α la vitesse relative de \mathcal{B}_α par rapport à \mathcal{B}'_α au point M_α et soit \mathcal{R}^α la force de contact exercée par \mathcal{B}'_α sur \mathcal{B}_α . Nous appellerons *loi de contact* une relation édictée entre ces deux vecteurs, pouvant en outre dépendre du temps et de la configuration atteinte :

$$\text{loi}_\alpha(t, q, U_\alpha, \mathcal{R}^\alpha) = \text{vrai}. \quad [16]$$

L'écriture des équations de la Dynamique dans le paramétrage (q^1, q^2, \dots, q^n) met en œuvre des *composantes généralisées* qu'il faut savoir relier aux vecteurs $U_\alpha, \mathcal{R}^\alpha$ de l'espace physique, associés au contact étiqueté α .

Au stade présent, le n -vecteur des vitesses $u := (u^1, u^2, \dots, u^n)$ est simplement constitué par les dérivées des fonctions $t \mapsto q^i$, à tout instant où ces dérivées existent. Par la construction même du paramétrage, on sait exprimer à partir de ces dérivées le vecteur U_α sous la forme

$$U_\alpha = G_\alpha u + W_\alpha, \quad [17]$$

où G_α est une application linéaire de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R}^3 et où $W_\alpha \in \mathbf{R}^3$ rend compte du mouvement éventuellement imposé à \mathcal{B}'_α ; ces éléments dépendent de t et q de manière connue.

Pour tout (t, q) , au moins dans un voisinage de la situation de contact considérée, on peut exprimer aussi en fonction de ces variables l'*interstice* $g_\alpha(t, q)$ entre \mathcal{B}_α et \mathcal{B}'_α (angl. *gap*), compté selon une normale commune aux corps en regard et traité comme négatif en cas d'interpénétration. Classiquement, si dans la situation de contact en

cause, on note \mathbf{n}^α un vecteur unité normal au contact, dirigé de \mathcal{B}'_α vers \mathcal{B}_α , on a pour tout mouvement différentiable $t \mapsto q(t)$ imaginé traverser cette situation

$$\frac{d}{dt}g_\alpha(t, q(t)) = \mathbf{n}^\alpha \cdot \mathcal{U}_\alpha, \quad \text{autrement dit} \quad \mathbf{n}^\alpha \cdot (G_\alpha u + \mathcal{W}_\alpha), \quad [18]$$

formule qui vaut aussi plus précisément pour des $\frac{d}{dt}$ et des vitesses à *droite* ou à *gauche* de l'instant en cause. Les éléments \mathbf{n}^α , G_α , \mathcal{W}_α sont ici des fonctions connues de t et q , fonctions dont la définition est supposée étendue conventionnellement à un voisinage de la situation de contact en question.

Pour les besoins du calcul, on imaginera la loi [16] prolongée elle aussi à un voisinage de la situation de contact et on supposera qu'il s'agit proprement d'une loi de contact, c'est-à-dire

$$g_\alpha(t, q) > 0 \Rightarrow \mathcal{R}^\alpha = 0. \quad [19]$$

La loi [16] sera dite *de type prospectif* si elle est constituée de manière à assurer les implications

$$g_\alpha(t, q) \leq 0 \Rightarrow \mathbf{n}^\alpha \cdot \mathcal{U}_\alpha \geq 0 \quad [20]$$

$$\mathbf{n}^\alpha \cdot \mathcal{U}_\alpha > 0 \Rightarrow \mathcal{R}^\alpha = 0. \quad [21]$$

L'importance de l'implication [20] est la suivante. Si la fonction f du parag. 2.2 est prise égale à $-g_\alpha$, l'identité [18] nous permet d'identifier dans le contexte présent l'ensemble W et d'appliquer le Lemme de Viabilité. On conclut que, si le contact étiqueté α est régi par une loi possédant cette propriété et si aucune interpénétration des corps en présence n'a lieu à un instant initial, il en sera de même dans la suite.

L'implication [21] justifie le qualificatif "prospectif". Dans le contexte de Dynamique Non Régulière qui est celui du présent article, on doit être prêt à rencontrer des discontinuités temporelles. L'idée sous-jacente à l'écriture [21] est que la loi formulée ne concerne pas proprement les valeurs actuelles des fonctions \mathcal{U}_α et \mathcal{R}^α , mais leurs *limites à droite*. La limite à droite de $\mathbf{n}^\alpha \cdot \mathcal{U}_\alpha$ égale la dérivée à droite de la fonction $t \mapsto g_\alpha(t, q(t))$. Si cette dérivée est > 0 , le contact cesse et \mathcal{R}^α devient nul ; donc sa limite à droite est nulle.

On comprendra mieux l'importance du concept de loi de type prospectif lorsqu'on en viendra, au parag. 5.2, à la formulation de lois de choc et, au parag. 6.1, à l'élaboration d'un algorithme à temps discrétisé *de type implicite* pour calculer l'évolution.

