

---

# Méthodes d'éléments spectraux pour des problèmes hybrides duaux de second ordre axisymétriques

## Application à l'algorithme de projection de Goda

Mejdi Azaïez\* — Faker Ben Belgacem\*\* — Hicham Khallouf \*\*\*

\* Institut de Mécanique des Fluides, (UMR 5502)

\*\* Mathématiques pour l'Industrie et la Physique, (UMR 5640)

Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne,

31062 Toulouse cedex

\*\*\* Mécanique et Dynamique des Systèmes (MEDYSYS)

29 rue Jean Rostand, 91893 Orsay cedex

---

**RÉSUMÉ.** Le sujet de cet article est l'étude des équations elliptiques d'ordre deux en formulation hybride duale dans un contexte axisymétrique et de leur discrétisation par des méthodes spectrales. On présente un algorithme basé sur la notion de grilles décalées sans modes parasites et on donne des estimations d'erreur optimales en mono- et multidomaine. On décrit l'implémentation de cette méthode et on quantifie ses performances numériques à l'aide d'expériences numériques. Ensuite, on associe cette technique à l'algorithme de projection de Goda pour la simulation des équations de Stokes instationnaires et on montre que la stabilité inconditionnelle de ce schéma à l'ordre deux, déjà connue dans le cas semi-discret, s'étend au cas complètement discret. Enfin, on donne quelques expériences numériques justifiant l'aptitude de la méthode à bien simuler un écoulement de type Navier-Stokes axisymétrique.

**ABSTRACT.** The subject of this paper consists in studying the second order elliptic equations under the hybrid dual formulation, in an axisymmetric context and their discretization by spectral methods. Next, we present a spectral approximation, based on staggered grids, without spurious modes and we give optimal error estimates in mono- and multi-domain configurations. We describe the implementation of this method and carry out a numerical discussion to quantify its efficiency. Then, we use this technique for the approximation of the projection step of second order Goda algorithm applied to the numerical simulation of the unsteady Stokes equations and we prove unconditional stability of the resulting scheme. Finally, some numerical experiments are provided showing the ability of such a technique to simulate a axisymmetric Navier-Stokes flow.

**MOTS-CLÉS :** axisymétrique, éléments spectraux mixtes, projection, Darcy, Navier-Stokes.

**KEYWORDS:** axisymmetric, mixed spectral elements, projection, Darcy, Navier-Stokes.

---

## 1. Introduction

Le traitement numérique des équations de Navier-Stokes incompressibles instationnaires (formulées en variables primitives vitesse-pression) revient à évaluer une solution approchée du problème suivant : trouver un champ de vitesse  $\mathbf{u} : \Omega \times ]0, t^*[ \rightarrow \mathbb{R}^d$ , ( $d = 2, 3$ ) ainsi qu'une pression  $p : \Omega \times ]0, t^*[ \rightarrow \mathbb{R}$  tels que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega \times ]0, t^*[, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{dans } \Omega \times ]0, t^*[, \end{aligned} \quad [1]$$

où  $\Omega$  est un domaine borné bi- ou tridimensionnel,  $t^*$  est un temps fini,  $\nu$  désigne la viscosité cinématique ou, éventuellement, un paramètre sans dimension (fonction du nombre de Reynolds, de Rayleigh, de Prandtl, . . . , etc.) et  $\mathbf{f}$  représente le terme source. Malgré la capacité des ordinateurs à réaliser des quantités de calcul scientifique considérables, l'inversion numérique de ces équations qui, après linéarisation, se transforment en équations de Stokes, demeure problématique surtout pour des situations concrètes.

Divers algorithmes ont été proposés, étudiés et testés. Ils ont donné plus ou moins de satisfaction du point de vue précision et complexité. Le plus naturel parmi ces algorithmes est basé sur le procédé d'Uzawa appliqué au problème de Stokes et s'avère le plus précis. Mais il est particulièrement coûteux lorsque des écoulements complexes sont simulés, car il débouche sur des équations algébriques à résoudre régies par une matrice mal conditionnée contenant l'inverse d'un opérateur de Laplace (discret) vectoriel. A la fin des années 1960, et dans un esprit complètement différent, A. J. Chorin (cf. [CHO 68], [TEM 68]) a eu l'idée de découpler la vitesse de la pression par décomposition des opérateurs en jeu. Cette procédure aboutit, pour un écoulement confiné, au traitement d'une étape de diffusion qui permet de prédire un champ de vitesse, sur lequel une correction est effectuée aussitôt par le biais d'une projection orthogonale sur l'espace des vitesses à divergence et à composante normales aux bords identiquement nulles, et donnant en même temps la pression ; c'est l'étape de pression-continuité qui peut être vue comme une formulation hybride duale d'un problème de Poisson. Ce genre de technique a reçu depuis le nom de méthodes de projection. Dans la même optique K. Goda (cf. ([GOD 79]) a suggéré une modification qui améliore la précision du schéma et lui confère une plus grande stabilité. Ce schéma peut être étendu à l'ordre deux (cf. J. Van Kan [KAN 86]), et K. Boukir (cf. [BOU 94]) a prouvé que, dans ce cas, il est inconditionnellement stable. Sa démonstration est basée de manière cruciale sur le caractère solénoïdal de la vitesse à la sortie de l'étape de projection. Aussi, une résolution précise et efficace de cette étape, en essayant de conserver une vitesse calculée à divergence nulle, ne peut qu'avoir des répercussions positives sur la validité des algorithmes et des modèles. De nos jours, il est bien connu que les méthodes spectrales sont aptes à répondre à un tel souhait.

Dans un bon nombre de situations réelles, la géométrie du domaine fluide et l'écoulement lui-même présentent une symétrie de révolution par rapport à un axe et le

modèle mathématique associé peut se réduire à des équations aux dérivées partielles bidimensionnelles où interviennent uniquement les composantes radiale et axiale de la vitesse. L'objet de cet article est d'étendre au contexte axisymétrique les techniques proposées et étudiées dans [M.A 98] et [M.A 94] pour approcher le problème de projection (ou hybride dual), et qui ont donné des résultats encourageants dans le cas cartésien en 2 et 3 dimensions d'espace.

L'analyse du problème continu est basée sur le principe variationnel. En plus de certains outils fonctionnels développés dans [C.B 92] et [C.B 94], elle requiert l'emploi de l'espace fonctionnel axisymétrique défini par l'opérateur divergence (noté  $H_r(\text{div}_r, \Omega)$ ). Il est donc nécessaire d'étudier les propriétés de cet espace ; c'est l'objet de la section 2. La section 3 est dédiée aux résultats d'existence et d'unicité de solution du problème faible. Dans la section 4, on décrit en monodomaine une discrétisation spectrale utilisant une seule grille et comportant de ce fait des modes parasites à éliminer. On présente en détail l'implémentation numérique de cette méthode. Tandis que la section 5 est consacrée à une autre approximation spectrale qui repose sur l'utilisation des grilles décalées (dépourvues de modes parasites). Elles conduisent à des vitesses discrètes à divergence identiquement nulle (propriété fortement recommandée pour la stabilité du schéma d'intégration temporelle de Goda). Une étude de l'erreur commise sur la solution exacte, basée sur des résultats d'approximation polynomiale démontrés dans [C.B 99] (cf. [MAD 92]), aboutit à un taux de convergence optimal. Pour clore la section, une brève présentation des principales difficultés inhérentes à l'implémentation numérique est faite et des expériences sont fournies pour étayer les prédictions théoriques. La sixième section est une extension de notre solveur à des géométries complexes au moyen des éléments spectraux en s'appuyant sur les travaux de Maday et Patera [MAD 94]. Dans la dernière section, lorsque l'étape de projection est résolue par l'algorithme des grilles décalées, on montre que la stabilité inconditionnelle du schéma de Goda d'ordre deux appliqué au problème de Stokes instationnaire reste valable. Des tests numériques basés sur une résolution spatiale de type spectral mixte pour l'étape de projection sont décrits à la fin de la section prouvant que la précision temporelle effective du schéma est quadratique par rapport au pas de temps.

## 2. Présentation du problème et cadre fonctionnel

On s'intéresse dans cette section à un système elliptique de point selle posé dans un domaine axisymétrique. Les notations utilisées au long de cet exposé sont celles introduites dans [C.B 94]. Un point générique  $x \in \mathbb{R}^3$  peut être identifié par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  ou cylindriques  $(r, z, \theta) \in ]0, +\infty[ \times \mathbb{R} \times ]-\pi, \pi]$ . Un domaine  $\tilde{\Omega}$  de  $\mathbb{R}^3$  est dit axisymétrique s'il est de la forme  $\Omega \times ]-\pi, \pi]$  dans le référentiel polaire,  $\Omega$  étant un domaine de  $]0, +\infty[ \times \mathbb{R}$ . Il peut, donc, être perçu comme étant le domaine balayé par  $\Omega$ , supposé lipschitzien, en effectuant une rotation d'angle  $\eta = 2\pi$ . On appelle  $\Gamma_0$  l'intersection de la frontière de  $\tilde{\Omega}$  avec l'axe correspondant à  $r = 0$  qui est l'axe de révolution de  $\tilde{\Omega}$ . On pose  $\Gamma = \partial\tilde{\Omega} \setminus \Gamma_0$  et on a donc

$\partial\check{\Omega} = \Gamma \times ] - \pi, \pi ]$ . En tout point de  $\partial\check{\Omega}$  la normale unitaire sortante est  $\check{n}$  tandis que la normale à  $\Gamma$  dans le plan  $(r, z)$  est notée  $n$ .

Les équations posées sur  $\check{\Omega}$  s'énoncent comme suit :

$$\begin{aligned} \check{u} + \check{\nabla} \check{p} &= \check{f} && \text{dans } \check{\Omega}, \\ -\text{div } \check{u} &= \check{g} && \text{dans } \check{\Omega}, \\ \check{u} \cdot \check{n} &= 0 && \text{sur } \partial\check{\Omega}. \end{aligned} \tag{2}$$

Les symboles  $\check{\nabla}$  et  $\text{div}$  désignent respectivement les opérateurs gradient et divergence tridimensionnels, et les données  $\check{f}$  et  $\check{g}$  sont supposées dans  $(L^2(\check{\Omega}))^3$  et  $L^2_0(\check{\Omega})$ , sous-espace de  $L^2(\check{\Omega})$  des fonctions à moyenne nulle. Ce problème peut être vu comme la formulation hybride duale d'un problème de Poisson (cf. [RAV 77], [ROB 91], [THO 77]), et c'est aussi la loi de Darcy élémentaire servant à modéliser l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux homogène, ou encore l'étape de projection d'algorithmes de *time-splitting* appliqués aux équations de Navier-Stokes (cf. [CHO 68], [GOD 79]).24

Le cadre fonctionnel approprié à l'étude du système [2] est classique (cf. [BRE 91], [RAV 77]). L'espace des vitesses est défini par

$$H_0(\text{div}, \check{\Omega}) = \left\{ \check{w} \in (L^2(\check{\Omega}))^3, \text{div } \check{w} \in L^2(\check{\Omega}), \check{w} \cdot n|_{\partial\check{\Omega}} = 0 \right\}$$

alors que la pression est dans  $L^2_0(\check{\Omega})$ . Dans ce contexte la formulation faible issue du problème [1] s'écrit : chercher  $(\check{u}, \check{p}) \in H_0(\text{div}, \check{\Omega}) \times L^2_0(\check{\Omega})$  tel que

$$\int_{\check{\Omega}} \check{u} \check{w} \, dx - \int_{\check{\Omega}} \check{p} (\text{div } \check{w}) \, dx = \int_{\check{\Omega}} \check{f} \check{w} \, dx, \quad \forall \check{w} \in H_0(\text{div}, \check{\Omega}), \tag{3}$$

$$- \int_{\check{\Omega}} \check{q} (\text{div } \check{u}) \, dx = \int_{\check{\Omega}} \check{g} \check{q} \, dx, \quad \forall \check{q} \in L^2_0(\check{\Omega}). \tag{4}$$

Ces équations variationnelles rentrent dans la catégorie des problèmes de point selle. Leur analyse a été réalisée, par exemple, dans [RAV 77] en se basant sur la théorie de F. Brezzi ([BRE 74], [BRE 91]), et ils admettent une solution unique dans  $\check{H}_0(\text{div}, \check{\Omega}) \times L^2_0(\check{\Omega})$ .

