

---

# Modélisation du contact en implicite

## Application à l'interaction rotor/stator

Isabelle Guilloteau\* — Bernard Peseux\* — Jérôme Bonini\*\*

\* *Laboratoire de mécanique et matériaux*

*Ecole Centrale de Nantes – BP 92101*

*F-44321 Nantes cedex 03*

*{Isabelle.Guilloteau,Bernard.Peseux}@ec-nantes.fr*

\*\* *SNECMA Département méthodes*

*Centre de Villaroche*

*F-77550 Moissy-Cramayel*

*Jerome.Bonini@sneema.fr*

---

*RÉSUMÉ. Après l'étude des deux principales méthodes de traitement du contact utilisées en dynamique, l'influence des valeurs des paramètres du schéma d'intégration temporelle implicite de Newmark est analysée avec une attention particulière pour les conditions de compatibilité cinématique. Une nouvelle raideur de contact est ensuite proposée pour déterminer les forces d'interaction avec un schéma d'intégration temporelle implicite. Le nouveau modèle de contact est finalement utilisé pour simuler l'interaction entre un rotor et un stator dans un moteur d'avion, suite à une perte d'aube.*

*ABSTRACT. The two main contact methods in dynamics are firstly studied. The influence of the Newmark implicit time scheme parameter values is then analysed with a special attention to the contact compatibility conditions. A new contact stiffness is proposed to compute interaction forces in a finite element code with a Newmark implicit integration scheme. The contact model is finally used to simulate rotor/stator interaction in an aircraft engine, after a blade-off event.*

*MOTS-CLÉS : élément de contact, dynamique, schéma implicite de Newmark, compatibilités, méthode des multiplicateurs de Lagrange, méthode des pénalités, raideur de contact, interaction rotor/stator.*

*KEYWORDS: contact element, dynamic, Newmark implicit time scheme, compatibilities, Lagrange multiplier method, penalty function method, contact stiffness, rotor/stator interaction.*

---

## 1. Introduction

Les problèmes de contact en calcul des structures sont nombreux et délicats à traiter. Le contact mécanique intervient dès que deux corps, ou plus, entrent en interaction le long de leurs frontières, créant alors un phénomène à caractère non linéaire. C'est un point crucial dans de multiples domaines tels que l'emboutissage, le crash automobile ou ferroviaire... Le secteur aéronautique est également confronté à ce type de phénomène, par exemple dans un turboréacteur lors d'une perte d'aube fan, correspondant à un essai de qualification imposé par la direction générale de l'aviation civile. La perte d'une aube fan crée un balourd qui sollicite l'ensemble de la structure du moteur. Une interaction s'installe entre la roue aubagée et le carter fan, qui génère de nombreuses déformations irréversibles ainsi que des ruptures. Des modélisations numériques sont réalisées afin de prédire le comportement du moteur soumis à ce balourd. Elles sont effectuées avec des logiciels d'éléments finis, en dynamique. Or la durée du phénomène de balourd dû à la perte d'aube fan est relativement longue (de l'ordre de la seconde, correspondant à une centaine de tours). Il est donc intéressant d'utiliser un schéma d'intégration temporelle implicite. En effet, il s'agit d'un schéma inconditionnellement stable, il n'introduit donc pas de limite sur le pas de temps utilisable. De plus, il est tout à fait compatible avec l'utilisation de la condensation dynamique, d'une part, qui permet de réduire le nombre de degrés de liberté du problème, et des matrices gyroscopiques, d'autre part, pour représenter la mise en rotation des parties tournantes.

De manière à introduire la prise en compte du contact entre rotor et stator dans les modèles de simulation de perte d'aube, un élément simplifié de contact est développé dans le module implicite MECANO [SAM 97]. Pour cela, les deux principales méthodes de traitement du contact sont tout d'abord analysées. Puis, nous étudions l'influence du schéma d'intégration temporelle implicite de Newmark sur la modélisation du contact, tant d'un point de vue des vitesses et accélérations que des efforts. Nous mettons alors en évidence le rôle fondamental joué par les paramètres de Newmark dans les équations du contact et nous optons pour une méthode des pénalités pour la création de notre élément simplifié de contact. Ensuite nous proposons une nouvelle raideur de contact dont l'expression est déduite de l'analyse de la méthode des multiplicateurs de Lagrange en dynamique. Après la présentation d'un exemple de validation, le nouvel élément simplifié de contact est utilisé pour la simulation de l'interaction rotor/stator générée par une perte d'aube. Les résultats du modèle simplifié sont finalement comparés à ceux obtenus à l'aide du code de dynamique rapide LS-DYNA3D [HAL 93] avec un modèle tridimensionnel complet.

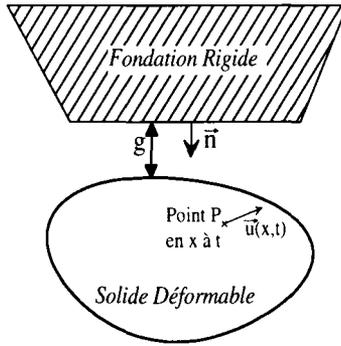
## 2. Méthodes de traitement du contact

Le contact unilatéral entre un solide déformable et un obstacle rigide (figure 1) est caractérisé par les conditions de Signorini [KIK 88] qui consistent en :

- une condition de non-pénétration (condition linéarisée) :  $u_n = \vec{u} \cdot \vec{n} \leq g_0$ ,

- une contrainte statique :  $\lambda_n \leq 0$ , caractérisant l'absence de traction sur la zone de contact,
- une condition de compatibilité :  $\lambda_n(u_n - g_0) = 0$ ,

où  $g_0$  représente la distance initiale entre le solide déformable et le corps rigide,  $\vec{u}$  le vecteur déplacement du solide,  $\vec{n}$  le vecteur normal unitaire, extérieur à l'obstacle rigide et  $\vec{\lambda}$  le vecteur force de contact. Cette force se décompose en une pression de contact :  $\lambda_n = \vec{\lambda} \cdot \vec{n}$ , et une composante tangentielle  $\vec{\lambda}_t = \vec{\lambda} - (\vec{\lambda} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$ .



