

---

# Méthodes alternatives aux éléments finis : collocation diffuse à double grille

Piotr Breitkopf\* — Gilbert Touzot\*\* — Pierre Villon\*

\*LG2MS, Université de Technologie de Compiègne  
BP 20529 F-60205 Compiègne cedex

\*\*INSA de Rouen, BP 08, 76131 Mont Saint-Aignan cedex

---

*RESUMÉ :* Nous présentons dans cet article une nouvelle méthode pour construire une approximation au second ordre basée sur les moindres carrés pondérés localement (MLS : moving least squares). Nous en déduisons une famille de fonctions de forme s'appuyant localement sur un nuage de nœuds avec lesquelles nous résolvons par collocation des problèmes de mécanique. Ce travail est une extension de la méthode des Différences Finies Généralisées initialement proposée par Liszka et Orkisz (GFDM : Generalized Finite Difference Method). Cependant, alors que GFDM utilise une approximation du second ordre sur un seul nuage de nœuds, nous proposons ici d'utiliser deux approximations du premier ordre en cascade sur deux nuages de nœuds différents et imbriqués. Cela permet d'obtenir la même consistance, mais avec un nombre de nœuds d'appui considérablement réduit, ce qui se traduit par une réduction du temps calcul et une structure de programme beaucoup plus proche de celle que l'on trouve dans le contexte éléments finis. Actuellement la méthode en est encore à un stade expérimental, mais les exemples présentés dans cet article sont très encourageants.

*ABSTRACT:* In the present paper we propose a new method for constructing a second order Moving Least Squares (MLS) approximation. The method leads to shape functions which are then used for solving Partial Differential Equations (PDE) by a collocation method. This work is an extension of the Generalized Finite Difference Method originally proposed by Liszka and Orkisz (GFDM). However it differs from GFDM by using a sequence of two first order numerical derivations based on linear polynomial basis instead of a second order derivation based on a quadratic polynomial basis. This two-stage approach leads to continuous approximation coefficients using a limited number of surrounding points and results into quite a simple program structure, very similar to that of the finite elements. The method is in an early stage of development so no definitive conclusions may be drawn, however example problems exhibit good convergence properties.

*MOTS-CLES :* méthodes sans maillage, approximation diffuse, collocation, éléments diffus.

*KEY WORDS :* meshfree methods, Moving Least Squares, collocation, Diffuse Elements.

---

## 1. Introduction

Les méthodes de collocation s'appuyant sur des grilles de nœuds irrégulières ont été introduites pour la première fois dans [LIS 80] sous la dénomination *Generalized Finite Difference Method*. Les équations d'équilibre en mécanique contiennent des termes du second ordre en déplacements, par conséquent, GFDM utilise une approximation moindres carrés avec une base polynômiale quadratique pour les résoudre. Cela entraîne une approximation MLS avec au moins 6 nœuds d'appui. Cela est parfois cause de dégénérescence dans certains cas de figure [SYC 81] et conduit donc, pour des questions de robustesse et de symétrie, à sélectionner beaucoup plus de nœuds [LIS 96], ce qui augmente la connectivité du système global.

Afin de pallier ces difficultés, nous présentons ici une approche différente. Tout d'abord, afin de simplifier le support des fonctions forme, nous définissons, pour chaque nœud  $i$ , son rayon d'influence  $r_i$ . Cela signifie que le nœud  $x_i$  contribue à l'approximation MLS de tous les points  $x$  qui se trouvent dans la boule de centre  $x_i$  et de rayon  $r_i$ , appelée dans la suite domaine d'influence du nœud  $i$ . D'autre part, nous remplaçons l'approximation MLS par une interpolation diffuse (ID) [BRE 99]. Enfin, afin de réduire le nombre de nœuds d'appui et, par conséquent, la connectivité globale, nous introduisons une « approximation diffuse double grille » (ADDG).

L'ADDG repose sur deux nuages de points imbriqués que nous appelons respectivement nœuds et points d'évaluation par analogie avec la méthode des éléments finis. Afin de calculer une dérivée seconde au nœud  $x_i^n$ , nous effectuons deux ID du premier degré en cascade de la façon suivante:

- nous calculons les dérivées premières en les points d'évaluation voisins  $x^{PE}$  par une première ID s'appuyant sur les nœuds,
- ensuite, nous obtenons la dérivée seconde en  $x_i^n$  en calculant une deuxième ID qui s'appuie, cette fois-ci, sur les dérivées premières précédemment calculées aux points d'évaluation  $x^{PE}$ .