L'écriture de l'équation de la dynamique du système demande que chacune des forces que le système subit soit représentée par ses *composantes généralisées*. En particulier, notons r^α l'élément de \mathbf{R}^n constitué par les composantes généralisées des forces de contact au point M_α . Selon la machinerie classique de la Mécanique Analytique,

$$r^\alpha = G_\alpha^* \mathcal{R}^\alpha, \quad [22]$$

où l'application linéaire G_α^* de \mathbf{R}^3 dans \mathbf{R}^n est la *transposée* de G_α . Dans le cas où les corps \mathcal{B}_α et \mathcal{B}'_α sont tous les deux des membres du système, cette expression de r^α englobe automatiquement les deux forces \mathcal{R}^α exercée par \mathcal{B}'_α sur \mathcal{B}_α et la force antagoniste $-\mathcal{R}^\alpha$ exercée par \mathcal{B}_α sur \mathcal{B}'_α . En revanche, si comme on l'a envisagé plus haut, \mathcal{B}'_α est un obstacle extérieur, seule la force \mathcal{R}^α est subie par le système et non son antagoniste, mais la formule [22] reste vraie, exprimant alors les composantes généralisées de cette seule force.

3.3. Equations de la Dynamique régulière

Si on postule comme précédemment un mouvement assez régulier pour que la fonction vitesse soit absolument continue, la dynamique du système est régie par une équation de la forme suivante, dont les deux membres sont des éléments de \mathbf{R}^n

$$A(t, q) \frac{du}{dt} = F(t, q, u) + \sum_{\alpha} r^\alpha. \quad [23]$$

La matrice symétrique $n \times n$ notée A (matrice d'inertie) est définie positive si le paramétrage est régulier. Dans la fonction connue F sont agglomérées les composantes généralisées de forces données, dépendant de façon régulière du temps, de la position et de la vitesse, ainsi que des termes inertiels ne contenant pas la dérivée $\frac{du}{dt}$ (il est parfois suggestif de les classer en termes "gyroscopiques" et en termes "centrifuges").

Les r^α sont liés par [22] aux forces de contact \mathcal{R}^α , lesquelles sont elles-mêmes reliées aux vitesses relatives locales \mathcal{U}_α par des lois de contact de la forme [16]. Si ces lois de contact sont énoncées de manière à fournir $\mathcal{R}^\alpha = 0$ lorsque le contact α n'est pas effectif, il sera indifférent de restreindre α à l'ensemble $J(t, q)$ ou à lui laisser parcourir la totalité de la liste $\{1, 2, \dots, \kappa\}$.

Les \mathcal{U}_α sont liés à u par [17].

Enfin on doit rappeler que les fonctions q et u sont liées par [1].

GÉNÉRALISATION. – Il est souvent avantageux d'exprimer la Dynamique par une équation de la même forme que [23] mais concernant une fonction vitesse $t \mapsto u \in \mathbf{R}^n$ liée à la fonction position $t \mapsto q$ par une relation cinématique plus compliquée que [1]. De fait, dans l'étude de l'évolution d'un corps rigide, il est usuel de faire figurer comme composantes de u , au lieu des dérivées de certains paramètres angulaires apparaissant dans q , les *composantes du vecteur vitesse angulaire* du corps, relativement à des axes principaux centraux d'inertie qui lui sont attachés. L'avantage est que les termes correspondants dans la matrice de masse A ci-dessus sont indépendants de (t, q) et nuls en dehors de la diagonale. Le prix à payer est que [1] devra être remplacée par une intégration de formules de cinématique élémentaire, numériquement facile. Définir u de cette manière n'empêche pas d'exprimer les vitesses relatives locales \mathcal{U}_α sous la forme [17], auquel cas [22] continue de fournir les r^α à insérer dans [23].

4. Frottement de Coulomb

4.1. Contact frottant

L'intérêt industriel des problèmes de contact avec frottement a suscité depuis quelques années une série de travaux consacrés à leur formulation et à leur résolution numérique, pour des corps *déformables*, discrétisés en éléments finis [ALA 91] [CHA 98] [Chr 98] [SAX 91] [JEA 95] [STR 96] [VOL 98]. Bien que ces publications aient en majorité été consacrées à des évolutions quasi-statiques, elles permettent d'apprécier la diversité des procédures possibles pour appréhender à la fois le caractère unilatéral des liaisons d'impénétrabilité et la présence de seuils dans les lois de frottement sec.

