
Mixité modale pour une fissure d'interface

Application à l'essai brésilien

Dominique Leguillon* — **Stéphanie Bein**** — **Michel Dupeux****
Joël Frelat*

* LMM - UMR CNRS 7607
Université Pierre et Marie Curie
8 rue du Capitaine Scott, F-75015 Paris
{Leguillon} dol@ccr.jussieu.fr

** LTPCM - UMR CNRS 5614 - ENSEEG
1130 rue de la Piscine - Domaine universitaire - BP 75
F-38402 Saint Martin d'Hères cedex
{Dupeux} michel.dupeux@ltpcm.inpg.fr

RÉSUMÉ. La présence d'un exposant complexe dans la singularité en pointe de fissure d'interface rend impossible la définition de deux modes clairement identifiés, il y a mixité modale. Une méthode de détermination directe du facteur d'intensité complexe permet une interprétation de cette mixité qui, si elle ne lève pas toutes les ambiguïtés, supprime au moins un paramètre arbitraire, la distance de la pointe de fissure à laquelle doivent être réalisées les mesures ou les calculs.

ABSTRACT. At an interface crack tip, the usual mode I and mode II splitting of the singular stress field is impossible due to a complex exponent, there is a mixity of modes. A direct computation of the complex intensity factor allows to give a precise definition of this mixity. Even if some ambiguities remain, it removes an arbitrary parameter which is the distance where measures or computations must be performed.

MOTS-CLÉS : Elasticité, interface, rupture, mixité modale.

KEYWORDS : Elasticity, interface, fracture, mixity of modes.

1. Introduction - Milieux homogènes isotropes

En élasticité plane, dans un matériau homogène isotrope, le champ de contrainte en pointe de fissure est caractérisé par les facteurs d'intensité k_I et k_{II} qui mesurent respectivement les taux d'ouverture et de cisaillement de la fissure. Le champ de déplacement prend la forme

$$\underline{U}(x_1, x_2) = k_I \sqrt{r} \underline{u}_I(\varphi) + k_{II} \sqrt{r} \underline{u}_{II}(\varphi) + \dots, \quad [1]$$

r et φ désignent les coordonnées polaires issues de la pointe de fissure (figure 1), \underline{u}_I et \underline{u}_{II} sont les deux modes classiques utilisés en théorie de la rupture fragile. Dans le cadre de cette théorie, la fissure se propage en mode d'ouverture, le choix de la direction se fait donc selon le critère $k_{II}^* = 0$ (où l'index * désigne les grandeurs après branchement) et le critère de propagation se limite à la donnée d'une valeur critique k_{IC} (la ténacité) de k_I^* [AME 92].

En présence d'une direction de rupture privilégiée (la direction d'une ligne de colle si le matériau a été réparé par exemple), le raisonnement ci-dessus ne tient plus, la fissure peut croître suivant cette direction même si $k_{II} \neq 0$. Il y a propagation en mode mixte, la mixité est définie par le paramètre

$$\psi = \tan^{-1} (k_{II}/k_I). \quad [2]$$

On peut la redéfinir de façon équivalente par [ODO92]

$$\psi = \tan^{-1} (\sigma_{12}/\sigma_{22}), \quad [3]$$

où σ_{12} et σ_{22} représentent les composantes respectivement tangentielle et normale du vecteur contrainte agissant sur l'interface en amont de la pointe de fissure ("pas trop loin" de celle-ci). Cette formulation donne accès à une détermination numérique à partir d'un calcul par éléments finis.

Deux critères de rupture sont proposés, le plus simple consiste à étendre le précédent et à ignorer la valeur de k_{II} [TH0 90], $k_{IC}(\psi) = k_{IC}(\psi = 0)$, il fournit une borne supérieure des chargements admissibles, mais interdit notamment la prévision de la rupture en mode II pur. Le second [EVA 89] consiste à définir un taux critique de restitution de l'énergie $G_C(\psi)$ dépendant de la mixité modale.

REMARQUE. — Dans le cas de refermeture de la fissure près de la pointe et de contact (avec ou sans frottement), la description du champ de contrainte singulier se limite au seul mode II, $k_I = 0$.

2. La fissure d'interface

Lorsque la fissure se développe le long d'une interface séparant deux matériaux distincts (figure 1), la situation devient beaucoup plus compliquée.