Au sens de [C.B 94], le problème est axisymétrique et peut être réduit au moyen de la transformée de Fourier des champs périodiques en une famille de sous-problèmes posés dans le plan  $(r, z)$ . De plus, on fait l'hypothèse simplificatrice que la donnée  $\check{f}$  n'a pas de composante orthoradiale ( $f_\theta = 0$ ) et, ainsi que la fonction  $\check{g}$  (désormais notée  $g$ ) ne dépend que de  $(r, z)$ . On pose alors  $\check{f}(r, z) = (f_r(r, z), f_z(r, z))$ . Dans un tel contexte on peut associer à [2] les équations réduites :

$$u + \nabla_r p = f \quad \text{dans } \Omega, \tag{5}$$

$$-\text{div}_r u = g \quad \text{dans } \Omega, \tag{6}$$

$$u \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \tag{7}$$

Le vecteur  $\mathbf{u} = (u_r, u_z)$  et le champ scalaire  $p$  sont définis dans le plan  $(r, z)$ . Les opérateurs indexés par  $r$  sont tels que  $\nabla_r p = (\frac{\partial p}{\partial r}, \frac{\partial p}{\partial z})$  et  $\text{div}_r \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r u_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$ . La formulation variationnelle s'obtient en intégrant par parties l'équation de la quantité de mouvement et permet de prendre la pression dans l'espace  $L_r^2(\Omega)$  des fonctions mesurables à carré intégrable par rapport à la mesure  $r dr dz$ , muni de la norme

$$\|q\|_{L_r^2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} q^2 r dr dz \right)^{\frac{1}{2}},$$

alors que les vitesses appartiennent à un sous-espace de

$$H_r(\text{div}_r, \Omega) = \left\{ \mathbf{w} = (w_r, w_z) \in (L_r^2(\Omega))^2, \text{div}_r \mathbf{w} \in L_r^2(\Omega) \right\},$$

dont la norme hilbertienne est donnée par :

$$\|\mathbf{w}\|_{H_r(\text{div}_r, \Omega)} = \left( \|\mathbf{w}\|_{(L_r^2(\Omega))^2}^2 + \|\text{div}_r \mathbf{w}\|_{L_r^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour la suite on note  $\mathcal{D}_{\Gamma}(\Omega) = \mathcal{D}(\bar{\Omega} \setminus \Gamma)$  et on introduit

$$\mathcal{D}_{\Gamma, \Gamma_0}(\Omega) = \{ \psi \in \mathcal{D}_{\Gamma}(\Omega), \psi|_{\Gamma_0} = 0 \}.$$

L'espace des vitesses cinématiquement admissibles, et donnant un sens mathématique précis à la condition de Dirichlet [7], est la fermeture  $H_{r,0}(\text{div}_r, \Omega)$  de  $\mathcal{D}_{\Gamma, \Gamma_0}(\Omega) \times \mathcal{D}_{\Gamma}(\Omega)$  dans  $H_r(\text{div}_r, \Omega)$ .

Avant d'expliciter la formulation faible et de prouver qu'elle est équivalente au problème fort, on a besoin de recenser certaines propriétés utiles de ce dernier espace et on commence par une formule de Green. Dans cette optique on définit l'espace de Sobolev-Slobodekii d'ordre 1:

$$H_r^1(\Omega) = \left\{ q \in L_r^2(\Omega), \nabla_r q = \left( \frac{\partial q}{\partial r}, \frac{\partial q}{\partial z} \right) \in (L_r^2(\Omega))^2 \right\}.$$

On rappelle que  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  est dense dans  $H_r^1(\Omega)$  (cf. [TRI 78], [C.B 94]) et on note  $H_{r,0}^1(\Omega)$  la fermeture de  $\mathcal{D}_{\Gamma}(\Omega)$  dans  $H_r^1(\Omega)$ . Les deux versions de la formule de Green se montrent sans difficulté par un argument de densité.

**Théorème 2.1.** On a les formules suivantes de Green :

$$\forall \mathbf{w} \in H_{r,0}(\text{div}_r, \Omega), \forall q \in H_r^1(\Omega), \int_{\Omega} (\text{div}_r \mathbf{w}) q r dr dz + \int_{\Omega} \mathbf{w}(\nabla_r q) r dr dz = 0, \quad [8]$$

$$\forall \mathbf{w} \in H_r(\text{div}_r, \Omega), \forall q \in H_{r,0}^1(\Omega), \int_{\Omega} (\text{div}_r \mathbf{w}) q r dr dz + \int_{\Omega} \mathbf{w}(\nabla_r q) r dr dz = 0. \quad [9]$$

La formule de Green est un moyen approprié pour prouver un résultat plus précis de densité des fonctions régulières dans  $H_{r,0}(\text{div}_r, \Omega)$ , donné dans le

**Théorème 2.2.** L'ensemble  $(\mathcal{D}(\Omega))^2$  est dense dans  $H_{r,0}(\text{div}_r, \Omega)$ .

**3. Etude du problème variationnel**

Pour alléger l'écriture on pose  $X_r(\Omega) = H_{r,0}(\text{div}_r, \Omega)$ , la norme induite sur cet espace par  $H_r(\text{div}_r, \Omega)$  est désormais notée  $\|\cdot\|_{X_r(\Omega)}$ . L'espace des pressions est  $L^2_{r,0}(\Omega)$ , sous-ensemble de  $L^2_r(\Omega)$  des fonctions à moyenne nulle pour la mesure  $rdrdz$ . En supposant que la donnée  $f$  est dans  $(L^2_r(\Omega))^2$  et  $g \in L^2_{r,0}(\Omega)$  on dispose de tous les ingrédients nécessaires pour passer à la formulation variationnelle qui consiste à chercher  $(u, p) \in X_r(\Omega) \times L^2_{r,0}(\Omega)$  tel que :

$$\int_{\Omega} u w r dr dz + b(w, p) = \int_{\Omega} f w r dr dz, \quad \forall w \in X_r(\Omega), \quad [10]$$

$$b(u, q) = \int_{\Omega} g q r dr dz, \quad \forall q \in L^2_{r,0}(\Omega). \quad [11]$$

Dans [10] et [11] on a posé :  $\forall (w, q) \in X_r(\Omega) \times L^2_{r,0}(\Omega)$ ,

$$b(w, q) = - \int_{\Omega} (\text{div}_r w) q r dr dz.$$

Avec la formule de Green on montre que la solution de [10]-[11] satisfait les équations fortes [5]-[7]. C'est un problème de point-selle pour lequel les espaces  $X_r(\Omega)$  et  $L^2_{r,0}(\Omega)$  sont compatibles au sens où la forme  $b(\cdot, \cdot)$  satisfait une condition inf-sup, c'est-à-dire qu'il existe une constante  $\beta > 0$  telle que (cf. [C.B 99]) :  $\forall q \in L^2_{r,0}(\Omega)$ ,

$$\sup_{w \in X_r(\Omega)} \frac{b(w, q)}{\|w\|_{X_r(\Omega)}} \geq \beta \|q\|_{L^2_r(\Omega)}.$$

De plus, la forme  $(u, w) \mapsto \int_{\Omega} u w r dr dz$ , est symétrique et elliptique sur le noyau  $V_r(\Omega)$  de  $b(\cdot, \cdot)$  qui n'est autre que,

$$V_r(\Omega) = \left\{ w \in X_r(\Omega), \quad \text{div}_r w = 0 \right\}.$$

En conséquence, on a la

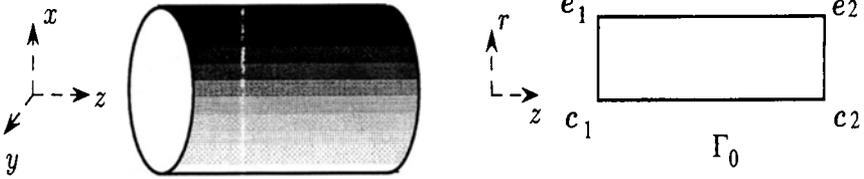
**Proposition 3.1.** Le problème faible [10]-[11] admet une solution unique  $(u, p)$  dans  $X_r(\Omega) \times L^2_{r,0}(\Omega)$  qui vérifie la condition de stabilité :

$$\|u\|_{(L^2_r(\Omega))^2} + \|p\|_{L^2_r(\Omega)} \leq C \|f\|_{(L^2_r(\Omega))^2}. \quad [12]$$

Pour revenir au problème variationnel tridimensionnel on observe que  $((u_r, u_z, 0), p)$  est aussi solution de [3]-[4]. Par unicité on a obligatoirement  $\tilde{u} = (u_r, u_z, 0)$  et  $\tilde{p} = p$ . Et, par conséquent, dès que la donnée est invariante par rotation la solution l'est aussi.

L'objectif visé est d'étudier et de proposer une discrétisation spectrale des équations [10]-[11] en géométrie axisymétrique, pour des données axisymétriques. Dans un premier temps le domaine  $\check{\Omega}$  est le cylindre plein

$$\check{\Omega} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 + y^2 < 1, \quad -1 < z < 1\}.$$



De ce fait on a  $\Omega = \Lambda_r \times \Lambda_z = ]0,1[ \times ]-1,1[$ ,  $c_1 = (0, -1)$ ,  $c_2 = (0,1)$ ,  $e_1 = (1, -1)$ ,  $e_2 = (1,1)$ . Avant d'aborder l'approximation du problème donnons quelques compléments d'analyse fonctionnelle. Observons d'abord que l'espace  $H_{r,0}(\text{div}_r, \Omega)$  peut être obtenu par la tensorisation d'espaces monodimensionnels qui fait intervenir l'espace à poids  $L_r^2(\Lambda_r)$  défini par la mesure  $(rdr)$  ainsi que l'espace non standard caractérisé par :

$$Y_r(\Lambda_r) = \left\{ \chi \in L_r^2(\Lambda_r), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(r\chi)}{\partial r} \in L_r^2(\Lambda_r) \right\},$$

sa norme étant donnée par :

$$\|\chi\|_{X_r(\Lambda_r)} = \left( \|\chi\|_{L_r^2(\Lambda_r)}^2 + \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial(r\chi)}{\partial r} \right\|_{L_r^2(\Lambda_r)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lorsque  $H_{r-1}^1(\Lambda_r)$  désigne l'espace de Sobolev à poids d'ordre 1 défini par la mesure  $(\frac{dr}{r})$  il est immédiat que l'application

$$\begin{aligned} Y_r(\Lambda_r) &\rightarrow H_{r-1}^1(\Lambda_r) \\ \chi &\mapsto (r\chi) \end{aligned}$$

détermine une isométrie. Par conséquent, et sachant que l'ensemble  $\mathcal{D}(]0,1])$  est dense dans  $H_{r-1}^1(\Lambda_r)$  (cf. [C.B 92], Théorème 1.a.6), son image réciproque par cette isométrie (égale à lui même), est dense dans  $Y_r(\Lambda_r)$  qui est un espace de Hilbert. Ensuite, pour prendre en compte les conditions aux limites on introduit le sous-espace fermé (donc de Hilbert)  $X_r(\Lambda_r)$  de  $Y_r(\Lambda_r)$  des fonctions nulles en  $r = 1$ . Enfin, les injections suivantes sont continues et denses en vertu du Théorème 2.2,

$$(Y_r(\Lambda_r) \otimes L^2(\Lambda_z)) \times (L_r^2(\Lambda_r) \otimes H^1(\Lambda_z)) \rightarrow H_r(\text{div}_r, \Omega),$$

$$(X_r(\Lambda_r) \otimes L^2(\Lambda_z)) \times (L_r^2(\Lambda_r) \otimes H_0^1(\Lambda_z)) \rightarrow X_r(\Omega).$$