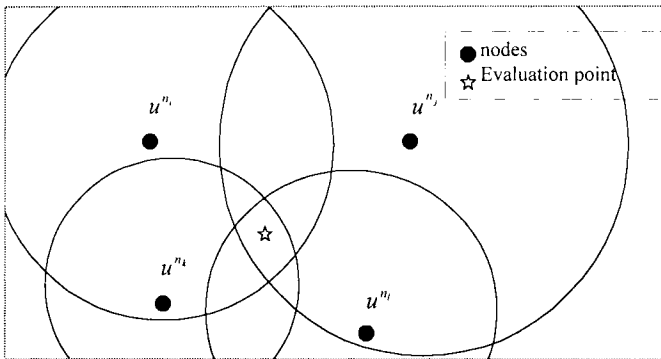
L'ADDG permet ainsi de résoudre, par collocation aux nœuds toutes les équations aux dérivées partielles (EDP) du second ordre. Dans l'exemple de l'élasticité linéaire, les déplacements inconnus sont attachés aux nœuds (points déplacements), leurs gradients sont définis aux points d'évaluation (points contraintes). Les déformations sont écrites aux points contraintes en faisant référence à des déplacements inconnus attachés aux points déplacements. Ensuite, les équations d'équilibre sont écrites aux nœuds et font apparaître des sommes sur les contraintes définies aux points contraintes, ce qui conduit à une procédure semblable à l'intégration élémentaire dans la méthode des éléments finis. Chaque étage d'ID fournit des dérivations continues dès que la connectivité supérieure ou

égale à 4 points d'appui voisins. On obtient ainsi un gain par rapport à la méthode GFDM :

- en termes de largeur de bande du système linéaire global ainsi obtenu,
- en simplicité d'algorithme.

## 2. Approximation diffuse double grille

L'idée essentielle de l'approche sans maillage (*Meshless Méthods*), qu'il s'agisse de la méthode des éléments diffus [NAY 92] ou bien EFG (*Element Free Galerkin*) [BEL 94], et d'autres par la suite, est de construire une approximation locale reposant uniquement sur les nœuds sans utiliser de maillage. Si  $x$  est un point quelconque, dit point d'évaluation, la valeur  $u(x)$  d'un champ  $u$  reconstruit dépend uniquement des valeurs nodales  $u(x_i)$  pour  $x_i$  nœud voisin de  $x$ . La contribution du nœud  $x_i$  à l'approximation en  $x$  est ajustée par la fonction poids  $w(x, x_i)$  qui est nulle dès que  $x$  sort du domaine d'influence du nœud  $x_i$ .



**Figure 1.** Un point d'évaluation  $x$  situé dans l'intersection des domaines d'influence des nœuds voisins  $x_i$  de  $x$

Nous allons maintenant expliciter l'ADDG en utilisant une terminologie appropriée à l'exemple de la mécanique des milieux continus, bien que la méthode s'applique à n'importe quelle EDP (thermique, fluides...). Les équations d'équilibre sous la forme forte introduisent des opérateurs différentiels du second ordre, par exemple  $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$  noté  $L$ , et des opérateurs du premier ordre, par exemple  $\frac{\partial}{\partial x}$  noté

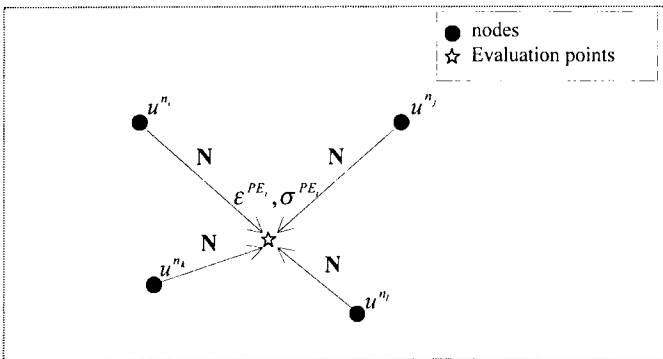
$P$  et  $\frac{\partial}{\partial y}$  noté  $Q$ . Nous allons décrire les deux étapes d'approximation des dérivées

en utilisant le fait que  $L(u) = Q(P(u))$ . La construction de l'ID est faite ici par la méthode globale-consistance [BRE 98].

Soit un champ scalaire  $u$  défini uniquement par ses valeurs nodales  $u(\mathbf{x}_j^n)$  sur un ensemble de nœuds (points déplacements)  $\mathbf{x}_j^n$ ,  $j = 1, \dots, n_n$ . Nous calculons les dérivées diffuses  $P(u(x))$  sur un ensemble de points d'évaluation (points contraintes)  $\mathbf{x}_i^{PE}$ ,  $i = 1, \dots, n_{PE}$  sous la forme :

$$u_{,P}(\mathbf{x}_i^{PE}) = Pu(\mathbf{x}_i^{PE}) = \sum_j N_{j,P}(\mathbf{x}_i^{PE}) u(\mathbf{x}_j^n) \tag{1}$$

Le coefficient  $N_{j,P}(\mathbf{x}_i^{PE})$  est la dérivée diffuse au sens  $P$  de la fonction de forme ID associée au nœud  $\mathbf{x}_j^n$  évaluée au point  $\mathbf{x}_i^{PE}$ .