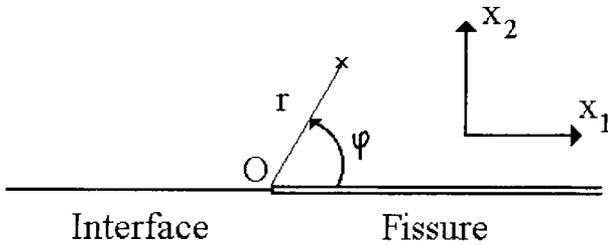


Figure 1. La fissure d'interface

Si les deux matériaux sont isotropes, le contraste est caractérisé par les paramètres de Dundurs α et β [DUN 67]. Lorsque $\beta \neq 0$ (ce qui est le cas le plus fréquent), il n'est plus possible de distinguer les modes I et II, le champ de déplacement à proximité de la pointe de fissure est défini à l'aide de grandeurs complexes [RIC 88, LEG 93]

$$\underline{U}(x_1, x_2) = 2\mathcal{R}e\left(kr^{1/2+i\varepsilon}\underline{u}(\varphi)\right) + \dots \text{ avec } \varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right). \quad [4]$$

Le vecteur \underline{u} est complexe et caractérise le mode (à rapprocher des modes I et II du cas homogène) et k est le facteur d'intensité complexe.

La méthode la plus simple pour étendre la définition de la mixité dans cette situation consiste à utiliser [3]. Malheureusement, le paramètre ψ ainsi défini n'est pas intrinsèque, sa détermination dépend notamment de la distance r à la pointe de fissure où est effectuée la mesure. Afin de pallier cette difficulté, les auteurs qui pratiquent de la sorte [ODO 92, WAN 90] fixent cette distance $r = \hat{L}$ plus ou moins arbitrairement et ne s'autorisent des comparaisons qu'en ce point. Ceci n'est évidemment guère satisfaisant comme ils ne manquent pas de le souligner d'ailleurs. Le problème vient de la décomposition [5] de [4] (bien que cette forme soit rarement explicitée)

$$\underline{U}(x_1, x_2) = \sqrt{r} \left(\mathcal{R}e(kr^{i\varepsilon})\mathcal{R}e(\underline{u}(\varphi)) - \mathcal{I}m(kr^{i\varepsilon})\mathcal{I}m(\underline{u}(\varphi)) \right) + \dots \quad [5]$$

On peut alors identifier les facteurs d'intensité $k'_1 = \mathcal{R}e(kr^{i\varepsilon})$ et $k'_2 = \mathcal{I}m(kr^{i\varepsilon})$. Ils sont facteurs respectivement d'un mode d'ouverture $\sqrt{r} \mathcal{R}e(\underline{u}(\varphi))$ et d'un mode de cisaillement $\sqrt{r} \mathcal{I}m(\underline{u}(\varphi))$ (au sens cinématique) mais qui ne vérifient pas les équations du problème. De [5] on déduit [RIC 88]

$$\frac{\hat{k}'_1 + i\hat{k}'_2}{\tilde{k}'_1 + i\tilde{k}'_2} = \left(\frac{\hat{L}}{\tilde{L}} \right)^{i\varepsilon}, \quad [6]$$

où $\hat{\cdot}$ et $\tilde{\cdot}$ désignent des quantités mesurées respectivement à une distance $r = \hat{L}$ et $r = \tilde{L}$ de la pointe.

En utilisant une décomposition de [4] différente

$$\underline{U}(x_1, x_2) = 2\sqrt{r} (\mathcal{R}e(k)\mathcal{R}e(r^{i\varepsilon}\underline{u}(\varphi)) - \mathcal{I}m(k)\mathcal{I}m(r^{i\varepsilon}\underline{u}(\varphi))) + \dots, \quad [7]$$

on peut définir les coefficients $k_1 = \mathcal{R}e(k)$ et $k_2 = -\mathcal{I}m(k)$. Cette définition est cohérente, ce sont les facteurs de solutions effectives du problème $\mathcal{R}e(r^{1/2+i\varepsilon}\underline{u}(\varphi))$ et $\mathcal{I}m(r^{1/2+i\varepsilon}\underline{u}(\varphi))$, qui coïncident avec k_I et k_{II} lorsque $\varepsilon = 0$ (comme les précédents). La relation

$$\psi = \tan^{-1}(k_2/k_1) = \tan^{-1}(-\mathcal{I}m(k)/\mathcal{R}e(k)) \quad [8]$$

est utilisée pour définir la mixité, bien que l'interprétation géométrique ne soit pas aussi évidente que dans le cas homogène.

A l'aide d'une propriété des composantes singulières du tenseur des contraintes σ_{12} et σ_{22} le long de l'interface en amont de la pointe de fissure lorsque les substrats sont isotropes [HUT 87]

$$\sigma_{22} + i\sigma_{12} = \frac{(k_1 + ik_2)r^{i\varepsilon}}{\sqrt{2\pi r}}, \quad [9]$$

on déduit en identifiant les parties réelle et imaginaire [GAU 87]

$$\psi = \tan^{-1}(k_2/k_1) = \tan^{-1}\left(\frac{\sigma_{12} \cos(\varepsilon \ln r) - \sigma_{22} \sin(\varepsilon \ln r)}{\sigma_{12} \sin(\varepsilon \ln r) + \sigma_{22} \cos(\varepsilon \ln r)}\right). \quad [10]$$

L'alternative étant évidemment, comme il est proposé ici, de calculer directement le coefficient complexe k , méthode exploitable dans tous les cas d'anisotropie.

