

---

# Analyse non linéaire géométrique de plaques multicouches

## Un nouvel élément fini $C^1$

Olivier Polit\*\* — Maurice Touratier\*

\*LM<sup>2</sup>S - UPRES.A 8007 - ENSAM  
151 Bd de l'Hopital - F\_75013 Paris

\*\* Université Paris X - IUT - Dép. GMP  
1 Chemin Desvallières - F\_92410 Ville d'Avray

olivier.polit@paris.ensam.fr

---

*RÉSUMÉ.* Ce travail porte plus particulièrement sur l'analyse non linéaire géométrique des plaques multicouches. On utilise un modèle de plaque raffiné qui assure la continuité du déplacement et des contraintes de cisaillement transverse à l'interface des couches, et vérifie les conditions aux limites sur les faces supérieure et inférieure de la plaque. L'élément fini  $C^1$  à six noeuds présenté utilise une approche déplacement dans le cadre d'une méthode d'élément fini conforme. Le déplacement transverse est approximé par l'E.F d'Argyris alors que l'E.F de Kanev est utilisé pour les deux déplacements membranaires et les deux rotations. Ce choix permet d'éviter les problèmes de verrouillage en cisaillement. L'efficacité de cet élément est présentée à travers un ensemble de tests linéaires et non linéaires.

*ABSTRACT.* In this paper, we focus our attention on geometrically non linear behaviour of multilayered plates. For this purpose, a high order plate model is used which exactly ensure both the continuity conditions for displacements and transverse shear stresses at the interfaces between layers of a laminated structure, and the boundary conditions at the upper and lower surfaces of the plate. Based on this kinematics, a six node  $C^1$  triangular finite element is developed, using a conforming finite element method and a displacement approach. The Argyris interpolation is used for transverse displacement and the Kanev interpolation is used for membrane displacements and transverse shear rotations. A set of linear and non-linear tests is presented in order to show the efficiency of this finite element.

*MOTS-CLÉS :* plaques multicouches, modèle raffiné, élément fini  $C^1$ , contrainte normale transversale, tests linéaires et non linéaires.

*KEY WORDS :* multilayered plates, refined model,  $C^1$  finite element, transverse normal stress, linear and non-linear tests.

## 1. Introduction

Les plaques multicouches sont de plus en plus utilisées dans les structures aéronautiques, automobiles et industrielles en général. Les problèmes d'analyse, de dimensionnement et de conception de ces composants sont réels et nécessitent l'utilisation d'outils numériques souvent difficiles à mettre en œuvre de par la complexité des structures. L'objectif de ce travail est de présenter un outil numérique simple d'utilisation, fiable et précis à la fois en déplacement et en contrainte, pour un coût de mise en œuvre et de calcul modéré.

Une classification des différentes approches numériques est présentée en [RED 89] de même que dans [NOO 96]. En excluant les modèles tridimensionnels et quasi-tridimensionnels dont le coût est élevé car il faut au moins un élément dans l'épaisseur de chaque couche ce qui entraîne un nombre d'éléments prohibitifs si l'on veut rester dans des rapports dimensionnels raisonnables pour chaque élément, il reste les approches bidimensionnelles. Dans ce cadre là, on rencontre trois types d'approches :

- la famille “layer-wise” [RED 97] dont le principal défaut est d'introduire un nombre de fonctions inconnues et donc de degrés de liberté (ddl) fonction du nombre de couches. Le maillage est donc bidimensionnel mais pour des plaques composées de nombreuses couches, le coût de ce type d'approche est du même ordre que celui d'un maillage tridimensionnel avec les problèmes de verrouillage en cisaillement transverse en plus. Il a par contre un avantage sur l'approche tridimensionnelle pure, la possibilité de modifier de manière découplée le maillage plan et le raffinement dans la direction de l'épaisseur ;

- les approches basées sur les modèles du premier ordre de type Reissner-Mindlin qui nécessitent le calcul des coefficients correcteurs en cisaillement transverse par des méthodes itératives [AUR 99] ou par des approches de type prédicteur-correcteur [NOO 94] de même que des procédures spécifiques pour obtenir des distributions correctes de contraintes dans l'épaisseur. On citera aussi le travail de Carrera [CAR 96] basé sur le modèle de Reissner-Mindlin auquel il ajoute deux termes dit “zig-zag” afin d'assurer la continuité. Il possède donc 7 déplacements généralisés  $C^0$  dans son champ de déplacement mais il est confronté au problème du verrouillage en cisaillement transverse ;

- les approches utilisant des modèles raffinés. Dans ce cadre, il semble que le travail présenté par Di Sciuva [SCI 95] soit le plus proche de nos objectifs. Il utilise un modèle raffiné et les fonctions d'Heaviside pour assurer la continuité mais l'élément fini développé souffre de verrouillage en cisaillement transverse.

Notre choix s'est donc naturellement porté vers l'utilisation d'une théorie raffinée bidimensionnelle, permettant de s'affranchir des coefficients de correction en cisaillement transverse, d'assurer la continuité des grandeurs physiques aux interfaces des couches et de fournir des résultats intérieurs et au bord précis, et vers la méthode des éléments finis. Dans ce travail, nous présentons donc un élément fini, basé sur un modèle raffiné de plaque issu des travaux

de Touratier [TOU 91], et obtenu par une méthode d'approximation conforme dans le cadre d'une approche en déplacement. Le modèle Sinus utilisé permet :

- une distribution en cosinus des déformations de cisaillement transverse et donc l'absence de coefficients correcteurs en cisaillement transverse ;
- la vérification des conditions aux limites statiques sur les faces supérieure et inférieure de la plaque ;
- d'utiliser les cinq déplacements généralisés habituels dans le cadre des théories de plaque (trois déplacements et deux rotations).

De plus, la continuité aux interfaces des couches pour le champ de déplacement et les contraintes de cisaillement transverse a été introduite dans ce modèle en [BEA 93], permettant ainsi d'assurer un champ de déplacement et un champ de contraintes spécifiques à chaque couche avec continuité dans le cadre d'une approche 2D.

L'élément fini est un triangle à trois nœuds basé sur les approximations éléments finis de Ganev (degré 4) et Argyris (degré 5) pour les déplacements généralisés et une approximation linéaire pour la géométrie [BER 96]. Il ne présente aucune des pathologies rencontrées en plaque (verrouillage en cisaillement transverse, mode parasite, oscillations, etc.). L'utilisation de ces polynômes de haut degré nous permettra par ailleurs de calculer en post-processeur la contrainte normale transversale par intégration des équations d'équilibre.

Nous présenterons tout d'abord le modèle mécanique puis les approximations élément fini permettant de définir les différentes matrices élémentaires. Enfin, des tests en statique linéaire et en non linéaire géométrique (hypothèse de Von-Karman), en flambement et post-flambement permettrons d'évaluer les qualités de cet élément en termes de vitesse de convergence et de précision.

## 2. Le champ de déplacement

Soit le système de coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_2, x_3 = z)$  pour lequel  $z$  est associé à l'épaisseur  $e$  de la plaque. Pour une couche  $(k)$ , les composantes du champ de déplacement, du tenseur des déformations et du tenseur des contraintes sont notées respectivement :  $u_i^{(k)}(x_1, x_2, z, t)$ ,  $\epsilon_{ij}^{(k)}(x_1, x_2, z, t)$ ,  $\sigma_{ij}^{(k)}(x_1, x_2, z, t)$ . De plus, la déformation normale transversale  $\epsilon_{33}$  est supposée négligeable.