**Figure 1.** Problème de Signorini

D'une manière générale, pour un problème de contact entre solides déformables, discrétisés par la méthode des éléments finis, les équations à résoudre sont, à l'instant  $t$  :

$$M\ddot{U}(t) + F^{int}(U(t), \dot{U}(t)) = F^{ext}(t) - Q^T(t)\Lambda(t) \quad [1]$$

$$G(t) = G_0 + Q(t)U(t) \quad [2]$$

où  $M$  représente la matrice masse du système,  $\Lambda(t)$  le vecteur des efforts d'interaction aux points de contact,  $G(t)$  le vecteur des distances entre les entités potentiellement en contact à l'instant  $t$ ,  $G_0$  le vecteur des distances initiales, et  $Q(t)$  la matrice de contrainte géométrique du contact, dépendant de la discrétisation des surfaces en contact. Les conditions de contact discrétisées, s'appuyant sur une correction en déplacement du contact [ZHO 93], s'écrivent :

$$(G)_i \geq 0; (\Lambda)_i \leq 0; ((G)_i)((\Lambda)_i) = 0 \quad [3]$$

avec  $(G)_i$  et  $(\Lambda)_i$ , respectivement les  $i^{ème}$  composantes des vecteurs  $G$  et  $\Lambda$ .

Il est aussi possible d'adopter une correction en vitesse du contact. Dans ce cas, les vitesses normales relatives  $Q\dot{U}$  sont prises égales à zéro [BON 97] :

$$(\Lambda)_i \leq 0; ((Q\dot{U})_i)((\Lambda)_i) = 0 \quad [4]$$

Les méthodes classiques de traitement du contact dérivent de l'optimisation de l'énergie mécanique sous contraintes de contact ([MIN 83], [DUV 72]). La première méthode, basée sur une pénalisation quadratique, est la méthode des pénalités. Elle consiste à introduire des ressorts fictifs entre les entités en contact [ZHO 93]. Ceci se traduit par :

$$M\ddot{U} + F^{int}(U, \dot{U}) + (Q^T K_c Q)U = F^{ext} - Q^T K_c G_0 \quad [5]$$

où  $K_c$  représente la matrice de raideur de contact. La force de contact est donc directement proportionnelle à la distance de pénétration :

$$(\Lambda)_i = k_c(G)_i \quad [6]$$

$k_c$  représente la raideur de contact dont il faut fixer la valeur. Hallquist *et al.* [HAL 85] proposent une expression de cette raideur de contact qui dépend des caractéristiques géométriques et matérielles des entités en contact, et d'un paramètre multiplicateur qu'il est nécessaire d'adapter à chaque cas de contact étudié. Cependant, cette raideur reste utilisée par la majorité des algorithmes de contact basés sur la méthode des pénalités.

Du fait de la proportionnalité existant entre force de contact et écart entre les solides, la pénalisation autorise des pénétrations résiduelles ( $(G)_i < 0$ ) et induit parfois des oscillations indésirables. En effet, une faible valeur de raideur de contact conduit à de grandes valeurs de pénétration, tandis qu'une valeur élevée de raideur de contact rigidifie le système et engendre des phénomènes oscillatoires. Malgré cela, et de par la simplicité de sa mise en œuvre, la méthode des pénalités est largement répandue et utilisée dans la plupart des codes commerciaux de dynamique rapide.

La seconde méthode est celle des multiplicateurs de Lagrange. Elle consiste à introduire des variables duales, inconnues supplémentaires du système, qui permettent de respecter exactement les contraintes de contact ( $(G)_i \geq 0$ ) :

$$M\ddot{U} + F^{int}(U, \dot{U}) = F^{ext} - Q^T \Lambda \quad [7]$$

Ces inconnues, appelés multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda$ , représentent les forces de contact et assurent les conditions de non-pénétration ([BAT 85], [CHA 86], [CHA 95]).

### 3. Influence du schéma implicite de Newmark sur le contact

Nous rappelons les équations liées à la discrétisation temporelle implicite et étudions son influence sur les différents aspects liés au contact (force de contact et compatibilités cinématiques).

#### 3.1. Le schéma d'intégration temporelle implicite de Newmark

Le schéma d'intégration temporelle implicite de Newmark est issu de la troncature d'un développement en série de Taylor [BEL 83]. Il nécessite l'utilisation d'un

procédé itératif, de type Newton-Raphson, et consiste à approcher les déplacements et vitesses à l'instant  $t_{n+1}$  par :

$$U_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{U}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{U}_{n+1} \quad [8]$$

$$\dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{U}_n + \gamma \Delta t \ddot{U}_{n+1} \quad [9]$$

où  $\beta$  et  $\gamma$  sont les paramètres de Newmark. Ce schéma est inconditionnellement stable pour :

$$4\beta \geq (\gamma + 1/2)^2, \quad \gamma \geq 1/2 \quad [10]$$

et précis au second ordre pour  $\gamma = 1/2$  [GER 96]. Une valeur de  $\gamma$  supérieure à  $1/2$  permet d'introduire de la dissipation numérique, souvent utile lors de modélisation de problèmes de contact en dynamique.

Les couples  $(\beta; \gamma)$  de paramètres de Newmark couramment utilisés sont :

- $(1/4 ; 1/2)$ , représentant la formule des trapèzes, et qui correspond à un schéma à accélération moyenne constante. Ces paramètres conduisent à l'opérateur d'intégration temporelle de précision maximale [GER 96] ;

- $(1/6 ; 1/2)$ , représentant le schéma à accélération linéaire ;

- $(1/2 ; 1/2)$ , couple recommandé par Chaudhary & Bathe [CHA 86] pour une meilleure modélisation du contact.

Le code d'éléments finis implicite que nous utilisons est le module dynamique MECANO du logiciel SAMCEF [SAM 97]. Les schémas d'intégration temporelle disponibles sont les schémas de Newmark pur et modifié H.H.T. (méthode- $\alpha$ , [HIL 77]). Ce dernier permet d'introduire de l'amortissement numérique sur les hautes fréquences, sans dégrader la précision du schéma. L'expression des paramètres de Newmark devient alors :

$$\beta = \frac{1}{4}(1 + \alpha)^2 \quad \gamma = \frac{1}{2}(1 + 2\alpha) \quad [11]$$

Le paramètre de dissipation numérique  $\alpha$  est généralement compris entre 0 et  $1/3$ .