Dans la présente approche, une des sources de l'intérêt du remplacement de [7] par [15] est de conduire à des calculs invoquant des *ensembles convexes* dans l'espace des vitesses éventuelles du système, lequel est un espace vectoriel, alors que, dans la variété des configurations, la notion de convexité, utile dans diverses techniques numériques, n'a pas de sens intrinsèque. Lorsque, d'autre part, les matrices G_α et G_α^* sont invoquées pour se référer à des lois de contact de la forme [16], la présence des vitesses locales dans ces lois permet de prendre en compte des informations empiriques. Si les lois sont de type prospectif, elles engendrent, comme on le verra dans la section 6, des algorithmes assurant automatiquement le respect des impénétrabilités. Les algorithmes sont aussi capables de tester des positions d'équilibre éventuelles : si, à l'instant t_i , le point q_i est, compte tenu des lois de contact, une position d'équilibre, le pas de calcul effectué avec $u_i = 0$ fournit $u_f = 0$, $q_f = q_i$ et calcule les forces de contact.

4.2. Loi de Coulomb

Montrons une manière énoncer la loi de Coulomb en une liste d'assertions constituant une loi de contact de type prospectif.

On se limite, pour abrégé, à une situation bidimensionnelle. Deux solides \mathcal{B} et \mathcal{B}' se touchent en un point M avec une tangente commune bien définie. Soit \mathbf{n} le vecteur unité normal dirigé de \mathcal{B}' vers \mathcal{B} et soit \mathbf{t} le vecteur qui s'en déduit par la rotation $+\pi/2$. Soient \mathcal{D}^+ et \mathcal{D}^- les demi-droites faisant avec \mathbf{n} les angles respectifs $-\varphi$ et φ (φ : angle de frottement). La région angulaire \mathcal{C} qu'elles engendrent constitue dans le cas présent le *cône de frottement* ou *cône de Coulomb*. Tous ces éléments sont des fonctions de t et q ; il est utile dans les techniques numériques d'étendre leurs définitions à un voisinage de l'instant et de la configuration considérée, avec la convention que \mathcal{D}^+ , \mathcal{D}^- et \mathcal{C} se réduisent au singleton $\{\emptyset\}$ si l'interstice est > 0 . La formulation consiste dans les quatre assertions exclusives que voici

$$\begin{aligned} & (U \cdot \mathbf{n} > 0 \quad \text{ET} \quad \mathcal{R} = 0) \\ \text{OU} & (U \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{ET} \quad U \cdot \mathbf{t} > 0 \quad \text{ET} \quad \mathcal{R} \in \mathcal{D}^+) \\ \text{OU} & (U \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{ET} \quad U \cdot \mathbf{t} < 0 \quad \text{ET} \quad \mathcal{R} \in \mathcal{D}^-) \end{aligned}$$

$$\text{OU } (U = 0 \quad \text{ET} \quad \mathcal{R} \in \mathcal{C}).$$

C'est la première ligne qui assure le caractère prospectif. Au plan théorique, on peut trouver plus convaincant d'appliquer à la loi de Coulomb le formalisme des *bi-potentiels* [SAX 91], une technique générale pour le traitement de lois de résistance dites "non associées". Ce formalisme engendre automatiquement une loi de contact de type prospectif et, lorsqu'on arrive à la construction d'un algorithme, il remplace la formule de proximation [11] par une caractérisation qui est encore de type extrémal (voir aussi [Mor 86]).

5. Collisions

5.1. Dynamique percussionnelle

On a vu dans le cas spécial du parag. 2.3 comment un algorithme *CD* peut faire face formellement à une collision. La difficulté ne se situe pas dans l'occurrence d'un saut de vitesse, mais dans la nécessité de posséder des lois phénoménologiques maniables résumant avec assez de précision la complexité d'interactions brèves mettant en jeu de grandes forces.

Il est usuel d'admettre que le phénomène se déroule sur un intervalle de temps $[t_c, t_c + \tau]$ suffisamment court pour que les déplacements y soient négligeables. La matrice A de l'équation [23] est ainsi traitée comme constante sur cette durée ; on intègre les deux membres sur l'intervalle. Le terme F donne une contribution négligeable, mais non les forces de contact, pour lesquelles on attend des valeurs d'autant plus grandes que l'interaction est plus brève. Il reste

$$u(t_c + \tau) - u(t_c) = A^{-1} \sum_{\alpha} s^{\alpha}. \quad [24]$$

Les s^{α} sont les intégrales des r^{α} ; ces dernières quantités sont reliées aux forces de contact \mathcal{R}^{α} par [22] et, comme avec A , on suppose la durée τ suffisamment courte pour que G_{α}^* soit traitée comme une matrice constante. Cela donne

$$s^{\alpha} = G_{\alpha}^* S^{\alpha}, \quad [25]$$

où S^{α} , intégrale de \mathcal{R}^{α} sur l'intervalle, est la *percussion de contact*. Noter que les valeurs de α à considérer ne se limitent pas nécessairement à l'étiquette du contact brusquement introduit par la collision : si les corps qui se rencontrent font partie d'amas ayant déjà des contacts, des percussions doivent aussi y être attendues.