Par hypothèse, la distribution des contraintes de cisaillement transverse dans une couche  $(k)$  de la plaque, pouvant être non symétrique avec des couches non orthotropes, est choisie de la forme :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13}^{(k)}(x_1, x_2, z, t) &= \left( \bar{C}_{55}^{(k)} \left( f'(z) - \frac{e}{\pi} b_{55} f''(z) \right) + a_{55}^{(k)} \right) \gamma_1^0(x_1, x_2, t) + \\
 &\quad \left( \bar{C}_{45}^{(k)} \left( f'(z) - \frac{e}{\pi} b_{44} f''(z) \right) + a_{54}^{(k)} \right) \gamma_2^0(x_1, x_2, t) \\
 \sigma_{23}^{(k)}(x_1, x_2, z, t) &= \left( \bar{C}_{45}^{(k)} \left( f'(z) - \frac{e}{\pi} b_{55} f''(z) \right) + a_{45}^{(k)} \right) \gamma_1^0(x_1, x_2, t) + \\
 &\quad \left( \bar{C}_{44}^{(k)} \left( f'(z) - \frac{e}{\pi} b_{44} f''(z) \right) + a_{44}^{(k)} \right) \gamma_2^0(x_1, x_2, t)
 \end{aligned} \tag{1}$$

Dans ces équations, on convient de noter  $f(z) = \frac{e}{\pi} \sin \frac{\pi z}{e}$  et  $f'(z) = df(z)/dz$ ;  $\gamma_1^0$  et  $\gamma_2^0$  sont les déformations de cisaillement transverse pour  $z = 0$ ;  $\bar{C}_{ij}^{(k)}$  sont les modules de la loi de comportement 2D.

De plus,  $\epsilon_{33} = 0$  donne  $u_3^{(k)}(x_1, x_2, z, t) = u_3(x_1, x_2, z, t) = v_3(x_1, x_2, t)$ . On en déduit :

$$2\epsilon_{\beta 3}^{(k)}(x_1, x_2, z, t) = v_3(x_1, x_2, t)_{,\beta} + u_{\beta}^{(k)}(x_1, x_2, z, t)_{,3} \tag{2}$$

L'expression des déformations en fonction des contraintes est :

$$\begin{aligned}
 2\epsilon_{13}^{(k)} &= S_{55}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)} + S_{45}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)} \\
 2\epsilon_{23}^{(k)} &= S_{45}^{(k)} \sigma_{13}^{(k)} + S_{44}^{(k)} \sigma_{23}^{(k)}
 \end{aligned} \tag{3}$$

où l'on convient de noter  $[S^{(k)}] = [\bar{C}^{(k)}]^{-1}$  la matrice de souplesse.

Il reste alors à introduire les équations [1] dans [3], à identifier avec [2] et à intégrer par rapport à  $z$ . Les déplacements de membrane  $v_{\alpha}$  sont alors ajoutés, et on convient de noter  $\theta_{\alpha}$  les vraies rotations. On obtient ainsi :

$$\begin{cases}
 u_1^{(k)} &= v_1 - z v_{3,1} + (f_1 + g_1^{(k)}) (v_{3,1} + \theta_2) + g_2^{(k)} (v_{3,2} - \theta_1) \\
 u_2^{(k)} &= v_2 - z v_{3,2} + g_3^{(k)} (v_{3,1} + \theta_2) + (f_2 + g_4^{(k)}) (v_{3,2} - \theta_1) \\
 u_3 &= v_3
 \end{cases} \tag{4}$$

où  $f_1, f_2, g_1^{(k)}, \dots, g_4^{(k)}$  sont des fonctions de  $z$ ,  $f(z), f'(z)$  et des coefficients  $a_{ij}^{(k)}, b_{ij}$ . Ces coefficients sont déterminés durant le calcul afin de vérifier les conditions aux limites sur les peaux supérieure et inférieure de la plaque et d'assurer la continuité aux interfaces des déplacements et des contraintes de cisaillement transverse [BEA 93].

### 3. Le principe des puissances virtuelles pour l'analyse non linéaire géométrique

Soit une plaque multicouche dont le volume initial est notée  $V(0)$  et la frontière initial  $S(0)$  en configuration Lagrangienne totale. Le problème peut être explicité sous la forme de la fonctionnelle lagrangienne totale suivante :

$$J(\vec{u}, \vec{u}^*)_{V(0)} = a(\vec{u}, \vec{u}^*)_{V(0)} - f(\vec{u}^*)_{V(0)} - F(\vec{u}^*)_{S(0)} = 0, \quad \forall \vec{u}^* \quad [5]$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur déplacement défini en [4] et  $\vec{u}^*$  est le champ de vitesse virtuelle associé.

La forme bilinéaire  $a$  décrit la puissance développée par les efforts intérieurs et les formes linéaires  $f$  et  $F$  représentent respectivement la puissance des forces de volume (prenant en compte les termes d'inertie) et des forces de surface.

Due à l'hypothèse de Von-Karman où les déformations et les rotations sont supposées petites et la déflexion modérée, l'équation [5] est non linéaire par rapport au déplacement (voir l'expression des déformations équations [9] et [10]). Une procédure de linéarisation est introduite et la forme linéarisée de [5], en l'absence de force suiveuse, est donnée par :

$$D_{\vec{u}}a(\vec{u}, \vec{u}^*)_{V(0)} \cdot \Delta \vec{u} = -a(\vec{u}, \vec{u}^*)_{V(0)} + f(\vec{u}^*)_{V(0)} + F(\vec{u}^*)_{S(0)}, \quad \forall \vec{u}^* \quad [6]$$

avec  $\vec{u} = \vec{u} + \Delta \vec{u}$ , où  $\vec{u}$  est le déplacement issu du pas précédent ou initial. L'opérateur tangent est défini par le membre de gauche de l'équation [6] alors que le membre de droite est fonction de l'état initial.

#### 4. Les approximations éléments finis

On considère une triangulation du plan moyen du volume  $V(0)$  et soit  $\Omega_e$  un domaine élémentaire de cette discrétisation. L'exposant  $h$  est ajouté et signifié approximation élément fini dans toute la suite. Les domaines élémentaires sont de forme triangulaire et la géométrie est approximée en utilisant seulement 3 nœuds.

A partir du champ de déplacement  $\vec{u}$  de l'équation [4], et dans le cadre d'une méthode d'élément fini conforme, l'approximation de la flèche  $v_3^h$  est dans l'espace de Sobolev  $H^2(\Omega_e)$  et nécessite l'utilisation d'une approximation élément fini  $C^1$ . On choisit donc l'interpolation de Argyris [ARG 68, BER 96].

Pour les approximations des déplacements de membrane notées  $v_\alpha^h$  et des rotations de cisaillement notées  $\theta_\alpha^h$  une continuité  $C^0$  est suffisante. L'interpolation de Ganév [GAN 80, BER 96] est utilisée et permet d'assurer automatiquement la compatibilité de champ dans les déformations de cisaillement transverse [POL 94] car le polynôme d'Argyris est de degré 5 alors que le polynôme de Ganév est de degré 4. Cela permet d'éviter le problème crucial du verrouillage en cisaillement transverse lorsque l'on se trouve dans le domaine des plaques minces.