### 3.2. La méthode des pénalités en implicite

L'utilisation combinée de la méthode des pénalités et du schéma d'intégration temporelle implicite de Newmark n'est pas problématique. Il faut toutefois veiller à ce que la valeur de la raideur de contact ne soit pas trop élevée, afin d'éviter tout problème de convergence du processus itératif. De plus, afin de faciliter la convergence du processus itératif aux abords de la phase de relâchement du contact, une régularisation de la loi de contact (figure 2) peut s'avérer nécessaire. Cette régularisation, généralement de type cubique, permet de remédier à la discontinuité de la raideur.

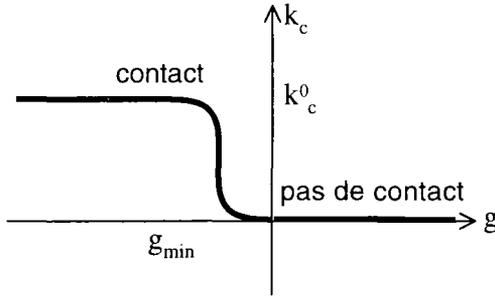


Figure 2. Régularisation de la loi de contact

### 3.3. La méthode des multiplicateurs de Lagrange en implicite

La méthode des multiplicateurs de Lagrange, bien que respectant strictement les conditions de non-pénétration, est peu employée en dynamique. En effet, elle conduit à résoudre des systèmes plus importants qu'avec la méthode des pénalités, de par l'ajout d'inconnues supplémentaires. Cependant, ayant opté pour une correction en déplacement du contact, il nous a semblé utile d'étudier la méthode des multiplicateurs de Lagrange en implicite. De manière analogue à la méthode des multiplicateurs de Lagrange anticipés proposée par Carpenter *et al.* [CAR 91], une technique de prédiction (sans contact) - correction (avec contact) est adoptée.

En phase de prédiction (grandeurs étoilées), dans les hypothèses de petites déformations et de matériaux élastiques linéaires, les équations d'équilibre à l'instant  $t_{n+1}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} M\ddot{U}_{n+1}^* + F_{n+1}^{int*} &= F_{n+1}^{ext} \\ U_{n+1}^* &= U_n + \Delta U^* \\ F_{n+1}^{int*} &= F_n^{int} + K_n \Delta U^* \end{aligned}$$

où  $K_n$  représente la matrice raideur du système discrétisé à l'instant  $t_n$  et  $\Delta U^*$  correspond à un accroissement de déplacement. Il vient ensuite :

$$\left( \frac{M}{\beta \Delta t^2} + K_n \right) \Delta U^* = F_{n+1}^{ext} - F_n^{int} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} \left( \Delta t \dot{U}_n + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{U}_n \right) \quad [12]$$

Si pour certains nœuds des pénétrations sont détectées, c'est-à-dire pour lesquels la fonction écart  $G_{n+1}^*$  est négative, alors les déplacements de la structure discrétisée sont déterminés de manière à satisfaire la nouvelle équation d'équilibre :

$$M\ddot{U}_{n+1} + F_{n+1}^{int} = F_{n+1}^{ext} - Q_{n+1}^T \Lambda_{n+1} \quad [13]$$

Nous considérons que  $Q_{n+1} = Q_{n+1}^*$ , c'est-à-dire que les nœuds qui ont pénétré pendant la phase de prédiction sont effectivement les nœuds en contact à l'instant

$t_{n+1}$ . Ainsi, avec  $U_{n+1} = U_n + \Delta U^* + \Delta U^c$  et la contrainte à respecter  $G_{n+1} = 0 = G_{n+1}^* + Q_{n+1} \Delta U^c$ , la force de contact s'écrit :

$$\Lambda_{n+1} = \left[ Q_{n+1} \left( \frac{M}{\beta \Delta t^2} + K_n \right)^{-1} Q_{n+1}^T \right]^{-1} G_{n+1}^* \quad [14]$$

et la correction du déplacement s'exprime :

$$\Delta U^c = - \left( \frac{M}{\beta \Delta t^2} + K_n \right)^{-1} Q_{n+1}^T \Lambda_{n+1} \quad [15]$$

La matrice  $\left[ Q \left( \frac{M}{\beta \Delta t^2} + K \right)^{-1} Q^T \right]$  est la matrice d'influence du contact : elle représente la condensation d'une *souplesse équivalente de contact* (relation [14]) sur les nœuds candidats à l'interaction.

Le traitement du contact en implicite par la méthode des multiplicateurs de Lagrange est donc sensible au choix des valeurs attribuées au paramètre de Newmark  $\beta$  ainsi qu'au pas de temps. Chaudhary & Bathe [CHA 86] ont étudié, sur le cas d'un impact de deux masses ponctuelles, l'influence du paramètre  $\beta$  en fixant  $\gamma$  à  $1/2$ . Ils ont constaté que seul le paramètre de Newmark  $\beta = 1/2$  fournit des résultats identiques à la solution analytique.

Nous avons repris l'étude de cet exemple d'impact de deux masses, sans imposer de valeur au paramètre  $\gamma$ . Il apparaît alors un facteur  $I_{dc} = 2\beta - \gamma - 1/2$ , que nous appelons indicateur de dureté de choc. Si cet indicateur est nul, alors le contact est correctement relâché. Par contre, si cet indicateur est positif (resp. négatif), le relâchement s'effectue de manière tardive (resp. prématurée), le contact est alors dit *mou* (resp. *dur*). Le couple de paramètres de Newmark recommandé par Chaudhary & Bathe [CHA 86] fournit une valeur nulle de l'indicateur de dureté de choc, tout comme celui préconisé par Hu [HU 97] : ( $\beta = 1; \gamma = 3/2$ ).

### 3.4. Etude des vitesses et accélérations relatives

Dans ce paragraphe, nous analysons les compatibilités des vitesses et accélérations des entités en contact, dans le cas d'une correction en déplacement du contact.

Nous considérons l'exemple d'un impact de deux barres élastiques. Le contact débute après  $t = 0$ . La vitesse relative initiale est non nulle et notée  $QV_0$ . Les accélérations et déplacements initiaux sont nuls ( $\dot{U}_0 = 0, U_0 = 0$ ). Les points en contact restent les mêmes au cours de l'interaction, le vecteur de contrainte de contact  $Q$  est donc invariant. Nous supposons que la contrainte de non-pénétration  $G(t) = 0$  est vérifiée durant toute l'interaction (condition que seule la méthode des multiplicateurs de Lagrange permet de respecter strictement). Puis, les vitesses et accélérations relatives  $Q\dot{U}_n$  et  $Q\ddot{U}_n$  sont déterminées à l'aide d'un schéma d'intégration temporelle implicite, pour différents couples de paramètres de Newmark ( $0 < \beta \leq 1$  et  $1/2 \leq \gamma \leq 1$ ).