Sur l'espace  $X_r(\Lambda_r)$  la semi norme :  $\forall \chi \in X_r(\Lambda_r)$ ,

$$|\chi|_{X_r(\Lambda_r)} = \left\| \frac{1}{r} \frac{\partial(r\chi)}{\partial r} \right\|_{L_r^2(\Lambda_r)}$$

est une norme équivalente à  $\|\cdot\|_{X_r(\Lambda_r)}$ , et ce, grâce à l'inégalité donnée ci-dessous, qui est comparable à celle de Poincaré pour les espaces de Sobolev standard :  $\forall \chi \in X_r(\Lambda_r)$ ,

$$\|\chi\|_{L_r^2(\Lambda_r)} \leq C |\chi|_{X_r(\Lambda_r)}. \tag{13}$$

**Remarque 3.1.** La meilleure constante  $C$ , telle que l'inégalité [13] soit vérifiée, est la valeur minimale de  $\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial(r\chi)}{\partial r} \right\|_{L_r^2(\Lambda_r)}$  sur le cercle unité  $\{\chi \in X_r(\Lambda_r), \|\chi\|_{L_r^2(\Lambda_r)} = 1\}$ ; c'est l'inverse de la racine carrée de la plus petite valeur propre de l'opérateur  $-\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial(r\cdot)}{\partial r} \right)$  qui est donc le réel  $\frac{1}{j_{1,1}}$ , où  $j_{1,1}$  est la première racine non nulle de la fonction de Bessel de première espèce  $J_1$  [DAU 87].

Enfin, pour donner des taux de convergence de nos algorithmes d'approximation, on se servira des espaces de Sobolev d'ordre supérieur. Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , l'espace  $H_r^m(\Omega)$  est défini par

$$H_r^m(\Omega) = \left\{ w \in L_r^2(\Omega), \frac{\partial^\alpha}{\partial r^\alpha} \frac{\partial^\gamma w}{\partial z^\gamma} \in L_r^2(\Omega), \forall \alpha, \gamma \in \mathbb{N}, \alpha + \gamma \leq m \right\},$$

muni de la norme hilbertienne naturelle. La famille d'espaces fractionnaires  $(H_r^\sigma(\Omega))_\sigma$ ,  $\sigma \geq 0$ , est obtenue à partir de  $(H_r^m(\Omega))_{m \in \mathbb{N}}$  (cf. [C.B 92], [C.B 99], [THO 77]).

Deux choix de discrétisation sont possibles. La première, appelée technique de la grille unique, a été analysée dans [M.A 94] pour le cas cartésien et, comme attendu, a donné lieu à de bons résultats de convergence vers la solution exacte avec une vitesse discrète à divergence nulle. La deuxième, qui est perçue comme une amélioration de la précédente, a été introduite dans [M.A 98]. Elle est basée sur le concept des grilles décalées et conserve la précision spectrale ainsi que la nullité de la divergence de la vitesse approchée. Son avantage réside dans l'élimination des modes parasites qui sont au nombre de 3 en 2 dimensions et de 7 en 3 dimensions, et qui seraient encombrants en décomposition de domaine à cause de la multiplication de leur nombre avec les sous-domaines.

#### 4. Approximation spectrale par la technique de la grille unique

Afin d'adapter la méthode de la grille unique à notre cas axisymétrique on note, pour tout entier  $N \geq 2$ ,  $\mathbb{P}_N(\Omega)$  l'ensemble des polynômes de degré  $\leq N$  dans chaque direction d'espace et  $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$  le sous-espace de  $\mathbb{P}_N(\Omega)$  composé de polynômes nuls sur le bord. A travers cette section et la suivante, on fera usage de la famille de polynômes  $(M_m)_{0 \leq m \leq N}$  qui forme une base orthogonale de l'espace  $\mathbb{P}_N(\Lambda_r) \cap L_r^2(\Lambda_r)$ , telle que  $M_m(1) = 1, \forall m$ , et dont les propriétés sont recensées dans [C.B 99]. On introduit

aussi l'ensemble des points de Gauss-Lobatto  $\{r_i^{GL} \in \Lambda_r, 0 \leq i \leq N\}$  formé des racines, rangées dans un ordre croissant, du polynôme  $(r(1-r)M'_N)$ , ainsi que les poids  $(\omega_i^{GL})_{0 \leq i \leq N}$  de sorte que la formule de quadrature (de Gauss-Lobatto) liée au poids  $\omega(r) = r$  soit exacte dans  $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda_r)$ . On note  $i_{N,r}^{GL}$  l'opérateur d'interpolation aux nœuds  $(r_i^{GL})_{0 \leq i \leq N}$  et à valeurs dans  $\mathbb{P}_N(\Lambda_r)$ . Dans la direction axiale, les points et les poids de Gauss-Lobatto seront respectivement notés  $(z_j^{GL})_{0 \leq j \leq N}$  et  $(\rho_j^{GL})_{0 \leq j \leq N}$  (cf. [BER 92], [C.C 87]). On rappelle que,  $(z_j^{GL})_{0 \leq j \leq N}$  sont les zéros de  $(1-z^2)L'_N$ .

#### 4.1. Le problème approché

Le but est d'examiner l'élément  $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_N$  pour lequel on va seulement énoncer les propriétés de convergence. Car, en effet, on préfère réserver l'analyse détaillée pour le deuxième élément auquel on s'intéresse le plus. Il s'agit, dans un premier temps, de fixer comme espace approché de pression  $Q_N(\Omega) = \mathbb{P}_N(\Omega) \cap L^2_{r,0}(\Omega)$ , l'espace des vitesses discrètes,  $Y_N(\Omega)$  étant l'intersection  $(\mathbb{P}_N(\Omega))^2 \cap X_r(\Omega)$ . Cet espace est formé des champ de vitesses dans  $(\mathbb{P}_N(\Omega))^2$  dont la composante radiale est identiquement nulle sur l'axe et la composante normale est nulle sur  $\Gamma$ ,

$$Y_N(\Omega) = (\mathbb{P}_N^0(\Lambda_r) \otimes \mathbb{P}_N(\Lambda_z)) \times (\mathbb{P}_N(\Lambda_r) \otimes \mathbb{P}_N^0(\Lambda_z)).$$

On a aussi besoin de se servir du produit scalaire discret  $(\cdot, \cdot)_{GL}$  défini sur l'espace  $\mathbb{P}_N(\Omega)$  et attaché à la grille de Gauss-Lobatto :  $\forall p_N, q_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)$ ,

$$(p_N, q_N)_{GL} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N p_N(r_i^{GL}, z_j^{GL}) q_N(r_i^{GL}, z_j^{GL}) \omega_i^{GL} \rho_j^{GL}.$$

La norme obtenue sera notée  $\|\cdot\|_{GL}$ , elle est uniformément équivalente à celle induite par l'espace  $L^2_r(\Omega)$ . On pose  $\mathcal{I}_N = (i_{N,r}^{GL} \otimes i_{N,z}^{GL}, i_{N,r}^{GL} \otimes i_{N,z}^{GL})$ . En supposant que la donnée  $\mathbf{f}$  est continue, le problème discret s'écrit alors : trouver  $(\mathbf{u}_N, p_N) \in Y_N(\Omega) \times Q_N(\Omega)$  tel que :

$$(\mathbf{u}_N, \mathbf{w}_N)_{GL} + b_N(\mathbf{w}_N, p_N) = (\mathcal{I}_N \mathbf{f}, \mathbf{w}_N)_{GL}, \quad \forall \mathbf{w}_N \in Y_N(\Omega), \quad [14]$$

$$b_N(\mathbf{u}_N, q_N) = 0, \quad \forall q_N \in Q_N(\Omega). \quad [15]$$

Dans [14]-[15] on a posé :  $\forall \mathbf{u}_N, \mathbf{w}_N \in (\mathbb{P}_N(\Omega))^2, \forall q_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)$ ,

$$b_N(\mathbf{w}_N, q_N) = -(\operatorname{div}_r \mathbf{w}_N, q_N)_{GL},$$

$$(\mathbf{u}_N, \mathbf{w}_N)_{GL} = (u_{N,r}, w_{N,r})_{GL} + (u_{N,z}, w_{N,z})_{GL}.$$

C'est encore un problème de point-selle, mal posé à cause des modes parasites qui sont identifiés dans le Lemme suivant dont la preuve peut être obtenue en adaptant ce qui a été réalisé dans le cas cartésien (cf. [M.A 94]).

**Lemme 4.1.** L'espace des modes parasites  $Z_N$  de la forme  $b_N(\cdot, \cdot)$  est de dimension 3 et engendré par

$$\{M_N(r), L_N(z), M_N(r)L_N(z)\}.$$

Dans le cas où on remplace  $Q_N(\Omega)$  par  $Z_N^\perp$ , l'orthogonal de  $Z_N$  dans l'espace  $\mathbb{P}_N(\Omega)$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_{GL}$ , la forme bilinéaire  $b_N(\cdot, \cdot)$  vérifie la condition de Brezzi avec une constante inf-sup indépendante de  $N$  (cf. [M.A 94]). En outre, puisque  $\text{div}_r \mathbf{u}_N$  appartient à  $Z_N^\perp$  alors elle est forcément identiquement nulle via [15]. Le problème discret est bien posé et admet une solution unique dans  $Y_N(\Omega) \times Z_N^\perp$  qui vérifie la condition de stabilité et l'estimation d'erreur données dans la proposition 4.2. La démonstration est faite en suivant la démarche de [M.A 94] et en utilisant les résultats d'approximation de [C.B 99].

