
Un algorithme de calcul de structures élastoplastiques pour l'identification des lois de comportement des matériaux

Hédi Bel Hadj Salah* — François Sidoroff**
Abdelwaheb Dogui*

* Ecole nationale d'ingénieurs de Monastir, Laboratoire de mécanique des solides,
Rue Ibn El Jazzar, 5019 Monastir, Tunisie
Hedi.BelHadjSalah@anim.rnu.tn

** Ecole Centrale de Lyon, Laboratoire de tribologie et dynamique des systèmes,
36 avenue Guy de Collongue - BP 163 - F-69131 Ecully cedex

RÉSUMÉ. Pour identifier les modèles de comportement de matériaux, on fait de plus en plus appel à des essais non homogènes. Pour analyser ces essais, on effectue un calcul de structure par éléments finis. On présente dans cet article un algorithme de calcul de structure élastoplastique n'utilisant pas de matrice tangente. Ce qui permet de découpler presque complètement la partie structure élastique de la partie loi de comportement plastique. Ceci rend l'algorithme proposé bien adapté aux problèmes d'identification de lois de comportement. On présente dans ce contexte un exemple modèle d'utilisation de cet algorithme pour l'identification du coefficient de Lankford, dans un modèle à isotropie transversale, à partir de l'essai de traction plane.

ABSTRACT. Non homogenous tests are successfully used to identify constitutive models of material behaviour. Finite elements methods can be considered to analyse these tests. This paper presents a finite elements algorithm solving a non-linear elastoplastic problem without use of the well-known tangent matrix. Thus the computation of the plastic and elastic part are almost completely uncoupled. The proposed algorithm is well adapted to the identification of constitutive model. As an example, the Lankford coefficient, for a transversal isotropic model, is identified combining the plane tensile test and our algorithm.

MOTS-CLÉS : éléments finis, identification, élastoplasticité, traction plane.

KEYWORDS: finite element, identification, elastoplasticity, plane tensile test.

1. Introduction

Les développements récents et parallèles des outils de calcul non linéaires des structures et des modèles de comportement élastoplastiques posent avec une acuité de plus en plus forte le problème de l'identification de ces modèles, à partir des résultats expérimentaux. Si l'essai de traction simple reste, pour les matériaux solides, la référence, il ne suffit plus pour identifier le comportement de modèles de plus en plus raffinés. Les informations complémentaires proviennent souvent d'essais non homogènes [GEL 96] et [GAV 97].

Considérons par exemple les modèles de plasticité pour l'emboutissage. Le modèle de base couramment utilisé aujourd'hui est un modèle anisotrope (critère de Hill) avec écrouissage isotrope. Les procédures d'identification utilisent bien évidemment les essais de traction dans les axes et hors axes mais aussi les essais de traction plane et de gonflement hydraulique, voire de cisaillement. Or, ces trois derniers essais (comme d'ailleurs l'essai de traction hors axes réalisé sans précaution sur l'accrochage des éprouvettes [BOE 84]) sont des essais non homogènes. Certes des efforts sont réalisés pour optimiser l'homogénéité. Il n'en reste pas moins que, si ces essais sont fréquemment dépouillés comme s'ils étaient homogènes, ce n'est là qu'une première approximation.

L'exploitation de ces essais exige en fait le couplage avec un calcul de structure et doit reposer sur la combinaison d'un code de calcul et d'une règle d'optimisation. Par rapport aux situations classiques en calcul de structure, ce calcul présente les spécificités suivantes :

- seul nous intéresse la réponse globale force-déplacement de la structure. C'est en effet elle qui sera comparée à l'expérience. Le détail de la répartition locale des contraintes n'importe guère. Ceci autorise l'utilisation de maillages relativement grossiers ;

- ces calculs devront, par contre, être répétés un certain nombre de fois dans la procédure itérative d'optimisation ;

- il est souhaitable, si l'on ne veut pas limiter abusivement l'application, que le programme soit très versatile quant à la loi de comportement plastique. La loi élastique pose moins de problème et sera en général connue par ailleurs.

Nous proposons ici une approche éléments finis spécifique adaptée à ces exigences. La caractéristique majeure de cette approche est de réduire l'intégration spatiale à un calcul élastique qui, en petites déformations, peut être réalisé une fois pour toutes, et qui réduit la structure à un système plastique discret qui peut ensuite être traité par un algorithme approprié qui sera, lui, appliqué de manière répétitive.