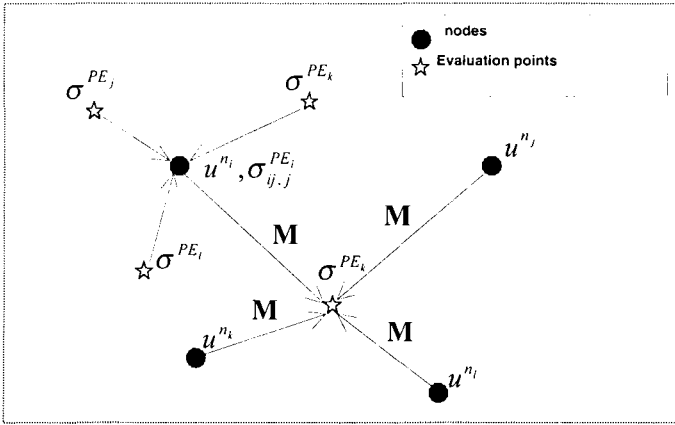


**Figure 2.** Première étape : contraintes et déformations en un point d'évaluation calculées à partir des déplacements nodaux

Ensuite, nous calculons la dérivée seconde  $Lu(\mathbf{x})$  en n'importe quel point  $x$  sous la forme :

$$Lu(\mathbf{x}) = \sum_i M_{i,L}(\mathbf{x}) u_{,P}(\mathbf{x}_i^{PE}) \tag{2}$$

où  $u_{,P}(\mathbf{x}_i^{PE}) = Pu(\mathbf{x}_i^{PE})$  et le coefficient  $M_{i,L}(\mathbf{x})$  est la dérivée diffuse au sens  $Q$  de la fonction de forme ID associée au nœud  $\mathbf{x}_i^{PE}$  évaluée au point  $\mathbf{x}$ .



**Figure 3.** Deuxième étape : les équations d'équilibre sont obtenues aux nœuds à partir des contraintes calculées aux points d'évaluation à l'étape 1

La composition des étapes 1 et 2 donne :

$$Lu(\mathbf{x}) = \sum_j \sum_i M_{i,L}(\mathbf{x}) N_{j,P}(\mathbf{x}_i^{PE}) u(\mathbf{x}_j^n) = \sum_j \alpha_j u(\mathbf{x}_j^n) \quad [3]$$

$$\alpha_j = \sum_i M_{i,L}(\mathbf{x}) N_{j,P}(\mathbf{x}_i^{PE})$$

Nous allons maintenant détailler les conditions de consistance que doivent vérifier les coefficients  $\alpha_j$  introduits précédemment. Le développement de Taylor de  $u(\mathbf{x}_j^n)$  centré en  $\mathbf{x}$  et substitué dans [3] donne :

$$Lu(\mathbf{x}) = \sum_j \alpha_j u(\mathbf{x}) + \sum_j \alpha_j (x_j^n - x) u_{,x}(\mathbf{x}) + \sum_j \alpha_j (y_j^n - y) u_{,y}(\mathbf{x}) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_j \alpha_j (x_j^n - x)^2 u_{,xx}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \sum_j \alpha_j (y_j^n - y)^2 u_{,yy}(\mathbf{x}) + \sum_j \alpha_j (x_j^n - x)(y_j^n - y) u_{,xy}(\mathbf{x}) + \dots$$

ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$Lu(\mathbf{x}) \equiv (\mathbf{Pa})^T \begin{Bmatrix} u \\ u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,xx} \\ u_{,yy} \\ u_{,xy} \end{Bmatrix} \quad [4]$$

où  $\mathbf{P}$  est la matrice de consistance (à ne pas confondre avec l'opérateur de dérivation  $P$  de l'équation [2]) qui s'écrit :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 \\ x_j^n - x \\ y_j^n - y \\ \frac{1}{2}(x_j^n - x)^2 \\ \frac{1}{2}(y_j^n - y)^2 \\ (x_j^n - x)(y_j^n - y) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \alpha_j \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

Si

$$\mathbf{Pa} = \mathbf{e}^i \quad [5]$$

où

$$\mathbf{e}^i = \begin{Bmatrix} \vdots \\ \delta_{ij} \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \begin{cases} \delta_{ij} = 1 \text{ when } i = j \\ \delta_{ij} = 0 \text{ when } i \neq j \end{cases}$$

est satisfait pour les indices  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  alors l'opérateur  $L$  défini par [4] représente, de façon consistante à l'ordre 2, respectivement :

$$L \equiv I, L \equiv \frac{\partial}{\partial x}, L \equiv \frac{\partial}{\partial y}, L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}, L \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2}, L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}, L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$$