**Proposition 4.2 :** La solution du problème discret  $(\mathbf{u}_N, p_N)$  est telle que :

$$\|\mathbf{u}_N\|_{(L_r^2(\Omega))^2} + \|p_N\|_{L_r^2(\Omega)} \leq C \|\mathcal{I}_N \mathbf{f}\|_{(L_r^2(\Omega))^2}.$$

De plus, si la solution exacte  $(\mathbf{u}, p) = (u_r, u_z, p)$  est dans  $(H_r^s(\Omega) \times H_r^s(\Omega)) \times H_r^s(\Omega), s \geq 0$  et que la donnée  $\mathbf{f} = (f_r, f_z)$  appartient à  $(H_r^\sigma(\Omega) \times H_r^\sigma(\Omega)), \sigma > 1$  alors on a la majoration d'erreur

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{(L_r^2(\Omega))^2} + \|p - p_N\|_{L_r^2(\Omega)} &\leq C \left( N^{-\sigma} (\|f_r\|_{H_r^\sigma(\Omega)} + \|f_z\|_{H_r^\sigma(\Omega)}) \right. \\ &\quad \left. + N^{-s} (\|u_r\|_{H_r^s(\Omega)} + \|u_z\|_{H_r^s(\Omega)} + \|p\|_{H_r^s(\Omega)}) \right). \end{aligned}$$

#### 4.2. Implémentation numérique

En déroulant comme fonctions tests dans  $Y_N(\Omega)$  et  $Q_N(\Omega)$  la collection des interpolants de Lagrange des nœuds de Gauss-Lobatto  $(\mathbf{x}_{ij}^{GL} = (r_i^{GL}, z_j^{GL}))_{ij}$ , et en utilisant la formule de Green, les équations approchées peuvent se traduire en termes de collocation :  $\forall (i, j), 0 \leq i, j \leq N$ ,

$$\begin{aligned} u_{N,r}(\mathbf{x}_{ij}^{GL}) + \frac{\partial p_N}{\partial r}(\mathbf{x}_{ij}^{GL}) &= f_r(\mathbf{x}_{ij}^{GL}) \quad i \notin \{0, N\}, \\ u_{N,z}(\mathbf{x}_{ij}^{GL}) + \frac{\partial p_N}{\partial z}(\mathbf{x}_{ij}^{GL}) &= f_z(\mathbf{x}_{ij}^{GL}) \quad j \notin \{0, N\}, \\ \frac{1}{r_i^{GL}} \frac{\partial (r u_{N,r})}{\partial r}(\mathbf{x}_{ij}^{GL}) + \frac{\partial u_{N,z}}{\partial z}(\mathbf{x}_{ij}^{GL}) &= 0. \end{aligned}$$

Bien entendu, dans la dernière équation, lorsque  $i = 0$ , on a  $r_0^{GL} = 0$  et à la limite le terme  $\frac{1}{r_0^{GL}} \frac{\partial (r u_{N,r})}{\partial r}(\mathbf{x}_{0j}^{GL})$  coïncide avec  $2 \frac{\partial u_{N,r}}{\partial r}(\mathbf{x}_{0j}^{GL})$ . Il apparaît donc nettement que la vitesse discrète est à divergence identiquement nulle, qui est justement le but recherché. L'objectif de la suite tourne autour de la mise sous forme algébrique de ce

problème et la résolution du système résultant. Le solveur direct choisi est dicté par les propriétés tensorielles du domaine  $\Omega$  et des opérateurs aux dérivées partielles qui sont en jeu. Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire des outils propres à chaque direction spatiale. On désigne par  $D^x, x \in \{r, z\}$ , l'opérateur de dérivation agissant sur  $\mathbb{P}_N(\Lambda_x)$ , qui peut être assimilé à une matrice  $(D_{im}^x)_{0 \leq i, m \leq N}$  de dimension  $N + 1$  donnée par

$$D_{im}^x = \frac{\partial h_m^{x, GL}}{\partial x}(x_i^{GL})$$

avec  $h_m^{x, GL}$  le polynôme caractéristique du nœud  $x_m^{GL}$ , c'est-à-dire vérifiant  $h_m^{x, GL}(x_i^{GL}) = \delta_{ri}$ , le symbole de Kronecker. En tenant compte des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur la vitesse, les équations précédentes se transforment en :  $\forall (i, j), 0 \leq i, j, k \leq N$ ,

$$u_{N,r}(x_{ij}^{GL}) + \sum_{m=0}^N D_{im}^r p_N(x_{mj}^{GL}) = f_r(x_{ij}^{GL}) \quad i \notin \{0, N\}, \quad [16]$$

$$u_{N,z}(x_{ij}^{GL}) + \sum_{m=0}^N D_{jm}^z p_N(x_{im}^{GL}) = f_z(x_{ij}^{GL}) \quad j \notin \{0, N\}, \quad [17]$$

$$\frac{1}{\omega_i^{GL}} \sum_{n=1}^{N-1} \omega_n^{GL} D_{ni}^r u_{N,r}(x_{nj}^{GL}) + \sum_{n=1}^{N-1} D_{jn}^z u_{N,z}(x_{in}^{GL}) = 0. \quad [18]$$

**Remarque 4.1.** Le problème algébrique [16]-[18] n'admet pas de solution unique (car pollué par les modes parasites). Cependant, et comme pour la discrétisation spectrale  $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_N$  du problème de Stokes (cf. [BER 91]), il est possible de le rendre bien posé en soustrayant de [18] quatre équations correspondant à quatre points  $(y_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq 4}$  de la grille  $\{x_{ij}^{GL}, 0 \leq i, j \leq N\}$  tels que la matrice  $(\Psi(y_\alpha))_{\Psi \in \{Z_N \cup \{1\}\}, 1 \leq \alpha \leq 4}$ , d'ordre 4, soit inversible.

Pour inverser ces équations, on applique l'algorithme d'Uzawa qui revient à tirer les expressions des composantes de la vitesse  $u_{N,r}$  et  $u_{N,z}$  des deux premières et les remplacer dans la dernière et il en découle :  $\forall (i, j), 0 \leq i, j \leq N$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_i^{GL}} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=0}^N \omega_n^{GL} D_{ni}^r D_{nm}^r p_N(x_{mj}^{GL}) + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=0}^N D_{nj}^z D_{nm}^z p_N(x_{im}^{GL}) \\ = \frac{1}{\omega_i^{GL}} \sum_{n=1}^{N-1} \omega_n^{GL} D_{ni}^r f_x(x_{nj}^{GL}) + \sum_{n=1}^{N-1} D_{nj}^z f_z(x_{in}^{GL}), \end{aligned}$$

qui peut être réécrite sous forme matricielle, mais d'abord on introduit le vecteur pression  $\mathbf{P} = (p_N(x_{ij}))_{0 \leq i, j \leq N}$  ainsi que les vecteurs données  $\mathbf{F}_x = (f_x(x_{ij}))_{0 \leq i, j \leq N}$ ,  $x \in \{r, z\}$ , et on obtient

$$(A^r \otimes I^z + I^r \otimes A^z) \mathbf{P} = (B^r \otimes I^z) \mathbf{F}_r + (I^r \otimes B^z) \mathbf{F}_z = \underline{\mathbf{B}} \mathbf{F} \quad [19]$$

où  $I^x, A^x$  et  $B^x, x \in \{r, z\}$  sont des matrices carrées d'ordre  $(N + 1)$  chacune, avec

$$I_{im}^x = \delta_{im}$$

$$A_{im}^r = \frac{1}{\omega_i^{GL}} \sum_{n=1}^{N-1} \omega_n^{GL} D_{ni}^r D_{nm}^r, \quad B_{im}^r = \frac{\omega_m^{GL}}{\omega_i^{GL}} D_{mi}^r (1 - \delta_{m0})(1 - \delta_{mN})$$

$$A_{im}^z = \sum_{n=1}^{N-1} D_{ni}^z D_{nm}^z, \quad B_{im}^z = D_{mi}^z (1 - \delta_{m0})(1 - \delta_{mN})$$

$$\underline{F}^T = (F_r^T, F_z^T), \quad \underline{B} = (B^r \otimes I^z, I^r \otimes B^z),$$

et comme dans [R.E 64] on a noté le produit tensoriel  $A \otimes B$  la matrice d'ordre  $(N + 1)^2$  dont les coefficients sont fournis par  $(A \otimes B)_{im,jn} = A_{im} B_{jn}$  avec  $im = i + (m - 1)(N + 1), jn = j + (n - 1)(N + 1)$  et on rappelle une propriété fondamentale de ce produit  $(A \otimes B)(A' \otimes B') = (AA' \otimes BB')$ . Les matrices  $A^x, x = r$  ou  $z$  diagonalisables, toutes leurs valeurs propres sont négatives et chacune d'elles possède deux valeurs propres nulles correspondant aux modes parasites unidirectionnels  $\{1, M_N\}$  et  $\{1, L_N\}$ . Par conséquent, il existe des matrices  $(Q^x)_x$  inversibles et des matrices diagonales semi-définies négatives  $(\Lambda^x)_x$  dont les coefficients diagonaux rangés dans un ordre décroissant sont  $(\lambda_m^x)_{0 \leq m \leq N}$  (donc avec  $\lambda_0^x = \lambda_1^x = 0$ ) qui vérifient

$$A^x = (Q^x)^{-1} \Lambda^x Q^x.$$

Les vecteurs propres associés sont  $(\varphi_m^x)_{0 \leq m \leq N}$  et sont de dimension  $(N + 1)$  (avec les modes radiaux  $\varphi_{0,i}^r = 1$  et  $\varphi_{1,i}^r = M_N(r_i^{GL})$  et les modes axiaux  $\varphi_{0,i}^z = 1$  et  $\varphi_{1,i}^z = L_N(z_i^{GL})$ ). Ils forment une base de l'espace  $\mathbb{P}_N(\Lambda_x)$ , orthogonale par rapport au produit discret. Pour inverser le système [19] il suffit de l'exprimer sur la base des modes propres au moyen de  $(Q^r \otimes Q^z)$ , la matrice de passage de la base des interpolants de Lagrange aux points de Gauss-Lobatto à la nouvelle base. On appelle  $P'$  le vecteur des coordonnées de la pression suivant les modes propres :  $P' = \sum_{ij} P'_{ij} \varphi_i^r \otimes \varphi_j^z$  en ayant éliminé les indices à problème correspondant aux modes parasites, ce qui signifie que

$$(i, j) \notin \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$$

l'indice  $(0,0)$  associé au mode constant a été incorporé, c'est pourquoi on compte 4 (= dim  $Z_N + 1$ ) éléments. Ceci revient à dire que les coefficients de  $P'$  associés à de tels indices sont identiquement nuls. C'est d'autant plus justifié que, comme indiqué plus haut, on cherche une pression dans un sous-espace de  $Q_N$  supplémentaire à  $Z_N$ . Désormais,  $(ij)$  décrira tous les indices admissibles et donc différents de ces couples exclus. Injecter la nouvelle expression de la pression dans le système conduit à le diagonaliser

$$\sum_{ij} P'_{ij} (\lambda_i^r + \lambda_j^z) \varphi_i^r \otimes \varphi_j^z = (Q^r \otimes Q^z) (\underline{B} \underline{F})$$

et on achève de déterminer les coordonnées  $(P'_{ij})_{ij}$  en évaluant le produit matriciel apparaissant dans le membre de droite de l'équation. Finalement, si on pose

$$(\underline{B} \underline{F})' = (\underline{B} \underline{F})'_{ij} = (Q^r \otimes Q^z) (\underline{B} \underline{F}) = (Q^r B^r \otimes Q^z) \mathbf{F}_r + (Q^r \otimes Q^z B^z) \mathbf{F}_z,$$

alors la pression discrète est donnée par :

$$P' = \sum_{ij} \frac{1}{\lambda_i^r + \lambda_j^z} (\underline{B} \underline{F})'_{ij} \varphi_i^r \otimes \varphi_j^z,$$

et on récupère ses valeurs aux points de la grille  $\Xi_N$  par une transformation inverse

$$P = (Q^r)^{-1} \otimes (Q^z)^{-1} P'.$$

En ce qui concerne la complexité des calculs, et sachant que la diagonalisation des matrices  $A^x, x \in \{r, z\}$  ainsi que le calcul du produit  $(\underline{B} \underline{F})$  sont effectués une fois pour toutes dans l'étape de pre-processing, l'évaluation du couple  $(u_N, p_N)$  est réalisée en trois temps. En premier, on calcule le terme  $(\underline{B} \underline{F})'$  au moyen du produit  $(Q^r \otimes Q^z) (\underline{B} \underline{F})$  qui se fait en  $2 \times (N + 1)^3$  multiplications. Ensuite, le calcul de  $P'$  requiert  $(N + 1)^2$  opérations (de multiplications). Et finalement, le retour sur la base physique nécessite autant d'opérations que la première étape (puisque ces deux étapes sont inverses l'une de l'autre), ce qui veut dire  $2 \times (N + 1)^3$  multiplications. En dernier, la vitesse est obtenue à partir de [16]-[17] en  $2 \times (N + 1)^3$  opérations. En conclusion, une inversion du problème de Darcy consomme au total  $6 \times (N + 1)^3 + (N + 1)^2$  multiplications, ce qui est exactement le nombre d'opérations que demanderait une résolution d'un problème de Poisson-Neumann sur la pression par la même technique de diagonalisations tensorisées plus l'évaluation du second membre  $(\underline{B} \underline{F})$  avant l'inversion et le calcul de la vitesse après. Par ailleurs, l'opérateur discret agissant sur la pression dans [19] peut être perçu comme une approximation de l'opérateur de Laplace-Neumann et donc, *a posteriori*, il n'est guère surprenant que le nombre d'opérations requis par l'inversion de l'un ou l'autre des deux problèmes (Darcy et Poisson-Neumann) soit comparable.