Les vitesses relatives s'expriment sous la forme de relations de récurrence :

– si  $\beta \neq \gamma/2$

$$Q\dot{U}_{n+1} - \left(\frac{2\beta - \gamma - 1/2}{\beta}\right)Q\dot{U}_n + \left(\frac{\beta - \gamma + 1/2}{\beta}\right)Q\dot{U}_{n-1} = 0 \quad [16]$$

– si  $\beta = \gamma/2$

$$Q\dot{U}_{n+1} + Q\dot{U}_n = 0 \quad [17]$$

Quant aux accélérations relatives, la relation de récurrence est identique à la relation [16] :

$$Q\ddot{U}_{n+1} - \left(\frac{2\beta - \gamma - 1/2}{\beta}\right)Q\ddot{U}_n + \left(\frac{\beta - \gamma + 1/2}{\beta}\right)Q\ddot{U}_{n-1} = 0 \quad [18]$$

La forme du terme général des accélérations et vitesses relatives, dans le cas  $\beta \neq \gamma/2$ , dépend du signe du discriminant lié aux relations [16] et [18] :

$$\Delta_0 = \frac{(\gamma + 1/2)^2 - 4\beta}{\beta^2} \quad [19]$$

Le discriminant  $\Delta_0$  fait explicitement apparaître le critère de stabilité du schéma implicite de Newmark (relation [10]). Nous donnons ici les expressions des vitesses et accélérations relatives pour quatre couples de paramètres de Newmark :

– pour le schéma conditionnellement stable à accélération linéaire ( $\beta = 1/6 ; \gamma = 1/2$ ) :

$$Q\dot{U}_n = \frac{1}{2} \left\{ \left(-2 + \sqrt{3}\right)^n - \left(-2 - \sqrt{3}\right)^n \right\} QV_0 \quad [20]$$

$$Q\ddot{U}_n = \frac{-\sqrt{3}}{\Delta t} \left\{ \left(-2 + \sqrt{3}\right)^n - \left(-2 - \sqrt{3}\right)^n \right\} QV_0 \quad [21]$$

La vitesse relative normalisée  $Q\dot{U}_n/QV_0$ , et l'accélération relative normalisée  $\Delta t Q\ddot{U}_n/QV_0$  divergent, c'est-à-dire que leur valeur absolue tend vers l'infini avec le nombre d'opérations  $n$  ;

– pour le schéma inconditionnellement stable correspondant à la formule des trapèzes ( $\beta = 1/4 ; \gamma = 1/2$ ) :

$$Q\dot{U}_n = (-1)^n QV_0, \quad Q\ddot{U}_n = \frac{4n}{\Delta t} (-1)^n QV_0 \quad [22]$$

La vitesse relative normalisée oscille entre 1 et -1 (figure 3) avec une période de  $2\Delta t$ , tandis que l'accélération relative normalisée diverge (figure 4) ;

– pour le schéma inconditionnellement stable avec un indicateur de dureté de choc et une dissipation numérique nuls ( $\beta = 1/2$  ;  $\gamma = 1/2$ ) :

$$Q\dot{U}_n = \frac{1}{2} ((i)^n + (-i)^n) QV_0, \quad Q\ddot{U}_n = \frac{i}{\Delta t} ((i)^n - (-i)^n) QV_0 \quad [23]$$

avec  $i$  le nombre complexe tel que  $i^2 = -1$ . La vitesse relative normalisée oscille entre 1 et  $-1$  (figure 3) avec une période de  $4\Delta t$ , et l'accélération relative normalisée oscille entre 2 et  $-2$  avec la même période (figure 4) ;

– pour le schéma inconditionnellement stable avec dissipation numérique qui correspond à la méthode- $\alpha$  ( $\beta = (1 + \alpha)^2 / 4$  ;  $\gamma = 1/2 + \alpha$ ), avec  $\alpha > 0$  :

$$Q\dot{U}_n = \left(1 - \frac{2\alpha n}{(\alpha^2 - 1)}\right) \left(\frac{\alpha^2 - 1}{(\alpha + 1)^2}\right)^n QV_0 \quad [24]$$

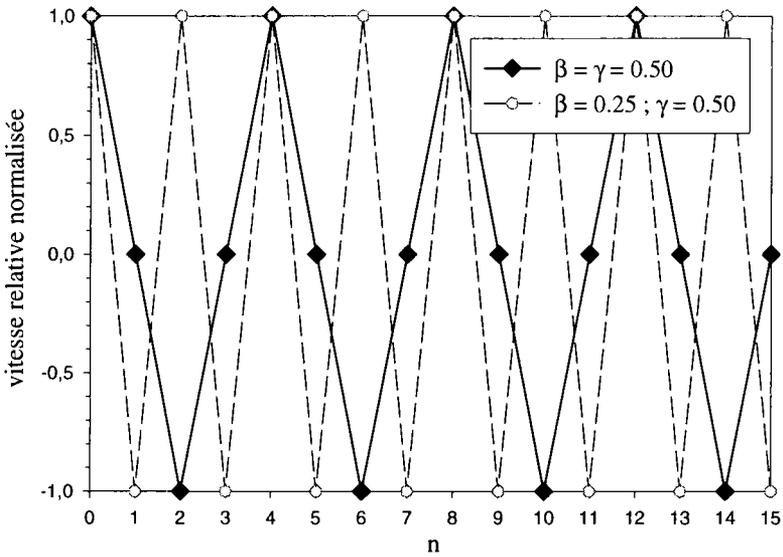
$$Q\ddot{U}_n = \frac{-4n}{\Delta t (\alpha^2 - 1)} \left(\frac{\alpha^2 - 1}{(\alpha + 1)^2}\right)^n QV_0 \quad [25]$$

Etant donné que la valeur du paramètre  $\alpha$  est comprise entre 0 et 1, les valeurs absolues des vitesses et accélérations relatives normalisées tendent vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini (figures 5 et 6).

