
Formulation éléments finis des ordonnées discrètes pour la modélisation des transferts couplés conduction-rayonnement en géométrie bidimensionnelle

Christine Lopez — Jean-Vincent Daurelle — René Occelli

*I.U.S.T.I. - CNRS U.M.R. 6595, Technopôle de Château Gombert
5, rue Enrico Fermi
F-13453 Marseille cedex 13
lopez@iusti.univ-mrs.fr*

RÉSUMÉ. Contrairement aux volumes finis (V.F.), largement exploités par la méthode des ordonnées discrètes (O.D.), les éléments finis (O.D.-E.F.) ont fait l'objet de peu de travaux en transfert radiatif et milieu semi-transparent (M.S.T.), encore moins en transferts couplés. Nous utilisons la formulation éléments finis de type Galerkin et l'équation de transfert radiatif en flux pairs (F.P.) afin de modéliser le couplage conduction rayonnement avec la méthode des ordonnées discrètes. En formulation F.P., la matrice du système, définie positive, permet de supprimer l'apparition des luminances négatives associées à la formulation classique (V.P.). Les géométries traitées sont bidimensionnelles et les milieux sont gris, absorbants, émettants et/ou diffusants, confinés dans une cavité aux murs noirs ou gris. Nos résultats sont comparés à ceux de la littérature, et d'un code volumes finis. Globalement, la méthode présente des performances similaires à celles des autres approches. Cependant, les éléments finis présentent l'avantage de pouvoir naturellement s'appliquer à des géométries complexes.

ABSTRACT. Unlike the finite volumes formulation, widely associated with the discrete ordinates method, finite elements have been used by few authors in radiative heat transfer and semi-transparent medium, even less in coupled transfers. We use the Galerkin finite elements formulation for the discrete-ordinates to analyze the combined radiative and conductive heat transfer. The even parity form is used, as it overcomes many problems associated with the classical primitive variables, as unrealistic negative intensities. The geometries studied are bidimensional and the medium is absorbing, emitting and/or scattering, enclosed by gray or black walls. Our results are compared with those of literature and of a finite volume code. Globally, the method shows performances similar to those of other approaches. Nevertheless, the finite elements have the advantage of fitting naturally complex geometries.

MOTS-CLÉS : ordonnées discrètes, éléments finis, volumes finis, flux pairs, variables primaires, paramètre de Stark, géométries complexes.

KEY WORDS: discrete ordinates, finite elements, finite volumes, even parity form, primary variables, Stark parameter, complex geometries.

1. Introduction

La contribution du rayonnement dans tous les phénomènes de transport d'énergie, en milieu semi-transparent (M.S.T.), a reçu une attention considérable depuis les années 1920. Elle a été mise en évidence intuitivement et expérimentalement mais sa quantification est difficile à déterminer. En effet, il n'existe pas de solution analytique exacte à l'équation de transfert radiatif (E.T.R.) intégral-différentielle non linéaire, excepté pour quelques situations simples.

L'outil numérique est donc devenu incontournable pour cerner l'ensemble des problèmes faisant intervenir les transferts radiatifs couplés ou non. Ces trente dernières années, des schémas numériques de résolution se sont développés afin d'apporter une solution approchée à l'E.T.R.

C'est dans les années 1970 que la méthode de Monte Carlo a été le plus utilisée [HOW 68]. Son intérêt principal réside dans son application au cas de géométries complexes. C'est une méthode statistique qui peut être très précise. Cependant, elle est coûteuse en temps de calcul.

A la même époque, la méthode des zones est élaborée [HOT 67]. Elle s'applique naturellement au maillage mais, comme le modèle cité précédemment, elle nécessite des temps de calcul importants dès lors que des géométries multidimensionnelles sont considérées. Elle est généralement peu précise.

La méthode des harmoniques sphériques (méthode PN) [MEN 86] doit son appellation au fait que la luminance directionnelle est décomposée en séries d'harmoniques sphériques. Les résultats ne sont valables qu'en milieu optiquement épais.

Au début du siècle, les astrophysiciens Schuster et Schwarzschild développent la méthode à deux flux. En 1960, Chandrasekhar [CHA 60] étend cette technique à des situations multidimensionnelles (extension à plusieurs flux) en transfert radiatif. Il utilise la méthode des ordonnées discrètes (quadrature S_N) initialement appliquée en neutronique par Carlson et Lathrop [LAT 65, LAT 68, LEW 84].

Dans les années 80, les méthodes multiflux connaissent un essor remarquable en transfert radiatif. Elles regroupent plusieurs catégories de techniques, toutes basées sur le principe de séparation de la dépendance angulaire et spatiale de la luminance. Parmi celles-ci, la méthode des ordonnées discrètes (M.O.D.) a fait l'objet de nombreuses études. En effet, elle présente de nombreux avantages. Premièrement, l'utilisation de quadratures numériques en luminances permet de s'affranchir des termes intégraux de l'équation de transfert radiatif. De plus, elle est relativement facile à implanter dans un code de calcul. Enfin, elle permet un couplage aisé du rayonnement avec les autres modes de transferts de chaleur.

C'est essentiellement *Fiveland* qui a introduit les ordonnées discrètes en transfert radiatif. En 1982 [FIV 82], il étudie la modélisation de problèmes radiatifs en géométrie cylindrique axisymétrique, dont *Truelove* est le précurseur (1978)

[TRU 78]. Utilisant l'approximation S_4 , il traite en 1984 [FIV 84] des problèmes purement radiatifs en géométrie cartésienne bidimensionnelle rectangulaire et hexagonale. En 1988, [FIV 88] il applique la M.O.D. à des géométries 3D en milieu absorbant, émettant et diffusant.

Bien d'autres auteurs l'ont suivi, comme Jamaluddin et Smith qui, en 1988 [JAM 88a, JAM 88b], utilisent cette méthode pour traiter des transferts radiatifs en géométrie 2D et 3D, et en géométrie cylindrique. Plus récemment, en 1996 [VAIL 96], l'application aux géométries curvilignes dans des milieux gris absorbants, émettants et non diffusants a été développée.

A part quelques cas exceptionnels, comme le transfert d'énergie dans le vide, le rayonnement agit toujours de façon couplée avec d'autres modes de transferts de chaleur et il existe de nombreuses situations où le transport de chaleur associe conduction et rayonnement. C'est le cas des milieux solides ou très visqueux, pour lesquels la convection est négligeable. Dans le domaine des transferts couplés, on peut citer les travaux de Seung Wook Baek et Taik Young Kim qui, en 1990 [SEU 90], traitent les transferts par conduction rayonnement en géométrie 2D et milieu absorbant, émettant et diffusant.

Tous ces travaux en ordonnées discrètes ont utilisé la méthode des volumes finis (V.F.). Les éléments finis (E.F.) étant mal adaptés aux O.D., la modélisation du rayonnement s'est en majorité limitée à l'application des méthodes classiques : Monte Carlo, PN, zones. Quelques travaux ont été entrepris pour surmonter les défauts de ces méthodes. On peut citer Fiveland W.A. et Jessee J.P. [FIV94, FIV95], qui ont résolu les transferts radiatifs purs en géométrie multidimensionnelle avec des O.D. D'autres auteurs proposent des alternatives aux O.D. Ainsi, en 1984, *M.M. Razzaque, J.R. Howell et D.E. Klein* [RAZ 84], utilisent la méthode des éléments finis et intègrent exactement les termes de luminances en procédant à un découpage du rayonnement incident sur des volumes élémentaires. Ils traitent le couplage conduction-rayonnement, en géométrie 2D, dans une enceinte carrée aux murs noirs renfermant un milieu gris absorbant-émettant.

Ainsi, jusqu'à présent, les ordonnées discrètes ont été principalement associées aux volumes finis. Il existe peu de travaux en éléments finis. En effet, ces derniers se prêtent mal à la résolution de l'équation de conservation des luminances (variables V.P.) telle qu'elle est écrite en volume finis. Non seulement le nombre d'inconnues est important mais, de plus, les matrices du système ne sont pas symétriques définies positives ce qui compromet la résolution en produisant des luminances négatives physiquement irréalistes.

Une reformulation de la méthode des ordonnées discrètes utilisant les variables paires proposées par Fiveland W.A. et Jessee J.P. [FIV 94, FIV 95] permet de surmonter ces difficultés. Néanmoins, ces auteurs se sont limités au cas où les transferts de chaleur sont purement radiatifs. En utilisant une formulation similaire nous proposons de traiter, en géométrie bidimensionnelle et milieu gris, les transferts couplés conduction-rayonnement par la méthode des ordonnées discrètes

associée aux éléments finis. Les équations sont établies pour un milieu absorbant, émettant et diffusant, confiné dans un domaine aux parois grises ou noires. Nous avons aussi développé un code volumes finis utilisant une formulation classique des O.D. pour modéliser les transferts couplés rayonnement-conduction. Nous comparons les résultats obtenus en volumes finis et éléments finis avec ceux de la littérature en étudiant l'influence de différents paramètres des transferts couplés conduction rayonnement (albédo, émissivité des parois, coefficient de Stark.).

Un cas de géométrie complexe est traité pour soulever l'originalité de la formulation éléments finis qui utilise facilement les maillages non structurés.

2. Modèle physique et équations

2.1. Formulation en variables primaires

2.1.1. Équation de transfert radiatif

On rappelle la formulation classique du gain net d'énergie radiative par unité de volume en milieu gris, et d'angle solide $d\phi$ autour d'une direction donnée ϕ , pour une diffusion isotrope :

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\phi})L(\vec{r}, \vec{\phi}) = -(\alpha + \sigma)L(\vec{r}, \vec{\phi}) + \alpha L^0(\vec{r}) + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} L(\vec{r}, \vec{\phi}') d\phi' \quad [1]$$

L^0 luminance du corps noir dans le vide à la température locale,

α et σ les coefficients d'absorption et de diffusion du milieu (m^{-1}),

$\alpha + \sigma = \beta$ coefficient d'extinction volumique (m^{-1}),

$L(\vec{r}, \vec{\phi})$ la luminance du corps gris fonction de la position et de la direction ($W/m^2 \cdot sr$).

2.1.2. Condition aux limites

En considérant que les surfaces du domaine sont des émetteurs et des réflecteurs diffus, la luminance quittant la surface est alors isotrope et ainsi la condition aux limites radiative en \vec{r} , appartenant à la surface, suivant la direction $\vec{\phi}$ d'un élément de surface, s'écrit :

$$L(\vec{r}, \vec{\phi}) = \varepsilon L^o(\vec{r}) + \frac{\rho}{\pi} \int_{\vec{\phi}' \cdot \vec{n} < 0} |\vec{\phi}' \cdot \vec{n}| L(\vec{r}, \vec{\phi}') d\phi' \quad \text{avec } \vec{\phi} \cdot \vec{n} > 0 \quad [2]$$

ε l'émissivité de la surface,

ρ la réflectivité de la surface ($\rho = 1 - \varepsilon$),

\vec{n} normale à la surface intérieure au domaine.

2.1.3. L'équation bilan d'énergie

Si les échanges de chaleur dans le milieu semi-transparent se font par transferts conductifs et radiatifs en régime stationnaire, l'équation bilan d'énergie pour un milieu au repos prend la forme suivante :

$$k\Delta T - \text{div}q^r = 0 \quad [3]$$

$\text{div}q^r$ la source d'énergie radiative,
 k le coefficient de conductivité du milieu W/m °K.

$$k\Delta T = 4\alpha \left[\sigma_{\text{boltz}} T^4 - \frac{1}{4} \int_{4\pi} L(\vec{r}, \vec{\phi}) d\phi \right] \quad [4]$$

σ_{boltz} la constante de Stephan-Boltzmann $5.67.10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$.