L'objet de cet article est de présenter cette approche, directement issue de la méthode dite d'homogénéisation discrète [FEN 95], et d'illustrer son application sur un exemple académique portant sur l'utilisation de l'essai de traction plane pour l'identification d'un modèle à isotropie transverse. L'approche actuelle est limitée aux petites déformations.

2. Problème continu

2.1. Formulation du problème

On s'intéresse au calcul d'une structure élastoplastique occupant un domaine Ω (ouvert borné de IR^2 ou IR^3) soumis à un déplacement imposé U sur une partie Γ_u de sa frontière et libre de contrainte sur la partie complémentaire. ($\Gamma = \Gamma_f \cup \Gamma_u$, Γ_u est de mesure strictement positive). Dans toute la suite de ce travail, U est supposé de la forme :

$$U(x, t) = \sum_k U_k(t) d_k(x) \quad x \in \Gamma_u \quad [1]$$

où le champ $d_k(x)$ est fixé tandis que les déplacements généralisés $U_k(t)$, variables de commande de la structure, varient au cours du temps définissant aussi le chargement.

Le calcul élastoplastique d'une telle structure s'effectue d'une manière incrémentale : partant d'un état d'équilibre sous un chargement U , déterminer l'état d'équilibre sous le chargement $U+dU$.

Pour une structure élastoplastique avec écrouissage isotrope, un état d'équilibre est défini par un champ de déplacement $u(x)$, un champ de contrainte $\sigma(x)$, un champ de déformation $\varepsilon(x)$, un champ de déformation plastique $\varepsilon^p(x)$ et un champ de variable interne d'écrouissage $\alpha(x)$, définis sur Ω ($x \in \Omega$) vérifiant, en l'absence des forces volumiques, les conditions d'équilibre :

$$\operatorname{div} \sigma = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad [2]$$

les conditions aux limites (n normale extérieur) :

$$\sigma \cdot n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_f \quad [3]$$

$$u = U = \sum_k U_k d_k \quad \text{sur } \Gamma_u \quad [4]$$

la relation de compatibilité :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \quad [5]$$

et la loi de comportement qui combine la loi élastique (A tenseur d'élasticité)

$$\sigma = A(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad [6]$$

et la loi d'évolution plastique que nous explicitons plus loin.

2.2. Problème élastique et problème résiduel

Si le champ de déformation plastique $\varepsilon^p(x)$ est connu et figé, il s'agit là d'un problème élastique avec contraintes résiduelles, problème classique qu'il est commode de décomposer en deux.

2.2.1. Problème élastique P1 ($\varepsilon^p(x) = 0$)

Trouver un champ de déplacement u , un champ de contraintes σ et un champ de déformation ε , définis sur Ω , vérifiant [2], [3], [4], [5] et la loi élastique $\sigma = A\varepsilon$. Ce problème est un problème classique d'élasticité linéaire. Il admet une solution unique définie par un champ de contrainte, noté $\sigma^e(x; U_k)$ et un champ de déplacement, noté $v(x; U_k)$. En notant s_k et χ_k respectivement, le champ des contraintes et le champ des déplacements solutions de (P1) pour $U = d_k$, ces deux champs s'écrivent sous la forme :

$$\sigma^e(x; U_k) = \sum_k U_k s_k(x), \quad [7]$$

et

$$v(x; U_k) = \sum_k U_k \chi_k(x). \quad [8]$$

2.2.2. Problème résiduel P2 ($U_k = 0$)

Trouver, pour un champ de déformation résiduelle donné $\varepsilon^p = \varepsilon^p(x)$, un champ de déplacement u , un champ de contraintes σ et un champ de déformation ε , définis sur Ω , vérifiant [2], [3], [5], [6] et les conditions aux limites homogènes :

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_u \quad [9]$$

Le problème (P2) est un problème élastique à contrainte résiduelle. Pour ε^p suffisamment régulier, le problème (P2) admet une solution unique [DUV 90]. Cette solution est linéaire par rapport à ε^p et ne dépend que de la géométrie de la structure et de ses propriétés élastiques. On désignera la solution en contrainte et en déplacement de (P2) par respectivement $\sigma^r(\varepsilon^p)$ et $w(\varepsilon^p)$.

La solution du problème complet s'écrit donc finalement sous la forme suivante :

$$u = \sum_k U_k \chi_k + w(\varepsilon^p) \quad [10]$$

et

$$\sigma = \sum_k U_k s_k + \sigma^r(\varepsilon^p). \quad [11]$$

Pratiquement, le calcul s'effectuera classiquement à partir de la formulation variationnelle du problème élastique défini par les relations [2], [3], [4], [5] et [6].