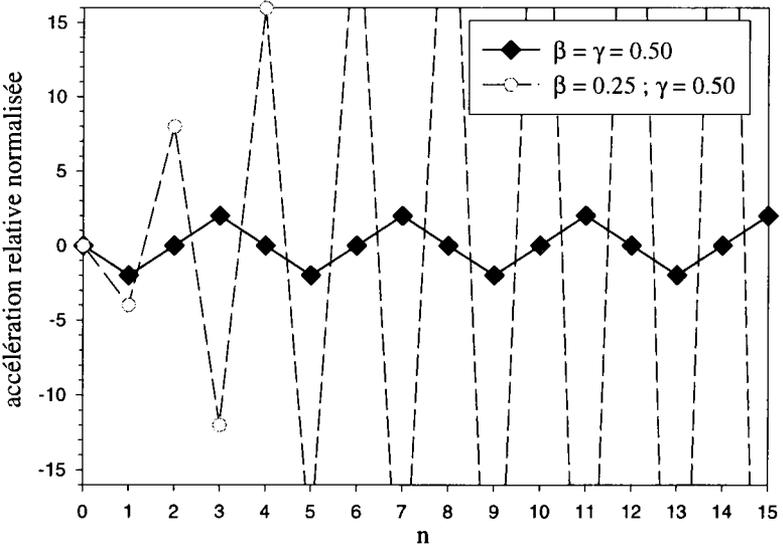
Nous avons également tracé sur les figures 5 et 6, les vitesses et accélérations relatives normalisées issues du schéma implicite de Newmark, inconditionnellement stable, avec ( $\beta = 0.50$  ;  $\gamma = 0.55$ ), qui fournit le même amortissement numérique que la méthode- $\alpha$  avec  $\alpha = 0.05$ .

La première conclusion de cette analyse est que l'utilisation d'un schéma de Newmark conditionnellement stable est à proscrire pour une étude avec prise en compte du contact. En effet, celui-ci conduit à des vitesses et accélérations relatives instables. De même, le schéma correspondant à la formule des trapèzes, bien que inconditionnellement stable et fournissant la meilleure précision du schéma implicite, est à éviter car il conduit à une accélération relative instable. De plus, dans ce cas, la vitesse relative a un comportement oscillatoire non amorti de fréquence  $(2\Delta t)^{-1}$ . Cette fréquence d'oscillation de la vitesse relative normalisée est deux fois plus élevée que celle issue d'un schéma inconditionnellement stable sans dissipation numérique avec un indicateur de dureté de choc nul, qui a d'ailleurs l'avantage de fournir une accélération relative de comportement stable.

La méthode- $\alpha$  a l'avantage d'introduire de la dissipation numérique, et donc d'amortir les oscillations des vitesses et accélérations relatives. Cependant, dans le cas de l'accélération relative, il faut noter, avant la phase d'amortissement, l'apparition d'une phase de forte croissance du module due à des valeurs de paramètres de Newmark proches de celles de la formule des trapèzes (figure 6). Ce phénomène n'est pas constaté lors de l'utilisation du couple de paramètres de Newmark (0.50 ; 0.55), qui correspond à la même dissipation numérique que celle de la méthode- $\alpha$  avec  $\alpha = 0.05$ .



**Figure 3.** Vitesse relative normalisée pour une première série de paramètres de Newmark



**Figure 4.** Accélération relative normalisée pour une première série de paramètres de Newmark

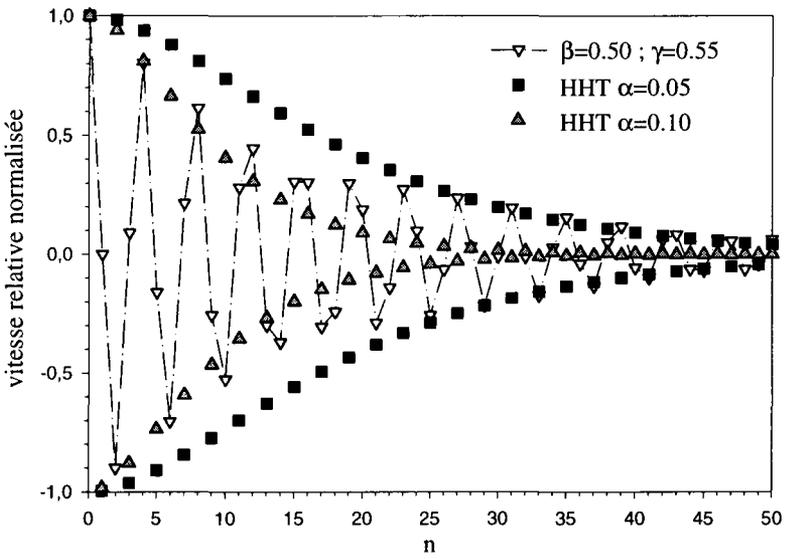


Figure 5. Vitesse relative normalisée pour une seconde série de paramètres de Newmark

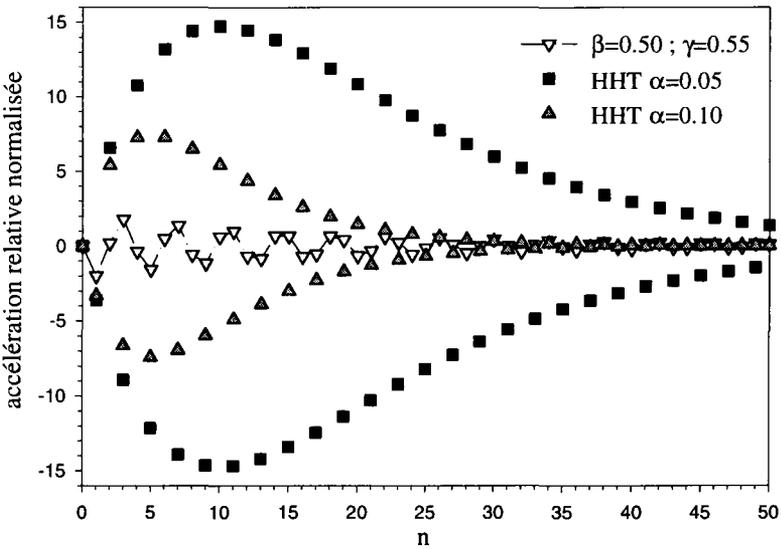


Figure 6. Accélération relative normalisée pour une seconde série de paramètres de Newmark

Finalement, cette étude d'influence a permis de mettre en évidence le rôle fondamental joué par les paramètres de Newmark dans les différentes équations liées au contact. Pour le traitement du contact avec un schéma implicite de Newmark, nous recommandons l'utilisation d'un schéma qui soit inconditionnellement stable et qui fournisse une valeur de l'indicateur de dureté de choc la plus faible possible. En ce qui concerne l'amortissement numérique, il nous semble préférable de l'introduire par l'intermédiaire d'un schéma de Newmark plutôt que par la méthode- $\alpha$ , même si cette dernière correspond à un schéma d'intégration temporelle plus précis. En effet, les schémas d'intégration temporelle utilisent certaines propriétés de continuité des déplacements, vitesses et accélérations au cours du temps. Ces conditions de continuité sont d'autant plus fortes que le schéma est d'ordre élevé. Aussi, il est parfois préférable de baisser l'ordre du schéma d'intégration temporelle, de façon à absorber les oscillations dues au contact sur les vitesses et accélérations [RAO 96].