REMARQUE. — Les résultats restent toutefois dépendant du choix des unités ou de l'adimensionalisation [RIC 88]. Si c est un coefficient de changement d'échelle, le module de k est multiplié par \sqrt{c} et la phase ψ est *augmentée* de $\varepsilon \ln c$. Cette dernière propriété compromet définitivement la possibilité de définir simplement la notion de mixité modale.

3. La fissure fermée en contact sans frottement

Dans le cas de refermeture de la fissure près de la pointe et de contact sans frottement, le mode complexe disparaît et est remplacé par un mode réel simple qui s'apparente au mode II du cas homogène, il subsiste toutefois dans ce mode une composante de compression sur les lèvres de la fissure (qui est nulle dans le cas homogène)

$$\underline{U}(x_1, x_2) = k_2 \sqrt{r} \underline{u}_2(\theta) + \dots \quad [11]$$

Ce résultat est obtenu en ajoutant au problème la condition de fermeture $[[U_2]] = 0$ (le crochet désigne le saut à la traversée de la fissure) et la condition de non-frottement

$\sigma_{12} = 0$. Le problème demeure alors linéaire et les procédures usuelles sont utilisables. Il reste ensuite à vérifier que la condition de compression

$$\sigma_{22} \leq 0 \quad [12]$$

est satisfaite. Ceci implique qu'il ne peut exister qu'une seule direction de glissement (figure 2). En effet si \underline{u}_2 est solution (ce qui détermine une direction de glissement) et vérifie donc [12] alors $-\underline{u}_2$ (la direction de glissement opposée) ne peut être solution en vertu de cette même condition [12].

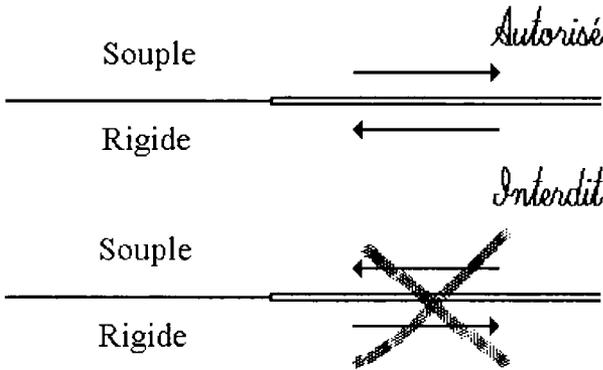


Figure 2. Directions de glissement autorisée et interdite

REMARQUE. — Cette propriété a une autre conséquence importante en terme de mécanique de la rupture, une fissure d'interface ne peut brancher hors de cette interface que vers le matériau le plus souple. En effet, on observe sur l'unique mode admissible [11] que le matériau rigide se trouve en compression alors que le matériau souple est en traction parallèlement à l'interface.

REMARQUE. — Nous n'aborderons pas dans cette étude le problème du contact avec frottement, de nouvelles difficultés surgissent rendant délicats certains raisonnements énergétiques [COM 77, LEG 99].

4. Le calcul du facteur d'intensité

Le calcul de k est obtenu à partir d'intégrales de contour par extraction à partir d'une solution éléments finis \underline{U}^{ef} . Cette méthode peut être utilisée dans toutes les situations d'anisotropie des substrats et peut être généralisée à toute solution singulière où la partie réelle de l'exposant peut prendre des valeurs différentes de 1/2 [LEG 87, LEG 93].

Pour la résumer, nous devons commencer par rappeler quelques éléments de la théorie des singularités [LEG 87] :

- si $r^{1/2+i\epsilon} \underline{u}$ est une solution du problème local alors $r^{-1/2-i\epsilon} \underline{v}$ et leurs conjugués sont également solutions (\underline{v} désigne le mode dual de \underline{u}),
- si \underline{U} et \underline{V} sont des solutions localement en équilibre à 0, alors l'intégrale :

$$\Psi(\underline{U}, \underline{V}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\sigma(\underline{U}) \underline{n} \bar{\underline{V}} - \sigma(\bar{\underline{V}}) \underline{n} \underline{U}) ds \tag{13}$$

est indépendante du contour Γ entourant la pointe et commençant et finissant sur les lèvres de la fissure (théorème de Betti), \underline{n} est la normale à Γ pointant vers l'origine (figure 3(a)),

- en particulier :

$$\Psi(r^{1/2+i\epsilon} \underline{u}, r^{-1/2+i\epsilon} \bar{\underline{v}}) \neq 0 ; \Psi(r^{1/2+i\epsilon} \underline{u}, r^{-1/2-i\epsilon} \underline{v}) = 0. \tag{14}$$

De ces propriétés, on déduit :

$$k = \Psi(\underline{U}^{ef}, r^{-1/2+i\epsilon} \bar{\underline{v}}), \tag{15}$$

où on a pris soin de normaliser le mode dual de telle sorte que

$$\Psi(r^{1/2+i\epsilon} \underline{u}, r^{-1/2+i\epsilon} \bar{\underline{v}}) = 1. \tag{16}$$

La mise en œuvre de [15] dans un code d'éléments finis (Modulef) permet donc de calculer le facteur k . Elle nécessite de connaître le mode \underline{u} et son dual \underline{v} qui sont obtenus numériquement à l'aide d'un petit code 1D (dans la variable φ) [LEG 87] qui peut être utilisé également dans tous les cas d'anisotropie.