L'élément fini obtenu à partir de ces différentes approximations possède les degrés de liberté (ddl) suivants :

– pour un nœud sommet :

$$\begin{matrix}
 v_1 & v_{1,1} & v_{1,2} & v_2 & v_{2,1} & v_{2,2} \\
 v_3 & v_{3,1} & v_{3,2} & v_{3,11} & v_{3,22} & v_{3,12} \\
 \theta_1 & \theta_{1,1} & \theta_{1,2} & \theta_2 & \theta_{2,1} & \theta_{2,2}
 \end{matrix} \tag{7}$$

– pour un nœud intermédiaire :

$$\begin{matrix}
 v_1 & v_{1,n} & v_2 & v_{2,n} \\
 v_{3,n} & & & \\
 \theta_1 & \theta_{1,n} & \theta_2 & \theta_{2,n}
 \end{matrix} \tag{8}$$

où  $p_{,n}$  est la dérivée par rapport à la normale au coté.

### 5. Les matrices élémentaires

On introduit alors la procédure élément fini dans l'équation [6] afin d'obtenir les différentes matrices élémentaires.

Les déformations et les taux de déformations virtuelles obtenus à partir de l'équation [4] sont dissociés en partie linéaire  $L$  et partie non linéaire  $NL$  :

$$\begin{aligned}
 [\epsilon_e^h] &= [\epsilon_{Le}^h] + [\epsilon_{NLe}^h] \\
 [\epsilon_e^{*h}] &= [\epsilon_{Le}^{*h}] + [\epsilon_{NLe}^{*h}]
 \end{aligned} \tag{9}$$

La partie linéaire est classique et la partie non linéaire, associée à l'hypothèse de Von-Karmann, est donnée par :

$$\begin{aligned}
 [\epsilon_{NLe}^h]^T &= \left[ \frac{1}{2} v_3^h{}_{,1}{}^2 \quad \frac{1}{2} v_3^h{}_{,2}{}^2 \quad v_3^h{}_{,1} v_3^h{}_{,2} \quad 0 \quad 0 \right] \\
 [\epsilon_{NLe}^{*h}]^T &= \left[ v_3^h{}_{,1} v_3^{*h}{}_{,1} \quad v_3^h{}_{,2} v_3^{*h}{}_{,2} \quad v_3^h{}_{,1} v_3^{*h}{}_{,2} + v_3^h{}_{,2} v_3^{*h}{}_{,1} \quad 0 \quad 0 \right]
 \end{aligned} \tag{10}$$

La restriction de l'équation [6] au domaine élémentaire  $\Omega_e$  donne pour le premier terme du membre de droite :

$$\begin{aligned}
 a(\vec{u}^h, \vec{u}^{*h})_{V_e(0)} &= \int_{\Omega_e(0)} \int_{-e/2}^{e/2} [\epsilon_e^{*h}]^T [\bar{C}^{(k)}] [\bar{\epsilon}_e^h] dz d\Omega_e \\
 &= \int_{\Omega_e(0)} [E_e^{*h}]^T [A_e] [\bar{E}_e^h] d\Omega_e + \int_{\Omega_e(0)} [E_e^{*h}]^T [B_e(\vec{u}^h)] d\Omega_e
 \end{aligned} \tag{11}$$

où l'on a introduit la matrice unicolonne  $[E_e^h]$  ( $[E_e^{*h}]$ ) qui peut être considérée comme le vecteur des déformations généralisées (taux de déformations virtuelles) et qui a pour expression :

$$[E_e^h]^T = \left[ \begin{matrix} v_1^h{}_{,1} & v_1^h{}_{,2} & \vdots & v_2^h{}_{,1} & v_2^h{}_{,2} & \vdots & v_3^h{}_{,1} & v_3^h{}_{,2} & v_3^h{}_{,11} \\ v_3^h{}_{,12} & v_3^h{}_{,22} & \vdots & \theta_1^h & \theta_1^h{}_{,1} & \theta_1^h{}_{,2} & \vdots & \theta_2^h & \theta_2^h{}_{,1} & \theta_2^h{}_{,2} \end{matrix} \right] \tag{12}$$

L'intégration suivant l'épaisseur de la loi de comportement est effectuée dans  $[A_e]$  et  $[B_e(\vec{u}^h)]$  qui représentent respectivement la partie classique linéaire et la contribution des termes non linéaires fonction de  $\vec{u}^h$ .

Il reste alors à introduire les approximations éléments finis définies au paragraphe 4. et le vecteur des ddl élémentaires, noté  $[Q_e]$ , dans  $[E_e^h]^T$  et  $[Q_e^*]$  dans  $[E_e^{*h}]^T$  pour définir les matrices élémentaires suivantes :

– rigidité élémentaire  $[K_e]$

$$[Q_e^*]^T [K_e] [Q_e] = \int_{\Omega_e(0)} [E_e^{*h}]^T [A_e] [\bar{E}_e^h] d\Omega_e \quad [13]$$

– vecteur élémentaire (contribution des termes non linéaires)  $[L_e(\vec{u}^h)]$

$$[Q_e^*]^T [L_e(\vec{u}^h)] = \int_{\Omega_e(0)} [E_e^{*h}]^T [B_e(\vec{u}^h)] d\Omega_e \quad [14]$$

La même méthodologie est utilisée pour le membre de gauche de l'équation [6]. On obtient alors :

$$D_{\vec{u}} a(\vec{u}^h, \vec{u}^{*h})_{V_e(0)} \cdot \Delta \vec{u}^h = \int_{\Omega_e(0)} [E_e^{*h}]^T [A_e] [\Delta E_e^h] d\Omega_e(0) + \int_{\Omega_e(0)} [E_e^{*h}]^T [A_e(\vec{u}^h)] [\Delta E_e^h] d\Omega_e(0) + \int_{\Omega_e(0)} [E_e^{*h}]^T [A_e(\vec{\sigma}^h)] [\Delta E_e^h] d\Omega_e(0) \quad [15]$$

où  $[\Delta E_e^h]$  est considéré comme le vecteur des déformations généralisées incrémentales. La matrice  $[A_e(\vec{u}^h)]$  est fonction des propriétés des différentes couches et de termes linéaires et quadratiques du vecteur  $\vec{u}^h$  alors que  $[A_e(\vec{\sigma}^h)]$  est fonction des contraintes dans le plan  $\vec{\sigma}^h$  issues du déplacement initial  $\vec{u}^h$ . On en déduit alors les matrices élémentaires suivantes :

– rigidité tangente élémentaire  $[K_{T_e}(\vec{u}^h)] = [K_e] + [K_e(\vec{u}^h)] + [K_e(\vec{\sigma}^h)]$

– où  $[K_e]$  a été définie en [13] et

$$[Q_e^*]^T [K_e(\vec{u}^h)] [\Delta Q_e] = \int_{\Omega_e(0)} [E_e^{*h}]^T [A_e(\vec{u}^h)] [\Delta E_e^h] d\Omega_e(0) \quad [16]$$

$$[Q_e^*]^T [K_e(\vec{\sigma}^h)] [\Delta Q_e] = \int_{\Omega_e(0)} [E_e^{*h}]^T [A_e(\vec{\sigma}^h)] [\Delta E_e^h] d\Omega_e(0) \quad [17]$$

Les matrices élémentaires  $[K_e(\vec{u}^h)]$  et  $[K_e(\vec{\sigma}^h)]$  sont respectivement appelées rigidité due au déplacement initial et rigidité géométrique (due aux contraintes initiales). Les autres termes de l'équation [6] définissent le vecteur chargement élémentaire  $[B_e]$  et la matrice masse  $[M_e]$  et sont classiques.