#### 4. L'élément simplifié de contact

La méthode des multiplicateurs de Lagrange, bien que respectant strictement la condition de non-pénétration, nécessite la résolution de systèmes plus importants du fait de l'introduction de nouvelles variables. De plus, en implicite, cette méthode entraîne une augmentation du nombre d'itérations nécessaires à la résolution, voire une divergence du processus. Etant donné qu'il n'est pas possible d'introduire une régularisation du contact avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous lui préférons la méthode des pénalités, bien que celle-ci engendre des pénétrations résiduelles.

Afin de caractériser le contact, nous choisissons d'adopter une nouvelle expression de la raideur de contact :

$$K_{contact} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} [QM^{-1}Q^T]^{-1} \quad [26]$$

Cette raideur de contact correspond à la raideur équivalente obtenue à partir de la méthode des multiplicateurs de Lagrange avec un schéma d'intégration temporelle implicite (relation [14]) en considérant un pas de temps suffisamment petit pour pouvoir négliger les termes de raideur devant les termes de masse.

Cette nouvelle raideur a ainsi l'avantage d'être plus faible que la raideur équivalente issue de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, ce qui assure une meilleure convergence du processus itératif de résolution. La nouvelle raideur, contrairement à la raideur proposée par Hallquist *et al.* [HAL 85], ne dépend pas des caractéristiques matérielles. Par contre, elle dépend des masses en interaction et des inverses du paramètre de Newmark  $\beta$  et du carré du pas de temps. S'ajoute ainsi à celle liée au schéma d'intégration temporelle, une nouvelle fonction du paramètre  $\beta$  directement liée à l'interaction. En effet, une grande valeur de  $\beta$  entraîne une petite valeur de la raideur de contact  $K_{contact}$ , donc une diminution du nombre d'itérations du processus de résolution. De plus, une petite valeur de  $\beta$  entraîne une grande valeur de  $K_{contact}$ ,

conduisant alors à une force de contact de type impulsif, donc à un comportement général erroné. Cependant, une grande valeur de  $\beta$  induit une erreur relative de périodicité du schéma implicite plus importante [GER 96]. Il y a donc un compromis à trouver entre ces deux caractéristiques.

L'élément simplifié de contact a été développé dans le module MECANO, à l'aide de l'élément utilisateur. Il consiste simplement en un ressort bilinéaire et comprend une phase de recherche tridimensionnelle du contact, de type nœud/face, et une phase de traitement du contact avec la méthode des pénalités et la nouvelle raideur de contact (relation [26]). Une loi de contact régularisée est aussi introduite de manière à éviter tout problème de convergence du procédé itératif de Newton-Raphson.

## 5. Applications

### 5.1. Test de validation

Afin de valider notre élément de contact, différents tests de validation ont été effectués, en particulier l'impact unidirectionnel de deux barres élastiques, de caractéristiques différentes [HUG 76] (tableau 1).

	barre 1	barre 2
module d'Young	$E_1 = 0.49$	$E_2 = 1.0$
masse volumique	$\rho = 1.0$	$\rho = 1.0$
vitesse de propagation	$c_1 = 0.7$	$c_2 = 1.0$
section	$S = 1.0$	$S = 1.0$
longueur	$L = 10.$	$L = 10.$
nombre d'éléments	$n_1 = 100$	$n_2 = 70$
vitesse initiale	$V_0^1 = 0.1$	$V_0^2 = 0.0$

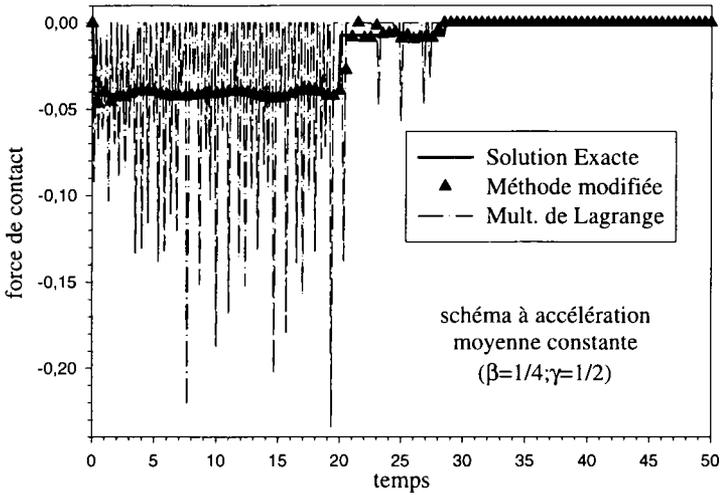
**Tableau 1.** Caractéristiques de l'impact de deux barres différentes

Nous comparons à la solution analytique, les résultats en force de contact issus de l'utilisation de la méthode des pénalités avec notre nouvelle raideur de contact (méthode modifiée) et de l'utilisation de la méthode classique des multiplicateurs de Lagrange, et ce pour deux couples de paramètres de Newmark :