Trouver $u \in V_{ad}$ vérifiant :

$$a(u, v-u) = l(v-u) \quad \forall v \in V_{ad} \tag{12}$$

où

$$a(u, v) = \int_{\Omega} A \varepsilon(u) \varepsilon(v) d\Omega \tag{13}$$

$$l(v) = \int_{\Omega} A \varepsilon^p \varepsilon(v) d\Omega \tag{14}$$

et V_{ad} est l'espace des champs cinématiquement admissibles :

$$V_{ad} = \{v \in IR^n, v_i \in H^1(\Omega), \text{ et } v = U \text{ sur } \Gamma_u \}.$$

2.3. Relation forces-déplacements

Les forces généralisées P_k associées aux déplacements δU_k s'obtiennent en écrivant le travail virtuel des efforts extérieurs :

$$\delta W^* = \int_{\Gamma_u} \sigma n \delta U d\Gamma = \sum P_k \delta U_k \tag{15}$$

où

$$P_k = \int_{\Gamma_u} d_k \sigma n d\Gamma \tag{16}$$

En substituant dans l'expression [16] le champ de contraintes σ donné par la relation [11], on obtient :

$$P_k = \sum U_l \int_{\Gamma_u} d_k s_l n d\Gamma + \int_{\Gamma_u} d_k \sigma^r n d\Gamma = \sum K_{kl} U_l + P_k^0 \tag{17}$$

avec :

$$K_{kl} = \int_{\Gamma_u} d_k s_l n d\Gamma \quad \text{et} \quad P_k^0 = \int_{\Gamma_u} d_k \sigma^r n d\Gamma \tag{18}$$

Par utilisation de la formule de green on peut aussi écrire :

$$K_{kl} = \int_{\Omega} s_l \varepsilon(\chi_k) d\Omega = a(\chi_k, \chi_l) \quad \text{et} \quad P_k^0 = \int_{\Omega} \sigma^r (\varepsilon^p) \varepsilon(\chi_k) d\Omega$$

La relation [17] exprime la force généralisée en fonction du déplacement imposé. C'est cette relation qui permet de donner, une fois déterminée l'évolution des déformations plastiques, la courbe forces-déplacements. C'est le calage de cette courbe aux résultats expérimentaux qui permettra l'identification.

2.4. Le problème élastoplastique

On peut réécrire notre problème sous la forme suivante : connaissant $u, \sigma, \varepsilon, \varepsilon^p$ et α vérifiant les relations [2] à [6], trouver pour un incrément de charge dU donné, les incréments $d\sigma, d\alpha$ et $d\varepsilon^p$ vérifiant d'une part :

$$d\sigma = \sum_k dU_k s_k + \sigma'(d\varepsilon^p) \tag{19}$$

et

$$du = dv + w(d\varepsilon^p). \tag{20}$$

et, d'autre part, en chaque point la loi d'évolution plastique reliant $d\sigma, d\varepsilon^p$ et $d\alpha$ (et éventuellement dt dans le cas d'une loi viscoplastique). L'intérêt de cette formulation tient au fait que tout le problème de structure est résumé dans la formule [19] et est donc obtenu par un calcul purement élastique. La composante dissipative de la loi de comportement n'apparaît que localement en chaque point.

Si l'on considère par exemple un modèle standard à écrouissage isotrope qui nous intéresse ici, cette loi d'évolution s'écrit :

$$\bar{f}(\sigma, \alpha) = f(\sigma) - \gamma(\alpha) \leq 0 \tag{21}$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\alpha} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad \dot{\alpha} \geq 0 \tag{22}$$

$$si \bar{f} = 0 \quad \dot{\alpha} \geq 0 \quad \dot{\bar{f}} \leq 0 \quad \dot{\alpha} \dot{\bar{f}} = 0 \tag{23}$$

où \bar{f} est une fonction seuil et $\gamma(\alpha)$ la fonction d'écrouissage associée. L'écriture de la condition de consistance $d\bar{f} = 0$ compte tenu de [19] donne en chaque point :

$$\left(\sum_k dU_k \frac{\partial f}{\partial \sigma} : s_k \right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma} : \sigma'(d\alpha \frac{\partial f}{\partial \sigma}) + \frac{\partial f}{\partial \alpha} : d\alpha = 0 \tag{24}$$

On en tire en chaque point la valeur de $d\alpha$ puis de $d\mathcal{E}^p$. Ainsi formulée, l'approche proposée résout un problème de structure élastique unique et intègre localement en chaque point la loi d'évolution plastique.