A ce stade de la formulation, on décide d'oublier la durée τ et d'identifier le premier membre de [24] à $u^+(t_c) - u^-(t_c)$, *saut instantané* de u .

Il manque des informations sur S^{α} , pour qu'on puisse déterminer $u^+(t_c)$, lequel fournira la vitesse initiale pour calculer le mouvement consécutif à la collision. Depuis Darboux, il est traditionnel de procéder à une analyse du processus de collision

grâce à un *changement d'échelle*, indexant l'évolution des vitesses par un micro-temps relativement auquel on invoque les équations de la Dynamique régulière sans pour autant que les positions changent. Les procédures de cette sorte comportent diverses variantes, un point délicat étant de discuter l'importance éventuelle de déformations microscopiques des corps au voisinage des lieux d'impact. Elles révèlent en outre que la vitesse relative U_α ne conserve pas en général une direction fixe durant l'évolution microscopique. Or les lois de contact, telles que la loi de Coulomb formulée à la section précédente, sont essentiellement des relations non linéaires entre U_α et \mathcal{R}^α . Les opérations d'intégration par lesquelles on définirait la moyenne de U_α et la percussion \mathcal{S}^α ne commutent pas en général avec de telles relations (cas d'exception : la loi de Coulomb étant une relation "conique", c'est-à-dire positivement homogène de degré 0 par rapport à U_α et à \mathcal{R}^α , la commutation se justifie dans le cas particulier où on a des raisons d'affirmer que U_α conserve une direction et un sens fixes durant le processus).

Résumer la dynamique des collisions par des "lois de restitution", grâce auxquelles seules les vitesses avant choc (connues) et les vitesses après choc (les inconnues du problème) entrent dans le calcul, ne peut donc en général fournir qu'une approximation assez grossière [STO 96]. C'est pourtant le parti auquel nous allons nous résoudre, car les techniques numériques en vue s'adressent à la dynamique de granulats ou de maçonneries pouvant comporter plusieurs dizaines de milliers de contacts et il est hors de portée d'analyser les micro-évolutions induites en chacun d'eux.

5.2. Vitesses pondérées et restitution

On va admettre qu'en chaque contact – soit α son étiquette – une loi de contact telle que la loi de Coulomb (conique et de type prospectif) relie la percussion \mathcal{S}^α à une *vitesse locale moyenne* U_α^a ("a" comme *average*). Celle-ci est définie par une pondération entre les valeurs avant et après choc U_α^- et U_α^+ , pondération qui peut d'ailleurs invoquer des coefficients différents pour les composantes normales $U_{\alpha N}$ et tangentielles $U_{\alpha T}$:

$$U_{\alpha N}^a = \frac{\rho_\alpha}{1 + \rho_\alpha} U_{\alpha N}^- + \frac{1}{1 + \rho_\alpha} U_{\alpha N}^+ \quad [26]$$

$$U_{\alpha T}^a = \frac{\tau_\alpha}{1 + \tau_\alpha} U_{\alpha T}^- + \frac{1}{1 + \tau_\alpha} U_{\alpha T}^+. \quad [27]$$

Les paramètres empiriques ρ_α et τ_α seront appelés *coefficient de restitution normale* et *coefficient de restitution tangentielle*, dénominations justifiées par ce qui suit.

La loi de contact invoquée étant de type prospectif, les implications [20] et [21] montrent que \mathcal{S}^α ne peut différer de zéro que si $U_{\alpha N}^a = 0$, c'est-à-dire $U_{\alpha N}^+ = -\rho_\alpha U_{\alpha N}^-$, ce qui est formellement l'*équation de restitution de Newton*. Mais la procédure présente est plus riche que l'application d'une loi de restitution à chaque contact séparément : elle permet aussi $\mathcal{S}^\alpha = 0$ pourvu que $U_{\alpha N}^a > 0$. C'est le calcul global, invoquant tous les contacts par l'intermédiaire de [24], qui tranche entre ces deux alternatives.

De manière analogue, ce calcul global peut, si le frottement est suffisant, déboucher sur le cas “vitesse tangentielle nulle” de la loi de Coulomb. Alors $U_{\alpha T}^+ = -\tau_{\alpha} U_{\alpha T}^-$, ce qui exprime une restitution tangentielle.

L'exemple familier du *balancement* par lequel un bloc rectangulaire élané, posé sur un plan horizontal, atteint finalement son équilibre après des alternances de pivotement autour des deux coins inférieurs, montre l'inaptitude de la formule de restitution de Newton à modéliser les collisions dans un système exhibant plusieurs contacts : lorsque, à l'issue d'un pivotement autour de l'un des coins, l'autre coin vient heurter le plan horizontal, cette formule ne permettrait pas au premier point de décoller. En revanche, la technique des vitesses pondérées, même avec des coefficients de restitution nuls, fournit des résultats plausibles.