**Remarque 4.2.** A travers la présente section, on a supposé que le degré de discrétisation est le même dans les trois directions d'espace. L'extension à des situations plus générales avec un degré  $N_x$  suivant l'axe  $x, x \in \{r, z\}$  est évidente : les estimations *a priori* restent optimales et la technique de diagonalisations tensorisées s'applique exactement de la même façon ; seule la taille des matrices  $A^x$  et  $B^x$  change.

### 5. Approximation spectrale par la technique des grilles décalées

Le deuxième choix, qui s'avère dépourvu de modes parasites, utilise trois grilles distinctes. Avant de les décrire, on définit d'abord les points de Gauss  $\{r_i^G, 1 \leq i \leq N\}$ , les racines du polynôme  $M_N$  et les poids associés  $(\omega_i^G)_{1 \leq i \leq N}$  sont tels que la formule d'intégration numérique de Gauss soit exacte sur  $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda_r)$  et  $i_{N,r}^G$  désigne

l'opérateur d'interpolation en ces nœuds. Dans la direction axiale,  $(z_j^G)_{1 \leq j \leq N}$  sont les racines de  $L_N$ , où  $L_N$  désigne le polynôme de Legendre de degré  $N$  et  $(\rho_j^G)_{1 \leq j \leq N}$  sont les poids associés à la formule de quadrature de Gauss. L'opérateur d'interpolation de Lagrange aux nœuds de Gauss est noté  $i_{N,z}^G$ .

L'élément mixte auquel on s'intéresse consiste à prendre comme espace d'approximation des vitesses

$$X_N(\Omega) = \left\{ (\mathbb{P}_N(\Lambda_r) \otimes \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda_z)) \times (\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda_r) \otimes \mathbb{P}_N(\Lambda_z)) \right\} \cap X_r(\Omega).$$

La composante radiale des vitesses de  $X_N(\Omega)$  est nulle sur l'axe  $\Gamma_0$ , donc :

$$X_N(\Omega) = (\mathbb{P}_N^0(\Lambda_r) \otimes \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda_z)) \times (\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda_r) \otimes \mathbb{P}_N^0(\Lambda_z)),$$

et l'espace des pressions coïncide avec  $R_N(\Omega) = \mathbb{P}_{N-1}(\Omega) \cap L_{r,0}^2(\Omega)$ . L'unisolvance des éléments  $(\Lambda_r, \mathbb{P}_N(\Lambda_r), \{r_i^{GL}, 0 \leq i \leq N\})$  ainsi que  $(\Lambda_r, \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda_r), \{r_i^G, 1 \leq i \leq N\})$ , et de même dans la direction de l'axe  $z$ , suggèrent de munir  $X_N(\Omega)$  du produit scalaire suivant :  $\forall \mathbf{u}_N, \mathbf{w}_N \in X_N(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_N, \mathbf{w}_N)_{G, GL} &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^N (u_{N,r} w_{N,r}) (r_i^{GL}, z_j^G) \omega_i^{GL} \rho_j^G \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N (u_{N,z} w_{N,z}) (r_i^G, z_j^{GL}) \omega_i^G \rho_j^{GL}. \end{aligned}$$

La norme associée est  $\|\cdot\|_{G, GL}$ .

### 5.1. Analyse du problème approché

On définit l'opérateur d'interpolation  $\mathcal{J}_N = (i_{N,r}^{GL} \otimes i_{N,z}^G, i_{N,r}^G \otimes i_{N,z}^{GL})$ . Le problème approché revient à : trouver  $(\mathbf{u}_N, p_N) \in X_N(\Omega) \times R_N(\Omega)$  tel que :

$$(\mathbf{u}_N, \mathbf{w}_N)_{G, GL} + b(\mathbf{w}_N, p_N) = (\mathcal{J}_N \mathbf{f}, \mathbf{w}_N)_{G, GL}, \quad \forall \mathbf{w}_N \in X_N(\Omega), \quad [20]$$

$$b(\mathbf{u}_N, q_N) = 0, \quad \forall q_N \in R_N(\Omega). \quad [21]$$

En particulier, on signale que la quantité  $b(\mathbf{w}_N, q_N)$  est calculée de façon exacte aussi bien sur la grille de Gauss que sur celle de Gauss-Lobatto parce que  $q_N(\operatorname{div}_r \mathbf{w}_N) \in \mathbb{P}_{2N-2}(\Omega)$  et par conséquent  $b_N(\cdot, \cdot)$  est remplacée par  $b(\cdot, \cdot)$ . Pour de tels espaces la condition de compatibilité de Brezzi est remplie. En effet, on a le résultat suivant dont la démonstration repose sur un argument dû à Jensen et Vogelius [JEN 90] (cf. [BER 92], Chap. 4, Lemme 4.4).

**Lemme 5.1.** La condition inf-sup suivante est satisfaite :

$$\forall q_N \in R_N(\Omega), \quad \sup_{\mathbf{w}_N \in X_N(\Omega)} \frac{b(\mathbf{w}_N, q_N)}{\|\mathbf{w}_N\|_{X_r(\Omega)}} \geq \beta \|q_N\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Preuve :** Soit  $q_N \in R_N(\Omega)$  donné par son développement sur la base  $(M_m \otimes L_n)_{0 \leq m, n \leq N-1}$ ,

$$q_N(r, z) = \sum_{\substack{m, n=0 \\ m+n \neq 0}}^{N-1} q_{mn} M_m(r) L_n(z).$$

On construit le champ de vitesse  $w_N = (w_{N,r}, w_{N,z})$  de sorte que :

$$\begin{aligned} w_{N,r}(r, z) &= - \sum_{m=1}^{N-1} \sum_{n=0}^m q_{mn} \left( \frac{1}{r} \int_0^r \tau M_m(\tau) d\tau \right) L_n(z), \\ w_{N,z}(r, z) &= - \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=m+1}^{N-1} q_{mn} M_m(r) \frac{L_{n+1} - L_{n-1}}{2n+1}(z). \end{aligned}$$

Il est clair que  $w_{N,r}$  appartient à  $\mathbb{P}_N(\Lambda_r) \otimes \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda_z)$ , et que  $w_{N,r}(0)$  et  $w_{N,r}(1)$  sont nuls car pour tout  $m \geq 1$ ,  $M_m$  est à moyenne nulle pour la mesure  $r dr$ . De même  $w_{N,z}$  est dans  $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda_r) \otimes \mathbb{P}_N^0(\Lambda_z)$  et donc  $w_N \in X_N$  est tel que  $\text{div}_r w_N = q_N$  et on a :

$$\left\| \frac{1}{r} \frac{\partial(r w_{N,r})}{\partial r} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial w_{N,z}}{\partial z} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|q_N\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Finalement, grâce à l'inégalité [13] appliquée à  $w_{N,r}$  et à l'inégalité de Poincaré sur  $w_{N,z}$  on achève la relation de stabilité recherchée, à savoir

$$\|w_N\|_{X_r(\Omega)} \leq C \|q_N\|_{L^2(\Omega)}.$$

On est maintenant en mesure de déduire du Lemme précédent des estimations d'erreur sur la vitesse et la pression, et ce en reprenant le procédé exposé dans [M.A 98], théorème 3.1 basé d'une part sur la théorie de point-selle et, de l'autre, sur les résultats d'approximation des champs de vecteur à divergence nulle par des polynômes à divergence nulle (cf. [C.B 99]),

**Théorème 5.2.** On suppose vérifiées les hypothèses de la proposition .2, on a alors l'estimation :

$$\begin{aligned} \|u - u_N\|_{(L^2(\Omega))^2} + \|p - p_N\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left( N^{-\sigma} (\|f_r\|_{H_r^\sigma(\Omega)} + \|f_z\|_{H_r^\sigma(\Omega)}) \right. \\ &\quad \left. + N^{-s} (\|u_r\|_{H_r^s(\Omega)} + \|u_z\|_{H_r^s(\Omega)} + \|p\|_{H_r^s(\Omega)}) \right). \quad [22] \end{aligned}$$

Les espaces  $X_N(\Omega)$  et  $R_N(\Omega)$  sont aussi compatibles par rapport à des normes permettant de fournir plus d'information sur la qualité d'approximation de la pression. C'est un résultat semblable à celui prouvé dans le cas cartésien dans le Lemme 3.4 du [M.A 98], auquel on renvoie pour la démonstration détaillée.

**Lemme 5.3.** La forme bilinéaire  $b(\cdot, \cdot)$  vérifie une autre condition inf-sup sur  $X_N(\Omega)$  et  $R_N(\Omega)$  :

$$\sup_{\mathbf{w}_N \in X_N} \frac{\forall q_N \in R_N(\Omega) \quad b(\mathbf{w}_N, q_N)}{\|\mathbf{w}_N\|_{(L^2_r(\Omega))^2}} \geq \|\sqrt{r(1-r)} \frac{\partial q_N}{\partial r}\|_{L^2_r(\Omega)} + \|\sqrt{(1-z^2)} \frac{\partial q_N}{\partial z}\|_{L^2_z(\Omega)}.$$

**Preuve :** Etant donné  $q_N \in \mathbb{P}_{N-1}(\Omega)$ , considérant  $\mathbf{w}_N \in X_N(\Omega)$  tel que

$$w_{N,r} = r(1-r) \frac{\partial q_N}{\partial r}, \quad w_{N,z} = (1-z^2) \frac{\partial q_N}{\partial z}.$$

le résultat du lemme est rapidement vérifié. □

On a donc les résultats suivants dont les preuves s'effectuent en s'inspirant de la démarche [M.A 98],

**Théorème 5.4.** On suppose vérifiées les hypothèses de la proposition 2 avec, de plus,  $\sigma \geq s$  alors la pression  $p$  est dans  $H_r^{s+1}(\Omega)$  et on a :

$$\|\sqrt{r(1-r)} \frac{\partial}{\partial r}(p - p_N)\|_{L^2_r(\Omega)} + \|\sqrt{(1-z^2)} \frac{\partial}{\partial z}(p - p_N)\|_{L^2_z(\Omega)} \leq CN^{-s} (\|u_r\|_{H^2_r(\Omega)} + \|u_z\|_{H^2_z(\Omega)} + \|p\|_{H_r^{s+1}(\Omega)}).$$

**5.2. Implémentation et résultats numériques**

L'implémentation numérique décrite pour l'algorithme de la grille unique se transpose bien à la méthode des grilles décalées avec quelques modifications mineures. Les bases utilisées sont toujours tensorielles de type Gauss-Lobatto/Gauss pour  $u_{N,r}$ , de type Gauss/Gauss-Lobatto pour  $u_{N,z}$ , et purement de type Gauss pour  $p_N$ .