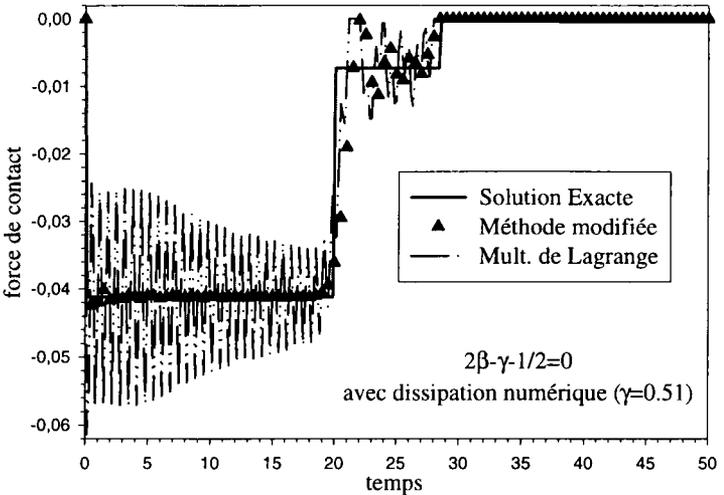
– ( $\beta = 0.25 ; \gamma = 0.50$ ) correspondant à une accélération moyenne constante (figure 7) ;

– ( $\beta = 0.505 ; \gamma = 0.51$ ) fournissant un léger amortissement numérique et une valeur de l'indice de dureté de choc nulle (figure 8).

La première constatation concerne le nombre d'itérations nécessaires au processus pour converger. Celui-ci est, comme attendu, moins important avec la méthode modifiée qu'avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange (diminution de l'ordre de 12 %).



**Figure 7.** Force de contact entre les deux barres ( $\beta = 1/4 ; \gamma = 1/2$ )

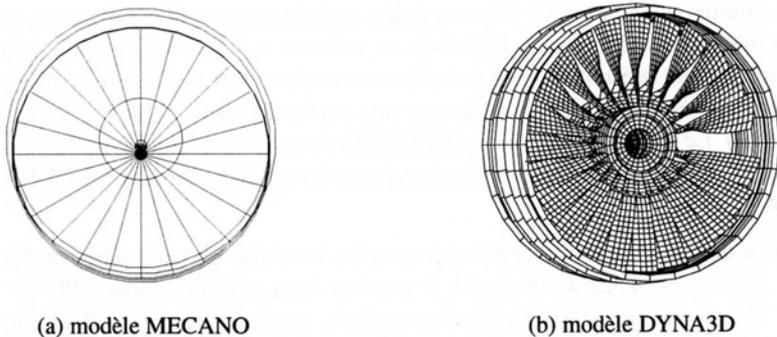


**Figure 8.** Force de contact entre les deux barres ( $2\beta - \gamma - 1/2 = 0$ )

La seconde constatation concerne le bon comportement de la méthode modifiée. Cette dernière permet d'amortir naturellement les hautes fréquences fournissant ainsi des résultats globalement très proches de la solution analytique et toujours meilleurs que ceux issus de la méthode des multiplications de Lagrange, et ceci quel que soit le couple de paramètres de Newmark (figures 7 et 8).

## 5.2. Modélisation de l'interaction rotor/stator

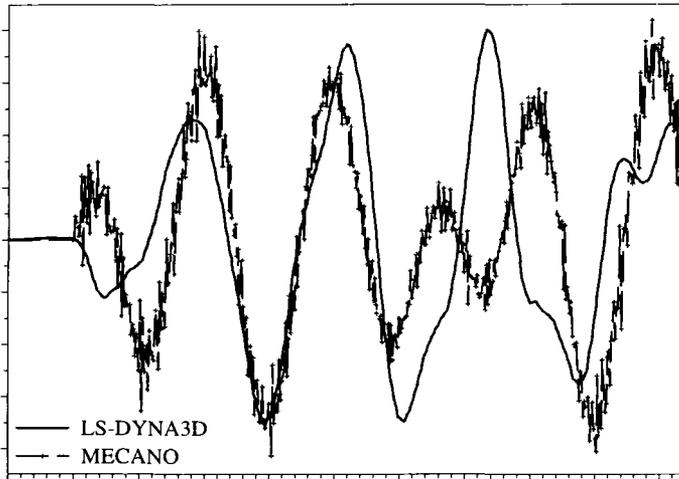
Après la phase de validation, l'élément simplifié de contact est utilisé dans MECANO pour modéliser l'interaction entre le rotor et le stator d'un moteur d'avion engendrée par la perte d'une aube. Les aubes sont modélisées à l'aide de ressorts généralisés et le rotor à l'aide de poutres, de ressorts et de masses concentrées (figure 9(a)). Le carter fan est tout d'abord discrétisé de manière homogène par des coques quadrangulaires puis est condensé par la méthode des modes composants. Il est ensuite encastré à une de ses extrémités afin de représenter sa liaison rigide avec le carter intermédiaire. Le repère utilisé est le repère inertiel permettant la simulation de la rotation de l'arbre à l'aide de matrices gyroscopiques. Le balourd, représentant le déséquilibre du rotor suite à la perte de l'aube, est alors représenté par une force de direction variable, fonction d'une masse et d'une excentricité. Les résultats issus de ce modèle sont comparés à ceux obtenus à l'aide du logiciel commercial à schéma d'intégration temporelle explicite LS-DYNA3D [HAL 93] avec un modèle tridimensionnel complet (figure 9(b)). Pour ce modèle complet, la perte d'aube est réellement simulée : après la phase de stabilisation des contraintes dues à la mise en vitesse, une des aubes est détachée du rotor et le balourd apparaît alors naturellement.



**Figure 9.** Modèles simplifié et complet de l'interaction rotor/stator

En ce qui concerne le traitement de l'interaction, MECANO gère le contact entre un nœud et une portion fixe de surface, par l'intermédiaire de l'élément simplifié de contact, tandis que LS-DYNA3D utilise les interfaces classiques de contact de type fa-

cette sur facette. Les deux algorithmes traitent le contact par la méthode des pénalités, seule la raideur de contact diffère.



**Figure 10.** Force transmise au support palier ( $\beta = \gamma = 1/2$ )

La comparaison entre les deux modèles est difficile : les discrétisations, les schémas d'intégration temporelle, les mises en rotation et les interfaces de contact sont différents. Nous présentons ici les évolutions temporelles des efforts transmis entre le rotor et le support palier représentant une partie du stator, pour les deux modèles (figure 10). Le modèle simplifié de MECANO fournit une estimation satisfaisante de ces efforts, avec un écart maximal, par rapport au modèle complet LS-DYNA3D, de l'ordre de 35 %.