## 6. Les résultats numériques

A partir des matrices élémentaires définies précédemment, les équations à résoudre en fonction du type d'analyse seront les suivantes :

*statique linéaire*  $[K][Q] = [B]$  ;

*vibrations libres*  $([K] - \omega^2[M])[Q] = [0]$  ; problème aux valeurs propres ;

*flambement linéarisé*  $([K] + \lambda[K(\bar{\sigma})])[Q] = [0]$  ; problème aux valeurs propres dans lequel  $\bar{\sigma}$  correspond à un état initial de contrainte lié à un chargement unitaire dans le plan et  $\lambda$  est la valeur de la charge critique de flambement linéaire ;

*statique non linéaire*  $[K_T([\bar{Q})][\Delta Q] = [B] - [K][\bar{Q}] - [L([\bar{Q})]]$  ; résolue en utilisant un schéma de Newton-Raphson ;

*post-flambement*  $[K_T([\bar{Q})][\Delta Q] = [B] - [K][\bar{Q}] - [L([\bar{Q})]]$  , un faible chargement transversal est appliqué afin d'introduire une imperfection géométrique, puis la méthode de Newton-Raphson est utilisée pour le chargement dans le plan.

Dans cette section, nous comparerons différents modèles entre eux pour certains tests numériques. Les approximations éléments finis présentées au paragraphe 4. sont notées GAG (pour Ganev  $v_\alpha$  - Argyris  $v_3$  - Ganev  $\theta_\alpha$ ) et les modèles testés sont les suivants :

- modèle Sinus avec continuité (SIN-C) ;
- modèle Sinus sans continuité (SIN) obtenu à partir de [4] avec  $f_1(z) = f_2(z) = f(z)$ ,  $g_i^{(k)}(z) = 0$  ;
- modèle de Kirchhoff-Love (KL) obtenu à partir de [4] avec  $f_1(z) = f_2(z) = 0$ ,  $g_i^{(k)}(z) = 0$  ;
- modèle de Reissner-Mindlin (RM) obtenu à partir de [4] avec  $f_1(z) = f_2(z) = z$ ,  $g_i^{(k)}(z) = 0$ , et de coefficient correcteurs pour le cisaillement.

De plus, nous présenterons les résultats obtenus sur le test linéaire par un élément fini  $C^0$  à huit nœuds basé sur le modèle de Reissner-Mindlin et présenté en [POL 94]. Il sera noté CL8 et utilise un schéma à 9 points d'intégration. Cet élément fini ne verrouille pas en cisaillement transverse et présente de très bonnes propriétés de convergence et de précision dans le champ des éléments finis  $C^0$ .

Les éléments finis basés sur le modèle de Reissner-Mindlin utilisent un coefficient correcteur en cisaillement transverse classique  $k = 5/6$  pour les tests présentés.

L'intégration numérique des différentes matrices élémentaires sera effectuée en utilisant 16 points d'intégration [DUN 85]. Il est à noter que l'utilisation

de 12 points donne les mêmes résultats mais fait apparaître un mode parasite à énergie nulle. Ce mode ne se propage pas et disparaît lors de l'assemblage de plusieurs éléments, il est donc loisible d'utiliser ce schéma d'intégration numérique qui permet d'économiser quatre évaluations.

### 6.1. Analyse statique linéaire

Dans le domaine des plaques multicouches, il y a peu de solutions exactes permettant d'évaluer la précision des éléments finis dédiés à ce type de structures. Dans le domaine linéaire, on citera les travaux de Srinivas [SRI 70] et de Pagano [PAG 70] qui donnent des solutions exactes en déplacement et en contraintes issues de l'élasticité tridimensionnelle pour des structures multicouches.

Le test de Srinivas concerne une plaque sandwich en appui simple et soumise à une pression transversale uniforme. Cette plaque sandwich est symétrique, possède une épaisseur de peaux  $e_s = 0.01$ , une épaisseur de cœur  $e_c = 0.08$  et un rapport d'élanement  $a/e = 10$ . D'autre part, la rigidité des peaux est caractérisée par une valeur  $\beta$  qui spécifie le rapport de rigidité entre les modules de la peau et du cœur. Dans le cadre de l'analyse statique linéaire, on présentera des résultats pour  $\beta = 15$ .

Les propriétés du cœur de ce sandwich sont les suivantes :

$$\begin{array}{lll} E_1 = 897949 & E_2 = 471424 & G_{12} = 262931 \\ G_{13} = 159914 & G_{23} = 266810 & \nu_{12} = 0.44 \end{array}$$

Le tableau 1 présente les résultats obtenus par les différents éléments finis présentés précédemment ainsi que la solution exacte pour les valeurs maximales du déplacement transversal  $v_3(a/2, a/2)$  et des contraintes  $\sigma_{11}(a/2, a/2, e/2)$ ,  $\sigma_{22}(a/2, a/2, e/2)$ ,  $\sigma_{13}(0, a/2, 0)$ . Ces résultats sont obtenus pour différents maillages réguliers du quart de la plaque ( $N = 1, 2, 4, 8$ ) où  $N = 2$  signifie que l'on a deux éléments sur chaque coté : ce maillage comporte donc 4 quadrangles ou 8 triangles.

Pour l'élément fini présenté dans ce travail et dénommé GAG/SIN-C, la convergence est extrêmement rapide et les valeurs convergées en déplacement et contraintes (y compris la contrainte de cisaillement transverse) sont obtenues avec le maillage  $N=2$ . La valeur obtenue pour  $\sigma_{13}$  présente un écart inférieur à 4 % par rapport à la solution issue de l'élasticité tridimensionnelle. La valeur obtenue par intégration des équations d'équilibre est du même ordre de précision que celle obtenue de manière directe.

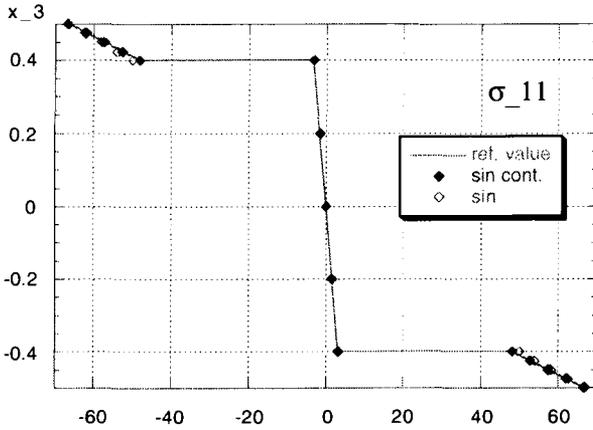
Cette table donne aussi la convergence et la précision des autres modèles ainsi que de l'élément  $C^0$  dénommé CL8. On remarque ainsi que :

– les approximations EF (élément fini) GAG ont une convergence très rapide en déplacement et contraintes ;