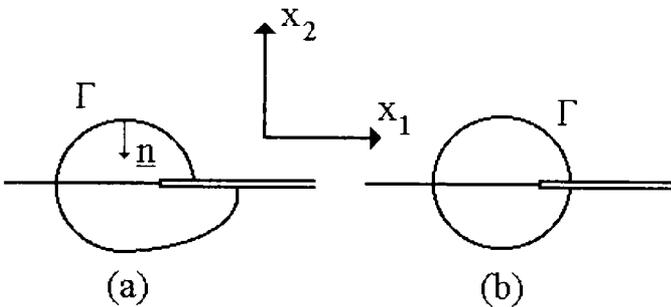


Figure 3. Contours pour le calcul des facteurs d'intensité

REMARQUE. — Une procédure tout à fait analogue peut être appliquée au calcul des facteurs réels. Les coefficients k_I et k_{II} [1] sont solutions d'un système 2×2 obtenu en utilisant successivement les deux modes duaux $1/\sqrt{r} \underline{u}_I^-$ et $1/\sqrt{r} \underline{u}_{II}^-$. Dans le calcul de k_2 [11], le contact requiert une condition supplémentaire, le contour Γ doit commencer et finir au même point situé à l'intérieur de la zone de contact (figure 3(b)).

5. L'essai brésilien

Divers montages sont mis en œuvre pour étudier l'influence de la mixité modale sur la croissance d'une fissure et d'une fissure d'interface en particulier. Certains utilisent les essais classiques de mécanique de la rupture : DCB (*Double Cantilever Beam*), ENF (*End Notched Flexure*), MMF (*Mixed Mode Flexure*), flexion 3 points et flexion 4 points [ODO 92, LEV 98]. Cependant, ces essais permettent difficilement de faire varier continuellement la mixité modale dans une gamme étendue de valeurs.

Nous retiendrons donc préférentiellement dans ce travail l'essai brésilien dont le montage est représenté symboliquement sur la figure 4. Le rayon du disque est $R = 10$ cm, la demi-longueur de la fissure diamétrale est $a = 6$ cm, et une pression $p = 10$ MPa est exercée sur deux zones diamétralement opposées de longueur 0.4 cm. La direction des efforts fait un angle θ avec l'axe de la fissure. Faire varier θ permet de modifier la mixité depuis le mode I jusqu'au mode II (au moins dans le cas homogène).

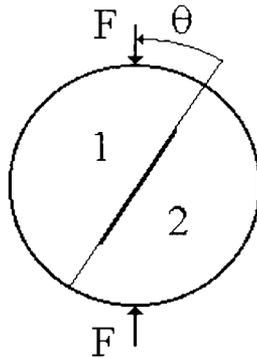


Figure 4. Représentation schématique de l'essai brésilien

REMARQUE. — L'essai brésilien est un essai employé en mécanique des roches. Il n'est peut-être pas spécialement adapté à l'étude des matériaux composites, il est utilisé ici à titre d'expérience numérique afin de disposer d'une géométrie permettant de faire varier continuellement la mixité modale.

Afin de tester la méthode et d'avoir un élément de comparaison, les calculs en déformations planes sont réalisés dans deux cas, le cas homogène isotrope, $E_1 = E_2 = 10$ GPa, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ et le cas du bimatériau, $E_1 = 10$ GPa, $E_2 = 100$ GPa, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$.

La figure 5 présente les variations des facteurs d'intensité normalisés

$$K'_I(\theta) = K_I(\theta)/K_I(0), K'_{II}(\theta) = K_{II}(\theta)/K_I(0) \quad [17]$$

à la pointe basse de la fissure, en fonction de l'angle θ d'application des efforts dans le cas homogène isotrope. La figure obtenue est symétrique par rapport à $\theta = 0$ où ne

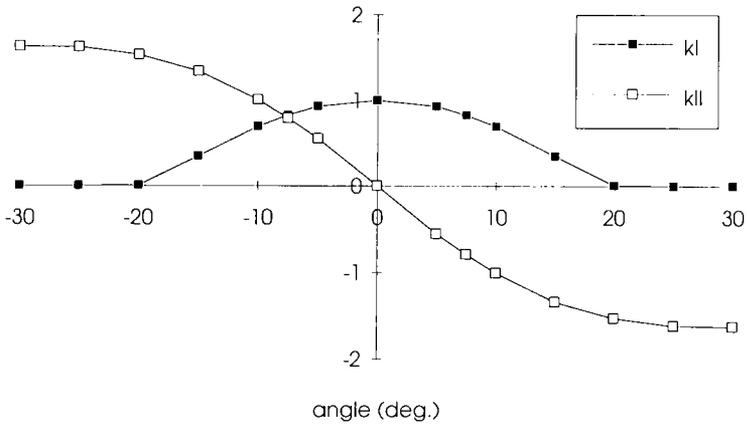


Figure 5. Distribution des facteurs d'intensité normalisés [17] dans le cas homogène isotrope, en fonction de l'angle de chargement

subsiste qu'un mode I pur. On constate d'autre part que pour $|\theta| > 20$ deg., il y a refermeture complète de la fissure, il ne reste plus alors aux extrémités que des modes II purs.