Les conditions [5] peuvent être décomposées en 2 ensembles de contraintes indépendantes agissant respectivement sur les coefficients  $N_i$  et  $M_i$  introduits en [1] et [2].

$$\mathbf{QN} = \mathbf{e}^k \quad [6]$$

et

$$\mathbf{RM} = \mathbf{e}^l \quad [7]$$

On peut ramener la première étape [3] à des conditions de consistance du premier ordre, ce qui donne, pour la matrice  $\mathbf{Q}$  :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \cdots & x_j^n - x & \cdots \\ & y_j^n - y & \end{bmatrix} \quad [8]$$

Ce qui se traduit avec la deuxième étape de [3], sur la matrice  $\mathbf{R}$ , par :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1, n_{PE}} N_{j,P} (x_j^{PE} - x)^2 & & \\ \cdots & \frac{1}{2} \sum_{j=1, n_{PE}} N_{j,P} (y_j^{PE} - y)^2 & \cdots \\ \sum_{j=1, n_{PE}} N_{j,P} (x_j^{PE} - x)(y_j^{PE} - y) & & \end{bmatrix} \quad [9]$$

L'approche globale consistante définit alors le vecteur  $\mathbf{N}$  comme celui qui minimise, sous les contraintes linéaires [6], la forme quadratique :

$$\min(\mathbf{N}^T \mathbf{W}_n^{-1} \mathbf{N}) \quad [10]$$

où  $\mathbf{W}_n$  est la matrice diagonale des poids  $x(x_j^n, x_i^{PE})$ . La solution de [10] sous contrainte [6] est [BRE 98].

$$\mathbf{N}^T = \mathbf{e}^{k^T} (\mathbf{QW}_n \mathbf{Q}^T)^{-1} \mathbf{QW}_n$$

pour tous les choix de  $k$ .

Le cas particulier  $k = 1$  fournit le vecteur  $\mathbf{N}$  correspondant aux fonctions de forme associées à l’ID linéaire, alors que  $k = 2$  et  $k = 3$  représentent les dérivées diffuses.

De même, les coefficients  $\mathbf{M}$  sont solution de :

$$\min(\mathbf{M}^T \mathbf{W}_{PE}^{-1} \mathbf{M}) \tag{11}$$

sous les contraintes [7] avec  $\mathbf{W}_{PE}$  matrice diagonale des poids  $x(x_i^{PE}, x)$ .

La solution de [11] sous contrainte [7] est :

$$\mathbf{M}^T = \mathbf{e}^{lT} (\mathbf{R} \mathbf{W}_{PE} \mathbf{R}^T)^{-1} \mathbf{R} \mathbf{W}_{PE}$$

Le tableau suivant résume tous les résultats que l’on obtient suivant les choix de  $k$  et  $l$ .

	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	$l = 4$
$k = 1$	$N, M$			
$k = 2$	$N_{,x}, M_{,x}$	$N_{,x}, M_{,xx}$		$N_{,x}, M_{,xy}$
$k = 3$	$N_{,y}, M_{,y}$		$N_{,y}, M_{,yy}$	$N_{,y}, M_{,yx}$

**Tableau 1.** Résultats de la résolution des problèmes ([10], [6]) et ([11], [7]) pour tous les choix possibles de  $k$  et  $l$

REMARQUE 1.–

On peut obtenir  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  avec  $(k,l)=(2,4)$  ou bien  $(k,l)=(3,4)$ . Cela correspond à intervertir l’ordre des dérivations. Les résultats numériques sont très légèrement différents, mais n’affectent pas la solution.

REMARQUE 2.–

Le choix de ([8], [9]) n’est pas unique. Si l’on prend :

$$\mathbf{Q} \equiv \mathbf{P} \tag{12}$$

alors la [7] est réduite à la consistance d’ordre zéro, c’est-à-dire la partition de l’unité,



$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad [13]$$

et la double grille devient la simple approximation du second ordre utilisée dans GFDM.

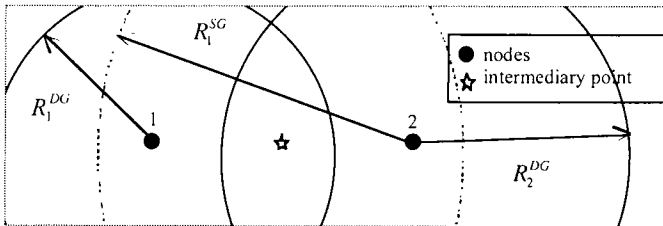
Bien que les méthodes GFDM et ADDG aient le même ordre de consistance, l'approche en 2 étapes est intéressante à plusieurs titres :

La continuité de l'approximation MLS au second ordre et simple grille (GFDM) oblige à définir, pour chaque nœud  $x_i$ , un rayon  $r_i$  tel que tout point soit dans l'intersection d'au moins 7 domaines d'influence. Avec des grilles irrégulières, cela conduit à des rayons d'influence importants et à une connectivité bien supérieure à 7. Dans ce cas, il est possible de ne sélectionner qu'une partie des nœuds voisins (*node stencils* dans [LIS 96]), mais cela se fait au détriment de la continuité.