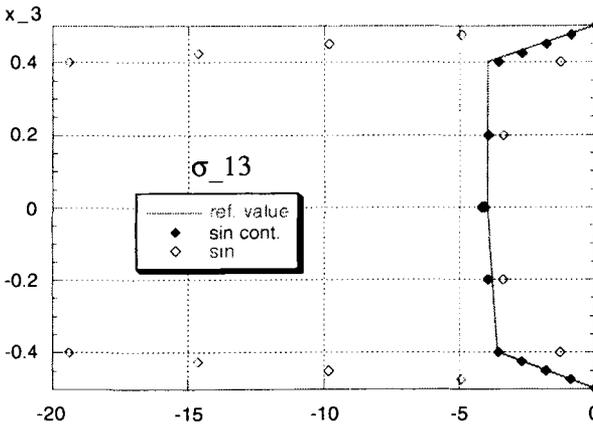
N	ddl	$v_3 C_{11}/f_3$	$\sigma_{11}/f_3$	$\sigma_{22}/f_3$	$\sigma_{13}/f_3$	
					val. dir.	Eq. d'Equi.
GAG/SIN-C : modèle Sinus avec continuité						
1	55	122.10	66.626	46.337	4.137	4.060
2	200	121.88	66.570	46.532	4.104	4.130
4	760	121.88	66.742	46.581	4.084	4.036
8	2960	121.88	66.748	46.586	4.083	3.998
GAG/SIN : modèle Sinus sans la continuité						
1	55	115.64	66.502	45.361	4.238	4.068
2	200	115.45	66.709	45.664	4.201	4.126
4	760	115.46	66.891	45.721	4.183	4.004
8	2960	115.46	66.895	45.722	4.182	3.998
GAG/KL : modèle de Kirchhoff-Love						
1	33	81.746	66.607	39.688	0.	3.975
2	120	81.801	69.033	41.353	0.	4.296
4	456	81.802	69.125	41.404	0.	4.316
8	1776	81.802	69.134	41.410	0.	4.317
GAG/MR : modèle de Reissner-Mindlin						
1	55	122.21	62.715	44.680	3.022	4.084
2	200	121.95	63.553	45.272	3.033	4.189
4	760	121.97	63.650	45.310	3.033	4.199
8	2960	121.97	63.650	45.312	3.033	4.200
CL8 : E.F C <sup>0</sup> à huit nœuds						
1	15	117.14	29.134	22.798	1.484	1.097
2	60	121.73	56.722	40.993	2.441	2.508
4	240	121.96	61.764	44.126	3.026	3.349
8	960	121.97	63.179	45.014	3.330	3.772
16	3840	121.97	63.678	45.324	3.638	3.950
valeurs réf. [SRI 70]		121.72	66.787	46.424	3.964	

**Tableau 1.** *Plaque sandwich en appui simple sous pression uniforme. Convergence et précision pour différents modèles et comparaison avec une solution issue de l'élasticité tridimensionnelle*

– les résultats obtenus avec l'EF GAG/SIN permettent de quantifier l'effet de la continuité aux interfaces des couches pour le déplacement et les contraintes de cisaillement transverse. Sans cette continuité, le déplacement transverse obtenu présente une erreur de 5 % par rapport à la solution exacte. Seul le maximum pour  $\sigma_{22}$  est sensible à la continuité car les autres contraintes



**Figure 1.** Plaque sandwich en appui simple sous pression uniforme. Distribution de  $\sigma_{11}(a/2, a/2, z)$  dans l'épaisseur

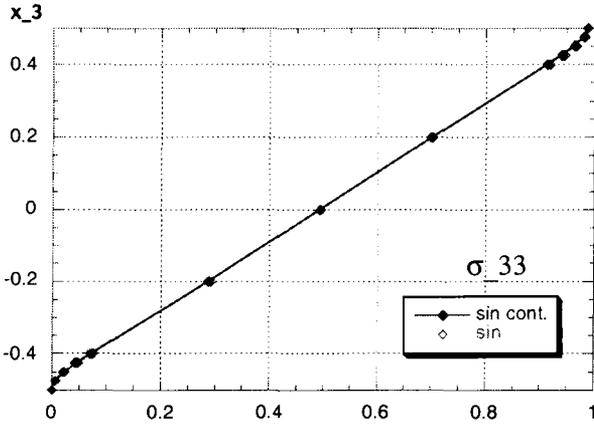


**Figure 2.** Plaque sandwich en appui simple sous pression uniforme. Distribution de  $\sigma_{13}(0, a/2, z)$  dans l'épaisseur

donnent des résultats du même ordre pour les modèles SIN et SIN-C. L'effet de la continuité, non visible sur les valeurs maximales des contraintes présentées tableau 1, sera net lorsque nous présenterons les distributions des contraintes de cisaillement transverse dans l'épaisseur figure 2 ;

- les EF CL8 et GAG/MR donnent les mêmes résultats pour le déplacement et les contraintes planes mais GAG/MR nécessite 200 ddl ( $N=2$ ) alors que 960 ddl ( $N=8$ ) sont nécessaires pour CL8 afin d'atteindre les valeurs convergées ;

- les EF CL8 et GAG/MR donnent la bonne valeur en déplacement (car c'est le bon coefficient correcteur) mais ne fournissent pas les valeurs de référence



**Figure 3.** *Plaque sandwich en appui simple sous pression uniforme. Distribution de  $\sigma_{33}(a/2, a/2, z)$  dans l'épaisseur*

pour les contraintes dans le plan. La contrainte de cisaillement transverse obtenue par intégration des équations d'équilibre s'en ressent et CL8 ne donne toujours pas une valeur convergée avec le maillage  $N=16$ , i.e 3840 ddl ;

– les résultats obtenus avec l'EF GAG/KL indiquent que ce modèle n'est pas adapté à l'analyse des structures multicouches dans lesquelles les effets du cisaillement transverse sont très importants.

Les figures 1, 2 et 3 présentent les distributions dans l'épaisseur des contraintes  $\sigma_{11}(a/2, a/2, z)$ ,  $\sigma_{13}(0, a/2, z)$  et  $\sigma_{33}(a/2, a/2, z)$  pour les modèles Sinus avec et sans continuité et les courbes de référence issues de [SRI 70]. Ces résultats sont obtenus avec le maillage  $N=4$ . Pour  $\sigma_{11}$  figure 1, les valeurs obtenues sont en accord avec la courbe de référence. Par contre, la figure 2 montre bien l'apport de la continuité aux interfaces sur la distribution. Le modèle sans la continuité donne une valeur maximum  $\sigma_{13}(0, a/2, 0)$  correcte mais une très mauvaise distribution, alors que le modèle avec continuité est en très bonne adéquation avec la courbe de référence. Enfin, la figure 3 présente la distribution dans l'épaisseur de  $\sigma_{33}$  au centre de la plaque, obtenue par intégration des équations d'équilibre. On vérifie bien les conditions aux limites sur les faces inférieure, qui est libre, et supérieure, où l'on retrouve la pression unitaire appliquée. Les deux modèles SIN-C et SIN donnent les mêmes résultats.

**6.2. Vibrations libres et charges critiques de flambement linéaire**

Basés sur les travaux de Srinivas [SRI 70] qui fournit des solutions exactes, nous présentons tableau 2 les résultats obtenus en vibrations libres et en charges critiques de flambement linéaire pour différentes valeurs du rapport de rigidité

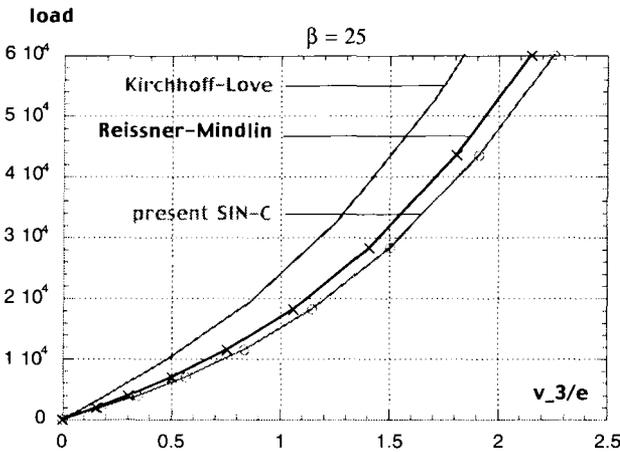
$\beta$ . Pour les vibrations libres, le maillage  $N=1$  est suffisant alors que pour la charge critique, le maillage  $N=2$  est nécessaire pour atteindre la valeur convergée. On remarque dans cette table que l'approche linéarisée pour le calcul de la charge critique surestime légèrement la valeur exacte. L'écart est inférieur à 4 %.