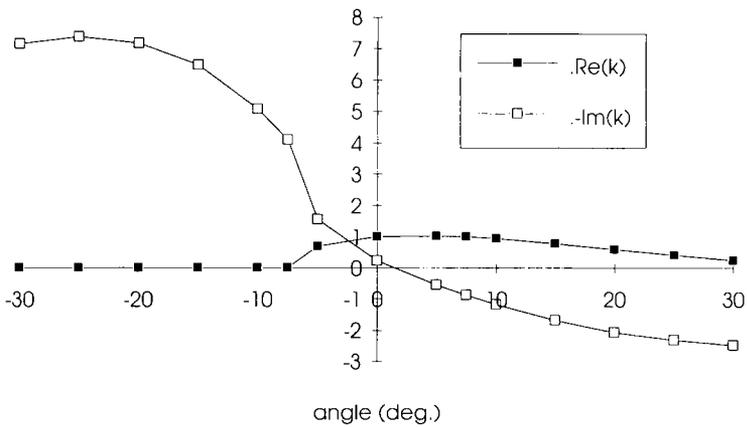


Figure 6. Distribution des parties réelle et imaginaire normalisées [18] du facteur d'intensité dans le cas du bimatérial, en fonction de l'angle de chargement

Dans le cas du bimatérial, illustré sur la figure 6, les coefficients sont normalisés de la façon suivante

$$\mathcal{R}e(k'(\theta)) = \mathcal{R}e(k(\theta))/\mathcal{R}e(k(0)), \mathcal{I}m(k'(\theta)) = \mathcal{I}m(k(\theta))/\mathcal{R}e(k(0)). \quad [18]$$

Indépendamment du choix de l'échelle, diverses situations se rencontrent. Pour $|\theta| \leq 7.5 \text{ deg.}$, il y a ouverture complète, c'est donc le mode complexe qui gouverne l'état de contrainte aux deux pointes. Pour $\theta \geq 10 \text{ deg.}$, la pointe basse de la fissure reste ouverte et demeure donc sous l'influence du mode complexe, alors que la pointe haute se referme et passe sous l'influence du mode réel correspondant au contact sans frottement. Symétriquement pour $\theta \leq -10 \text{ deg.}$, c'est la pointe haute qui reste ouverte et la pointe basse qui se referme (figure 7). Les calculs ont été menés jusqu'à $|\theta| = 30 \text{ deg.}$ et la refermeture complète n'a pas été observée pour cette valeur. Ces constatations sont en parfait accord avec la remarque du paragraphe 3 concernant les directions de glissement interdites. Le glissement relatif des deux matériaux provoqué par le chargement est compatible à la pointe haute mais pas à la pointe basse et provoque donc l'ouverture de cette pointe.

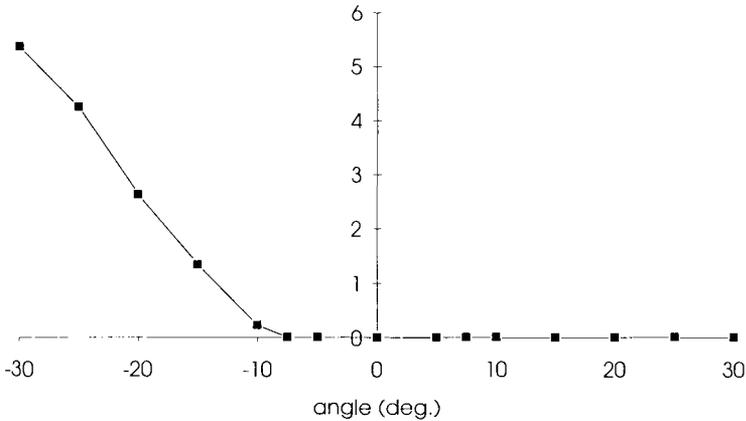


Figure 7. Longueur de fermeture de la pointe basse de la fissure en fonction de l'angle de chargement

Le tableau 1 propose une comparaison des différentes méthodes permettant de calculer la mixité modale. Quatre angle différents de l'essai brésilien ont été testés avec deux substrats isotropes. Dans le premier cas, on utilise la généralisation de [3], les deux composantes des contraintes sont calculées à une distance r_0 de la pointe de fissure. La deuxième méthode utilise la propriété [9] et la formule [10]. La troisième approche utilise le calcul direct de k proposé dans le paragraphe 4.