5.3. Equations de la Dynamique Non Régulière

On recherche le mouvement du système sur un intervalle de temps I , d'origine t_0 . L'inconnue principale étant, comme on l'a dit, la fonction vitesse $t \mapsto u \in \mathbf{R}^n$, nous nous limitons pour abrégier au cas où la fonction position $t \mapsto q \in \mathbf{R}^n$ s'en déduit par l'intégration [1]. Même si la fonction u est construite de façon moins directe (cf. paragr. 3.3), on peut finalement généraliser l'équation [23] sous la forme d'une *égalité de mesures* à valeurs dans \mathbf{R}^n

$$A(t, q) du = F(t, q, u) dt + \sum_{\alpha} s^{\alpha}. \quad [28]$$

Ici, du désigne la *mesure différentielle* de u , égale à $u'_t dt$ sur tout sous-intervalle de I où u est absolument continue, mais qui peut aussi comporter des *atomes*, c'est-à-dire des mesures concentrées aux instants de discontinuité éventuelle des vitesses [Mor 88a] : le *poids* d'un tel atome est égal au *saut* $u^+ - u^-$.

Les s^{α} sont les composantes généralisées des mesures *impulsions* \mathcal{S}^{α} aux divers points de contact. Sur un sous-intervalle où le mouvement est régulier, on a $\mathcal{S}^{\alpha} = \mathcal{R}^{\alpha} dt$ et $s^{\alpha} = r^{\alpha} dt$, ce qui permet d'invoquer [22] pour chaque t . En revanche, sur la durée “infiniment courte” d'une collision, $G_{\alpha}^*(t, q)$ est traité comme constant : par intégration sur cette durée, il vient donc une relation de même forme entre s^{α} et \mathcal{S}^{α} . Au total, sur l'intervalle I entier on a la relation suivante entre mesures, qu'elles aient ou non des densités par rapport à dt ,

$$s^{\alpha} = G_{\alpha}^* \mathcal{S}^{\alpha}, \quad [29]$$

écriture légitime puisque $t \mapsto G_{\alpha}^*(t, q(t))$ est continue.

Il reste à expliquer comment l'artifice des moyennes pondérées, introduit au paragraphe précédent, peut trouver place dans ce cadre général. C'est un point de *Théorie de l'Intégration* que, étant donnée une collection finie de mesures sur I , qu'elles soient à valeur dans \mathbf{R} comme dt , dans \mathbf{R}^n comme du et s^{α} ou dans \mathbf{R}^3 comme les \mathcal{S}^{α} , il existe nécessairement une mesure non négative *base*, soit μ relativement à laquelle

toutes possèdent des fonctions densités. Parce que la loi de Coulomb, de même que [29], sont des relations coniques, il est équivalent de les énoncer entre des mesures ou entre leurs fonctions densités. Incidemment, μ peut être arbitrairement multipliée par une fonction positive (localement μ -intégrable), au prix d'une division des densités par cette même fonction [Mor 88a].

Dans ce qu'on a appelé aux sections 2 et 3 la Dynamique régulière, la fonction u est absolument continue et on peut prendre la mesure de Lebesgue dt comme mesure base. La continuité de u fait que les vitesses pondérées sont égales aux vitesses ordinaires. On vient de voir l'usage des vitesses pondérées dans le traitement de collisions. Dans [Mor 88b] se trouve l'application de la même technique mathématique à la modélisation des *catastrophes frictionnelles*, auxquelles on continue de faire référence sous le titre impropre de "Paradoxe de Painlevé". L'algorithme décrit dans la section suivante permet de calculer de tels mouvements non réguliers, au même titre que des collisions.

6. Implémentation

6.1. Discrétisation

Si on évite les instants où la matrice A deviendrait singulière, la fonction matricielle $t \mapsto A^{-1}(t, q(t))$ est continue. En multipliant par cette fonction les deux membres de [28] (et en renommant l'indice de sommation), on obtient

$$du = A^{-1}F dt + A^{-1} \sum_{\beta} s^{\beta}. \tag{30}$$

Comme au paragr.2.3, soit $[t_i, t_f]$, de longueur h , un pas de temps ; on pose $t_m := t_i + \frac{1}{2}h$ et $q_m := q_i + \frac{1}{2}hu_i$. Vu leur continuité, les matrices A^{-1} , G_{β} , G_{β}^* seront traitées sur tout l'intervalle comme conservant les valeurs qu'elles ont au point (t_m, q_m) , tandis qu'on adoptera pour F la valeur constante $F(t_m, q_m, u_i)$. Moyennant quoi, en intégrant les deux membres de [30] sur l'intervalle, il vient

$$u_f = u_i + A^{-1}F h + \sum_{\beta} A^{-1}G_{\beta}^* S^{\beta}, \tag{31}$$

où S^{β} , intégrale de \mathcal{R}^{β} , constitue l'impulsion de contact au point M_{β} pour le pas concerné. Une telle discrétisation résumant un bilan d'impulsions sur l'intervalle $[t_i, t_f]$, ne postule pas l'existence des accélérations : elle vaut aussi bien si l'intervalle comporte des collisions. Le cas d'une collision survenant exactement à l'une des extrémités de l'intervalle n'est pas exclu : à cet égard, on peut dire que les valeurs indexées 'i' simulent des limites à gauche et les valeurs indexées 'f' des limites à droite.