$$\begin{aligned} u_{N,r}(x) &= \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^N u_{N,r}(r_i^{GL}, z_j^G) h_i^{r, GL}(r) h_j^{z, G}(z) \\ u_{N,z}(x) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N-1} u_{N,z}(r_i^G, z_j^{GL}) h_i^{r, G}(r) h_j^{z, GL}(z) \\ p_N(x) &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_N(r_i^G, z_j^G) h_i^{r, G}(r) h_j^{z, G}(z) \end{aligned}$$

où  $(h_i^{x, GL})_i$  (resp.  $(h_i^{x, G})_i$ ),  $x \in \{r, z\}$  est l'interpolant de Lagrange aux points de Gauss-Lobatto de (resp. de Gauss). Pour exprimer algébriquement les dérivations sur la solution, on introduit la matrice de dérivation rectangulaire de type Gauss/Gauss-Lobatto  $\tilde{D}^x = (\tilde{D}_{im}^x)_{0 \leq i \leq N, 1 \leq m \leq N}$  déterminée par

$$\tilde{D}_{im}^x = \frac{\partial h_m^{x, G}}{\partial x}(x_i^{GL}).$$

Choissant dans l'équation [20] comme fonctions tests pour les différentes composantes de la vitesse  $(h_i^{r,G,L} \otimes h_j^{z,G}, 0)$  et  $(0, h_i^{r,G} \otimes h_j^{z,G,L})$  et en remplaçant dans l'équation de continuité la collection  $h_i^{r,G} \otimes h_j^{z,G}$  avec des indices convenables et procédant comme dans la section 4.2, on arrive au système matriciel sur la pression  $\forall(i, j), 1 \leq i, j \leq N,$

$$\frac{1}{\omega_i^G} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^N (\omega_n^{GL} \tilde{D}_{ni}^r, \tilde{D}_{nm}^r) p_N(r_m^G, z_j^G) + \frac{1}{\rho_j^G} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^N (\rho_n^{GL} \tilde{D}_{nj}^z, \tilde{D}_{nm}^z) p_N(r_i^G, z_m^G) = \frac{1}{\omega_i^G} \sum_{n=1}^{N-1} (\omega_n^{GL} \tilde{D}_{ni}^r) f_r(r_n^{GL}, z_j^G) + \frac{1}{\rho_j^G} \sum_{n=1}^{N-1} (\rho_n^{GL} \tilde{D}_{nj}^z) f_z(r_i^G, z_n^{GL}). \quad [23]$$

En notant  $\mathbf{P}$  le vecteur  $(p_N(r_i^G, z_j^G))_{1 \leq i, j \leq N}$  et les vecteurs des données  $\mathbf{F}_r = (f_r(r_i^{GL}, z_j^G))_{1 \leq i \leq N-1, 1 \leq j \leq N}, \mathbf{F}_z = (f_z(r_i^G, z_j^{GL}))_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N-1},$  le système se réécrit de la façon suivante

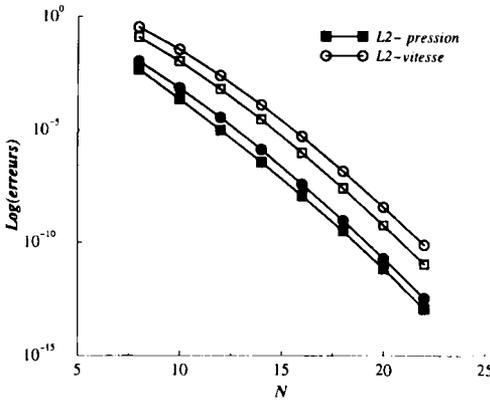
$$(A^r \otimes I^z + I^r \otimes A^z) \mathbf{P} = (B^r \otimes I^z) \mathbf{F}_r + (I^r \otimes B^z) \mathbf{F}_z = \underline{\mathbf{B}} \underline{\mathbf{F}} \quad [24]$$

Les matrices  $A^x, x = r$  ou  $z$  ayant les mêmes caractéristiques que celles mises en évidence dans l'algorithme précédent, la résolution de [23] s'effectue par la méthode de diagonalisations tensorisées décrites précédemment pour l'inversion de [19].

Pour illustrer la précision de notre algorithme, on a réalisé quelques expériences numériques parmi lesquelles on présente celle associée à la solution exacte suivante :

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= -\pi \sin(2\pi r) \cos(\pi z), \\ u_z(r, z) &= 2\pi \cos(2\pi r) \sin(\pi z) + r^{-1} \sin(2\pi r) \sin(\pi z) \\ p(r, z) &= \cos(2\pi r) \cos(\pi z). \end{aligned}$$

Les calculs sont effectués au moyen de la technique spectrale mixte des grilles décalées et sont comparés aux performances du solveur spectral de type Poisson-Neumann. La figure 1 représente le comportement de l'erreur (en échelle logarithmique) sur la vitesse  $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_N)$  pour la norme de  $(L_r^2(\Omega))^2$  et celui sur la pression  $(p - p_N)$  par rapport à la norme de l'espace  $L_r^2(\Omega).$  Puisque la solution  $(\mathbf{u}, p)$  est analytique, l'erreur décroît comme  $\exp(-CN)$  et on constate effectivement une concordance avec les prédictions théoriques. En outre, il ressort que la résolution mixte fournit une meilleure précision que le solveur de type Poisson-Neumann.



**Figure 1.** Les courbes d’erreur en fonction de  $N$ . Les marques noires correspondent au solveur mixte et les marques vides au solveur Poisson-Neumann

Dans le cas où le domaine  $\Omega$  est polygonal quelconque, la solution peut présenter des singularités au voisinage des coins  $(c_i)_i$  situés sur l’axe  $\Gamma_0$  ou des coins externes  $(e_j)_j$ . Pour une étude détaillée de la nature des solutions singulières on renvoie à [DAU 88]. On se contente ici d’exhiber les premières singularités générées par chaque type de coin sur la pression. On suppose autant de régularité qu’il faut sur  $f$  pour que les singularités les plus fortes soient dues à la géométrie du domaine. On note  $\rho'$  la distance d’un point de  $\Omega$  à un coin externe  $e$  et  $\theta'$  l’angle tel que  $\Omega$  coïncide avec le secteur  $0 \leq \theta' \leq \omega'$  autour de  $e$ . Alors, la pression présente une singularité dominante de la forme :

$$S_e = \begin{cases} (\rho')^{\frac{\pi}{\omega'}} (\log \rho') \chi(\theta') & \text{si } \frac{\pi}{\omega'} \in \mathbb{N} \\ (\rho')^{\frac{\pi}{\omega'}} \chi(\theta') & \text{si } \frac{\pi}{\omega'} \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

où  $\chi$  est une fonction régulière. Tandis qu’au voisinage d’un coin axial  $c$ ,  $\rho$  est la distance à un point de  $\Omega$  de  $c$  et  $\theta$  l’angle tel que  $\Omega$  coïncide avec le secteur  $0 \leq \theta \leq \omega$ . La première singularité est donc de la forme

$$S_c = \begin{cases} \rho^{\nu(\omega)} (\log \rho) P_{\nu(\omega)}^0(\cos \theta) \psi(\theta) & \text{si } \nu(\omega) \in \mathbb{N} \\ \rho^{\nu(\omega)} P_{\nu(\omega)}^0(\cos \theta) \psi(\theta) & \text{si } \nu(\omega) \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

Ici  $P_{\nu(\omega)}^0$  désigne la fonction de Legendre de première espèce et d’indice  $\nu(\omega)$  qui est la première racine positive de  $P_{\nu(\omega)}^0(\cos \omega) = 0$ . Quand  $\omega = \frac{\pi}{2}$  le réel  $\nu(\frac{\pi}{2})$  correspondant est un entier, le sommet associé n’est pas un point conique et la solution est régulière.

Pour tester l’aptitude de notre algorithme à capter ce genre de singularité, on a réalisé une série de simulations numériques où la géométrie du domaine est un pa-

rallélogramme dont les ouvertures des angles (obtus) générant les singularités dominantes sont données par  $\omega' = \omega = \pi - \alpha$ . Les exposants singuliers sont donc  $\frac{\pi}{\pi - \alpha}$  et  $\nu(\pi - \alpha)$ . En notant  $s(\alpha) = \min(\frac{\pi}{\pi - \alpha}, \nu(\pi - \alpha) + \frac{1}{2})$ , le taux de convergence attendu sur la pression ainsi que sur la vitesse est  $N^{-2s(\alpha)} \sqrt{\log(N)}$ .

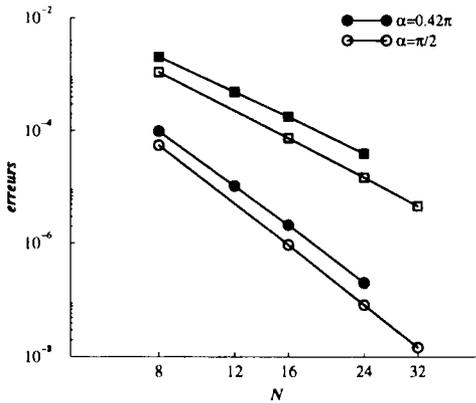
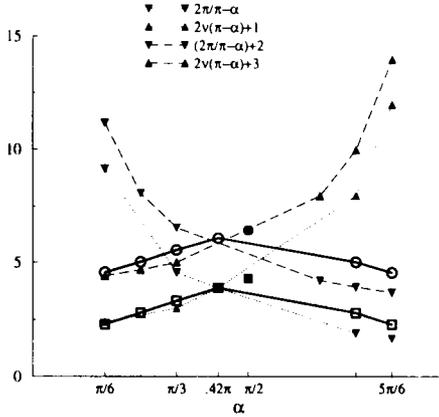


Figure 2. Les courbes d'erreur en fonction de  $N$  pour une solution singulière pour les angles  $\alpha=0.42\pi$  et  $\alpha=\frac{\pi}{2}$

La figure 2 représente, en échelle logarithmique sur les deux axes, les courbes de convergence des erreurs  $\log(N)^{-\frac{1}{2}} \|p_{\text{ref}} - p_N\|_{L^2(\Omega)}$  et  $\log(N)^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}_{\text{ref}} - \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)^2}$  en fonction de  $N$  pour  $8 \leq N \leq 20$ , dans les cas où  $\alpha = 0.42\pi$  et  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Le premier angle est tel que  $\frac{\pi}{\pi - \alpha} = \nu(\pi - \alpha) + \frac{1}{2}$  et correspond à un taux de convergence identique au voisinage des deux points singuliers. La solution exacte n'étant pas accessible analytiquement on a calculé une solution de référence avec  $N = 49$ . La pente de la régression linéaire de la courbe de vitesse est approximativement égale à 3.85 qui est assez proche de la valeur attendue à savoir  $\frac{2\pi}{\pi - \alpha} = 3.51$ , tandis que pour la pression on observe une meilleure convergence puisque le taux est 5.7 et dépasse de deux unités celui prédit par la théorie. Ce phénomène a déjà été observé dans le cas du problème de Poisson (cf. [C.B 99]). Ces tendances se trouvent confirmées pour l'angle droit  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , où le point conique ne génère plus de singularité et la seule active est celle associée au coin e extérieur à l'axe. En effet, les expériences numériques montrent une convergence, pour la pression, de type  $N^{-6} \log(N)^{\frac{3}{2}}$  au lieu de  $N^{-4} \log(N)^{\frac{3}{2}}$  (cf. [M.A 95]).