3. Discrétisation du problème

3.1. Opérateurs de localisation

Dans une formulation primale, l'ouvert Ω sera discrétisé par éléments finis. On écrira donc :

$$u(x) = \sum_I u^I \varphi^I(x) \tag{25}$$

Cette discrétisation est supposée telle que le champ de déformation reste constant sur chaque élément E_a ($a = 1, n_E$). Ceci limite l'approche aux éléments de type P1. L'extension à d'autres types d'élément peut être envisagée, mais nous n'en parlerons pas ici.

$$\varepsilon_{ij}^a(x) = \sum_I u^I \Phi_{ij}^{Ia}(x) \text{ si } x \in E_a \tag{26}$$

pour

$$\Phi_{ij}^I = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_i^I}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j^I}{\partial x_i} \right) \tag{27}$$

Il en résulte, par écriture de la loi de comportement pour un matériau supposé homogène, que toutes les autres variables σ_{ij} , \mathcal{E}_{ij}^p et α seront aussi constantes sur chaque élément. En particulier :

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^{pa} \text{ si } x \in E_a \tag{28}$$

Le problème élastique discrétisé conduira donc à :

$$\sigma_{ij}^a(x) = \sum_k U_k S_{ij}^{ak} + \sum_b S_{ijpq}^{ab} \varepsilon_{pq}^{pb} \tag{29}$$

où :

- $i, j = 1, 2, 3$ représentent les composantes des vecteurs de l'espace physique,
- $a, b = 1, 2, \dots, n_E$ représentent les numéros d'éléments,
- $k = 1, N$ est l'indice du déplacement généralisé.

L'équivalent discret de la formulation variationnelle donnée par les relations [12] à [14] s'écrit en utilisant la formule [26] sous la forme suivante.

Trouver $u \in V_{adh}$ vérifiant :

$$a_h(u, v - u) = l_h(v - u) \quad \forall v \in V_{adh} \tag{30}$$

où

$$a_h(u, v) = \sum_a \sum_l \sum_j A v_a u^l v^j \Phi^{la} \Phi^{ja} \tag{31}$$

$$l_h(v) = \sum_a \sum_j A v_a \varepsilon^{pa} v^j \Phi^{ja} \tag{32}$$

v_a est le volume de l'élément a et V_{adh} est le sous-espace de V_{ad} engendré par les fonctions bases ϕ^j .

3.2. Algorithme de calcul élastoplastique

La condition de consistance sur un élément a s'écrit :

$$df^a = \frac{\partial f^a}{\partial \sigma^a} : d\sigma^a + \frac{\partial f^a}{\partial \alpha^a} : d\alpha^a = 0 \tag{33}$$

A partir de la relation [29] et pour $\varepsilon^0 = d\varepsilon^p$ on peut écrire :

$$d\sigma_{ij}^a(x) = \sum_k dU_k s_{ij}^{ak} + \sum_b S_{ijmn}^{ab} d\varepsilon_{mn}^{pb} \tag{34}$$

où dU_k est imposé et $d\varepsilon^{pa}$ doit satisfaire la loi d'écoulement plastique :

$$d\varepsilon^{pa} = d\alpha \frac{\partial f^a}{\partial \sigma^a} . \tag{35}$$

La substitution de $d\varepsilon^{pa}$ dans [34] et de $d\sigma_{ij}^a$ dans [33] donne finalement le système linéaire suivant :

$$M \cdot d\alpha = N \tag{36}$$

où

$$M_{ab} = \frac{\partial f^a}{\partial \sigma^a} : S^{ab} : \frac{\partial f^b}{\partial \sigma^b} + \frac{\partial f^a}{\partial \alpha^a} \tag{37}$$

et

$$N_a = -\frac{\partial f^a}{\partial \sigma^a} : \sum_k dU_k S^{ak} \quad [38]$$

Calculs élastiques (éléments de types P1)

1. Calcul des fonctions φ , Φ et S

$$u(x) = \sum_I u^I \varphi^I(x)$$

$$\varepsilon_{ij}^a(x) = \sum_I u^I \Phi_{ij}^{Ia}(x) \text{ si } x \in E_a$$

$$\sigma_{ij}^a(x) = \sum_k U_k S_{ij}^{ak} + \sum_b S_{ijpq}^{ab} \varepsilon_{pq}^{pb}$$