En examinant le tableau 1 on constate que la première méthode donne des résultats très fluctuants et différents des deux autres calculs. C'est une conséquence de la dépendance de ψ en r . Les deux approches suivantes donnent des résultats voisins. Il est clair cependant que les résultats de la deuxième colonne restent dépendants de la distance à la pointe de la fissure ; en effet, la propriété [9] ne concerne que la partie singulière du tenseur des contraintes, partie dont l'influence diminue quand on s'éloigne de la pointe de fissure. En revanche, le troisième calcul est indépendant de toute dis-

	r_0	1- ψ	2- ψ	3- ψ
$\theta = 0$				3.82
	0.04	15.40	1.66	
	0.06	15.21	3.31	
	0.09	14.55	4.28	
	0.13	13.60	4.90	
	0.18	12.53	5.21	
$\theta = 10$				61.00
	0.04	44.92	58.66	
	0.06	49.14	61.15	
	0.09	50.71	60.99	
	0.13	52.77	61.48	
	0.18	55.01	62.33	
$\theta = 20$				83.21
	0.04	68.46	82.20	
	0.06	71.96	83.97	
	0.09	73.97	84.25	
	0.13	75.84	84.55	
	0.18	77.85	85.17	
$\theta = 30$				86.88
	0.04	15.40	86.96	
	0.06	15.21	85.64	
	0.09	14.55	85.65	
	0.13	13.60	85.60	
	0.18	12.53	85.21	

Tableau 1. Comparaison des 3 méthodes de calcul de la mixité modale ψ , 1- à partir de [3] et [8], 2- à partir de [9] et [10], 3- à partir de [7] et [8]

tance. Les calculs sont réalisés sur 4 contours différents puis moyennés, toutefois les variations d'un contour à l'autre n'excèdent pas 1 %.

6. Calcul du taux de restitution de l'énergie

Il est nécessaire de faire appel aux développements asymptotiques raccordés pour obtenir une expression du taux de restitution de l'énergie, nous nous placerons ici dans le cas du bimateriau et de la fissure ouverte, c'est-à-dire dans le cas complexe (les résultats dans le cas réel, *i.e.* le cas homogène et le cas de la refermeture seront simplement rappelés à la fin).

Considérons un petit incrément de fissure $\delta\ell$ (adimensionnalisé, $\delta\ell \ll 1$) le long de l'interface (cette hypothèse est importante). La solution du nouveau problème $\underline{U}^{\delta\ell}$

peut être appréhendée comme une perturbation de la solution \underline{U}^0 du problème initial (*i.e.* non perturbé $\delta\ell = 0$), c'est le développement "extérieur":

$$\underline{U}^{\delta\ell}(x_1, x_2) = \underline{U}^0(x_1, x_2) + \text{termes de l'ordre de } \delta\ell. \quad [19]$$

Cette description est toutefois incomplète, elle n'offre pas une connaissance précise de la solution $\underline{U}^{\delta\ell}$ au voisinage de la perturbation (l'incrément de fissure), elle n'est valide qu'à l'extérieur de ce voisinage (d'où son nom). De plus, le terme correcteur reste à définir. Il convient donc d'y adjoindre le développement "intérieur" obtenu après changement de variable $y = x/\delta\ell$, $\rho = r/\delta\ell$ (dilatation):

$$\underline{U}^{\delta\ell}(\delta\ell y) = \underline{U}^0(0) + \sqrt{\delta\ell} \underline{V}^1(\delta\ell, y) + \dots, \quad [20]$$

avec

$$\underline{V}^1(\delta\ell, y) = 2\sqrt{\rho} \operatorname{Re} (k(\delta\ell\rho)^{i\epsilon} \underline{u}(\varphi)) + \hat{V}^1(\delta\ell, y). \quad [21]$$

La forme particulière de [20] et [21] est obtenue en utilisant une technique de raccordement [LEG 93]. Les termes \underline{V}^1 et \hat{V}^1 sont définis sur un domaine non borné (obtenu par dilatation et passage à la limite $\delta\ell \rightarrow 0$). Le premier terme, à droite de [21], exprime le comportement à l'infini de \underline{V}^1 . La décomposition est rendue nécessaire pour disposer grâce à \hat{V}^1 d'un problème bien posé.