ADDG requiert une connectivité bien plus faible : 4 nœuds voisins sur la première grille et 5 sur la seconde.

Dans la pratique, pour ADDG, le choix de la première grille peut être imposé, par exemple par la CAO. Par contre, on dispose la seconde grille en toute liberté, de façon à obtenir le meilleur conditionnement possible.

Dans ADDG, les points où sont exprimées les lois de comportement sont différents des nœuds où l'on cherche les inconnues (déplacements, vitesses...). Cela est particulièrement intéressant pour l'étude des milieux non homogènes ou multiphasiques.



**Figure 4.** Le domaine d'influence des nœuds dans ADDG est considérablement réduit par rapport à la méthode GFDM

### 3. La méthode de collocation diffuse double grille

Afin de clarifier l'exposé, nous présentons la méthode à travers l'étude de quelques problèmes simples, en commençant par l'équation de Poisson.

$$k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (x, y) \in \Omega, \quad \Omega = (-1, 1) \times (-1, 1) \quad [14]$$

Les conditions aux limites sont de type Neuman et Dirichlet :

$$u = \hat{u}, \quad (x, y) \in \partial\Omega_D \quad [15]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega_N \quad [16]$$

Nous utilisons la première grille (nœuds) pour évaluer les dérivées premières  $\frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}^{PE})$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}^{PE})$  à partir des valeurs nodales  $u(\mathbf{x}^n)$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}^{PE}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}^{PE}) \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \begin{Bmatrix} u_i \\ \vdots \end{Bmatrix} \quad [17]$$

La matrice  $\mathbf{B}$  est analogue à celle que l'on rencontre dans la méthode des éléments finis.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cdots & N_{,x} & \cdots \\ \cdots & N_{,y} & \cdots \end{bmatrix} \quad [18]$$

L'opérateur de Laplace est représenté en un nœud par une combinaison linéaire des gradients aux points d'évaluation voisins avec les coefficients  $M_{,xx}$  et  $M_{,yy}$

$$k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\mathbf{x}^n) + k_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\mathbf{x}^n) = \sum_i \left[ k_x M_{i,xx}(\mathbf{x}^n) \quad k_y M_{i,yy}(\mathbf{x}^n) \right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(\mathbf{x}_i^{PE}) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(\mathbf{x}_i^{PE}) \end{Bmatrix} \quad [19]$$

Cette opération effectuée sur tous les nœuds représente la discrétisation de [14] et s'opère en deux étapes :

- la première boucle évalue les matrices  $\mathbf{B}$  sur les points d'évaluation,
- la seconde boucle permet d'écrire l'équation discrétisée sur chacun des nœuds.

On peut restructurer ces deux boucles de façon à obtenir une seule boucle effectuée sur les points d'évaluation. Ceux-ci deviennent analogues aux points de Gauss dans la méthode des éléments finis. On obtient ainsi une procédure d'assemblage classique. La contribution d'un point d'évaluation est de la forme :

$$\mathbf{BT} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \begin{Bmatrix} \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{k}^{PE} \begin{Bmatrix} \vdots \\ u_i \\ \vdots \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \quad [20]$$

où  $\mathbf{D}$  représente la loi de comportement et  $\mathbf{BT}$  est donné par :

$$\mathbf{BT} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ M_{j,xx} & & M_{j,yy} \\ & \vdots & \end{bmatrix} \quad [21]$$

Et l'assemblage est donné par :

$$\left( \sum_{\substack{\text{evaluation} \\ \text{points}}} \mathbf{k}_i^{PE} \right) \mathbf{u} = \mathbf{Ku} = \mathbf{f} \quad [22]$$

La matrice  $\mathbf{BT}$  joue le rôle de  $\mathbf{B}^T$  et on a ainsi introduit une matrice élémentaire  $\mathbf{k}_e$  en chaque point d'évaluation. Cependant, il est clair que ceci ne correspond pas à une intégration numérique. D'autre part, contrairement à ce qui se passe en éléments finis,  $\mathbf{BT} \neq \mathbf{B}^T$  ce qui a pour conséquence de perdre la symétrie au niveau élémentaire  $\mathbf{k}_e$  et global  $\mathbf{K}$ . Par contre, on peut aisément introduire la notion « d'élément de collocation diffuse » et s'insérer dans un code d'éléments finis existant, avec de très minimes adaptations :

- les données d'entrée sont les connectivités au sens diffus,
- les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}^T$  sont remplacées par leurs correspondants diffus,
- le solveur doit opérer sur un système non symétrique.