**Figure 3.** Taux de convergence de la vitesse et de la pression, fonction de  $\alpha$

De façon plus systématique, la figure 3 donne, pour une variété d'angles, le taux de convergence de la pression (cercle vide) et celui de la vitesse (carré vide) calculés numériquement ainsi que le taux prévu par la théorie  $2s(\alpha)$ , représenté en traits discontinus. On a aussi donné la représentation graphique de la fonction  $2(s(\alpha) + 1)$ . Ces tracés illustrent bien que l'erreur sur la pression décroît comme  $N^{-2(s(\alpha)+1)} \log(N)^{\frac{1}{2}}$ . Il est à noter que les deux points isolés correspondant à l'angle  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  signifient que la singularité due au coin axial disparaît.

**6. Éléments spectraux hybrides**

Pour traiter des géométries complexes, on a recours à la méthode des éléments spectraux. L'objet de cette section est de décrire brièvement la méthode, de donner les espaces discrets, d'indiquer les points clés des démonstrations et de donner les résultats. Pour plus de détails on se réfère à [M.A 98].

Le domaine  $\Omega$  est décomposé en un nombre fini d'éléments:  $\bar{\Omega} = \cup_{k=1}^K \bar{\Omega}_k$ , supposés, pour simplifier, rectilinéaires avec des côtés parallèles aux axes ( $\Omega_k = ]r_k, r'_k[ \times ]z_k, z'_k[$ )  $1 \leq k \leq K$ . On fait l'hypothèse de conformité classique : deux éléments quelconques, supposés fermés, sont disjoints ou ont en commun un sommet ou un côté entier. L'approximation est basée sur les espaces discrets suivants :

$$X_N(\Omega) = \left\{ w_N \in H_{r,0}(\text{div}_r, \Omega), \quad w_N^k = w_N|_{\Omega_k} \in X_N(\Omega_k) \right\},$$

$$R_N(\Omega) = \left\{ q_N \in L_r^2(\Omega), \quad q_N^k = q_N|_{\Omega_k} \in \mathbb{P}_{N-1}(\Omega_k), \quad \int_{\Omega} q_N r dr dz = 0 \right\}.$$

Seules les vitesses sont raccordées au niveau des interfaces, puisque les composantes normales doivent être continues. Par contre, la pression est complètement libre.

Le problème discret avec intégration exacte s'énonce comme suit : trouver  $(\mathbf{u}_N, p_N) \in X_N(\Omega) \times R_N(\Omega)$  tel que

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_N \mathbf{w}_N r dr dz + b(\mathbf{w}_N, p_N) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{w}_N r dr dz, \quad \forall \mathbf{w}_N \in X_N(\Omega),$$

$$b(\mathbf{u}_N, q_N) = 0, \quad \forall q_N \in R_N(\Omega).$$

Dans cette configuration aussi la vitesse calculée est à divergence identiquement nulle. Pour l'analyse mathématique, l'emploi d'une formule de quadrature de type Gauss ou Gauss-Lobatto, pour l'évaluation des intégrales locales, ne pose aucune difficulté fondamentale sinon qu'il rajoute de la technicité à la présentation et aux preuves. En se basant sur les résultats énumérés dans les sections précédentes, et sur l'argument de Boland et Nicolaidis [BOL 83], on montre que les espace  $X_N(\Omega)$  et  $R_N(\Omega)$  sont compatibles au sens où ils satisfont une condition *inf-sup* :

$$\forall q_N \in R_N(\Omega), \quad \sup_{\mathbf{w}_N \in X_N(\Omega)} \frac{b(\mathbf{w}_N, q_N)}{\|\mathbf{w}_N\|_{X_r(\Omega)}} \geq \beta \|q_N\|_{L_r^2(\Omega)}.$$

Par conséquent, le problème approché est bien posé et admet une solution unique qui vérifie

$$\|\mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)^2} + \|p_N\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

De plus on a :

**Théorème 6.1.** On suppose que la solution exacte  $(\mathbf{u}, p)$  est telle que  $(\mathbf{u}^k, p^k) \in (H_r^{s_k}(\Omega_k))^2 \times H_r^{s_k}(\Omega_k)$  alors :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)^2} + \|p - p_N\|_{L^2(\Omega)} \leq C \sum_{k=1}^K N^{-s_k} (\|\mathbf{u}^k\|_{(H_r^{s_k}(\Omega_k))^2} + \|p^k\|_{H_r^{s_k}(\Omega_k)}).$$

### 7. Application à la méthode de projection de Goda

On reprend les équations de Navier-Stokes incompressibles instationnaires [1], en configuration axisymétrique sans composante ortho-radiale. Il s'agit, donc, d'évaluer une solution approchée du problème suivant : trouver un champ de vitesse  $\mathbf{u} = (u_r, u_z) : \Omega \times ]0, t^*[ \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ainsi qu'une pression  $p : \Omega \times ]0, t^*[ \rightarrow \mathbb{R}$ , tels que :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta_r^V \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla_r \mathbf{u} + \nabla_r p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times ]0, t^*[,$$

$$\operatorname{div}_r \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times ]0, t^*[, \quad [25]$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times ]0, t^*[,$$

où  $\Delta_r^V$  est le Laplacien vectoriel et défini par

$$\Delta_r^V \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \Delta_r u_r - \frac{u_r}{r^2} \\ \Delta_r u_z \end{pmatrix}.$$

La fermeture du système est achevée en imposant le déplacement initial ( $\mathbf{u}(\cdot, t = 0) = \mathbf{u}_0(\cdot)$ ) (cf. [SHE 98], [C.B 94], [MAD 92]). Le modèle considéré est le plus simple dans une géométrie axisymétrique. Ce choix est justifié par le souci d'alléger la présentation. Néanmoins, l'analyse réalisée ci-dessous s'étend sans plus de difficultés à des situations plus générales.

La résolution des équations de Navier-Stokes [25] par une méthode de projection s'effectue en trois étapes. D'abord, l'équation de la quantité de mouvement est linéarisée au moyen du schéma explicite d'Adams-Bashford d'ordre 2 (AB(2)). Pour ce faire, on se donne une subdivision de l'intervalle de temps  $[0, t^*]$  en pas de temps de longueur  $\Delta t = \frac{t^*}{M}$ . On définit l'instant  $t_m = m\Delta t$  pour  $0 \leq m \leq M$  et on suppose déjà calculées de manière récursive deux suites  $(\mathbf{u}^k)_{0 \leq k \leq m}$  et  $(p^k)_{0 \leq k \leq m}$  proches de  $(\mathbf{u}(\cdot, t_k))_{0 \leq k \leq m}$  et  $(p(\cdot, t_k))_{0 \leq k \leq m}$ . Le schéma AB(2) consiste à discrétiser le terme de convection à l'instant  $t^{m+1}$  par

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_r \mathbf{u}(\cdot, t_{m+1}) \approx 2\mathbf{u}^m \cdot \nabla_r \mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1} \cdot \nabla_r \mathbf{u}^{m-1}.$$

Ceci réduit la difficulté à l'inversion d'un problème linéaire de Stokes dont le second membre est composé du terme source  $\mathbf{f}$  et des termes de convection, et désormais noté  $\mathbf{f}^{m+1}$ . Ensuite, par la technique de projection de Goda, ce dernier est décomposé en deux sous-problèmes, un de diffusion et le deuxième dit de pression-continuité (ou de projection) qui fournit la solution à chaque itération.

Dans la suite on note  $\mathbb{P}_N^0(\Omega, \Gamma) = \mathbb{P}_N(\Omega) \cap H_{r,0}^1(\Omega)$ . Supposant connus  $(\mathbf{u}_N^k)_k$  et  $(p_N^k)_k$  ( $0 \leq k \leq m$ ) aux instants antérieurs à  $t_{m+1}$ , la première étape de diffusion, basée sur la méthode d'Euler retardée d'ordre deux, consiste à chercher  $\mathbf{u}_{N,*}^{m+1} \in \mathbb{P}_N^0(\Omega) \times \mathbb{P}_N^0(\Omega, \Gamma)$  solution de :  $\forall \mathbf{w}_N \in \mathbb{P}_N^0(\Omega) \times \mathbb{P}_N^0(\Omega, \Gamma)$ ,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\frac{3}{2}\mathbf{u}_{N,*}^{m+1} - 2\mathbf{u}_N^m + \frac{1}{2}\mathbf{u}_N^{m-1}}{\Delta t}, \mathbf{w}_N \right)_{GL} + \nu (\nabla_r^V \mathbf{u}_{N,*}^{m+1}, \nabla_r^V \mathbf{w}_N)_{GL} \\ = (\mathbf{f}^{m+1}, \mathbf{w}_N)_{GL} - (p_N^m, \text{div}_r \mathbf{w}_N)_{GL} \end{aligned}$$

où on a posé :  $\forall \mathbf{v}_N, \mathbf{w}_N \in \mathbb{P}_N^0(\Omega) \times \mathbb{P}_N^0(\Omega, \Gamma)$ ,

$$(\nabla_r^V \mathbf{v}_N, \nabla_r^V \mathbf{w}_N)_{GL} = (\nabla_r \mathbf{v}_N, \nabla_r \mathbf{w}_N)_{GL} + \left( \frac{v_{N,r}}{r}, \frac{w_{N,r}}{r} \right)_{GL}.$$

La seconde étape revient à calculer, moyennant  $\mathbf{u}_{N,*}^{m+1}$  une paire de champs  $(\mathbf{u}_N^{m+1}, p_N^{m+1})$  destinée à être une estimation à l'ordre du schéma (= 2) et à l'instant  $t_{m+1}$  de la solution exacte  $(\mathbf{u}(\cdot, t_{m+1}), p(\cdot, t_{m+1}))$ , qui satisfait l'équation :

$$\left( \frac{\frac{3}{2}\mathbf{u}_N^{m+1} - \frac{3}{2}\mathbf{u}_N^{m+1}}{\Delta t}, \mathbf{w}_N \right)_{G, GL} + b(\mathbf{w}_N, p_N^{m+1} - p_N^m) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_N \in X_N(\Omega), [26]$$

$$b(\mathbf{u}_N^{m+1}, q_N) = 0 \quad \forall q_N \in R_N(\Omega). \quad [27]$$

Le schéma de Goda d'ordre 1 a été étudié dans [SHE 92], [SHE 94] et [GUE 94] où sa stabilité inconditionnelle a été démontrée et sa précision temporelle effective mesurée d'ordre 1. Pour le schéma d'ordre 2, les premiers résultats mathématiques rigoureux concernant sa stabilité inconditionnelle ont été démontrés par K. Boukir (cf. [BOU 94]) pour le problème de Stokes semi-discrétisé. Dans sa preuve, qui est technique et longue et que l'on évite de reproduire ici, disposer d'une vitesse discrète  $\mathbf{u}_N^m$  à divergence identiquement nulle a joué un rôle crucial. En particulier, lorsqu'un solveur de type hybride spectral est utilisé pour l'étape de projection [26],[27] la stabilité inconditionnelle est encore acquise dans le cas complètement discret. Quant à l'ordre effectif de l'algorithme de Goda la question n'est pas encore résolue mathématiquement, mais une recherche numérique dans le cas cartésien a déjà permis de confirmer l'ordre 2.