L'indice de sommation n'a besoin de parcourir que l'ensemble des étiquettes des contacts actifs. Avec la notation [13], on adopte $J_m := J(t_m, q_m)$ comme estimation de cet ensemble pour toute la durée du pas. Pour chaque $\alpha \in J_m$, on doit disposer

d'une loi de contact liant \mathcal{S}^α aux variables cinématiques. On va admettre que la vitesse relative des corps en contact au point M_α intervient sous la forme d'une moyenne pondérée comme en [26] et [27], à ceci près que les rôles tenus alors par les limites à gauche et à droite d'un instant de collision t_c sont joués maintenant par les valeurs de U_α en t_i et t_f . Si aucune collision n'a lieu dans l'intervalle $[t_i, t_f]$, cette manière de prendre en compte l'inconnue u_f à travers une pondération fait ressembler le présent schéma de discrétisation à une " θ -méthode". En particulier, pour des valeurs nulles de tous les coefficients de restitution, on se trouve en présence d'un schéma implicite.

Si on se limite à des lois telles que la loi de Coulomb, laquelle est conique séparément par rapport aux composantes normale et tangentielle de la vitesse relative locale, et si on note $G_{\alpha N}$ et $G_{\alpha T}$ la composante normale et la composante tangentielle de G_α , on peut chasser les dénominateurs, d'où

$$\forall \alpha \in J_m : \quad \text{loi}_\alpha(\rho_\alpha G_{\alpha N} u_i + G_{\alpha N} u_f + (1 + \rho_\alpha) \mathcal{W}_{\alpha N}, \\ \tau_\alpha G_{\alpha T} u_i + G_{\alpha T} u_f + (1 + \tau_\alpha) \mathcal{W}_{\alpha T}, \mathcal{S}^\alpha) = \text{vrai} \quad [32]$$

Le problème va être de résoudre le système [31][32] par rapport à l'inconnue u_f , après quoi le pas se terminera par $q_f = q_m + \frac{1}{2} h u_f$.

REMARQUE 1. – Traiter F comme constant sur l'intervalle $[t_i, t_f]$ suppose que les forces "élastiques" éventuelles n'ont qu'une dépendance douce à l'égard de la position q . En revanche, si les élasticités sont trop raides, on peut appliquer une procédure due à M. Jean [JEA 95], consistant à remplacer A par une matrice combinant inerties et coefficients d'élasticité linéaire.

REMARQUE 2. – L'occurrence de collisions est révélée par un ensemble J_m adressant certains contacts inexistant au pas précédent. Comme on l'a souligné antérieurement, les impulsions aux autres points de contact présents doivent s'en trouver affectées. L'algorithme prend cela en compte, mais souffre toutefois d'un manque de "pouvoir séparateur": s'il y a plus d'un nouveau contact, toutes les collisions correspondantes sont traitées ensemble. Par exemple, une accumulation de chocs, comme lorsqu'une balle de ping-pong atterrit, est traitée comme une seule collision si, physiquement, ces chocs ont tous lieu dans l'intervalle $[t_i, t_f]$.

6.2. Procédé itératif

La méthode la plus employée pour la résolution numérique du problème non régulier [31][32] consiste en itérations inspirées de ce qu'on fait lorsqu'on aborde des systèmes d'équations linéaires par la technique de Gauss-Seidel.

Supposons qu'une approximation $(u_f^{\text{esti}}, \mathcal{S}_{\text{esti}}^\beta)$, β prenant toutes les valeurs de J_m , ait été obtenue, et qu'elle satisfasse exactement [31]. On va en déduire une autre approximation $(u_f^{\text{corr}}, \mathcal{S}_{\text{corr}}^\beta)$ en altérant seulement \mathcal{S}^α , autrement dit $\mathcal{S}_{\text{corr}}^\beta = \mathcal{S}_{\text{esti}}^\beta$ si