2.1.4. Détermination des flux de chaleur directionnels

Le flux net de chaleur directionnel Q_{xi} dans la direction \vec{n}_{xi} (Q_x , Q_y ou Q_z selon la direction \vec{n}_x , \vec{n}_y ou \vec{n}_z) provient de la contribution des transferts conductifs et radiatifs. Son expression est la suivante :

$$Q_{xi} = q_{xi}^c + q_{xi}^r = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \int_{4\pi} (\vec{n}_{xi} \cdot \vec{\phi}) L(\vec{r}, \vec{\phi}) d\phi \quad [5]$$

Connaissant les luminances et les températures on accède aux flux. Les inconnues en milieu bidimensionnel se réduisent à q_x^c , q_y^c , q_x^r et q_y^r . Cette résolution est donc effectuée en post-traitement.

2.2. Formulation en flux pairs

Les variables paires sont définies à partir des variables primaires V.P. en considérant les luminances de directions opposées. On définit les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}) &= \frac{1}{2} [L(\vec{r}, \vec{\phi}) + L(\vec{r}, -\vec{\phi})] \\ \Phi(\vec{r}, \vec{\phi}) &= \frac{1}{2} [L(\vec{r}, \vec{\phi}) - L(\vec{r}, -\vec{\phi})] \end{aligned} \quad [6]$$

Cette formulation permet de réduire l'espace des directions de moitié. Le choix de demi-espace est arbitraire. Les équations classiques intervenant dans la résolution

des transferts couplés conduction-rayonnement prennent la forme suivante pour les directions $\vec{\phi}$ et $-\vec{\phi}$:

$$(\vec{\phi} \cdot \nabla)L(\vec{r}, \vec{\phi}) = -\beta L(\vec{r}, \vec{\phi}) + \alpha L^0(\vec{r}) + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} L(\vec{r}, \vec{\phi}') d\phi' \quad [7]$$

$$-(\vec{\phi} \cdot \nabla)L(\vec{r}, -\vec{\phi}) = -\beta L(\vec{r}, -\vec{\phi}) + \alpha L^0(\vec{r}) + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} L(\vec{r}, -\vec{\phi}') d\phi' \quad [8]$$

2.2.1. Equation de transfert radiatif en variables paires Ψ

En ajoutant ces deux équations [7] et [8], il vient :

$$(\vec{\phi} \cdot \nabla)\Phi(\vec{r}, \vec{\phi}) = -\beta \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}) + \alpha L^0(\vec{r}) + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}') d\phi' \quad [9]$$

L'équation de transferts radiatifs en luminances sera ensuite ramenée à une équation qui s'exprime en fonction des seules variables Ψ .

2.2.2. Equation en Φ

L'utilisation des variables paires ajoute une nouvelle équation à la résolution du problème conductif radiatif. En soustrayant les équations [7] et [8], il vient :

$$(\vec{\phi} \cdot \nabla)\Psi(\vec{r}, \vec{\phi}) = -\beta \Phi(\vec{r}, \vec{\phi}) \quad [10]$$

Avec cette nouvelle expression [10], on peut exprimer maintenant l'équation [9] en fonction de la seule inconnue Ψ :

$$-(\vec{\phi} \cdot \nabla) \left(\frac{1}{\beta} \right) (\vec{\phi} \cdot \nabla)\Psi(\vec{r}, \vec{\phi}) = -\beta \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}) + \alpha L^0(\vec{r}) + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{4\pi} \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}') d\phi' \quad [11]$$

Ainsi, l'utilisation des variables paires permet de se ramener à un système de deux équations l'une en Ψ [11] l'autre en Φ [10]. La première présente la même forme que l'équation bilan d'énergie et pourra donc être résolue facilement en éléments finis, contrairement à l'équation de transfert radiatif en luminances. En effet, pour cette dernière, la différence d'ordre de dérivation sur les inconnues L et fonctions tests δL , introduit des luminances négatives et des oscillations. Pour la résolution en variables paires les matrices du système sont symétriques définies positives ce qui assure la cohérence des solutions.

2.2.3. Condition aux limites en variables paires

La condition aux limites radiative consiste à exprimer les luminances aux parois en fonction du rayonnement émis et du rayonnement incident réfléchi [2]. L'expression de la luminance en variables paires nécessite l'identification de la direction associée. La formulation paire, n'utilisant que la moitié des directions de propagation du rayonnement, impose que la luminance sera égale à la somme des variables Ψ et Φ ou à leur différence suivant la direction considérée.

En effet, si $\vec{\phi} \cdot \vec{n} > 0$, dans le cas de la figure 1, $L(\vec{r}, \vec{\phi}) = \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}) + \Phi(\vec{r}, \vec{\phi})$ est la luminance quittant la surface et $L(\vec{r}, -\vec{\phi}) = \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}) - \Phi(\vec{r}, \vec{\phi})$ est la luminance incidente à la surface.

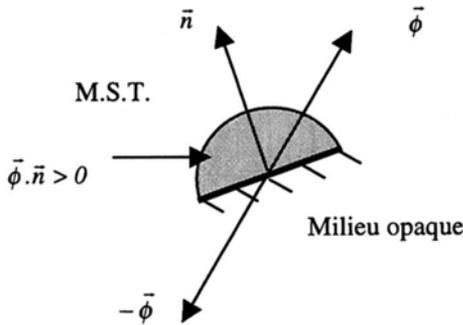


Figure 1. Choix des directions $\vec{\phi}$ telles que $\vec{\phi} \cdot \vec{n} > 0$ pour la paroi considérée

Si $\vec{\phi} \cdot \vec{n} < 0$, alors en figure 2 $L(\vec{r}, \vec{\phi}) = \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}) + \Phi(\vec{r}, \vec{\phi})$ représente dans ce cas la luminance incidente à la paroi. $L(\vec{r}, -\vec{\phi}) = \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}) - \Phi(\vec{r}, \vec{\phi})$ est la luminance quittant la paroi.

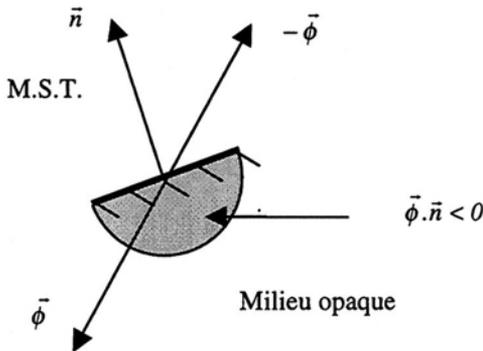


Figure 2. Choix des directions $\vec{\phi}$ telles que $\vec{\phi} \cdot \vec{n} < 0$ pour la paroi considérée

Dans la formulation paire, l'expression d'une condition aux limites dépend donc du sens de la normale à la paroi par rapport aux directions du demi-espace choisi :

$$\Psi(\vec{r}, \vec{\phi}) + \Phi(\vec{r}, \vec{\phi}) = \varepsilon L^o(\vec{r}) + \frac{\rho}{\pi} \int_{2\pi} \left((\vec{\phi}' \cdot \vec{n}) \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}') - (\vec{r}' \cdot \vec{n}) \Phi(\vec{r}, \vec{\phi}') \right) d\phi' \text{ avec } \vec{\phi} \cdot \vec{n} > 0$$

$$\Psi(\vec{r}, \vec{\phi}) - \Phi(\vec{r}, \vec{\phi}) = \varepsilon L^o(\vec{r}) + \frac{\rho}{\pi} \int_{2\pi} \left((\vec{\phi}' \cdot \vec{n}) \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}') - (\vec{r}' \cdot \vec{n}) \Phi(\vec{r}, \vec{\phi}') \right) d\phi' \text{ avec } \vec{\phi} \cdot \vec{n} < 0 \quad [12]$$

2.2.4. L'équation bilan d'énergie en variables paires

En écrivant l'intégrale sur les luminances comme une intégrale sur les variables paires pour les besoins de la résolution :

$$\int_{4\pi} L(\vec{r}, \vec{\phi}) d\phi = 2 \int_{2\pi} \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}) d\phi \quad [13]$$

L'équation bilan d'énergie devient :

$$k\Delta T = 4\alpha \left[\sigma_{bolz} T^4 - \frac{1}{2} \int_{2\pi} \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}) d\phi \right] \quad [14]$$

2.3. Méthode des ordonnées discrètes en éléments finis – formulation paire

2.3.1. Discrétisation directionnelle

On procède à une discrétisation suivant un nombre fini de directions de propagation du rayonnement dans l'espace, chacune étant associée à une pondération (M directions en formulation classique, alors M/2 en flux pairs). Les intégrales directionnelles sont alors remplacées par des quadratures numériques des variables Ψ relatives aux directions pondérées choisies. On utilise la quadrature S_N de Carlson et Lathrop [LAT65, LAT68, LAT66], où N est l'ordre de la quadrature.

L'équation [11] de transfert radiatif en Ψ s'écrit :

$$-\left(\vec{\phi}_m \cdot \nabla\right) \left(\frac{1}{\beta}\right) \left(\vec{\phi}_m \cdot \nabla\right) \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}_m) = -\beta \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}_m) + \alpha L^o(\vec{r})$$

$$+ \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{m=1}^{M/2} 2\omega_m \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}_m) \quad [15]$$

M/2 le nombre de directions discrètes en formulation paire,

ω_m : poids associé à la direction m' ,
 $\Psi(\vec{r}, \vec{\phi}_m)$: moyenne de deux luminances de directions opposées,

$$(\vec{\phi}_m \cdot \nabla) = \mu_m \frac{\partial}{\partial x} + \eta_m \frac{\partial}{\partial y} + \xi_m \frac{\partial}{\partial z} \quad [16]$$

où μ_m, η_m, ξ_m sont les cosinus directeurs associés à la direction $\vec{\phi}_m$.

L'équation [10] en Φ discrétisée est :

$$(\vec{\phi}_m \cdot \nabla) \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}_m) = -\beta \Phi(\vec{r}, \vec{\phi}_m) \quad [17]$$

Les conditions aux limites [12] deviennent :

$$\Psi(\vec{r}, \vec{\phi}_m) + \Phi(\vec{r}, \vec{\phi}_m) = \varepsilon L^o(\vec{r}) + \frac{\rho}{\pi} \sum_{m'=1}^{M/2} \omega_{m'} \left(\vec{\phi}_{m'} \cdot \vec{n} \left| \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}_{m'}) - (\vec{\phi}_{m'} \cdot \vec{n}) \Phi(\vec{r}, \vec{\phi}_{m'}) \right. \right)$$

avec $\vec{\phi} \cdot \vec{n} > 0$.

$$\Psi(\vec{r}, \vec{\phi}_m) - \Phi(\vec{r}, \vec{\phi}_m) = \varepsilon L^o(\vec{r}) + \frac{\rho}{\pi} \sum_{m'=1}^{M/2} \omega_{m'} \left(\vec{\phi}_{m'} \cdot \vec{n} \left| \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}_{m'}) - (\vec{\phi}_{m'} \cdot \vec{n}) \Phi(\vec{r}, \vec{\phi}_{m'}) \right. \right)$$

avec $\vec{\phi} \cdot \vec{n} < 0$

[18]

L'équation bilan d'énergie [14] prend la forme :

$$k\Delta T = 4\alpha \left[\sigma_{boltz} T^4 - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M/2} \omega_m \Psi(\vec{r}, \vec{\phi}_m) \right] \quad [19]$$

Enfin, les flux de chaleur directionnels s'écrivent :

$$Q_{xi} = q_{xi}^c + q_{xi}^r = -k \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \sum_{m=1}^M \omega_m (\vec{\phi}_m \cdot \vec{n}_{xi}) L(\vec{r}, \vec{\phi}_m) \quad [20]$$

Dorénavant, les expressions $\Psi(\vec{r}, \vec{\phi}_m)$ et $\Phi(\vec{r}, \vec{\phi}_m)$ seront écrites plus simplement Ψ_m et Φ_m .