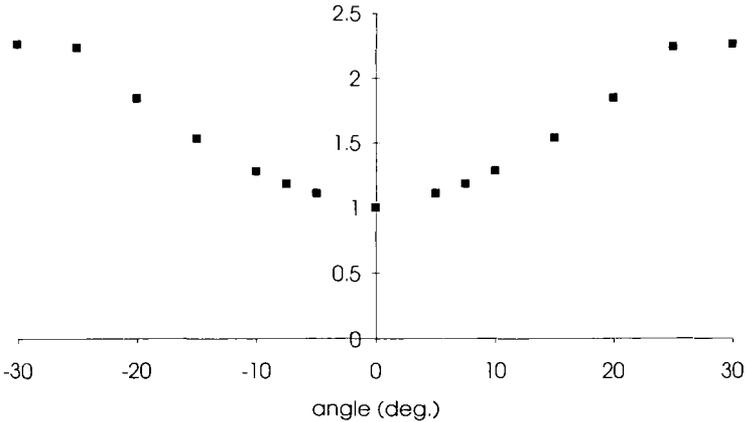


Figure 8. Taux de restitution de l'énergie normalisé en fonction de l'angle de charge dans le cas homogène

Si W^0 et $W^{\delta\ell}$ désignent respectivement l'énergie potentielle de la structure avant et après accroissement de fissure, la variation de cette énergie s'exprime à l'aide de [13] par :

$$\delta W = W^0 - W^{\delta\ell} = \Psi(\underline{U}^{\delta\ell}, \underline{U}^0). \quad [22]$$

Grâce aux développements asymptotiques, on peut dégager le terme le plus significatif de cette expression :

$$\delta W = \Psi(\underline{V}^1, 2\mathcal{R}e \left((\delta\ell\rho)^{1/2+i\epsilon} \underline{u}(\varphi) \right)) + \dots \tag{23}$$

Tous calculs faits, [23] s’écrit encore :

$$\delta W = \delta\ell K k \bar{k} + \dots, \tag{24}$$

où K est un coefficient réel, il se déduit du facteur d’intensité du mode dual au voisinage de l’infini dans le problème $\hat{V}^1 : \rho^{-1/2+i\epsilon} \underline{v}(\varphi)$ (expression qui intervient dans les raccordements et qui permet en particulier de définir le terme correcteur dans [19]) [LEG 93]. Le taux de restitution de l’énergie se déduit alors immédiatement de [24] :

$$G = \lim_{\delta\ell \rightarrow 0} \frac{\delta W}{\delta\ell} = K k \bar{k}. \tag{25}$$

Ce calcul passe donc par la détermination du coefficient K donnée par :

$$K = \Psi(\hat{V}^1, \rho^{1/2+i\epsilon} \underline{u}) = \Psi(\underline{V}^1, \rho^{1/2+i\epsilon} \underline{u}). \tag{26}$$

Pour résoudre numériquement le problème \hat{V}^1 ou V^1 , il est nécessaire de borner le domaine à une distance grande devant la dimension de la perturbation (= 1 dans le domaine dilaté) et d’appliquer la condition de raccordement sur cette frontière artificiellement créée.

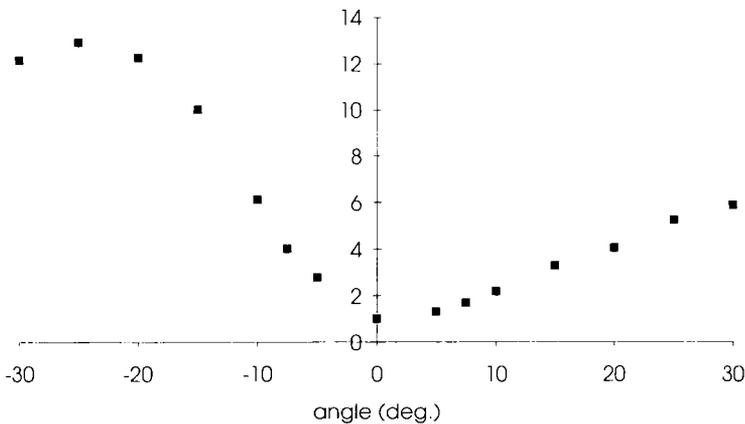


Figure 9. Taux de restitution de l’énergie normalisé en fonction de l’angle de charge-ment pour le bimatéériau

Contrairement au calcul de k , le calcul de K , ainsi réalisé, manque de précision (l’indépendance par rapport au contour n’est qu’approximative numériquement). Une

correction systématique permet d'améliorer la qualité des résultats. Le problème intérieur est résolu une première fois sans perturbation, il devrait dans ces conditions donner $\underline{V}^1 = 0$ soit :

$$\underline{V}^1(\delta\ell, y) = 2\mathcal{R}e \left(k(\delta\ell\rho)^{1/2+i\epsilon} \underline{u}(\varphi) \right) \quad [27]$$

D'après [13] et l'indépendance par rapport au contour, [26] devrait conduire à $K = 0$, mais les imprécisions dues au calcul entraînent que cette quantité, toute en restant petite, n'est pas nulle. Ce résidu que nous notons \tilde{K} va être utilisé comme correcteur pour définir un coefficient corrigé :

$$K^{corr} = K - \tilde{K} = \Psi(\underline{V}^1, \rho^{1/2+i\epsilon} \underline{u}) - \tilde{K} \quad [28]$$

On vérifie alors, que la condition d'indépendance par rapport au contour est plus rigoureusement satisfaite.