N	dof	$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\rho e / C_{11}}$			$k_{11} = 12\lambda b^2 / (\pi^2 A_{11} e^2)$		
		$\beta = 5$	$\beta = 10$	$\beta = 15$	$\beta = 5$	$\beta = 10$	$\beta = 15$
1	55	.07714	.09810	.11202	4.167	4.317	4.134
2	200	.07714	.09810	.11202	4.193	4.345	4.163
4	760	.07714	.09810	.11202	4.193	4.345	4.163
valeurs réf. [SRI 70]		.07715	.09810	.11203	4.046	4.200	4.037

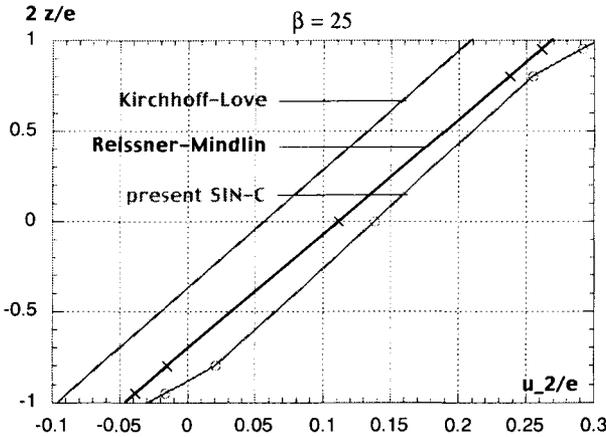
**Tableau 2.** Plaque sandwich en appui simple sous pression uniforme. Vibration libre et charge critique de flambement pour différents ratios de rigidité

### 6.3. Analyse non linéaire géométrique

On considère tout d'abord la même plaque sandwich que celle utilisée pour les tests précédents. On a donc les mêmes propriétés de matériau et l'on va faire varier le rapport de rigidité  $\beta$  entre les peaux et le cœur de 5 à 50. Le quart de la plaque est discrétisée en utilisant le maillage  $N=2$ , suffisamment précis en déplacement comme nous avons pu le voir tableau 1. On utilise l'algorithme de Newton-Raphson en pilotage force avec un test de convergence sur l'incrément de déplacement.



**Figure 4.** Plaque sandwich en appui simple sous pression uniforme. Déplacement transversal  $v_3(a/2, a/2, 0)$  avec  $\beta = 25$  : comparaison de différents modèles de plaque



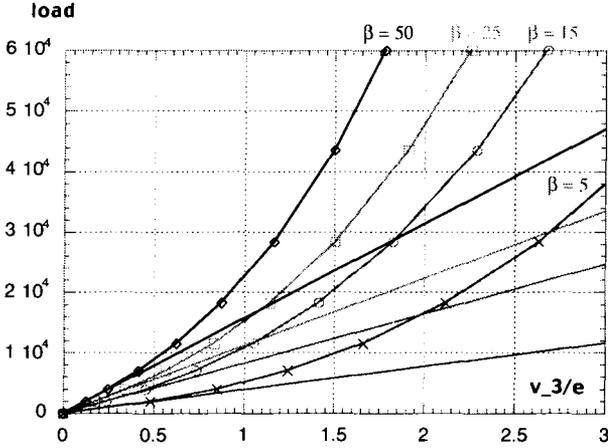
**Figure 5.** *Plaque sandwich en appui simple sous pression uniforme. Déplacement  $u_2(a/2, 0, z)$  avec  $\beta = 25$  : comparaison de différents modèles de plaque*

Les figures 4 et 5 présentent les résultats obtenus pour  $\beta = 25$  avec les EF GAG/KL, GAG/RM et GAG/SIN-C. La figure 4 donne la valeur du déplacement transversal  $v_3(a/2, a/2, 0)$  au milieu de la plaque en fonction du chargement et la figure 5 indique l'évolution dans l'épaisseur du déplacement  $u_2(a/2, 0, z)$  normal à l'appui. On observe dans ces Figures l'effet du cisaillement transverse sur la réponse en déplacement du modèle : Kirchhoff-Love ne prend pas en compte le cisaillement transverse, Reissner-Mindlin le suppose constant dans l'épaisseur alors que le modèle Sinus assure une distribution non linéaire dans l'épaisseur en utilisant une fonction trigonométrique et la continuité aux interfaces des couches.

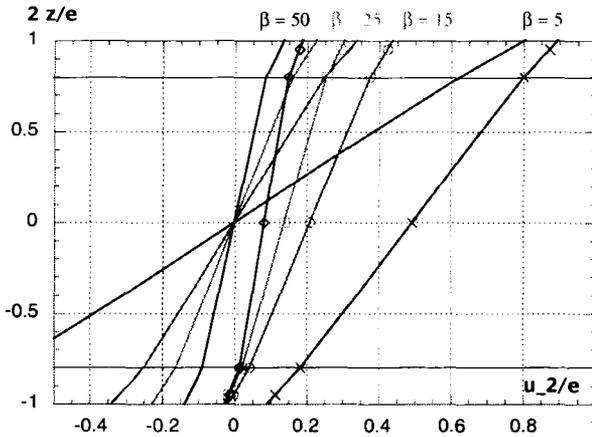
Différentes valeurs de  $\beta$  ont été testées avec le présent EF GAG/SIN-C et la figure 6 présente les courbes de réponse linéaire (ligne seule) et non linéaire (ligne avec repère) du déplacement transversal  $v_3(a/2, a/2, 0)$  en fonction du chargement. L'écart entre les deux courbes pour une même valeur de  $\beta$  croît avec la valeur du déplacement. De plus, plus  $\beta$  est grand plus les effets non linéaires doivent être pris en compte tôt dans l'analyse : pour  $\beta = 50$ , la valeur du déplacement transversal commence à être sensiblement différente entre les réponses linéaire et non linéaire vers  $v_3/e \sim 0.4$  alors que pour  $\beta = 5$ , la séparation apparaît pour  $v_3/e \sim 0.7$ .

La figure 7 présente la distribution du déplacement  $u_2(a/2, 0, z)$  en fonction de l'épaisseur pour une pression uniforme normale transversale  $F_3 = 2 \cdot 10^4$ . Les résultats obtenus par une analyse linéaire (ligne seule) et non linéaire (ligne avec repère) peuvent être comparés, et on vérifie  $u_2(a/2, 0, 0) = 0$  quel que soit

$\beta$  dans le cas linéaire. L'écart entre les deux types d'analyse est d'autant plus net que le ratio de rigidité  $\beta$  est faible. Quand le rapport de rigidité augmente, le déplacement normal au côté en appui diminue. Dans le cas de l'analyse non linéaire, la valeur du déplacement  $u_2(0, a/2, -e/2)$  sur la peau inférieure est proche de 0 excepté pour  $\beta = 5$ .