2.3.2. Discrétisation spatiale, méthode éléments finis

On procède ensuite à la discrétisation spatiale du domaine physique Ω en utilisant la méthode des éléments finis.

2.3.2.1. Méthode des résidus pondérés

La méthode consiste à faire un découpage du domaine en éléments et à minimiser sur ce domaine la forme intégrale de l'E.T.R en Ψ pondérée, de l'équation en Φ et de l'équation bilan d'énergie en T pour chaque direction m . Les variables inconnues pouvant être Ψ_m , Φ_m , et T.

L'équation [15] peut être intégrée par parties pour obtenir une formulation faible, pour chaque direction discrète m :

$$\begin{aligned}
 I(\Psi_m) &= \int_{\Omega} \left(\delta\Psi_m \bar{\phi}_m \left(\frac{1}{\beta} \nabla \cdot \bar{\phi}_m \Psi_m \right) \right) d\Omega \\
 &- \int_{\Omega} \nabla \delta\Psi_m \cdot \bar{\phi}_m \left(\frac{1}{\beta} \nabla \cdot \bar{\phi}_m \Psi_m \right) d\Omega \\
 &- \int_{\Omega} \beta \delta\Psi_m \Psi_m d\Omega + \int_{\Omega} \delta\Psi_m \alpha L^0(\bar{r}) d\Omega + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} \delta\Psi_m \sum_k 2\omega_k \Psi_k d\Omega = 0 \quad [21]
 \end{aligned}$$

Où $\delta\Psi$ est la Fonction de pondération, fonctions test.

Le théorème de Green-Ostrogradsky permet d'introduire les conditions aux limites dans [21] afin d'exprimer les Φ_m en fonction des Ψ_m . L'intégrale du terme de divergence devient :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\delta\Psi_m \bar{\phi}_m \left(\frac{1}{\beta} \nabla \cdot \bar{\phi}_m \Psi_m \right) \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \delta\Psi_m \bar{\phi}_m \left(\frac{1}{\beta} \nabla \cdot \bar{\phi}_m \Psi_m \right) \cdot (-\bar{n}) d\Gamma \quad [22]$$

Où Γ est la limite du domaine d'étude.

Par convention, nous avons choisi la normale \bar{n} entrante. Dans ces conditions, l'expression [21] prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 I(\Psi_m) &= \int_{\Gamma} \delta\Psi_m \bar{\phi}_m \left(-\frac{1}{\beta} \nabla \cdot \bar{\phi}_m \Psi_m \right) \cdot \bar{n} d\Gamma \\
 &- \int_{\Omega} \nabla \delta\Psi_m \cdot \bar{\phi}_m \left(\frac{1}{\beta} \nabla \cdot \bar{\phi}_m \Psi_m \right) d\Omega \\
 &- \int_{\Omega} \beta \delta\Psi_m \Psi_m d\Omega + \int_{\Omega} \delta\Psi_m \alpha L^0(\bar{r}) d\Omega + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} \delta\Psi_m \sum_k 2\omega_k \Psi_k d\Omega = 0 \quad [23]
 \end{aligned}$$

Reconnaissant dans l'intégrale de contour que le terme entre parenthèses est Φ_m , et le remplaçant par ses valeurs aux limites du domaine définies par :

$$\Phi_m = \varepsilon L^o(\bar{r}) + \frac{\rho}{\pi} \sum_{m'=1}^{M/2} \omega_{m'} \left(\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n} \Psi_{m'} - (\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n}) \Phi_{m'} \right) - \Psi_m \text{ avec } \bar{\phi}_m \cdot \bar{n} > 0$$

$$\Phi_m = -\varepsilon L^o(\bar{r}) - \frac{\rho}{\pi} \sum_{m'=1}^{M/2} \omega_{m'} \left(\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n} \Psi_{m'} - (\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n}) \Phi_{m'} \right) + \Psi_m \text{ avec } \bar{\phi}_m \cdot \bar{n} < 0 \quad [24]$$

Enfin, l'intégrale [23] s'écrit :

$$\begin{aligned} I(\Psi_m) = & \int_{\substack{\Gamma \\ \bar{\phi}_m \cdot \bar{n} > 0}} \delta \Psi_m \left(\bar{\phi}_m \cdot \bar{n} \right) \left(\varepsilon L^o(\bar{r}) \right. \\ & \left. + \frac{\rho}{\pi} \sum_{m'=1}^{M/2} \omega_{m'} \left(\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n} \Psi_{m'} - (\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n}) \Phi_{m'} \right) - \Psi_m \right) d\Gamma \\ & + \int_{\substack{\Gamma \\ \bar{\phi}_m \cdot \bar{n} < 0}} \delta \Psi_m \left(\bar{\phi}_m \cdot \bar{n} \right) \left(-\varepsilon L^o(\bar{r}) \right. \\ & \left. - \frac{\rho}{\pi} \sum_{m'=1}^{M/2} \omega_{m'} \left(\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n} \Psi_{m'} - (\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n}) \Phi_{m'} \right) + \Psi_m \right) d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \nabla \delta \Psi_m \cdot \bar{\phi}_m \left(\frac{1}{\beta} \nabla \cdot \bar{\phi}_m \Psi_m \right) d\Omega - \int_{\Omega} \beta \delta \Psi_m \Psi_m d\Omega + \int_{\Omega} \delta \Psi_m \alpha L^o(\bar{r}) d\Omega \\ & + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} \delta \Psi_m \sum_k 2\omega_k \Psi_k d\Omega \\ = & \int_{\Gamma} \delta \Psi_m \left(\bar{\phi}_m \cdot \bar{n} \right) \left(\varepsilon L^o(\bar{r}) + \frac{\rho}{\pi} \sum_{m'=1}^{M/2} \omega_{m'} \left(\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n} \Psi_{m'} - (\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n}) \Phi_{m'} \right) - \Psi_m \right) d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} \nabla \delta \Psi_m \cdot \bar{\phi}_m \left(\frac{1}{\beta} \nabla \cdot \bar{\phi}_m \Psi_m \right) d\Omega - \int_{\Omega} \beta \delta \Psi_m \Psi_m d\Omega + \int_{\Omega} \delta \Psi_m \alpha L^o(\bar{r}) d\Omega \\ & + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} \delta \Psi_m \sum_k 2\omega_k \Psi_k d\Omega = 0 \quad [25] \end{aligned}$$

La résolution de cette équation en Ψ implique de ne connaître la valeur des Φ qu'aux limites du domaine, puisque ces derniers n'interviennent que dans les intégrales de contours. Sachant qu'il y a autant de luminances que de Ψ et de Φ ajoutés, la nouvelle formulation en variables paires permet de s'affranchir d'un certain nombre d'inconnues. Ce n'est pas négligeable pour la résolution éléments finis puisque le stockage des termes matriciels s'en trouve allégé et les temps de calcul réduits.

En milieu bidimensionnel dans lequel on poursuivra notre étude, l'équation [25] se réduit à :

$$\begin{aligned}
 I(\Psi_m) = & \int_{\Gamma} \delta \Psi_m \left[\bar{\phi}_m \cdot \bar{n} \left(\varepsilon L^o(\bar{r}) + \frac{\rho}{\pi} \sum_{m=1}^{M/2} \omega_{m'} \left(\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n} |\Psi_{m'} - (\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n}) \Phi_{m'} \right) - \Psi_m \right) \right] d\Gamma \\
 & - \int_{\Omega} \mu_m^2 \left(\frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial \delta \Psi_m}{\partial x} \frac{\partial \Psi_m}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \mu_m \eta_m \left(\frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial \delta \Psi_m}{\partial x} \frac{\partial \Psi_m}{\partial y} d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \eta_m \mu_m \left(\frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial \delta \Psi_m}{\partial y} \frac{\partial \Psi_m}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \eta_m^2 \left(\frac{1}{\beta} \right) \frac{\partial \delta \Psi_m}{\partial y} \frac{\partial \Psi_m}{\partial y} d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} \beta \delta \Psi_m \Psi_m d\Omega + \int_{\Omega} \delta \Psi_m \alpha L^0(\bar{r}) d\Omega + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\Omega} \delta \Psi_m \sum_k 2\omega_k \Psi_k d\Omega = 0 \quad [26]
 \end{aligned}$$

On a de façon identique à [21] pour l'équation [17] :

$$I(\Phi_m) = \int_{\Omega} \delta \Phi_m \Phi_m d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{\beta} \delta \Phi_m (\bar{\phi}_m \cdot \nabla) \Psi_m d\Omega = 0 \quad [27]$$

Pour l'équation bilan d'énergie [19] :

$$I(T) = - \int_{\Omega} k \delta T \Delta T d\Omega + \int_{\Omega} 4\alpha \delta T \left[\sigma_{boltz} T^4 - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M/2} \omega_m \Psi_m \right] d\Omega = 0 \quad [28]$$

Après intégration par parties de cette formulation [28] en 2D, on obtient :

$$\begin{aligned}
 I(T) = & + \int_{\Omega} k \frac{\partial \delta T}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} k \frac{\partial \delta T}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma} \delta T \bar{q} \cdot (-\bar{n}) d\Gamma \\
 & + \int_{\Omega} 4\alpha \delta T \left[\sigma_{boltz} T^4 - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M/2} \omega_m \Psi_m \right] d\Omega = 0 \quad [29]
 \end{aligned}$$

Où \bar{n} représente la normale entrante.

Le flux de chaleur q dans l'intégration numérique de l'équation bilan d'énergie se note :

$$\begin{aligned}
q &= -\bar{q} \cdot \bar{n} = h(T(\circ K) - T_{\text{extérieure}}) + \varepsilon \sigma_{\text{boltz}} (T(\circ K)^4 - T_{\text{extérieure}}^4) \\
&- \varepsilon \sum_{m=1}^{M/2} \omega_{m'} \left(\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n} \left| \Psi_{m'} - (\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n}) \Phi_{m'} \right. \right) \\
&= h(T(\circ C) + T_Z) - h(T_{\text{extérieure}}(\circ C) + T_Z) + \varepsilon \sigma_{\text{boltz}} T(\circ K)^3 (T(\circ C) + T_Z) \\
&- \varepsilon \sigma_{\text{boltz}} T_{\text{extérieure}}^4 - \varepsilon \sum_{m=1}^{M/2} \omega_{m'} \left(\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n} \left| \Psi_{m'} - (\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n}) \Phi_{m'} \right. \right) \\
&= \left(h + \varepsilon \sigma_{\text{boltz}} T(\circ K)^3 \right) T(\circ C) - \left(h T_{\text{extérieure}}(\circ C) - \varepsilon \sigma_{\text{boltz}} T(\circ K)^3 T_Z \right) \\
&\quad \left. + \varepsilon \sigma_{\text{boltz}} T_{\text{extérieure}}^4 \right) \\
&- \varepsilon \sum_{m=1}^{M/2} \omega_{m'} \left(\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n} \left| \Psi_{m'} - (\bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n}) \Phi_{m'} \right. \right) \tag{30}
\end{aligned}$$

- h le coefficient de transferts thermiques par convection (Watt/m² °K),
 ε l'émissivité de la paroi,
 σ_{boltz} le coefficient de Stephan-Boltzmann,
 T_Z 273.16°C.
 $T_{\text{extérieur}}$ condition si la surface est ouverte vers un milieu extérieur.