#### 4. Conditions aux limites

Les conditions de Dirichlet sont obtenues en utilisant des fonctions poids singulières qui rendent l'approximation diffuse interpolante [BRE 99]. On fait

ensuite figurer directement ces conditions dans le système global en insérant autant de lignes qu'il y a de nœuds frontière sur  $\Omega_D$ .

Pour les conditions de Neuman, on utilise **BT** afin de représenter [16] et l'on crée les lignes correspondantes dans le système global.

$$\mathbf{BT} = \left[ \begin{array}{cc} \vdots & \\ M_{j,x}n_x & M_{j,y}n_y \\ \vdots & \\ \vdots & \\ M_{j,xx} & M_{j,yy} \\ \vdots & \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Conditions de Neumann} \\ \\ \\ \text{autres noeuds} \end{array} \quad [23]$$

Dans le cadre de la méthode GFDM, les conditions de Neumann sont renforcées [LIS 96] en introduisant des degrés de liberté supplémentaires sur le bord. Ceci peut aussi être fait dans le contexte ADDG, bien que nous n'en ayons pas ressenti la nécessité pour nos premiers essais numériques.

### 5. Exemples numériques

#### 5.1. Equation de Poisson

Dans les équations [14] et [16], nous ajustons les fonctions  $f(x,y)$  et  $g(x,y)$  de façon à ce que la solution de l'équation  $u_{ex}(x,y)$  soit une fonction imposée. Il est clair que si  $u_{ex}$  est un polynôme de degré au plus 2, la méthode ADDG doit le retrouver exactement. Nous avons satisfait ce type de test avec une précision de  $10^{-10}$  minimum sur des grilles aléatoirement distribuées.

Comme deuxième exemple, nous avons choisi  $f(x,y)$  et  $g(x,y)$  telles que

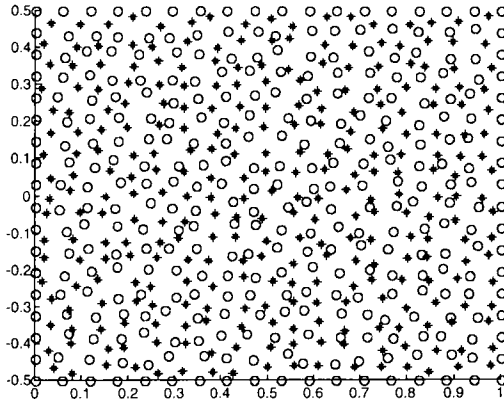
$$u(x,y) = y^2 \sin(k\pi x) \quad [24]$$

Nous avons travaillé sur une grille irrégulière de nœuds afin de ne pas rentrer dans les cas particuliers superconvergentes. Pour cela, on part d'une grille régulière de pas  $h$ , puis chaque nœud est déplacé aléatoirement dans une boule de diamètre  $\mathcal{E}$  (entre 0 et 1.0) autour de sa position initiale. Ainsi chaque nœud intérieur  $i$  peut se déplacer d'une quantité :

$$\Delta \mathbf{x}_i = \varepsilon * h * (\text{rand}_1 - 0.5), \varepsilon * h * (\text{rand}_2 - 0.5) \quad [25]$$

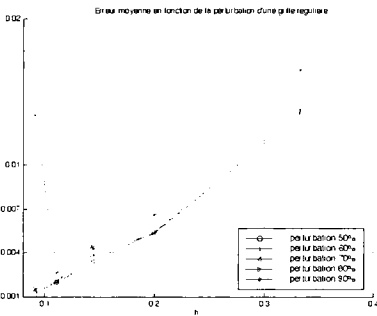
où rand est un nombre aléatoire entre 0 et +1. Pour étudier la convergence, on fait ensuite tendre  $h$  vers 0.

La figure 5 montre une double grille de  $18*18$  nœuds et  $17*17$  points d'évaluation pour  $\varepsilon = 0.5$ .

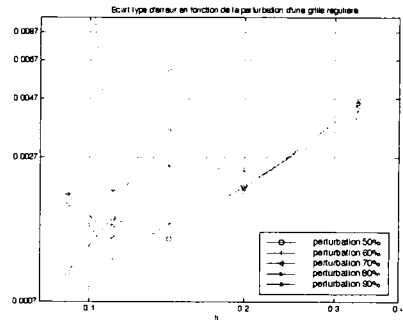


**Figure 5.** Une grille régulière perturbée de nœuds (étoiles) et de points d'évaluation (cercles)

Les résultats numériques sont analysés sur une série de tirages aléatoires. Les figures suivantes montrent les valeurs moyennes d'erreur relative et l'écart type d'erreur sur 200 essais, pour différentes valeurs de  $h$ .