Calculs plastiques

2. Pour un état d'équilibre et dU_k donnés, calcul de M , N , $d\alpha$ et $d\varepsilon^p$

$$M_{ab} = \frac{\partial f^a}{\partial \sigma^a} : S^{ab} : \frac{\partial f^b}{\partial \sigma^b} + \frac{\partial f^a}{\partial \alpha^a}$$

$$N_a = -\frac{\partial f^a}{\partial \sigma^a} : \sum_k dU_k S^{ak}$$

$$d\alpha \text{ solution de } M \cdot d\alpha = N$$

$$d\varepsilon^{pa} = d\alpha \frac{\partial f^a}{\partial \sigma^a}$$

3. Mise à jour du nouvel état d'équilibre et retour à 2 (début du calcul plastique)

Tableau 1. Cheminement des calculs

La résolution de ce système linéaire donnera $d\alpha^a$ et donc $d\varepsilon^{pa}$. Il faut toutefois vérifier que les $d\alpha^a$ sont positifs ou nuls. Si l'un d'entre eux devient négatif, cela signifie la décharge élastique de l'élément correspondant et il convient de refaire le calcul en désactivant cet élément. Pratiquement, on introduit dans cet algorithme

explicite quelques éléments implicites. Notamment, nous avons constaté qu'il était préférable de prendre $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$ en $\sigma + d\sigma^e$ et de résoudre $f(\sigma + d\sigma) = 0$ au lieu de $df(\sigma + d\sigma) = 0$. En fait, il s'agit d'intégrer un système plastique discret. Nous nous sommes limités ici à un algorithme rudimentaire. La performance de la méthode proposée dépend évidemment de la qualité de cet algorithme d'intégration temporelle et il sera essentiel par la suite d'améliorer cet aspect.

Un autre problème inhérent à la discrétisation de type P1 est la condition d'incompressibilité plastique, qui en général rigidifie beaucoup trop fortement le problème. Ce problème est réel en déformation plane mais les applications que nous visons sont de type contraintes planes où cette condition disparaît.

3.3. Calcul des efforts

La relation [16] exprime les forces généralisées P_k associées aux déplacements U_k . En utilisant la formule de Green on peut aussi écrire :

$$P_k = \int_{\Omega} \varepsilon(\chi_k) \sigma d\Omega \quad [39]$$

La formule [29] et la discrétisation ci-dessus permettent alors d'écrire K_{kl} et P^0_k apparaissant à la relation [17] sous les formes suivantes :

$$K_{kl} = \sum_a v_a \varepsilon^a(\chi_k) s^{al} \quad [40]$$

et

$$P^0_k = \sum_a \sum_b v_a S^{ab} \varepsilon^{pb} \varepsilon^a(\chi_k) \quad [41]$$

4. Un problème d'identification modèle

4.1. Position du problème

A titre d'exemple, nous allons discuter l'utilisation de cet outil sur un modèle très simple mais représentatif des problèmes que pose l'identification des modèles plastiques pour l'emboutissage. Dans l'état actuel des simulations, le modèle de base est un modèle anisotrope (critère de Hill) et écrouissage isotrope [BEN 90]. Nous nous limiterons ici au cas d'un modèle isotrope transverse dans le plan de la tôle. Ce modèle est particulièrement indiqué pour les calculs de prédétermination. En effet pour un calcul dominé par les effets de membrane, ce modèle évite les problèmes liés à la plasticité anisotrope (rotation du repère d'anisotropie, etc.) tout en prenant

en compte un coefficient de Lankford r . En contraintes planes, la contrainte équivalente ne fait alors intervenir qu'une seule constante, le coefficient de Lankford :

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \frac{2r}{1+r} \sigma_1 \sigma_2 + \frac{2(1+2r)}{1+r} \sigma_{12}^2} \quad [42]$$

Le modèle s'écrit alors classiquement :

$$\bar{f}(\sigma, \bar{\varepsilon}) = \bar{\sigma} - \gamma(\bar{\varepsilon}) \quad [43]$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \quad [44]$$

où la variable d'érouissage isotrope α s'identifie à la déformation équivalente cumulée de Hill :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{1+r}{1+2r} \left[(1+r)(\dot{\varepsilon}_1^2 + \dot{\varepsilon}_2^2) + 2r\dot{\varepsilon}_1\dot{\varepsilon}_2 + 2\dot{\varepsilon}_{12}^2 \right]} \quad [45]$$