Enfin, les intégrales éléments finis des flux de chaleur conductif et radiatif directionnels [20] sont :

$$I(q_{xi}^c) = \int_{\Omega} \delta q_{xi}^c q_{xi}^c \partial \Omega + \int_{\Omega} \delta q_{xi}^c k \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = 0 \tag{31}$$

$$I(q_{xi}^r) = \int_{\Omega} \delta q_{xi}^r q_{xi}^r \partial \Omega - \int_{\Omega} \delta q_{xi}^r \sum_{m=1}^M \omega_m (\bar{\phi}_m \cdot \bar{n}_{xi}) L_m \partial \Omega = 0 \tag{32}$$

q_{xi}^c , et q_{xi}^r étant respectivement le flux conductif et le flux radiatif directionnels suivant \bar{n}_{xi} . Les solutions de ces intégrales sont déterminées connaissant les valeurs de Ψ_m , Φ_m et T.

2.3.2.2. Expression des grandeurs élémentaires

La forme intégrale globale est ensuite remplacée par une somme de formes intégrales élémentaires. On utilise maintenant une approximation par éléments finis des fonctions inconnues, relatives à l'élément Ω_e .

Finalement, nous obtenons l'expression matricielle suivante de I_e discrétisée :

$$I_e = \langle \partial E_n^n \rangle_e \left([K]_e \{E_m^n\}_e - \{F\}_e \right) \tag{33}$$

- où $[K]_e$ est la matrice élémentaire,
- $\{F\}_e$ est le vecteur élémentaire des sollicitations,
- $\{E_m^n\}_e$ est le vecteur élémentaire des variables nodales,
- $\{\delta E_m^n\}_e$ est le vecteur élémentaire des variations des variables nodales.

Les variables inconnues pouvant être $\Psi_m^n, \Phi_m^n, T^n(^{\circ}C), q_i$ flux total directionnel.

Pour l’E.T.R. [26] le système matriciel élémentaire est développé ci-dessous.

Pour le milieu semi-transparent :

$$\begin{aligned} [K_{\Psi}]_e^S = & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_2} \mu_m^2 \left(\frac{1}{\beta} \right) \left\{ \frac{\partial N_n(X_i, Y_j)}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial N_n(X_i, Y_j)}{\partial x} \right\} \omega_i \omega_j \det J(X_i, Y_j) \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_2} \mu_m \eta_m \left(\frac{1}{\beta} \right) \left\{ \frac{\partial N_n(X_i, Y_j)}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial N_n(X_i, Y_j)}{\partial y} \right\} \omega_i \omega_j \det J(X_i, Y_j) \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_2} \mu_m \eta_m \left(\frac{1}{\beta} \right) \left\{ \frac{\partial N_n(X_i, Y_j)}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial N_n(X_i, Y_j)}{\partial x} \right\} \omega_i \omega_j \det J(X_i, Y_j) \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_2} \eta_m^2 \left(\frac{1}{\beta} \right) \left\{ \frac{\partial N_n(X_i, Y_j)}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial N_n(X_i, Y_j)}{\partial y} \right\} \omega_i \omega_j \det J(X_i, Y_j) \\ & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_2} \beta \{N_n(X_i, Y_j)\} \{N_n(X_i, Y_j)\} \omega_i \omega_j \det J(X_i, Y_j) \\ & + \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_2} \{N_n(X_i, Y_j)\} \sum_{k=1}^{M/2} 2\omega_k \langle N_n(X_i, Y_j) \rangle \omega_i \omega_j \det J(X_i, Y_j) \\ \{F_{\Psi}\}_e^S = & - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_2} \alpha \frac{\sigma_{boltz}}{\pi} \{N_n(X_i, Y_j)\} \left\{ \langle N_n(X_i, Y_j) \rangle \right\} \{T_n(X_i, Y_j)\}^4 \\ & \times \omega_i \omega_j \det J(X_i, Y_j) \end{aligned} \tag{34}$$

- Où:
- n l’indice de la valeur nodale,
- N les fonctions d’interpolation,
- (X, Y) l’espace de référence,
- ω_i, ω_j les poids de Gauss.

Sur le contour :

$$\begin{aligned}
 [K_\Psi]_e^C &= - \sum_{i=1}^{n_1} \left| \bar{\phi}_m \cdot \bar{n} \right| \{N_n(X_i)\} \{N_n(X_i)\} \omega_i \det J(X_i) \\
 \{F_\Psi\}_e^C &= - \sum_{i=1}^{n_1} \left| \bar{\phi}_m \cdot \bar{n} \right| \{N_n(X_i)\} \frac{\varepsilon}{\pi} \sigma_{boltz} \left(\{N_n(X_i)\} \{T_n(X_i)\} \right)^4 \omega_i \det J(X_i) \\
 &- \frac{\rho}{\pi} \sum_{i=1}^{n_1} \left| \bar{\phi}_m \cdot \bar{n} \right| \{N_n(X_i)\} \sum_{m'=1}^{M/2} \omega_{m'} \left(\left| \bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n} \right| \{N_n(X_i)\} \{ \Psi_{m'}^n(X_i) \} \right) \\
 &- \left(\bar{\phi}_m \cdot \bar{n} \right) \{N_n(X_i)\} \{ \Phi_{m'}^n(X_i) \} \omega_i \det J(X_i) \tag{35}
 \end{aligned}$$

Où $\det J$ est le déterminant de la jacobienne de changement d'espace.

Pour l'intégrale élémentaire de l'équation [27] en Φ_m^n on obtient, pour chaque élément du milieu participant :

$$\begin{aligned}
 [K_\Phi]_e^S &= \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{r_2} \{N_n(X_i, Y_j)\} \{N_n(X_i, Y_j)\} \omega_i \omega_j \det J(X_i, Y_j) \\
 \{F_\Phi\}_e^S &= - \frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{r_2} \{N_n(X_i, Y_j)\} \left(\mu_m \left\langle \frac{\partial N_n(X_i, Y_j)}{\partial x} \right\rangle \right) \\
 &+ \eta_m \left\langle \frac{\partial N_n(X_i, Y_j)}{\partial y} \right\rangle \{ \Psi_m^n(X_i, Y_j) \} \omega_i \omega_j \det J(X_i, Y_j) \tag{36}
 \end{aligned}$$

Pour l'équation bilan d'énergie intégrée [29] le système matriciel élémentaire est décomposé sur l'élément de surface et de contour. Pour le contour :

$$\begin{aligned}
 [K_T]_e^C &= \sum_{i=1}^{n_1} \{N_n(X_i)\} \{N_n(X_i)\} \left(h + \varepsilon \sigma_{boltz} T_n(^{\circ}K)^3 \right) \det J(X_i) \omega_i \\
 \{F_T\}_e^C &= \sum_{i=1}^{n_1} \{N_n(X_i)\} \{ h T_{extérieure} (^{\circ}C) - \varepsilon \sigma_{boltz} T_n(^{\circ}K)^3 T_Z \\
 &+ \varepsilon \sigma_{boltz} T_{extérieure}^4 \} \det J(X_i) \omega_i \\
 &+ \varepsilon \sum_{i=1}^{n_1} \{N_n(X_i)\} \sum_{m'=1}^{M/2} \omega_{m'} \left(\left| \bar{\phi}_{m'} \cdot \bar{n} \right| \{N_n(X_i)\} \{ \Psi_{m'}^n(X_i) \} \right) \\
 &- \left(\bar{\phi}_m \cdot \bar{n} \right) \{N_n(X_i)\} \{ \Phi_{m'}^n(X_i) \} \det J(X_i) \omega_i \tag{37}
 \end{aligned}$$

Pour la surface :

$$\begin{aligned}
 [K_T]_e^S &= + \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} k \left\{ \frac{\partial N_n(X_i, Y_j)}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial N_n(X_i, Y_j)}{\partial x} \right\} \det J(X_i, Y_j) \omega_i \omega_j \\
 &+ \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} k \left\{ \frac{\partial N_n(X_i, Y_j)}{\partial y} \right\} \left\{ \frac{\partial N_n(X_i, Y_j)}{\partial y} \right\} \det J(X_i, Y_j) \omega_i \omega_j \\
 &+ \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} 4\alpha \{N(X_i, Y_j)\} \sigma_{boltz} \left(\langle N_n(X_i, Y_j) \rangle \{T_n(X_i, Y_j)\} \right)^3 \times \\
 &\langle N_n(X_i, Y_j) \rangle \times \det J(X_i, Y_j) \omega_i \omega_j \\
 \\
 \{F_T\}_e^S &= - \sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} 4\alpha \{N_n(X_i, Y_j)\} \left[\sigma_{boltz} T_Z \left(\langle N_n(X_i, Y_j) \rangle \{T_n(X_i, Y_j)\} \right)^3 \right. \\
 &\left. - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{M/2} \omega_m \{N_n(X_i, Y_j)\} \{ \Psi_m^n(X_i, Y_j) \} \right] \det J(X_i, Y_j) \omega_i \omega_j \tag{38}
 \end{aligned}$$

2.3.2.3. Système global

La forme du système global est la suivante, sachant que les inconnues sont les températures, les Ψ_m^n et les Φ_m^n (les flux de chaleur totaux directionnels seront calculés en post-traitement).

Les indices i et m_i dans les expressions $\Psi_{m_i}^i$ représentent respectivement le numéro du nœud et la direction discrète de propagation du rayonnement associée au nœud i .

Pour les éléments de contour :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & \text{Nœud 1} & & \text{Nœud 2, etc...} \\
 & \underbrace{\hspace{10em}} & & \underbrace{\hspace{2em}} \\
 & T_1 & \Psi_{m_1}^1 & \Psi_{m_2}^1 & \dots \\
 T_1 & f(T^3) & 0 & 0 & \dots \\
 \Psi_{m_1}^1 & 0 & f(\{N\}N) & f(\{N\}N) & \dots \\
 \Psi_{m_2}^1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{c}
 T_1 \\
 \Psi_{m_1}^1 \\
 \Psi_{m_2}^1 \\
 \dots
 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c}
 f(T^3, \Psi) \\
 f(T^4, \Psi_{m_i \neq m_1}^1) \\
 f(T^4, \Psi_{m_i \neq m_2}^1) \\
 \dots
 \end{array} \right] \tag{39}$$

Pour les éléments de surface :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 & \text{Nœud 1} & & \text{Nœud 2, etc...} \\
 & \underbrace{\hspace{10em}} & & \underbrace{\hspace{2em}} \\
 & T_i & \Psi_{m_1}^1 \dots & \Phi_{m_1}^1 \dots
 \end{array} \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 f\left(T^3, \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rangle \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rangle\right) & 0 & \dots & 0 \\
 0 & f\left(\left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rangle \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rangle\right) & \dots & 0 \\
 0 & 0 & \dots & f\left(\left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rangle \left\langle \frac{\partial N}{\partial x_i} \right\rangle\right) \\
 0 & 0 & \dots & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0
 \end{array} \right] \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} T_1 \\ \Psi_{m_1}^1 \\ \dots \\ \Phi_{m_1}^1 \\ \dots \end{array} \right\} \\ \dots \end{array} \\
 = \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} f(T^3, \Psi_{m_1}^1) \\ f(T^4) \\ \dots \\ f(\Psi_{m_1}^1) \\ \dots \end{array} \right\}
 \end{array}
 \end{array}$$

[40]

Le processus de résolution est itératif. Dans un premier temps, on utilise une méthode point fixe (substitution) afin de simplifier la résolution.

3. Validation de la méthode : cas test

On se place dans les configurations proposées par la littérature pour tester notre approche [SEU 90], [RAZ 84]. On étudie l'influence de différents paramètres propres à la méthode des ordonnées discrètes et aux transferts de chaleur par conduction et rayonnement, en milieu semi-transparent. Tout d'abord, on discutera le choix d'un ordre de quadrature pour la discrétisation directionnelle (S₂, S₄, ou encore S₆...). Les conclusions de cette première étape seront déterminantes pour en déduire l'efficacité de la méthode en termes de nombre d'inconnues. En effet, plus l'ordre de quadrature devra être élevé, plus le nombre de degrés de liberté sera important et donc plus la matrice de résolution éléments finis sera grande. En S₄ on a besoin de 24 directions par nœud en 3D, 12 en 2D et plus que 6 en formulation

paire. Mais en S_6 , on a le double de directions en E.P. On aura donc intérêt à obtenir une précision satisfaisante pour le plus faible ordre de quadrature possible.