Avant d'énoncer le résultat de stabilité on introduit l'opérateur  $\tilde{\nabla}_r^N = (\tilde{\partial}_r^N, \tilde{\partial}_z^N)$  défini par :  $\forall p \in C^1(\Omega), \tilde{\nabla}_r^N p \in X_N(\Omega)$ ,

$$\tilde{\partial}_r^N p(x) = \begin{cases} \partial_r p(x) & x \in \Xi_N^r \setminus \partial\Omega \\ 0 & x \in \Xi_N^r \cap \partial\Omega \end{cases} \quad \tilde{\partial}_z^N p(x) = \begin{cases} 0 & x \in \Xi_N^z \cap \partial\Omega \\ \partial_z p(x) & x \in \Xi_N^z \setminus \partial\Omega \end{cases} .$$

**Proposition 7.1.** On suppose que  $f \in C(0, t^*, (L_r^2(\Omega))^2)$ . Pour tout  $\Delta t \leq t^*$  et  $m \in \mathbb{N}; t_m \leq t^*$ , le résultat de stabilité suivant est vérifié :

$$\|\mathbf{u}_N^m\|_{L_r^2(\Omega)^2}^2 + \nu \Delta t \sum_{n=1}^m \|\nabla_r^V \mathbf{u}_N^n\|_{L_r^2(\Omega)^2}^2 + (\Delta t)^2 \|\tilde{\nabla}_r^N p_N^m\|_{L_r^2(\Omega)^2}^2 \leq C e^{C' t_m}$$

où  $C$  est une constante indépendante  $\Delta t$  et des données et  $C'$  dépend seulement de  $p_N^0, p_N^1, \mathbf{u}_N^0, \mathbf{u}_N^1$  et de  $\|f\|_{C(0, t^*, (L_r^2(\Omega))^2)}$ .

**Discussion numérique.** Pour étudier le comportement temporel effectif de l'algorithme de Goda (d'ordre 2) on a réalisé l'expérience numérique correspondant à la solution suivante du problème de Stokes incompressible :

$$\begin{aligned} u_r(r, z) &= \sqrt{3}(2r + 2)^3 \sin(2\sqrt{2}r + t + \sqrt{2}) \cos(\sqrt{3}z + t) \\ u_z(r, z) &= 2\sqrt{2}(2r + 2)^3 \cos(2\sqrt{2}r + t + \sqrt{2}) \cos(\sqrt{3}z + t) \\ &\quad + 2r^{-1}(2r + 2)^2(1 + 4r) \sin(2\sqrt{2}r + t + \sqrt{2}) \cos(\sqrt{3}z + t) \\ p(r, z) &= \sqrt{6} \sin(4r - \sqrt{5}z + 0.7t - 2) \cos(\sqrt{5}z + 0.3t). \end{aligned}$$

La viscosité étant fixée à 1, la fréquence de coupure  $N = 24$  et pour des pas de temps  $\Delta t$  variant dans  $\{10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}\}$ , on a simulé l'écoulement de type Stokes en démarrant d'une position de repos. Les solutions calculées sont comparées aux interpolés aux points des grilles décalées de la solution exacte. On a tracé en

échelle logarithmique le comportement des erreurs, à l'instant  $t_m = 5$ , sur la vitesse par rapport à la norme  $(L_r^2(\Omega))^2$  et à la norme de  $(H_r^1(\Omega))^2$  et sur la pression par rapport à la norme de  $L_r^2(\Omega)$ . Les graphes montrent un comportement décroissant vers zéro avec une pente sensiblement égale à deux, ce qui indique que le schéma de Goda utilisé ici est effectivement d'ordre deux.

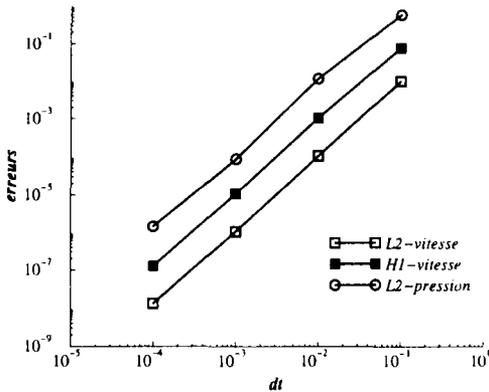


Figure 4. Courbes d'erreurs pour le schéma de Goda d'ordre 2

## 8. Conclusion

Les méthodes de *time splitting* de projection connaissent un engouement renouvelé dans la simulation des écoulements des fluides visqueux incompressibles régie par les équations de Navier-Stokes. Ceci se justifie par la simplicité de leur implémentation numérique et l'économie réalisée en temps de calcul comparées aux méthodes plus classiques de type Uzawa. L'analyse de stabilité et de convergence de tels schémas a mis en évidence l'intérêt de manipuler des vitesses calculées à divergence identiquement nulle. D'où l'idée de remplacer la résolution de l'étape de projection comme un problème de Poisson sur la pression avec des conditions de Neumann par un solveur de type mixte basé sur la formulation hybride duale.

Dans cet article, on a présenté et analysé une approximation par éléments spectraux d'un problème hybride dual de second ordre, basée sur la notion de grilles décalées sans modes parasites. L'efficacité de cette technique, en comparaison avec la formulation Poisson-Neumann, a été montrée théoriquement et numériquement. Comme application, on a décrit comment associer cette technique à l'algorithme de projection de Goda pour la simulation des équations de Stokes instationnaires pour obtenir un schéma effectivement d'ordre deux et inconditionnellement stable.

## 9. Bibliographie

- [BAB 87] BABUŠKA I., SURI M., « The optimal Convergence Rate on the  $p$ -Version of the Finite Element Method », *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 24, 1987, p. 750-776.
- [BER 91] BERNARDI C., MADAY Y., « Polynomial Approximation of Some Singular Functions », *Applicable Analysis: an International Journal*, vol. 10, 1991, p. 1-32.
- [BER 92] BERNARDI C., MADAY Y., *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*, Mathématiques et Applications, Paris, 1992.
- [BOL 83] BOLAND J., NICOLAIDES R., « Stability of Finite Element under Divergence Constraints », *SIAM J. Num. Anal.*, vol. 20, 1983, p. 722-731.
- [BOU 94] BOUKIR K., « Méthode en temps d'ordre élevé par décomposition d'opérateurs. Application aux équations de Navier-Stokes », Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1994.
- [BRE 74] BREZZI F., « On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle Point Problems Arizing from Lagrange Multipliers », *R.A.I.R.O. Anal. Numér.*, vol. 8 R2, 1974, p. 129-151.
- [BRE 91] BREZZI F., FORTIN M., *Mixed and Hibryd Finite Element Methods*, Springer Series in Computational Mathematics, Springer Verlag, New York, 1991.
- [C.B 92] C. BERNARDI M. D., MADAY Y., « Polynomials in Weighted Sobolev Spaces: Basics and Trace Liftings », rapport de recherche n° R92039, 1992, Laboratoire d'Analyse Numérique Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.
- [C.B 94] C. BERNARDI M. D., MADAY Y., « Numerical Analysis and Spectral Methods in Axisymmetric Domains, Part I: Functional Prerequisite », rapport de recherche n° R94008, 1994, Laboratoire d'Analyse Numérique Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.
- [C.B 99] C. BERNARDI M. D., MADAY Y., *Spectral Methods for Axisymmetric Domains*, Series in Applied Mathematics, Paris, 1999.
- [C.C 87] C. CANUTO M. Y. HUSSAINI A. Q., ZANG T., *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, 1987.
- [CHO 68] CHORIN A., « Numerical Simulation of the Navier-Stokes Equations », *Math.Comput.*, vol. 22, 1968, p. 745-762.
- [DAU 87] DAUTRAY R., LIONS J.-L., *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Masson, Paris, 1987.
- [DAU 88] DAUGE M., *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains*, Lecture Notes in Mathematic, Paris, 1988.
- [GIR 81] GIRAULT V., RAVIART P.-A., *Finite Elements Approximation for the Navier-Stokes Equations*, Lectures Notes in Mathematics. A. Dold and B. Eckman eds, Paris, 1981.
- [GIR 86] GIRAULT V., RAVIART P.-A., *Finite Element Methods for the Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, Paris, 1986.
- [GOD 79] GODA K., « A Multistep Technique with Implicit Difference Schemes for Calculating Two and Three dimensional Cavity Flows », *J. Compu. Physics*, vol. 30, 1979, p. 76-95.
- [GUE 94] GUERMOND J.-L., « Remarques sur les méthodes de projection pour l'approximation des équations de Navier-Stokes », *Numer. Math.*, vol. 67, 1994, p. 467-473.
- [JEN 90] JENSEN S., VOGELIUS M., « Divergence Stability in Connection with the  $p$ -Version of the Finite Element Method », *Modél. Math. et Anal. Numér.*, vol. 24, 1990, p. 737-767.
- [KAN 86] KAN J. V., « A Second Order Accurate Pressure-Correction Scheme for Viscous Incompressible Flow », *SIAM J. Sci. Compu.*, vol. 7, 1986, p. 870-891.

- [M.A 94] M. AZAIEZ C. B., GRUNDMANN M., « Spectral Method Applied to Porous Media », *East-West J. Numer. Math.*, vol. 2, 1994, p. 91-105.
- [M.A 95] M. AZAIEZ M. D., MADAY Y., *Méthodes spectrales et des éléments spectraux*, Editions Didactique INRIA, Paris, 1995.
- [M.A 98] M. AZAIEZ F. BEN BELGACEM M. G., KHALLOUF H., « Staggered Grids Hybrid Dual Spectral Element Method. Application to the High-Order Time Splitting Schemes for Navier-Stokes problem », *Computer Methods of Appl. Mech. Engrg.*, vol. 166, 1998, p. 183-199.
- [MAD 92] MADAY Y., PAVONI D., « Spectral Approximation of Axisymmetric Stokes Flow », rapport de recherche n° R92034, 1992, Laboratoire d'Analyse Numérique Université Pierre et Marie Curie, Paris 6.
- [MAD 94] MADAY Y., PATERA A., « Spectral Element Method for Navier-Stokes Equations », in Noor(ed.) *State-of-the-Art-Surveys in Computational Mechanics*, vol. 139, 1994, p. 71-143.
- [RAV 77] RAVIART P.-A., THOMAS J.-M., « A Mixed Finite Element Method for Second Order Elliptic Problems », *Mathematical Aspects of finite Element Methos*, Roma, 1975, 1977, Springer-Verlag, p. 292-315.
- [R.E 64] R. E. LYNCH J. R. R., THOMAS D. H., « Direct solution of partial difference equations by tensor product methods », *Numer. Math.*, vol. 6, 1964, p. 185-199.
- [ROB 91] ROBERTS J. E., THOMAS J.-M., « Mixed and Hybrid Methods Numerical Analysis », *Handbook of Numerical Analysis*, Roma, 1975, 1991, Elsevier Science Publishers B.V., North Holland, p. 1523-1639.
- [SHE 92] SHEN J., « On Error Estimation of the Projection Method for Unsteady Navier-Stokes Equations: First Order Schemes », *SIAM. J. Numer. Anal.*, vol. 29, 1992, p. 57-77.
- [SHE 94] SHEN J., « Remarks on the Pressure Error Estimates for the Projection Methods », *Numer. Math.*, vol. 67, 1994, p. 513-520.
- [SHE 98] SHEN J., LOPEZ J. M., « An Efficient Spectral Projection Method for the Navier-Stokes Equations in Cylindrical Geometries. I. Axisymmetric Cases », *J. Compu. Physics*, vol. 139, 1998, p. 306-326.
- [TEM 68] TEMAM R., « Une méthode d'approximation de la solution des équations de Navier-Stokes », *Bull. Soc. Math. France*, vol. 98, 1968, p. 115-152.
- [THO 77] THOMAS J.-M., « Sur l'analyse numérique des méthodes d'éléments finis hybrides et mixtes », Thèse d'état, Université Pierre et Marie Curie, 1977.
- [TRI 78] TRIEBEL H., *Interpolation Theory, Function spaces, Differential operators*, North Holand, 2nd édition, 1978.