La démarche classique consiste alors à identifier la fonction d'érouissage $\gamma(\bar{\varepsilon})$ sur l'essai de traction simple et à obtenir r à partir d'un autre essai. L'essai dit de traction plane (traction sur éprouvette large qui empêche la contraction latérale $\varepsilon_2 = 0$) peut être considéré comme un second essai. $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$ ont classiquement été normalisés pour coïncider avec la contrainte et la déformation en traction simple. On écrit alors :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [46]$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad [47]$$

$$\bar{\varepsilon} = \sqrt{\frac{(1+r)^2}{1+2r}} \varepsilon \quad [48]$$

et

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1 + 2r}{(1 + r)^2}} \sigma . \tag{49}$$

L'identification de la courbe expérimentale $\sigma(\epsilon)$ à la courbe déduite de ces relations et de la fonction $\bar{\sigma} = \gamma(\bar{\epsilon})$, identifiée en traction simple, permet alors la détermination de r (pratiquement, ce coefficient pourrait également être déterminé directement en tant que coefficient de Lankford dans un essai de traction simple, le modèle ainsi identifié donne, toutefois, de très mauvais résultats pour l'écroutissage sur d'autres trajets de chargement. Il faut alors utiliser un modèle de plasticité non associée)[BEN92].

Toutefois, cette démarche considère l'essai de traction plane comme un essai homogène, ce qui n'est qu'une approximation. Nous nous proposons ici de montrer comment l'exploitation de nos calculs permet de corriger cette approximation.

4.2. Description des essais

On considère une plaque rectangulaire symétrique de côtés $2l \times 2b$ sollicitée en contraintes planes. La figure 1 représente un quart de structure et on impose sur les 4 cotés les conditions aux limites suivantes :

- AB $y = 0 \quad u_y = 0 \quad \sigma_{xy} = 0$ (symétrie)
- AD $x = 0 \quad u_x = 0 \quad \sigma_{xy} = 0$ (symétrie)
- BC $x = l \quad u_x = U \quad u_y = 0$ (traction)
- DC $y = b \quad \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0$ (bord libre)

Dans toute la suite ce problème sera appelé essai de traction frétée et on va faire varier :

- la loi d'écroutissage $\gamma(\bar{\epsilon})$ pour laquelle nous utilisons 3 lois :
 - plasticité parfaite $\gamma = \gamma_0$,
 - écroutissage linéaire $\gamma = \gamma_0 + k \bar{\epsilon}$,
 - loi de Ludwick $\gamma = \gamma_0 + k \bar{\epsilon}^n \quad (n = 0.2)$;
- le coefficient de Lankford r ;
- le rapport l/b .

On doit notamment retrouver la traction simple pour $l/b \rightarrow \infty$ et la traction plane pour $l/b \rightarrow 0$. Ces deux essais homogènes admettent une solution analytique classique mais on peut aussi les obtenir par un problème aux limites en modifiant les conditions sur BC et DC.

Traction simple :	BC	u _x = U	σ _{xy} = 0		DC	σ _{xy} = σ _{yy} = 0
Traction plane :	BC	u _x = U	u _y = 0		DC	σ _{xy} = 0, u _y = 0

Ceci nous a permis de valider notre calcul.

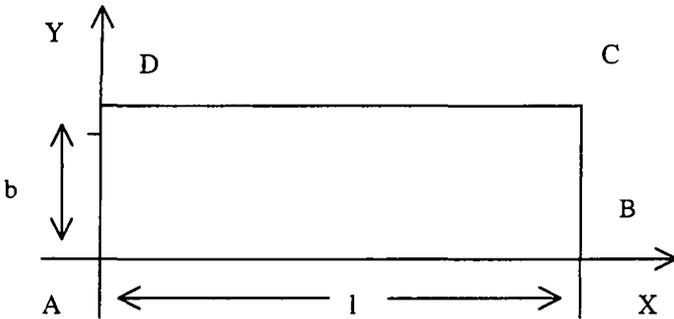


Figure 1. Géométrie de la structure étudiée

Dans toute la suite, les relations forces déplacements seront normalisées en portant en abscisse la déformation moyenne U/l et en ordonnée la contrainte moyenne $P/(b.e)$ où e est l'épaisseur de la plaque.