L'étape suivante consistera à étudier le comportement du système selon la valeur du paramètre de Stark N_S défini par $N_S = \frac{k\beta}{4\sigma_{boltz}T_1^3}$, paramètre de conduction rayonnement dont les caractéristiques sont les suivantes :

- plus N_S est faible (< 0.1), plus le rayonnement prédomine sur la conduction,
- à l'inverse, plus N_S est grand (> 1) plus les transferts de chaleur sont principalement conductifs.

Cette étude nous permettra d'évaluer la précision de notre approche selon la participation du rayonnement aux transferts de chaleur.

Ensuite, nous modéliserons plusieurs catégories de parois, noires ou grises ($0 < \epsilon < 1$). De ces valeurs dépendra l'intensité de l'éclairement à la paroi suivant une direction donnée de propagation du rayonnement. Autrement dit, ces paramètres seront déterminants pour les conditions aux limites conditionnant les profils de températures au sein du milieu participant.

Pour cerner l'ensemble des situations auxquelles nous pouvons être confrontés en transferts couplés et milieu gris participant bidimensionnel, on étudiera l'influence de l'albédo ω_0 ($0 < \omega_0 < 1$). Ce paramètre caractérise la participation du milieu aux transferts de chaleur. En effet, pour une épaisseur optique considérée, plus l'albédo est faible, plus l'absorption est significative devant la diffusion.

On étudiera également une source d'imprécision de la méthode des ordonnées discrètes, communément appelée « l'effet de rayon ». Les observations se feront sur un cas usuel de la littérature pour un milieu absorbant et émettant à l'équilibre radiatif.

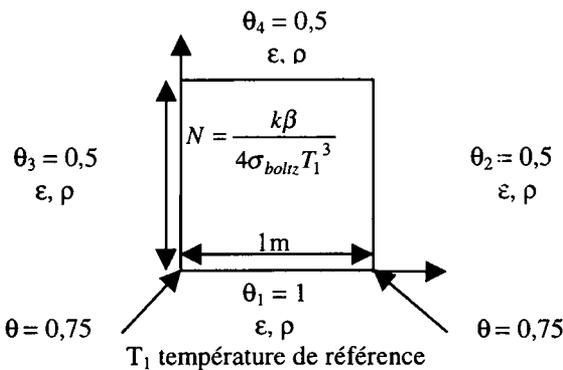


Figure 3. Géométrie et paramètres du cas test

Le schéma du cas test est représenté en figure 3. La température adimensionnée du mur sud est fixée à 1, celle des coins sud-est et sud-ouest à 0,75 et enfin les autres murs sont maintenus à 0,5 ($\theta = T / T_1$). L'épaisseur optique $\tau = \beta l$ est fixée à 1 et à 10. On choisit un maillage 12×12 éléments (éléments bilinéaires à 4 nœuds, connus sous l'appellation Q_4) afin de disposer d'un nombre suffisant de points à tracer sur le contour. Les limites du domaine sont maillées en éléments linéaires à 2 nœuds (L_2).

3.1. Milieu absorbant-émettant

Pour les trois paragraphes qui suivent, les murs du domaines seront considérés comme noirs. La température de référence est $T_1 = 500^\circ\text{C} = 773,16^\circ\text{K}$.

3.1.1. Influence de l'ordre de la quadrature

Nous avons réalisé une série de tests pour les quadratures S_2 et S_4 .

On peut observer que, en comparaison avec les profils de température obtenus en quadrature S_2 , ceux obtenus en quadrature S_4 sont identiques aux résultats référencés (figure 4). Les solutions référencées de Seung Wook Baek et Taik Young Kim et de notre code volume finis ont été obtenus en S_4 . Cette quadrature offre une bonne précision, puisqu'elle fournit des résultats équivalents à ceux des éléments finis de M.M. Razzaque, J.R. Howell et D.E. Klein. En effet, d'après les différents auteurs référencés [SEU 90], [FIV 94] et [FIV 95], cet ordre de quadrature est suffisant à l'obtention d'une bonne précision des résultats.

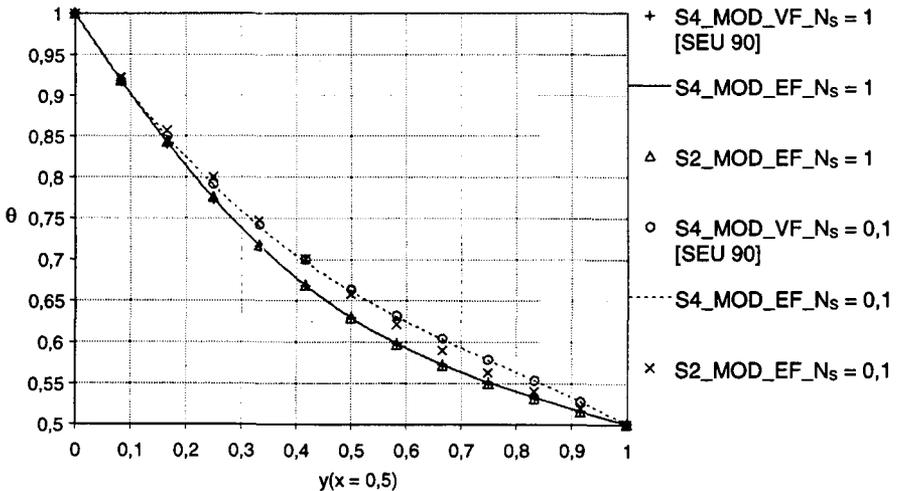


Figure 4. Comparaison des quadratures S_2 et S_4 ; $N_s = 1$ et $0,1$; enceinte carrée, murs noirs $\theta_{sud} = 1$; $\theta_{sudest} = \theta_{sudouest} = 0,75$; $\theta_{autre} = 0,5$; $\tau = 1$; $\alpha = 1$; $\varepsilon = 1$

Pour le flux de chaleur total adimensionné en $x = 0,5$, la quadrature S_4 donne des résultats plus proches de ceux de la littérature que la quadrature S_2 (Fig. 5).

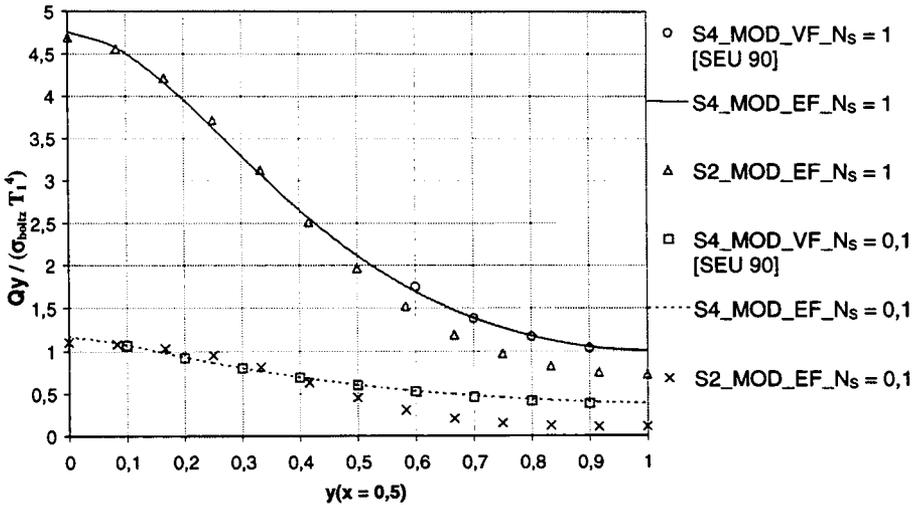


Figure 5. Comparaison S_2 et S_4 (E.F.) et S_4 (V.F.) ; flux net de chaleur total adimensionné en $x = 0,5$; $\theta_{sud} = 1$; les autres murs à $\theta = 0,5$; $\tau = 1$; $\alpha = 1$; $\varepsilon = 1$

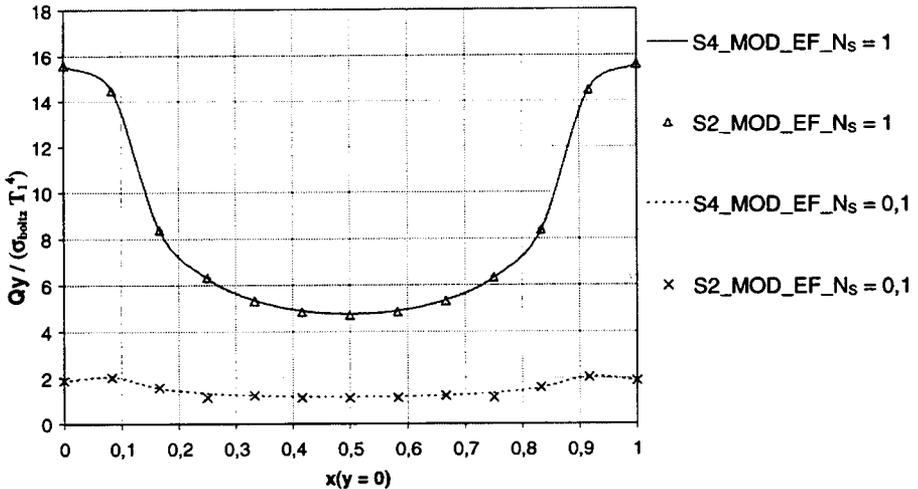


Figure 6. Comparaison des quadratures S_2 et S_4 , flux net de chaleur total (conduction + rayonnement) adimensionné sur le mur sud chaud ($\theta = 1$), les autres murs à $\theta = 0,5$; $\tau = 1$; $\alpha = 1$; $\varepsilon = 1$

Sur le mur chaud (figure 6), les flux de chaleur coïncident pour les deux quadratures. Les ordonnées discrètes associées aux éléments finis donnent une précision satisfaisante en *quadrature* S_4 . C'est cette quadrature que l'on utilisera pour la suite des cas test.