**Figure 6.** Plaque sandwich en appui simple sous pression uniforme. Analyse linéaire et non linéaire et influence de la valeur de  $\beta$  sur le déplacement transverse  $v_3(a/2, a/2, 0)$



**Figure 7.** Plaque sandwich en appui simple sous pression uniforme. Analyse linéaire et non linéaire et influence de la valeur de  $\beta$  sur le déplacement  $u_2(a/2, 0, z)$

**6.4. Flambement et post-flambement**

Soit maintenant une plaque multicouche symétrique composée d'un empilement de 4 couches  $(\theta, -\theta)_S$ . Cette plaque est en appui simple et va être soumise à des sollicitations dans son plan, suivant une direction ou deux directions. On considère donc deux types de sollicitation :

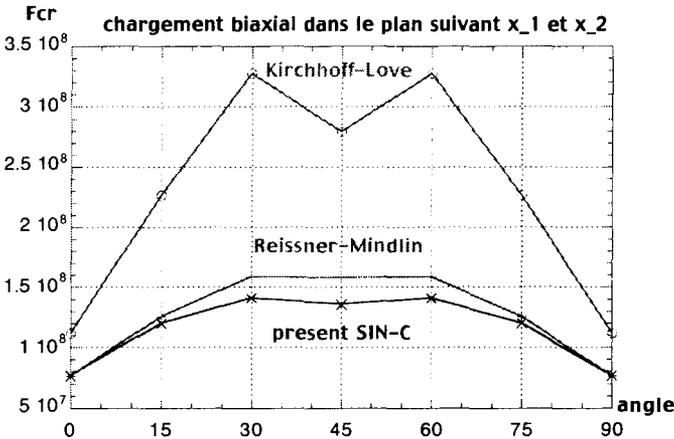
- chargement uniaxial suivant  $x_1$  : on impose une charge répartie  $F_1(0, x_2, 0) = c$  et  $F_1(a, x_2, 0) = -c$ ,
- chargement biaxial suivant  $x_1$  et  $x_2$  : on impose une charge répartie suivant  $x_1$  sous la forme  $F_1(0, x_2, 0) = c$  et  $F_1(a, x_2, 0) = -c$  ainsi que suivant  $x_2$  de la même manière  $F_2(x_1, 0, 0) = c$  et  $F_2(x_1, a, 0) = -c$ .

L'objectif est d'étudier l'influence de l'orientation des couches sur la réponse en post-flambement de la plaque. Le maillage  $N= 2$  est utilisé pour modéliser la plaque entière.

Les propriétés du matériau sont issues des travaux de Pagano [PAG 70] et ont pour valeurs :

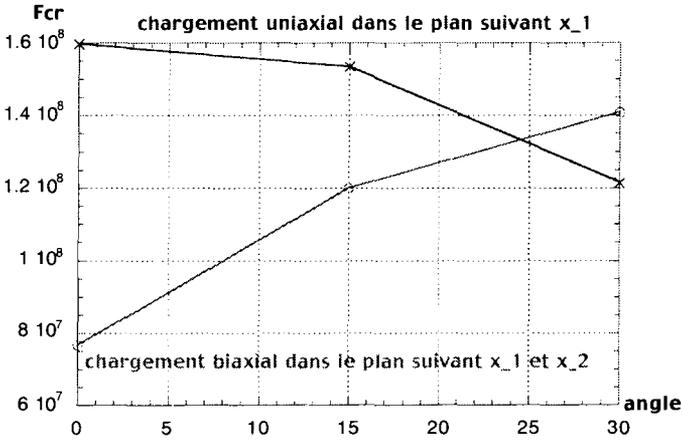
$$\begin{array}{lll}
 E_1 = 25 \cdot 10^9 & E_2 = 10^9 & G_{12} = 0.5 \cdot 10^9 \\
 G_{13} = 0.5 \cdot 10^9 & G_{23} = 0.2 \cdot 10^9 & \nu_{12} = 0.25
 \end{array}$$

Les couches ont la même épaisseur et nous avons un rapport d'élongement  $a/e = 10$ .



**Figure 8.** Plaque  $(\theta, -\theta)_S$  en appui simple sous chargement biaxial dans son plan. Effet de l'orientation  $\theta$  sur la charge critique de flambement pour différents modèles

La figure 8 permet de comparer les charges critiques de flambement linéaire obtenues pour différentes valeurs de l'orientation de l'empilement dans le cas d'un chargement biaxial dans le plan suivant les directions  $x_1$  et  $x_2$ . L'effet du



**Figure 9.** Plaque  $(\theta, -\theta)_S$  en appui simple sous chargement uniaxial et biaxial dans son plan. Effet de l'orientation  $\theta$  et comparaison des valeurs de charge critique de flambement

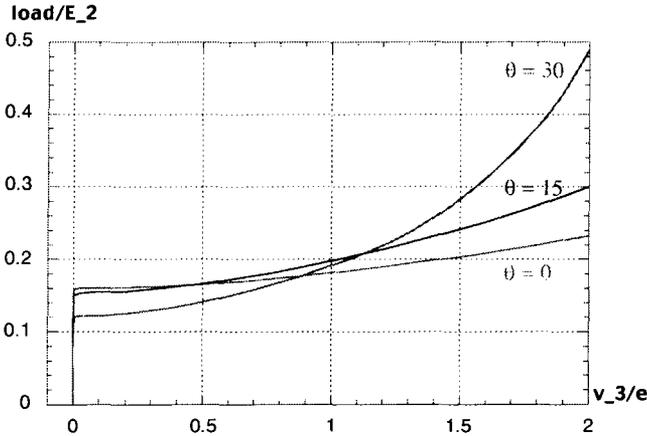
cisaillement transverse est une nouvelle fois évident et le modèle de Kirchhoff-Love surestime la charge critique de flambement. Il est à noter que pour  $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ , on se trouve en présence d'une plaque homogène et les modèles de Reissner-Mindlin et Sinus donnent des valeurs de charge critique sensiblement identiques. L'écart devient sensible dès  $\theta = 15^\circ, 75^\circ$  où l'on observe une différence de l'ordre de 5 %. Cet écart est maximum pour  $\theta = 45^\circ$  où la différence est de 17 %.

Les valeurs de charge critique obtenues avec l'élément GAG/SIN-C dans le cas de chargement uniaxial et biaxial sont présentées figure 9. L'effet de l'orientation de l'empilement est significatif et la charge critique de flambement est toujours inférieure dans le cas du chargement biaxial excepté à partir d'une orientation supérieure à  $25^\circ$ .

Enfin, la réponse en post-flambement est donnée figure 10 dans le cas du chargement uniaxial et figure 11 dans le cas biaxial. Dans le cas du chargement uniaxial, la plus faible valeur de flambement est obtenue pour l'angle d'empilement  $\theta = 30^\circ$  ce qui avait déjà été observé figure 9 et la valeur de la charge critique est la plus élevée pour le cas homogène  $\theta = 0^\circ$ . La réponse en post-flambement est par contre totalement inversée dans le sens où le cas homogène présente une tangente à la courbe de post-flambement quasiment horizontale alors que la plus grande rigidité est obtenue pour l'empilement  $\theta = 45^\circ$ . Les courbes de post-flambement des empilements  $\theta = 15^\circ$  et  $\theta = 30^\circ$  se croisent pour une valeur de chargement  $c = 2.1 \cdot 10^8$ .