$\beta \neq \alpha$. On demande à cette nouvelle approximation de vérifier elle aussi [31], c'est-à-dire par différence

$$u_f^{\text{corr}} = u_f^{\text{esti}} + A^{-1}G_\alpha^*(\mathcal{S}_{\text{corr}}^\alpha - \mathcal{S}_{\text{esti}}^\alpha) \quad [33]$$

et de vérifier la loi du contact d'étiquette α telle qu'elle est écrite en [32]. On élimine de cette dernière l'inconnue u_f^{corr} en appliquant G_α aux deux membres de [33], d'où en séparant les composantes normale et tangentielle $G_{\alpha N}$, $G_{\alpha T}$

$$\begin{aligned} \text{loi}_\alpha(U_{\alpha N}^{\text{const}} + G_{\alpha N} u_f^{\text{esti}} + H_{\alpha N}(\mathcal{S}_{\text{corr}}^\alpha - \mathcal{S}_{\text{esti}}^\alpha), \\ U_{\alpha T}^{\text{const}} + G_{\alpha T} u_f^{\text{esti}} + H_{\alpha T}(\mathcal{S}_{\text{corr}}^\alpha - \mathcal{S}_{\text{esti}}^\alpha), \mathcal{S}_{\text{corr}}^\alpha) = \text{vrai}. \end{aligned} \quad [34]$$

Les matrices $H_{\alpha N}$ et $H_{\alpha T}$ expriment les composantes normale et tangentielle de $H_\alpha = G_\alpha A^{-1}G_\alpha^*$, application linéaire symétrique positive de \mathbf{R}^3 dans lui-même que nous proposons d'appeler l'*opérateur de Delassus*. En quelque sorte, cet opérateur décrit l'inertie du système "telle qu'on la voit depuis le point de contact M_α ". Dans le cas usuel où $G_\alpha : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^3$ est surjective (i.e. $G_\alpha^* : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^n$ injective), l'opérateur H_α est défini positif.

Apparaissent aussi les composantes d'un élément U_α^{const} , ainsi noté parce que, pour chaque α , il demeure constant au cours des itérations :

$$\begin{aligned} U_{\alpha N}^{\text{const}} &= \rho_\alpha G_{\alpha N} u_i + (1 + \rho_\alpha) \mathcal{W}_{\alpha N} \\ U_{\alpha T}^{\text{const}} &= \tau_\alpha G_{\alpha T} u_i + (1 + \tau_\alpha) \mathcal{W}_{\alpha T} \end{aligned}$$

La résolution de [34] équivaut au traitement d'un système qui présenterait un seul contact. On l'effectue de manière répétée avec α parcourant cycliquement J_m . La décision d'arrêter les itérations peut être prise d'après l'examen des quantités scalaires $H_{\alpha N}(\mathcal{S}_{\text{corr}}^\alpha - \mathcal{S}_{\text{esti}}^\alpha)$. Le maximum de leurs valeurs absolues sur un cycle $\alpha \in J_m$ est une mesure significative de la précision avec laquelle les lois de contact sont satisfaites.

La démonstration mathématique de la convergence d'algorithmes de Gauss-Seidel non linéaires n'a été faite que dans des cas particuliers [JOU 98]. La mesure de précision ci-dessus permet donc seule de juger de la qualité de l'approche. Sous réserve d'un tel contrôle, on peut se permettre bien des variantes. Par exemple, l'opérateur H_α dans [34] pourrait être remplacé par n'importe quelle application ayant zéro comme limite à l'origine de \mathbf{R}^3 . En particulier, l'usage à cet endroit d'un coefficient multiplicateur ajusté empiriquement fournit des moyens efficaces d'accélérer la convergence.

En l'absence d'information, le démarrage des itérations s'effectue avec des $\mathcal{S}_{\text{esti}}^\beta$ nuls, les u_f^{esti} correspondants étant déterminés par [31]. Mais dans des situations où les contacts persistants prédominent sur les collisions (en particulier dans l'analyse des équilibres éventuels), on améliore considérablement l'efficacité du calcul en adoptant pour les $\mathcal{S}_{\text{esti}}^\beta$ les valeurs trouvées au pas précédent en chacun des contacts déjà présents.

A cours des ajustements successifs décrits ci-dessus, le respect de l'équation de la dynamique [31] est assuré par la condition de préservation [33]. Les calculs de Mécanique des Granulats exigent souvent des millions d'ajustements, de sorte qu'on pourrait craindre une accumulation d'erreurs. Il suffit pour s'en prémunir de revenir à [31] pour une correction de u_f^{esti} , à chaque million d'ajustements par exemple.

Le traitement n'implique pas le stockage de grosses matrices. En effet, chacune des applications linéaires $G_\alpha : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^3$ concerne au plus une paire de solides libres. La partie non nulle de la matrice correspondante est donc au plus un rectangle de taille 12×3 (et seulement 6×2 dans les modèles bidimensionnels).