3.1.2. Influence du paramètre de Stark

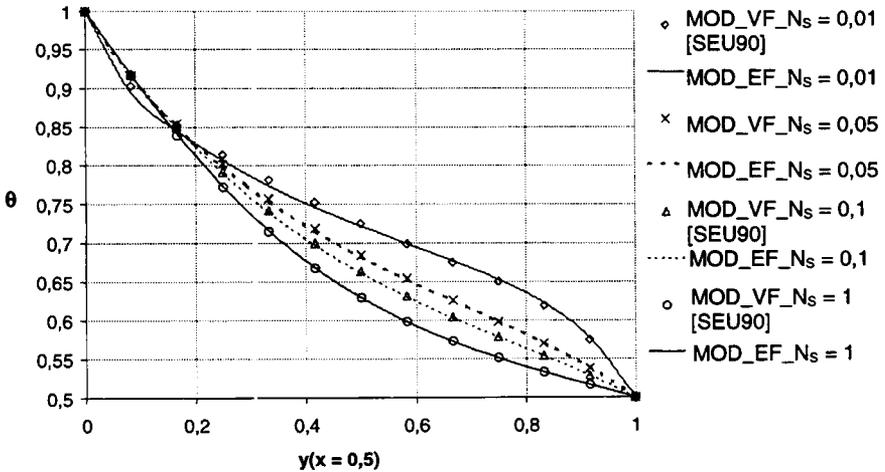


Figure 7. Profils de température ; $N_S = 1 ; 0,1 ; 0,05 ; 0,01$; enceinte carrée, murs noirs en S_4 ; $\theta_{sud} = 1$; $\theta_{sudest} = \theta_{sudouest} = 0,75$; $\theta_{autres} = 0,5$; $\tau = 1$; $\alpha = 1$; $\varepsilon = 1$

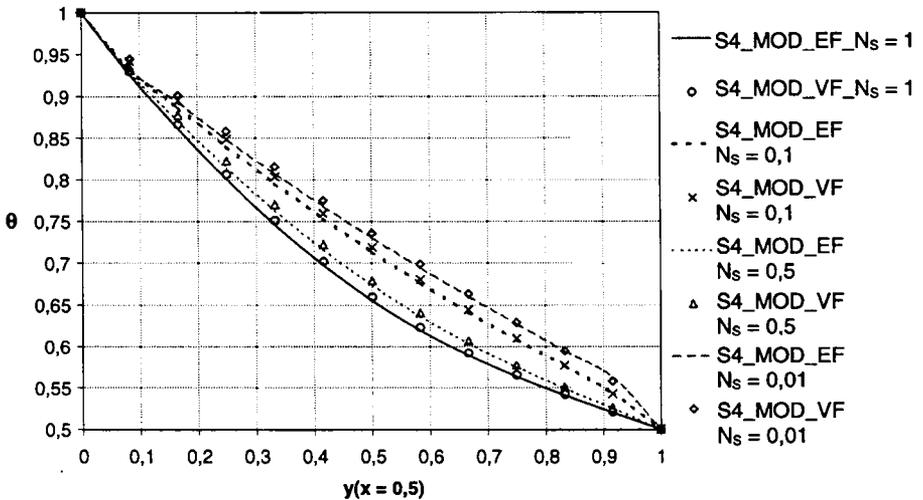


Figure 8. Profils de température ; $N_S = 1 ; 0,1 ; 0,5 ; 0,01$; enceinte carrée, murs noirs en S_4 ; $\theta_{sud} = 1$; $\theta_{sudest} = \theta_{sudouest} = 0,75$; $\theta_{autres} = 0,5$; $\tau = 10$; $\alpha = 1$; $\varepsilon = 1$

Le paramètre de Stark est le paramètre de conduction-rayonnement dont on étudie l'influence sur la solution en température (pour deux épaisseurs optiques $\tau = 1$ et $\tau = 10$) et les flux de chaleur.

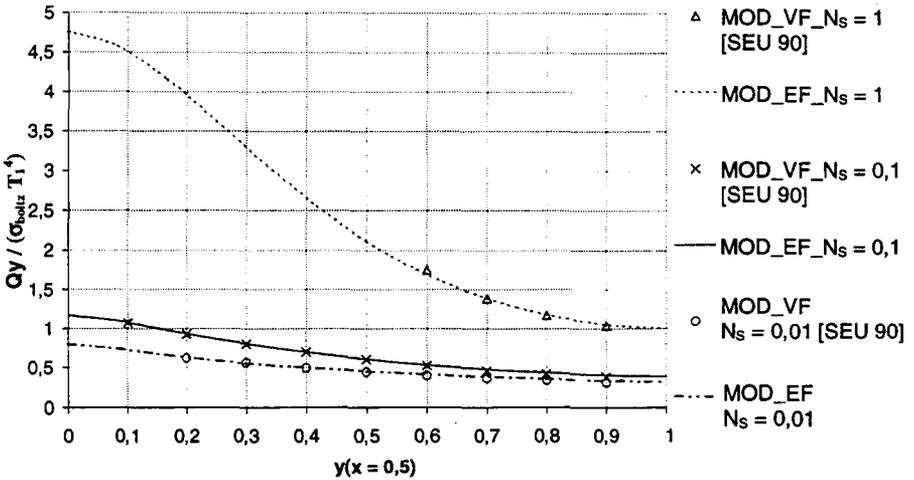


Figure 9. Flux net de chaleur total adimensionné en $x = 0,5$; le mur sud étant à $\theta = 1$ et les autres murs à $\theta = 0,5$ en S_4 ; $\tau = 1$; $\alpha = 1$; $\varepsilon = 1$

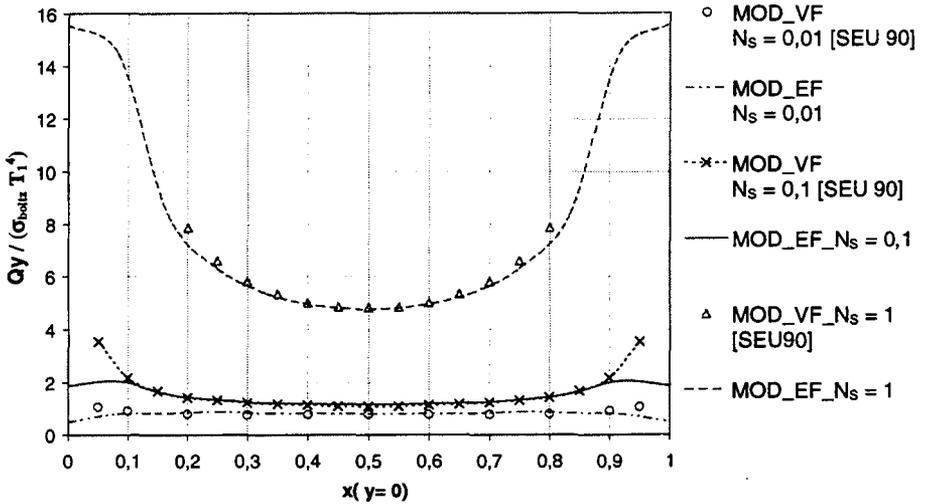


Figure 10. Flux net de chaleur total (conduction + rayonnement) adimensionné sur le mur sud chaud ($\theta = 1$); les autres murs à $\theta = 0,5$ en S_4 ; $\tau = 1$; $\alpha = 1$; $\varepsilon = 1$

Comme N_S diminue, le rayonnement joue un rôle prépondérant, ce qui se traduit par une augmentation de la température moyenne du milieu absorbant et émettant (figure 7 et 8). Ces résultats s'expliquent facilement ; comme N_S diminue, l'énergie radiative émise du mur chaud peut pénétrer dans le milieu et contribuer à l'augmentation de l'énergie thermique.

La figure 9 traduit l'influence de N_S sur le flux de chaleur total en $x = 0,5$. Le flux est d'autant plus élevé que N_S est grand. Dans ce cas, la conduction est le mode de transfert prédominant. Ainsi, diminuer N_S a pour effet de minimiser les échanges de chaleur.

En figure 10, on a représenté le flux de chaleur total sur le mur chaud (surface 1). Dans les angles, là où les surfaces 1 et 3 se rejoignent, comme N_S devient grand, un fort gradient de température apparaît et le flux conductif augmente.

Les résultats éléments finis et volumes finis sont similaires et équivalents aux résultats éléments finis de Razzaque *et al.* [RAZ 84] considérés dans la littérature comme numériquement exactes.

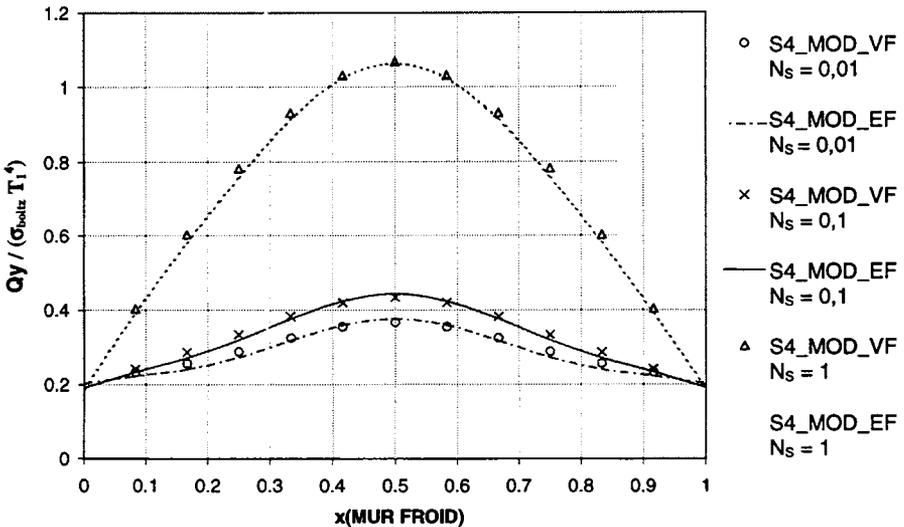


Figure 11. Flux de chaleur (conduction + rayonnement) adimensionné reçu par le mur nord froid ($\theta = 0,5$), en S_4 ; $\tau = 1$; $\alpha = 1$; $\varepsilon = 1$

Il y a une bonne concordance des résultats volumes finis-éléments finis sur les profils de températures (figure 8), sur le flux net à la paroi chaude (figure 10), le long de l'axe de symétrie $x = 0,5$ (figure 9), et enfin sur le flux reçu par la paroi froide (figure 11).

Pour les figures 11 et 12, les résultats en volumes finis ont été obtenus avec notre propre code de calcul, la littérature ne proposant pas les profils de flux pour les murs froids et les fortes épaisseurs optiques.

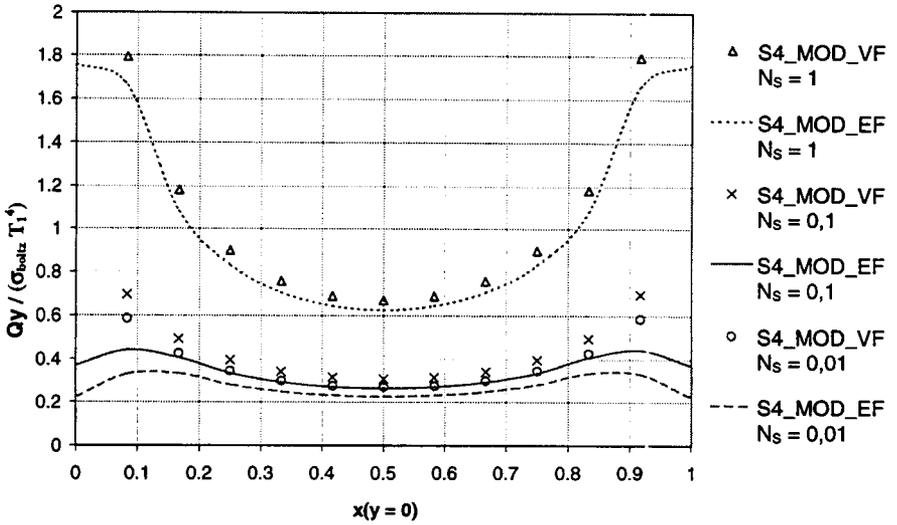


Figure 12. Flux net de chaleur total (conduction + rayonnement) adimensionné sur le mur sud chaud ($\theta = 1$) ; les autres murs à $\theta = 0,5$ en S_4 ; $\tau = 10$; $\alpha = 10$; $\varepsilon = 1$

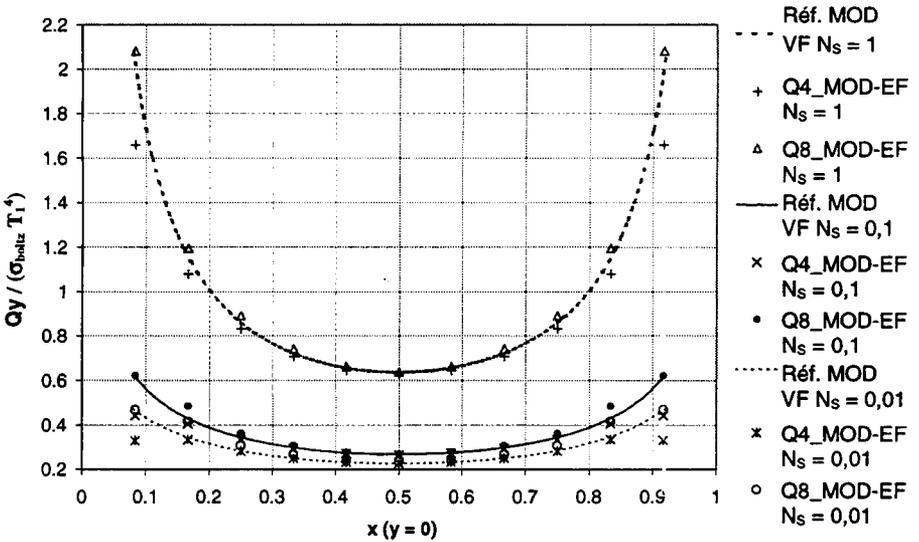


Figure 13. Flux net de chaleur total adimensionné sur le mur sud chaud ($\theta = 1$) pour différentes quadratures ; les autres murs à $\theta = 0,5$ en S_4 ; $\tau = 10$; $\varepsilon = 1$