En ce qui concerne l'intégration temporelle, le couple de paramètres de Newmark ( $\beta = 1/2 ; \gamma = 1/2$ ) a été choisi. Il conduit à un gain de temps CPU de l'ordre de 20 % par rapport à la formule des trapèzes, pour des résultats identiques. Ceci s'explique par le fait que le couple  $(1/2 ; 1/2)$  engendre moins d'oscillations que la formule des trapèzes  $(1/4 ; 1/2)$ , ce qui facilite la convergence du processus itératif de résolution.

Finalement, dans l'optique de réaliser une simulation d'un essai de perte d'aube avec un modèle global de moteur d'avion, l'élément simplifié de contact développé dans MECANO s'avère être un outil numérique intéressant. Il permet une approximation satisfaisante des principaux résultats clés.

## 6. Conclusion

Notre étude a consisté à développer un élément de contact dans le module d'éléments finis MECANO à schéma d'intégration temporelle implicite de Newmark. Cet élément doit permettre de simuler de manière simplifiée l'interaction entre rotor et stator, survenant après une perte d'aube dans la partie fan d'un moteur d'avion. Cette étude nous a conduit à analyser les deux principales méthodes de traitement du contact, les méthodes des pénalités et des multiplicateurs de Lagrange, lorsqu'elles sont utilisées en implicite. L'analyse des multiplicateurs de Lagrange, ainsi que des vitesses et accélérations relatives, déterminés avec un schéma d'intégration temporelle implicite, a permis de dégager un critère de choix des paramètres de Newmark. En effet, la prise en compte du contact en implicite nécessite l'utilisation de valeurs de paramètres telles que l'indicateur de dureté de choc  $I_{dc} = 2\beta - \gamma - 1/2$  soit le plus petit possible. Afin d'éviter les problèmes de convergence liés à la méthode des multiplicateurs de Lagrange en implicite, nous avons choisi d'implémenter la méthode des pénalités, plus souple à mettre en œuvre, dans l'élément simplifié de contact de MECANO. La raideur de contact utilisée est déduite de l'analyse des multiplicateurs de Lagrange en dynamique. Elle conduit à de meilleures performances numériques (amortissement naturel des oscillations liées au contact) et algorithmiques (diminution du nombre d'itérations) que la méthode des multiplicateurs de Lagrange. De plus, cette raideur est compatible avec les couples classiques de paramètres de Newmark, y compris la formule des trapèzes. L'élément simplifié de contact ainsi construit est ensuite utilisé pour simuler le phénomène d'interaction entre un rotor et un stator lorsque le rotor est soumis à un fort balourd. Les résultats du modèle simplifié MECANO sont comparés avec ceux fournis par un modèle tridimensionnel réalisé avec le logiciel explicite LS-DYNA3D. Malgré des concepts différents, les écarts observés entre les résultats clés de la simulation de perte d'aube à grande vitesse restent raisonnables. Le nouveau modèle est un bon compromis entre précision et temps de calcul. Des travaux supplémentaires sont à l'étude, en particulier l'intégration d'une loi de frottement ainsi que le développement d'une raideur de contact liée à une correction en vitesse.

## 7. Bibliographie

- [BAT 85] BATHE K.-J., CHAUDHARY A., « A solution method for planar and axisymmetric contact problems », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, 1985, p. 65-88.
- [BEL 83] BELYTSCHKO T., HUGHES T. J. R., *Computational Methods for Transient Analysis*, vol. 1 de *Computational Methods in Mechanics*, North-Holland, 1983.
- [BON 97] BONINI J., BUNG H., « Modélisation des problèmes de contact-impact avec frottement en explicite par la méthode des multiplicateurs de Lagrange », *Actes du Troisième Colloque National en Calcul des Structures*, vol. 1, Presses Académiques de l'Ouest, 1997, p. 411-416.
- [CAR 91] CARPENTER N. J., TAYLOR R. L., KATONA M. G., « Lagrange constraints for transient finite element surface contact », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, 1991, p. 103-128.

- [CHA 86] CHAUDHARY A. B., BATHE K.-J., « A solution for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction », *Computers & Structures*, vol. 24, n° 6, 1986, p. 855-873.
- [CHA 95] CHABRAND P., DUBOIS F., RAOUS M., « Programmation mathématique pour le contact avec frottement et comparaison avec d'autres méthodes », *Actes du Deuxième Colloque National en Calcul des Structures*, Hermès, 1995, p. 429-434.
- [DUV 72] DUVAUT G., LIONS J. L., *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [GER 96] GERADIN M., RIXEN D., *Théorie des vibrations. Application à la dynamique des structures*, 2<sup>e</sup> édition, Masson, Paris, 1996.
- [GUI 99] GUILLOTEAU I., Modélisation du contact en dynamique : Création d'un élément simplifié de contact et Application à l'interaction rotor/stator, Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1999.
- [HAL 85] HALLQUIST J. O., GOUDREAU G. L., BENSON D. J., « Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 51, 1985, p. 107-137.
- [HAL 93] HALLQUIST J. O., *Manuel LS-DYNA3D*, Livermore Software Technology Corporation, 1993.
- [HIL 77] HILBER H. M., HUGHES T. J. R., TAYLOR R. L., « Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics », *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 5, 1977, p. 283-292.
- [HU 97] HU N., « A solution method for dynamic contact problems », *Computers & Structures*, vol. 63, n° 6, 1997, p. 1053-1063.
- [HUG 76] HUGHES T. J. R., TAYLOR R. L., SACKMAN J. L., CURNIER A., KANOKNULKULCHAI W., « A finite element method for a class of contact-impact problems », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 8, 1976, p. 249-276.
- [KIK 88] KIKUCHI N., ODEN J. T., *Contact Problems in Elasticity: a study of variational inequalities and finite element methods*, Studies In Applied Mathematics, Philadelphia, 1988.
- [MIN 83] MINOUX M., *Programmation mathématique*, Dunod, Paris, 1983.
- [RAO 96] RAOUS M., CESCOTTO S., CURNIER A., MILLARD A., *Modélisation mécanique et numérique du contact et du frottement*, Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur, 1996.
- [SAM 97] SAMCEF, *Manuel Mecano 7.19*, Samtech S. A., 1997.
- [ZHO 93] ZHONG Z.-H., *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*, Oxford Science Publications, 1993.
- [ZIE 91] ZIENKIEWICZ O. C., TAYLOR R. L., *Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-linearity*, vol. 2 de *The Finite Element Method*, McGraw-Hill Book Company, 1991.