Les résultats ont été représentés aux figures 2.a, 2.b et 2.c pour 3 cas d'écroutissage. On remarque, en particulier, le comportement en traction plane et plasticité parfaite pour lequel le début de plastification ne correspond pas à la plasticité limite.

Ce pseudo-écrouissage, classique pour les structures, ne résulte toutefois pas ici d'une plastification progressive. L'essai est homogène et toute l'éprouvette se plastifie au même moment. Il provient en fait de ce qu'en élasticité $\sigma_2 = \nu\sigma_1$ tandis qu'à la limite plastique $\sigma_2 = H\sigma_1$ (H coefficient de Hill : $H = 1/2$ en isotrope).

C'est cette évolution du rapport σ_2/σ_1 que traduit le pseudo-écrouissage observé. On remarque également cet effet, quoique moins marqué, sur le modèle d'écrouissage linéaire et il est également présent quoique non visible avec la loi de Ludwick. La règle de double homothétie (relation [48] et [49]) n'est pas valable en élastoplasticité.

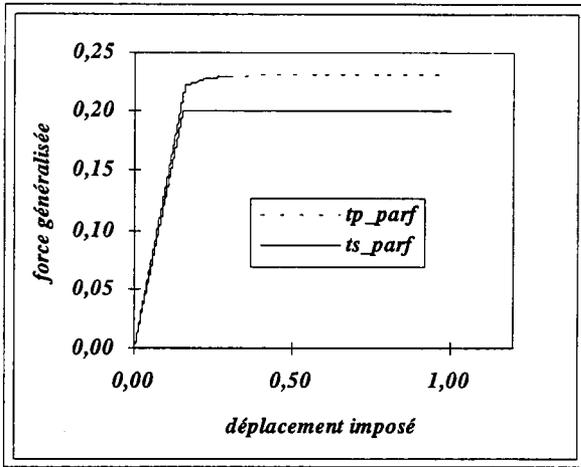


Figure 2.a. Evolution de la force généralisée en fonction du déplacement imposé pour les essais de traction simple et de traction plane en plasticité parfaite ($r = 1$, $b/l = 1$)

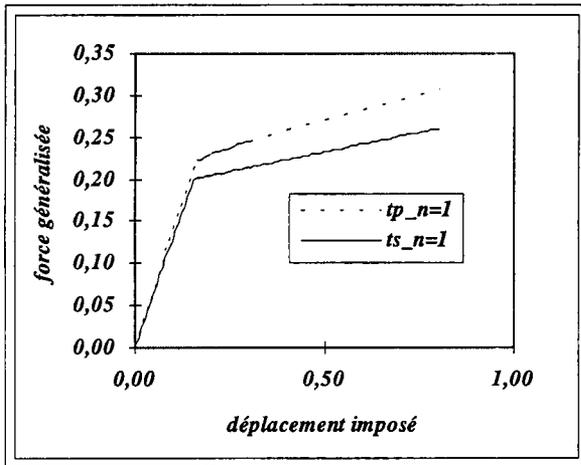


Figure 2.b. Evolution de la force généralisée en fonction du déplacement imposé pour les essais de traction simple et de traction plane et pour un écrouissage linéaire ($r = 1$, $b/l = 1$)

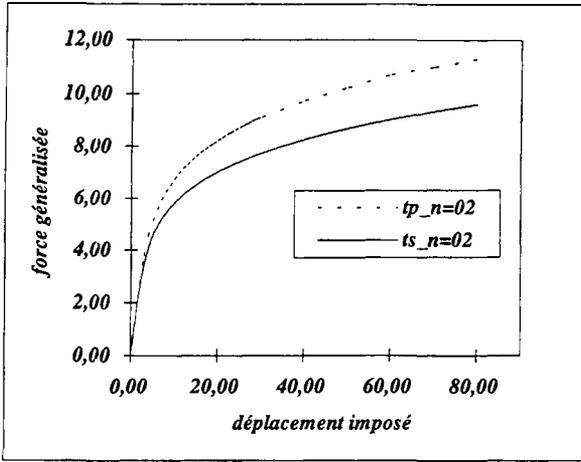


Figure 2.c. Evolution de la force généralisée en fonction du déplacement imposé pour les essais de traction simple et de traction plane et pour un écrouissage isotrope (loi de Ludwick $n = 0.2$, $r = 1$, $b/l = 1$)

5. Application

5.1. Influence du maillage

Pour évaluer l'influence du maillage on compare dans le cas $b/l = 1$ et $r = 1$ divers maillages.