Pour de plus grandes épaisseurs optiques, par exemple $\tau = 10$, le flux net à la paroi chaude a été représenté (figure 12). Les résultats éléments finis en formulation F.P. sous-estiment ceux obtenus en volumes finis V.P. Ce désaccord entre les deux méthodes pour $\tau = 10$ a été constaté en transfert radiatif pur [FTV 95], auquel cas les éléments finis donnent une mauvaise estimation de la solution exacte, tandis que les volumes finis sont plus précis. En utilisant un coefficient d'absorption de 10, le libre parcours moyen du photon est du même ordre de grandeur que la longueur caractéristique de l'élément lorsque l'on utilise 12×12 éléments pour la discrétisation spatiale. Ainsi, les éléments bilinéaires (Q4) sont incapables de capturer la nature exponentielle de la solution près des limites du domaine pour l'équation du second ordre en formulation paire[15]. Les éléments quadratiques (Q8) fournissent une meilleure estimation des profils.

Par analogie, on pourrait penser qu'en transferts couplés ce phénomène est également vérifié. Or, dans ce cas, la précision des éléments linéaires est acceptable et les éléments quadratiques ne l'améliorent pas de façon très significative (figure 13). La solution analytique du problème n'existant pas, la référence (Réf.) a été obtenue numériquement en raffinant suffisamment le maillage (100 éléments par côté), et en utilisant les éléments bilinéaires et la quadrature S_6 (avec les volumes finis ou les éléments finis). D'après ces résultats en géométrie simple, on peut penser que le couplage atténue les sources d'imprécision inhérente à la formulation éléments finis.

3.1.3. Influence de l'émissivité des parois

On compare les profils de température obtenus pour une cavité noire ($\varepsilon = 1$) et une cavité grise ($\varepsilon < 1$), entourant le milieu semi-transparent (figure 14).

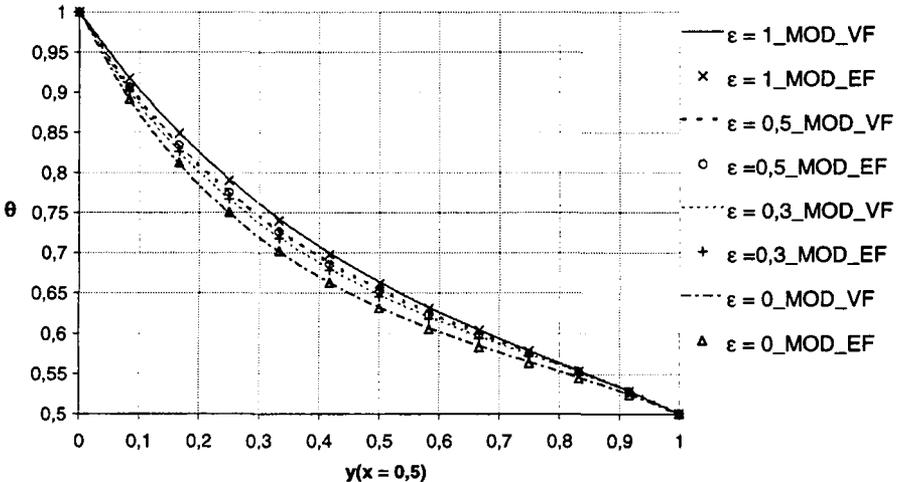


Figure 14. Profils de températures pour différentes émissivités de l'enceinte ; $N=0,1$ $\theta_{sud} = 1$; $\theta_{sudest} = \theta_{sudouest} = 0,75$; $\theta_{autres} = 0,5$ en S_4 ; $\tau = 1$

Lorsque ϵ est élevé, la luminance du mur chaud (sud) est importante. La température du milieu est donc d'autant plus élevée que ϵ est grand.

3.2. Milieu absorbant-émettant/absorbant-diffusant-émettant : influence de l'albédo

Lorsque l'albédo $\omega_0 = \sigma / (\alpha + \sigma)$ est égal à 1, ce qui correspond à un milieu diffusant et émettant, la distribution de température est entièrement déterminée par la conduction et le milieu ne participe pas radiativement aux échanges de chaleur. Lorsque l'albédo ω_0 est nul, le milieu est absorbant non diffusant.

Plus le milieu est absorbant, plus l'énergie radiative émise par les murs pourra pénétrer profondément dans le milieu qui participera plus activement aux transferts de chaleur. Autrement dit, plus l'albédo est faible, plus la température du milieu est élevée (figure 15).

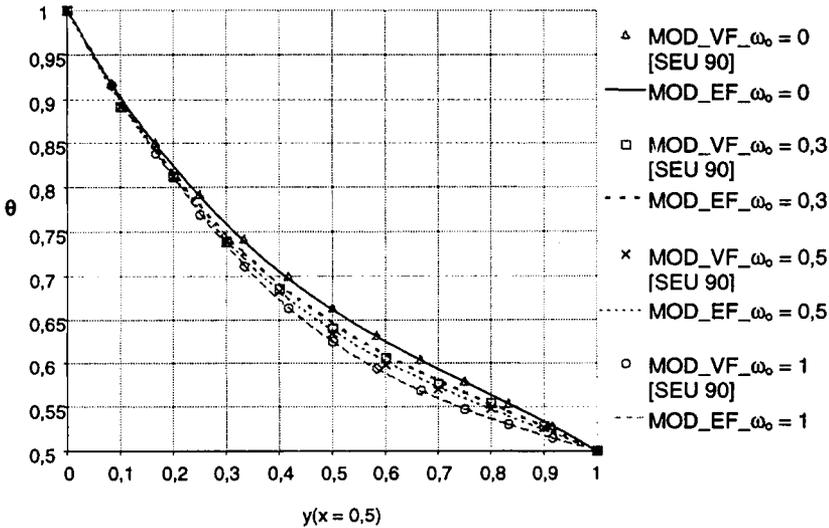


Figure 15. Profils de température ($x = 0.5$) pour différents albédo, enceinte carrée, murs noirs ; $\theta_{sud} = 1$; $\theta_{sudest} = \theta_{sudouest} = 0,75$; $\theta_{sudest} = 0,5$ en S_4 ; $\tau = 1$; $\epsilon = 1$; $N_5 = 0,1$

Pour ces trois tests sur l'influence du paramètre de conduction-rayonnement, sur l'émissivité des parois et sur l'albédo, nos résultats ordonnées discrètes-éléments finis, en température et flux sur la paroi chaude, coïncident avec ceux de la littérature et de notre code volumes finis sous certaines conditions d'épaisseur optique.

3.3. Milieu absorbant, non diffusant, effet de rayon

L'effet de rayon est une perte d'information inhérente à la procédure de discrétisation directionnelle de la méthode des ordonnées discrètes et entièrement indépendante de la discrétisation spatiale. Il se traduit par des erreurs de précision sur les résultats, d'autant plus marquées que l'ordre de quadrature est faible.

Pour nous positionner par rapport à ce phénomène déjà observé et interprété en volumes finis, nous nous sommes placés dans une configuration usuelle pour laquelle on dispose d'une solution de référence calculée par la méthode de Monte Carlo [VAI 97]. Le milieu est absorbant, non diffusant, à l'équilibre radiatif. Il est confiné dans une cavité carrée aux parois noires, l'une portée à la température T_1 de référence (sud), les autres à 0°K (même géométrie que figure 3).

En figure 16 on présente le flux radiatif reçu par la paroi froide opposée à la paroi où $T = T_1$.

Nos résultats, en éléments finis-formulation paire, sont décevants car en désaccord avec la solution de référence, mais caractéristiques de l'effet de rayon. En effet, l'écart de précision est d'autant plus important que l'ordre de la quadrature, autrement dit le nombre de directions de discrétisation, est faible.

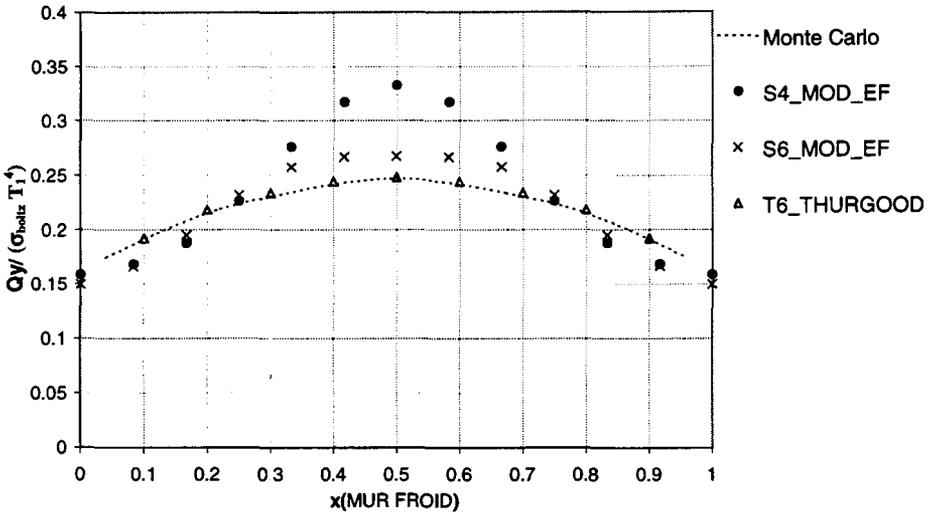


Figure 16. Flux de chaleur adimensionné reçu par le mur froid opposé à la paroi où $T = T_1$; effet de rayon ; $\tau = 1$

Pour atténuer ces effets de rayon, la quadrature de Thurgood [THU 92] s'est révélée efficace comme le confirme la figure 15. En effet, la distribution des directions de cette quadrature dans l'espace est plus uniforme que celle de la quadrature S_N . Cependant, le nombre de directions en quadrature T_N est $m = 8N^2$ et

en S_N , seulement $m = N(N + 2)$. Autrement dit pour le flux net radiatif associé à la quadrature T_6 que l'on a représenté, 144 directions ont été utilisées en bidimensionnel. La recherche de précision peut donc coûter cher en temps de calcul, et souvent, pour cette raison, il est plus pratique d'utiliser la quadrature S_N . D'ailleurs, bien que la prédiction de cette quadrature S_N soit moins bonne dans le cas du flux radiatif à la paroi froide, en ce qui concerne la paroi chaude, utiliser S_4 est plus avantageux que travailler avec S_6 ou T_6 . Dans ce cas, non seulement on n'utilise que 12 directions de discrétisation mais, en plus, la précision est maximale [SAK 96].