Le cas du chargement biaxial présenté figure 11 confirme les résultats observés figure 8 concernant la charge critique de flambement. Le cas homogène

présente la plus faible charge critique alors que l'empilement  $\theta = 30^\circ$  présente une charge critique de flambement légèrement supérieure au cas  $\theta = 45^\circ$ . Les courbes de réponse en post-flambement permettent d'observer que plus l'orientation est proche de  $45^\circ$  plus la rigidité du panneau est grande puisque le déplacement transversal à chargement identique est bien plus faible. Le croisement des courbes pour les orientations  $\theta = 30^\circ, 45^\circ$  s'effectue au niveau d'un chargement de l'ordre de  $c = 1.9 \cdot 10^8$ . On remarque aussi dans ce cas que la tangente à la courbe pour le cas homogène est quasiment horizontale.

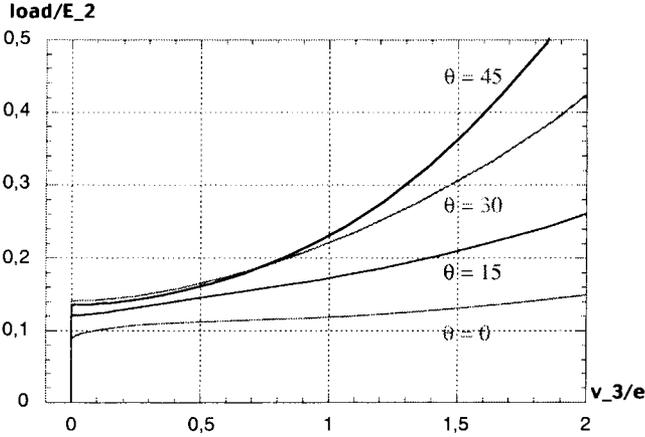


**Figure 10.** *Plaque  $(\theta, -\theta)_S$  en appui simple sous chargement uniaxial dans son plan. Effet de l'orientation  $\theta$  sur la réponse en post-flambement : valeur du déplacement  $v_3(a/2, a/2, 0)/e$*

## 7. Remarques et perspectives

Dans ce travail, nous avons présenté un élément fini à six noeuds pour l'analyse linéaire et non linéaire des plaques sandwichs et multicouches. Les résultats obtenus en analyse statique linéaire, en vibrations libres et pour les charges critiques de flambement sont en très bonne adéquation avec les solutions issues de l'élasticité tridimensionnelle. De plus, ces résultats sont obtenus avec des maillages pauvres puisque le maillage  $N = 2$  comportant huit éléments triangulaires suffit pour atteindre les valeurs convergées en déplacement et en contrainte, y compris pour les contraintes de cisaillement transverse. Le coût d'utilisation de cet élément fini  $C^1$  n'est donc pas excessif car il y a peu d'assemblages de matrices élémentaires, et on se trouve en présence d'un problème comportant 200 ddl...

Un outil logiciel a été développé spécifiquement pour cet élément, ce qui permet de définir de manière très simple les conditions limites classiques (appui simple, encastrement, condition de symétrie ou d'antisymétrie, etc.) à l'aide



**Figure 11.** Plaque  $(\theta, -\theta)_S$  en appui simple sous chargement biaxial dans son plan. Effet de l'orientation  $\theta$  sur la réponse en post-flambement : valeur du déplacement  $v_3(a/2, a/2, 0)/e$

d'un numéro de référence pour chaque déplacement généralisé  $v_i, \theta_\alpha$ . Cette liste n'est bien sûr pas limitée et il est très simple de rajouter de nouvelles conditions limites en associant un numéro de référence supplémentaire. On a donc uniquement 5 numéros à spécifier en chaque noeud pour définir l'ensemble des conditions limites et les possibilités de caractériser plus finement certaines conditions aux limites sont complètement ouvertes compte tenu des ddl dérivées présents aux noeuds sommets. Il est à noter également que grâce à l'utilisation de ces polynômes de haut degré, les contraintes sont continues aux noeuds sommets et il est possible de demander plusieurs valeurs de contraintes sur une arête d'un élément sans observer d'oscillations, comme c'est le cas avec les éléments finis  $C^0$ . Enfin, ces polynômes permettent d'obtenir une variation linéaire en  $x_1, x_2$  sur chaque domaine élémentaire de la contrainte normale transversale obtenu par intégration des équations d'équilibre.

Les perspectives sont multiples concernant l'utilisation de ce type d'approximations élément fini pour l'analyse des structures multicouches. Elles concernent le développement en cours d'un élément fini de coque et l'introduction d'une loi de comportement plastique endommageable, l'étude du délaminage et l'extension de ce modèle aux analyses en dynamique rapide.

## 8. Bibliographie

- [ARG 68] ARGYRIS J., FRIED I. et SCHARPF D., "The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method". *Aero. J. Royal Aeronaut. Soc.*, vol. 72, p. 701-709, 1968.

- [AUR 99] AURICCHIO F. et SACCO E., “ A mixed-enhanced finite element for the analysis of laminated composite plates ”. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol. 44, p. 1481–1504, 1999.
- [BEA 93] BÉAKOU A. et TOURATIER M., “ A rectangular finite element for analysing composite multilayered shallow shells in statics, vibration and buckling ”. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol. 36, p. 627–653, 1993.
- [BER 96] BERNADOU M., *Finite Element Methods for Thin Shell Problems*. John Wiley et Sons, 1996.
- [CAR 96] CARRERA E., “  $C^0$  Reissner-Mindlin multilayered plate elements including zig-zag and interlaminar stress continuity ”. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol. 39, p. 1797–1820, 1996.
- [DUN 85] DUNAVANT D., “ Hight degree efficient symmetrical gaussian quadrature rules for the triangle ”. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol. 21, p. 1129–1148, 1985.
- [GAN 80] GANEV H. et DIMITROV T., “ Calculation of arch dams as a shell using IBM-370 Computer and curved finite elements ”. In *Theory of shells*, p. 691–696. North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [NOO 94] NOOR A., BURTON W. et PETERS J., “ Hierarchical adaptative modeling of structural sandwiches and multilayered composite panels ”. *Appl. Num. Math.*, vol. 14, p. 69–90, 1994.
- [NOO 96] NOOR A., BURTON W. et BERT C., “ Computational models for sandwich panels and shells ”. *App. Mech. Rev.*, vol. 49, n° 3, p. 155–199, 1996.
- [PAG 70] PAGANO N., “ Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates ”. *J. Comp. Materials*, vol. 4, p. 20–34, 1970.
- [POL 94] POLIT O., TOURATIER M. et LORY P., “ A new eight-node quadrilateral shear-bending plate finite element ”. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol. 37, p. 387–411, 1994.
- [RED 89] REDDY J., “ On refined computational models of composite laminates ”. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol. 27, p. 361–382, 1989.
- [RED 97] REDDY J., *Mechanics of laminated composite plates – Theory and analysis*. CRC Press Inc., 1997.
- [SCI 95] SCIUVA M. D., “ A third order triangular multilayered plate finite element with continuous interlaminar stresses ”. *Int. Jour. Num. Meth. Eng.*, vol. 38, p. 1–26, 1995.
- [SRI 70] SRINIVAS S. et RAO A., “ Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates ”. *Int. J. Solids Struc.*, vol. 6, p. 1463–1481, 1970.
- [TOU 91] TOURATIER M., “ An efficient standard plate theory ”. *Int. J. Eng. Sci.*, vol. 29, p. 901–916, 1991.