Sans plus de détails (mais avec des raisonnements tout à fait analogues), les expressions du taux de restitution de l'énergie dans le cas homogène et dans le cas de contact sont données respectivement par :

$$G = K_{11}k_I^2 + K_{22}k_{II}^2, G = K_2k_2^2 \text{ avec} \quad [29]$$

$$K_{11} = \Psi(\underline{V}_I^1, \sqrt{\rho} \underline{u}_I), K_{22} = \Psi(\underline{V}_{II}^1, \sqrt{\rho} \underline{u}_{II}), K_2 = \Psi(\underline{V}_2^1, \sqrt{\rho} \underline{u}_2), \quad [30]$$

où \underline{V}_I^1 , \underline{V}_{II}^1 et \underline{V}_2^1 sont les termes du développement intérieur se comportant à l'infini respectivement comme $\sqrt{\rho} \underline{u}_I$, $\sqrt{\rho} \underline{u}_{II}$ et $\sqrt{\rho} \underline{u}_2$ et vérifiant dans les deux premiers cas des conditions de bords libres sur les lèvres de la fissure et dans le second cas les conditions de contact.

Les figures suivantes montrent la variation du taux de restitution de l'énergie normalisé, $G' = G(\theta)/G(\theta = 0)$, à la pointe gauche de la fissure dans le cas homogène (figure 8) et du bimatérial (figure 9).

REMARQUE. — L'hypothèse d'une croissance le long de l'interface est essentielle, dans le cas d'un branchement hors de l'interface [24] contient un terme oscillant qui interdit *a priori* l'usage d'un critère énergétique [LEG 93].

7. Conclusion

L'originalité de ce travail repose sur le calcul direct du facteur d'intensité complexe du champ singulier décrivant les contraintes au voisinage de la pointe de fissure. Ce calcul donne accès à une définition et une détermination de la mixité modale. Il permet également, grâce aux développements asymptotiques raccordés, de calculer le taux de restitution de l'énergie quelle que soit la nature isotrope ou anisotrope des substrats.

8. Bibliographie

- [AME 92] AMESTOY M., LEBLOND J.B., « Crack paths in plane situations -II. Detailed form of the expansion of the stress intensity factors », *Int. J. Solids Structures*, vol. 29, 1992, page 465-501.
- [COM 77] COMNINOU M., « Interface crack with friction in the contact zone », *J. of Appl. Mech.*, vol. 44, 1977, page 780-781.
- [DUN 67] DUNDURS J., « Effect of elastic constants on stress in a composite under plane deformation », *J. Comp. Mater.*, vol. 1, 1967, page 310-322.
- [EVA 89] EVANS A.G., HUTCHINSON J.W., « Effects of non-planarity on the mixed mode fracture resistance of bimaterial interfaces », *Acta metall.*, vol. 37, 1989, page 909-916.
- [GAU 87] GAUTESSEN A.K., DUNDURS J., « The interface crack in a tension field », *J. Appl. Mech.*, vol. 54, 1987, page 93-98.
- [HUT 87] HUTCHINSON J.W., MEAR M.E., RICE J.R., « Crack paralleling an interface between dissimilar materials », *J. Appl. Mech.*, vol. 54, 1987, page 828-832.
- [LEG 87] LEGUILLON D., SANCHEZ-PALENCIA E., *Computation of singular solutions in elliptic problems and elasticity*, Masson, Paris, John Wiley, New York, 1987.
- [LEG 93] LEGUILLON D., « Analysis of the brittle fracture in composites using singularities », in *Mecamat '93, Int. seminar on micromechanics of materials*, Eyrolles, Paris, 1993, page 60-71.
- [LEG 99] LEGUILLON D., « Interface crack tip singularity with contact and friction », *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 327, série IIb, 1999, page 437-442.
- [LEV 98] LÉVÊQUE D., « Analyse de la tenue au délaminage des composites stratifiés : identification d'un modèle d'interface interlaminaire », thèse, E.N.S. de Cachan, France, 1998.
- [LIE 91] LIECHTI K.M., CHAI Y.S., « Biaxial loading experiments for determining interfacial fracture toughness », *J. Appl. Mech.*, vol. 58, 1991, page 680-687.
- [ODO 92] O'DOWD N.P., SHIH C.F., STOUT M.G., « Test geometries for measuring interfacial fracture toughness », *Int. J. Solids Structures*, vol. 29, 1992, page 571-589.
- [RIC 88] RICE J.R., « fracture mechanics concepts for interfacial cracks » *J. Appl. Mech.*, vol. 55, 1988, page 98-103.
- [THO 90] THOULESS M.D., « Fracture of model interface under mixed-mode loading », *Acta metall. mater.*, vol. 38, 1990, page 1135-1140.
- [WAN 90] WANG J.S., SUO Z., « Experimental determination of interfacial toughness curves using brazil-nut-sandwiches », *Acta metall. mater.*, vol. 38, 1990, page 1279-1290.