4. Application en géométrie complexe

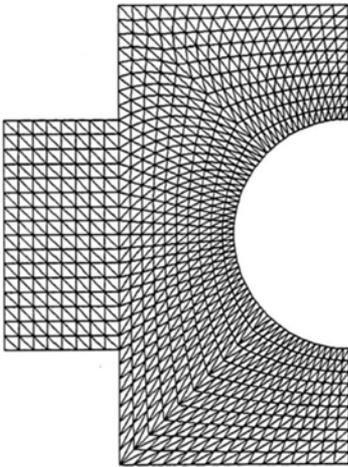


Figure 17. Géométrie et maillage choisis

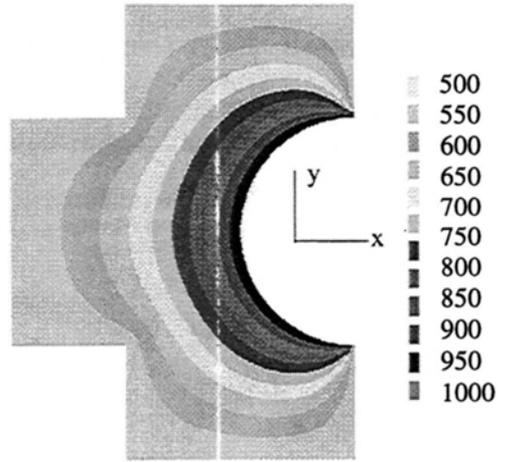


Figure 18(a). Champ de températures en Kelvin, $\alpha = 0,25 \text{ m}^{-1}$ et $N_S = 1$

La méthode des ordonnées discrètes en éléments finis et flux pairs étant validée, on l'a étendue à un cas de géométrie complexe en milieu absorbant-émettant. La formulation éléments finis permet de mailler assez facilement le domaine d'étude par des éléments non structurés. C'est un avantage non négligeable sachant que ce type d'éléments est indispensable dès lors que l'on cherche à représenter les transferts de chaleur en géométrie complexe.

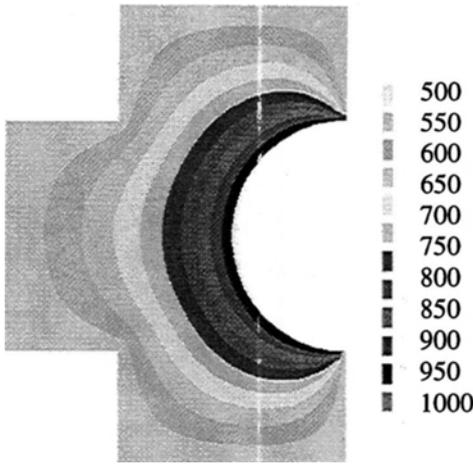


Figure 18(b). *Champ de températures en Kelvin, $\alpha = 0,25 \text{ m}^{-1}$ et $N_S = 0,1$*

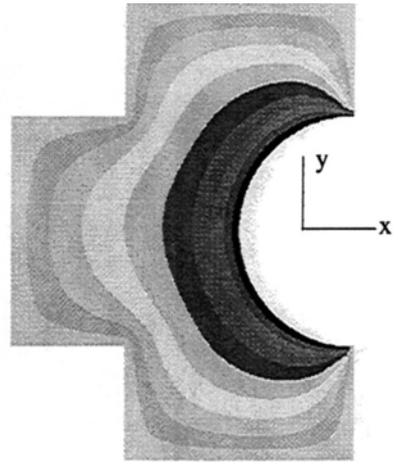


Figure 18(c). *Champ de températures en Kelvin, $\alpha = 0,25 \text{ m}^{-1}$ et $N_S = 0,01$*

A partir d'une configuration issue de la littérature [SAK 96], on présente les champs de température dans un milieu absorbant-émettant en transferts couplés conduction-rayonnement. Le maillage est constitué d'éléments non structurés triangulaires de surface et linéaires de contour (figure 17). La face en demi-cercle est maintenue à la température de 1 000 K, tandis que les autres faces sont à 500 K. Les figures 18 représentent les champs de température obtenus pour un milieu absorbant-émettant ($\alpha = 0,25 \text{ m}^{-1}$) et conducteur ($N_S = 1$ en 18(a), $N_S = 0,1$ en 18(b) et $N_S = 0,01$ en 18(c)). Pour la figure 19, on a augmenté le coefficient d'absorption ($\alpha = 10 \text{ m}^{-1}$) en imposant la même conductivité que celle employée pour la figure 18(c). Il apparaît clairement sur la suite de figures 18(a), 18(b) et 18(c) que plus le rayonnement est prépondérant devant le transfert conductif, plus le transfert thermique est efficace, de la paroi chaude en forme de demi-cercle vers le milieu absorbant-émettant.

Ces résultats en géométrie complexe confirment donc la validité de la méthode qui a été obtenue sur des configurations simples de la littérature.

Aussi, en figure 19, on a représenté le champ de température pour la même conductivité qu'en figure 18(c), mais avec un coefficient d'absorption supérieur. Dans ces conditions le milieu peut être considéré comme optiquement mince et la luminance négligeable devant la fonction de Planck. Le transfert radiatif est donc moins efficace qu'en figure 18(c) comme on pouvait s'y attendre.

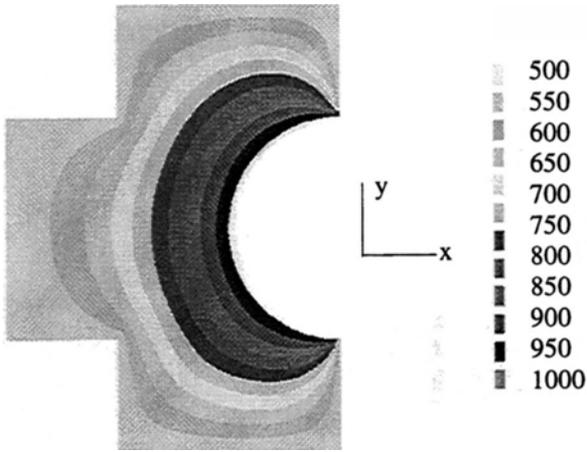


Figure 19. *Champ de températures en Kelvin, $\alpha = 10 \text{ m}^{-1}$ pour la même conductivité qu'en figure 18(c)*

5. Conclusion : perspectives de travail

Dans cette étude, nous avons présenté la formulation en flux pairs et éléments finis de la méthode des ordonnées discrètes. Elle couvre les transferts couplés conduction-rayonnement dans une enceinte aux murs gris ou noirs renfermant un milieu gris participant. Nous avons validé notre approche éléments finis des ordonnées discrètes en confrontant principalement nos résultats à ceux obtenus par une méthode classique de type volumes finis. Nous avons montré l'efficacité des ordonnées discrètes pour la prise en compte du rayonnement dans un code de modélisation du transfert de chaleur par éléments finis.

Aussi, nous avons évoqué l'originalité de la formulation reposant sur son application naturelle à des géométries complexes. En effet, les éléments finis utilisent facilement les maillages non structurés qui sont indispensables à l'étude de telles configurations. Cet important avantage nous fait préférer les éléments finis aux volumes finis.

Enfin, pour améliorer les performances de la méthode que nous avons exploitée et appliquée aux transferts couplés, nous pourrions prochainement nous intéresser à la prise en compte des propriétés spectrales des milieux, considérés gris dans cette étude afin de faciliter la résolution de l'équation de transfert radiatif. Nous pourrions également exploiter la formulation éléments finis-volumes de contrôle en variables classiques qui, après une étude en transfert radiatif pur [FIV 95], s'est révélée plus précise.

6. Bibliographie

- [CHA 60] CHANDRASEKHAR S., *Radiative heat transfer*, New York, Ed. Dover, 1960.
- [FIV 82] FIVELAND W.A., « A Discrete Ordinates Method for Predicting Radiative Heat Transfer in Axisymmetric Enclosures », *ASME*, vol. 59, p. 321-340, 1982.
- [FIV 84] FIVELAND W.A., « Discrete Ordinates Solutions of Transport Equation for Rectangular Enclosures », *ASME J. Heat Transfer*, vol. 106, p. 699-706, 1984.
- [FIV 88] FIVELAND W.A., « Three-Dimensional Radiative Heat Transfer Solutions by the Discrete Ordinates Method », *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, vol. 2, n° 4, p. 309-316, 1988.
- [FIV 94] FIVELAND W.A., « Finite Element Formulation of the Discrete Ordinates Method for Multidimensional Geometries », *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, vol. 8, n° 3, July-Sept. 1994.
- [FIV 95] FIVELAND W.A., JESSEE J.P., « Comparison of Discrete Ordinates Formulations for Radiative Heat Transfer in Multidimensional geometries », *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, vol. 9, n° 1, January-March 1995.
- [HOT 67] HOTTEL H.C., SAROFIM A.F., *Radiative Transfer*, McGraw Hill, New York, 1967.
- [HOW 68] HOWELL J.R., « Application of Monte Carlo to Heat Transfer Problems », *Advances in Heat Transfer*, vol. 5, edited by T.F. Irvine Jr. And J. P. Harnett, Academic Press, New York, p. 1-54, 1968.
- [JAM 88a] JAMALUDDIN A.S., SMITH P.J., « Predicting Radiative Heat Transfer in Rectangular Enclosures Using the Discrete Ordinates method », *Combustion Science and Technology*, vol. 59, p. 321-340, 1988.
- [JAM 88b] JAMALUDDIN A.S., SMITH P.J., « Predicting Radiative Heat Transfer in Axisymmetric Cylindrical Enclosures Using the Discrete Ordinates Method », *Combustion Science and Technology*, vol. 62, p. 173-186, 1988.
- [LAT 65] LATHROP K. D., CARLSON B.G., Discrete Ordinates Angular Quadrature of the Neutron Transport Equation, Technical Report LA-3186, Los Alamos Scientific Laboratory, 1965.
- [LAT 68] LATHROP K. D., CARLSON B.G., « Transport Theory, the Method of Discrete Ordinates », In H. Greenspan, C.N. Kelber and D. Okrent, editors, *Computing Methods in Reactor Physics*, Gordon and Breach, 1968.
- [LEW 84] LEWIS E.E., MILLER W.F., *Computational Methods of Neutron Transport*, J. Wiley, New York, 1984.
- [MEN 86] MENGUC M.P., VISKANTA R., « Radiative Transfer in Axisymmetric Finite Cylindrical Enclosures », *ASME J. Heat Transfer*, vol. 108, p. 271-276, 1986.

- [RAZ 84] RAZZAQUE M.M., HOWELL J.R., KLEIN D.E., « Coupled Radiative and Conductive Heat Transfer in a Two Dimensional Rectangular Enclosure With Gray Participating Media Using Finite elements », *ASME J.Heat Transfer*, vol. 106, p. 613-619, 1984.
- [SAK 96] SAKAMI M., CHARRETTE A., LE DEZ V., « Application de la méthode des ordonnées discrètes au transfert radiatif dans un milieu bidimensionnel gris à géométrie complexe », *Rev. Gén. Therm.*, vol. 35, p. 83-94, 1996.
- [SEU 90] SEUNG WOOK BAEK, TAIK YOUNG KIM, « The conductive and Radiative Heat Transfer in Rectangular Enclosure Using the Discrete Ordinates Method », *Proceedings 5th Int. Heat Transfer Conference*, 9-24 August, Jerusalem, Israel, 1990.
- [THU 92] THURGOOD C.P., A critical evaluation of the discrete ordinates method using HEART and T_n quadrature, *PhD Thesis*, Department of Chemical Engineering, Queen's University, Kingston, 1992.
- [TRU 78] TRUELOVE J. S., Evaluation of a Multi-Flux Model for Radiative Heat Transfer in Cylindrical Furnaces, HTFS Rept. RS230, May 1978.
- [VAI 96] VAILLON R., LALLEMAND M., LEMMONIER D., « Radiative-Conductive Heat Transfer in curvilinear coordinates by the Discrete Ordinates Method », *Eurotherm Seminar 36, Poitiers-Futuroscope*, Ed. Elsevier, Paris, 1996.
- [VAI 97] VAILLON R., « Méthodes numériques en rayonnement thermique – la Méthode des Ordonnées Discrètes », *Cours Version 1*, juin 1997.