**Figure 6.** Erreur relative de la solution en fonction du taux de perturbation  $\varepsilon$  d'une grille régulière ; moyenne pour 200 essais

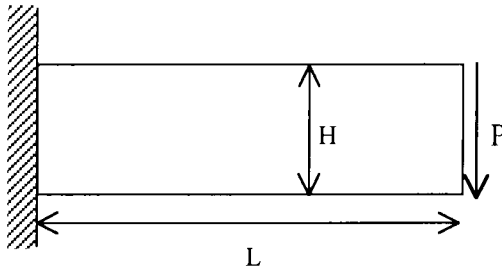


**Figure 7.** Erreur relative de la solution en fonction du taux de perturbation  $\varepsilon$  d'une grille régulière ; écart type pour 200 essais

On voit que pour des valeurs de  $\mathcal{E}$  inférieures à 0.9 le taux de convergence est quadratique. Les problèmes de convergence pour des valeurs de  $\mathcal{E}$  supérieurs à 0.8 peuvent être expliqués par la défaillance de l’algorithme de recherche de connectivité qui, dans sa version actuelle, ne garantit pas la continuité du domaine. Un travail supplémentaire est nécessaire pour analyser cet aspect qui est d’ailleurs commun aux méthodes de collocation et aux méthodes basées sur une formulation variationnelle [ORK 98].

**5.2. Poutre encastrée d’un côté**

Dans ce second exemple (figure 8), nous résolvons les équations d’élasticité linéaire.



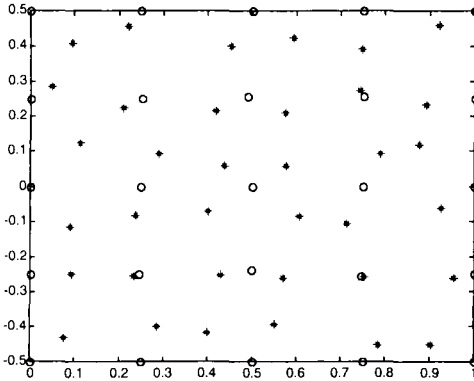
**Figure 8.** Poutre encastrée d’un côté

La solution analytique est bien connue [TIM 87] et correspond à un champ de déplacements cubique :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{-Py}{EI} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{P}{I} \left( \frac{\nu}{E} - \frac{1}{G} \right) \frac{y^3}{6} \\
 v &= \frac{P}{EI} \left( \left( L - \frac{x}{3} \right) \frac{x^2}{2} + \nu(L-x) \frac{y^2}{2} \right) + \frac{PH^2x}{8GI} \\
 G &= \frac{E}{2(1+\nu)}
 \end{aligned}
 \tag{26}$$

$$\sigma_x = \frac{-Py(L-x)}{I}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau = \frac{P}{2I} \left( \frac{H^2}{4} - y^2 \right)$$

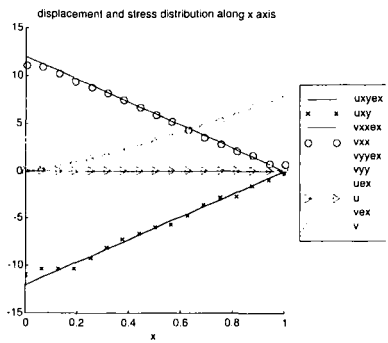
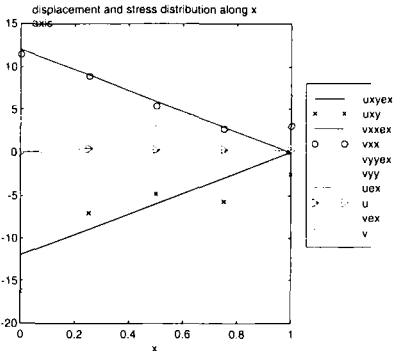
Le nuage de nœuds est engendré et raffiné suivant la même technique que précédemment. La figure 9 illustre le cas de 25 nœuds et 36 points d'évaluation. Des conditions de Dirichlet sont imposées pour  $x = 0$  et des conditions de Neuman sont imposées sur le reste de la frontière.



**Figure 9.** Grille de nœuds et de points d'évaluation obtenus avec  $\epsilon \in \langle 0,01h \rangle$  pour les nœuds et  $\epsilon \in \langle 0,05h \rangle$  pour les points d'évaluation

Les figures 10 et 11 donnent la distribution des déplacements et de leurs dérivées le long de l'axe de symétrie  $y = 0$  (il faut se rappeler que les grilles ne sont pas symétriques par rapport à cet axe !). La figure 10 présente les résultats sur une grille grossière et la figure 11 est associée à une grille raffinée. Les quantités représentées

sont  $u, v, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ . Le trait continu est associé à la solution exacte [26].