7. Bibliographie

- [ACA 98] ACARY V., JEAN M., « Numerical simulation of monuments by the contact dynamics method », *Monument-98, Workshop on Seismic Performance of Monuments*, Lisbonne, 1998, p. 69–78.
- [ALA 91] ALART P., CURNIER A., « A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like methods », *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 92, 1991, p. 353–375.
- [Aub 84] AUBIN J. P., CELLINA A., *Differential inclusions*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Aub 90] AUBIN J. P., *Viability theory*, Birkhäuser-Verlag, Basel/Boston, 1990.
- [BRO 99] BROGLIATO B., *Nonsmooth Mechanics. Models, Dynamics and Control*, Springer-Verlag, London/Berlin/etc., second édition, 1999.
- [CHA 98] CHABRAND P., DUBOIS F., RAOUS M., « Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction », *Mathl. Comput. Modelling*, vol. 28, 1998, p. 97–108.
- [Chr 98] CHRISTENSEN P. W., KLARBRING A., PANG J. S., STRÖMBERG N., « Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems », *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 42, 1998, p. 145–173.
- [Cun 71] CUNDALL P. A., « A computer model for simulating progressive large scale movements of blocky rock systems », *Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics*, vol. 1, Nancy, France, 1971, p. 132–150.
- [DEL 17] DELASSUS E., « Mémoire sur la théorie des liaisons finies unilatérales », *Ann. Sci. Ecole Normale Sup.*, vol. 34, 1917, p. 95–179.
- [Hau 89] HAUG E. J., *Computer Aided Kinematics and Dynamics*, vol. 1, Allyn and Bacon, Boston, 1989.
- [JEA 95] JEAN M., « Frictional contact in collections of rigid or deformable bodies: numerical simulation of geomaterials », SELVADURAI A.P. S., BOULON M. J., Eds., *Mechanics of Geomaterial Interfaces*, Amsterdam, 1995, Elsevier, p. 453–486.
- [JOU 98] JOURDAN F., ALART P., JEAN M., « A Gauss-Seidel-like algorithm to solve frictional contact problems », *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 155, 1998, p. 31–47.
- [Mon 93] MONTEIRO MARQUES M.D. P., *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems: Shocks and Dry Friction*, Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin, 1993.

- [Mor 63] MOREAU J. J., « Les liaisons unilatérales et le principe de Gauss », *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris*, vol. 256, 1963, p. 871–874.
- [Mor 85] MOREAU J. J., « Standard inelastic shocks and the dynamics of unilateral constraints », DEL PIERO G., MACERI F., Eds., *Unilateral Problems in Structural Analysis*, vol. 288 de *CISM Courses and Lectures*, Wien/New York, 1985, Springer-Verlag, p. 173–221.
- [Mor 86] MOREAU J. J., « Une formulation du contact à frottement sec ; application au calcul numérique », *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, Sér.II*, vol. 302, 1986, p. 799–801.
- [Mor 88a] MOREAU J. J., « Bounded variation in time », MOREAU J. J., PANAGIOTOPOULOS P. D., STRANG G., Eds., *Topics in Nonsmooth Mechanics*, Basel/Boston/Berlin, 1988, Birkhäuser, p. 1–74.
- [Mor 88b] MOREAU J. J., « Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics », MOREAU J. J., PANAGIOTOPOULOS P. D., Eds., *Nonsmooth Mechanics and Applications*, vol. 302 de *CISM Courses and Lectures*, Wien/New York, 1988, Springer-Verlag, p. 1–82.
- [Mor 99a] MOREAU J. J., « Evolution en présence de liaisons unilatérales : notions de base », GUÉDRA-DEGEORGES D., LADEVÈZE P., RAOUS M., Eds., *Actes du 4^e Colloque National en Calcul des Structures*, Toulouse, 1999, Teknea, p. 25–40.
- [Mor 99b] MOREAU J. J., « Some basics of unilateral dynamics », PFEIFFER F., GLOCKER C., Eds., *Unilateral Multibody Dynamics*, Dordrecht, 1999, Kluwer, p. 1–14.
- [PFE 96] PFEIFFER F., GLOCKER C., *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*, John Wiley and Sons, New York, 1996.
- [SAX 91] DE SAXCÉ G., FENG Z. Q., « New inequation and functional for contact with friction », *J. Mech. of Struct. and Machines*, vol. 19, 1991, p. 301–325.
- [STO 96] STOIANOVICI D., HURMUZLU Y., « A critical study of the applicability of rigid body collisions theory », *A.S.M.E. J. Appl. Mech.*, vol. 63, 1996, p. 307–316.
- [STR 96] STRÖMBERG N., JOHANSSON L., KLARBRING A., « Derivation and analysis of a generalized standard model for contact friction and wear », *Int. J. Solids Structures*, vol. 33, 1996, p. 1817–1836.
- [VOL 98] VOLA D., PRATT E., JEAN M., RAOUS M., « Consistent time discretization for a dynamical frictional contact problem and complementarity techniques », *Rev. Europ. Elem. Finis*, vol. 7, 1998, p. 149–162.
- [Wal 84] WALTON O. R., « Application of molecular dynamics to macroscopic particles », *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 22, 1984, p. 997–1107.