**Figure 10.** Les 25 nœuds et 36 points d'évaluation,  $|u - u_{ex}|/|u_{ex}| = 20\%$

**Figure 11.** 289 nœuds et 324 points d'évaluation,  $|u - u_{ex}|/|u_{ex}| = 2.35\%$

On observe une bonne convergence des déplacements. La dérivée seconde présente toutefois des oscillations, même sur des grilles raffinées. Cela explique probablement le fait que le taux de convergence dans cet exemple est de l'ordre de 1.79 et est inférieur à celui du laplacien. L'erreur de la dérivée seconde sur la frontière est inhérente à la méthode car le pattern de points pris en compte est déséquilibré, tous les nœuds étant positionnés d'un seul côté. Ce manque de précision de la dérivée seconde peut être observé sur la figure 11 à  $x = 0$  et  $x = L$ . Cela ne conduit pas à des difficultés numériques car les équations d'équilibre sont remplacées en ces points par des conditions limites.

## 6. Conclusion

L'approche double grille est une alternative intéressante par rapport à la méthode simple grille. En termes d'efficacité, les taux de convergence obtenus avec ADDG sont identiques à ceux de GFDM [LIS 96]. La différence principale réside dans la stratégie de connectivité nodale. Les figures du type « stars » ou « stencils » décrites dans GFDM conduisent à des fonctions de forme discontinues ou très irrégulières. Le fait de ne pas prendre en compte tous les nœuds voisins, mais seulement certains suivant un motif particulier, est justifié dans la mesure où cela améliore la largeur de bande et le conditionnement du système global. Ce problème ne se pose plus en double grille du fait de la décomposition de l'opérateur du second ordre en deux opérateurs du premier ordre. Cela conduit naturellement à une connectivité nodale réduite et, par conséquent, à une matrice globale creuse. En dehors des configurations pathologiques bien connues (nœuds alignés, cocycliques...), nous n'avons pas rencontré de difficultés numériques.

D'autre part, sur le plan de l'implémentation, ADDG offre une structure algorithmique complètement identique à la méthode des éléments finis. La matrice  $\mathbf{B}^T * \mathbf{D} * \mathbf{B}$  est analogue à la matrice élémentaire  $\mathbf{B}^T * \mathbf{D} * \mathbf{B}$  et la procédure d'assemblage s'applique de la même façon. Il est possible d'utiliser le même programme pour résoudre les EDP avec une approche variationnelle (type éléments finis, éléments diffus ou EFG) et non variationnelle du type ADDG.

Bien que prometteurs, les résultats présentés dans cet article doivent être complétés par des exemples plus importants, notamment en mécanique non linéaire. D'autre part, afin de rendre la méthode efficace, il faut lui adjoindre l'auto-adaptativité. Ceci ne pose pas de problème fondamental et est en cours de développement.



## 7. Bibliographie

- [BEL 94] BELYTSCHKO T., LU Y.Y., GU L., « Element-free Galerkin Methods », *Intern. Journ. for Numer. Meth. in Engng.*, 37, 1994, p. 229-256.
- [BRE 98] BREITKOPF P., TOUZOT G., VILLON P., « Consistency Approach and Diffuse Derivation in Element Free Methods Based on Moving Least Squares Approximation », *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 5, p. 479-501, 1998.
- [BRE 99] BREITKOPF P., TOUZOT G., VILLON P., « Explicit form and efficient computation of MLS shape functions and their derivatives », to appear in *Intern. Journ. for Numer. Meth. in Engng.*
- [LIS 84] LISZKA T., « An Interpolation Method for an Irregular Net of Nodes », *IJNME*, 20, 1984, p. 1599-1612.
- [LIS 83] LISZKA T., ORKISZ J., « Solution of Nonlinear Problems of Mechanics by the Finite Difference Method at Arbitrary Meshes », *Computer and Mechanics*, 5, 1983, p. 117-130.
- [LIS 80] LISZKA T., ORKISZ J., « The Finite Difference Method at Arbitrary Irregular Grids and its Application in Applied Mechanics », *Computer and Structures*, 11, 1980, p. 83-95.
- [LIS 96] LISZKA, T.J., DUARTE C.A.M., TWORZYDLO W.W., « hp-Meshless cloud method », *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 139, 1996.
- [NAY 92] NAYROLES B., TOUZOT G., VILLON P., « Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximation and Diffuse Elements », *Computational Mechanics*, 10, 1992, p. 307-318.
- [ORK 98] ORKISZ J., « Meshless finite difference method, I. Basic approach, II. Adaptive approach », *IACM-Fourth World Congress on Computational Mechanics*, Buenos Aires, 1998.
- [SYC 81] SYCZEWSKI M., TRIBILLO R., « Singularities of Sets Used in the Mesh Method », *Computer and Structures*, 14, 5-6, p. 509-511, 1981.
- [TIM 87] TIMOSHENKO S.P., GOODIER J.N., *Theory of Elasticity*, 3<sup>rd</sup> edition, McGraw-Hill, New York, 1987.