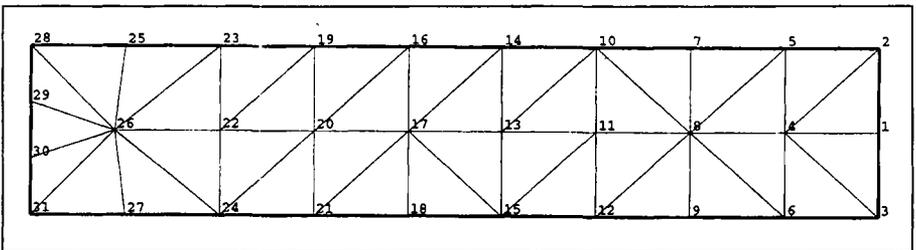


Figure 3. Exemple de maillage utilisé ($l = 5$ et $b = 1$)

Les réponses correspondantes sont tracées pour les trois modèles d'écrouissage aux figures 4.a, 4.b, et 4.c. On constate que, conformément à ce qui a été dit en introduction, on obtient des résultats très satisfaisants avec des maillages relativement grossiers : les courbes obtenues pour 32 et 78 éléments sont pratiquement indiscernables dans les cas plausibles d'écrouissage. Le maillage à 32 éléments s'avère donc, aux fins d'identification, largement suffisant. Il convient

aussi de remarquer que les calculs faits pour les trois lois d'écroissage s'appuient sur le même calcul élastique qui sera donc fait une fois pour toutes ; seule la partie plastique change. Il faut aussi remarquer que la valeur $b/l = 1$ a été choisie pour amplifier l'influence du maillage : la figure 4.d , tracée pour $b/l = 5$, valeur représentative de la géométrie des essais de traction plane tels qu'ils sont réalisés, montre clairement que dans ce cas on pourrait sans doute se satisfaire d'un maillage encore plus grossier.

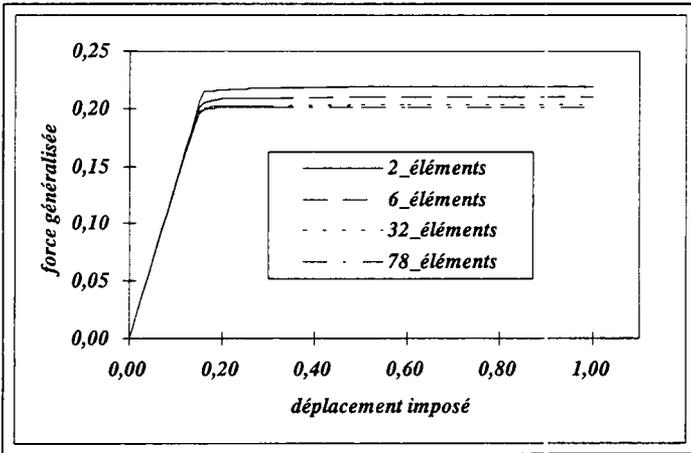


Figure 4.a. Evolution de la force généralisée en fonction du déplacement imposé pour un essai de traction frettée et pour différents maillages (plasticité parfaite, $r = 1$, $b/l = 1$)

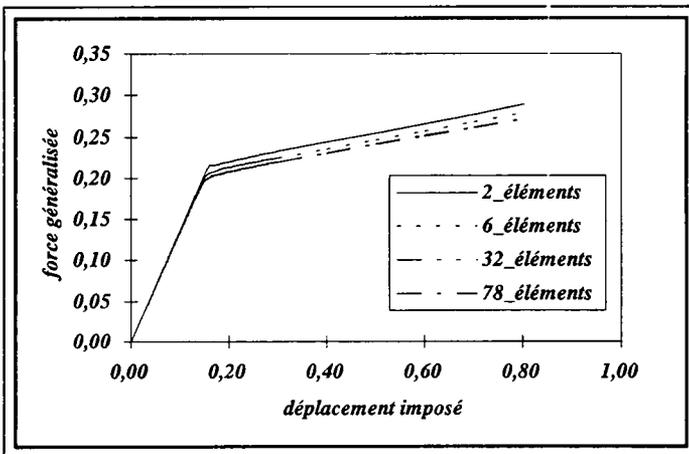


Figure 4.b. Evolution de la force généralisée en fonction du déplacement imposé pour un essai de traction frettée et pour différents maillages (écrouissage isotrope linéaire, $r = 1$, $b/l = 1$)

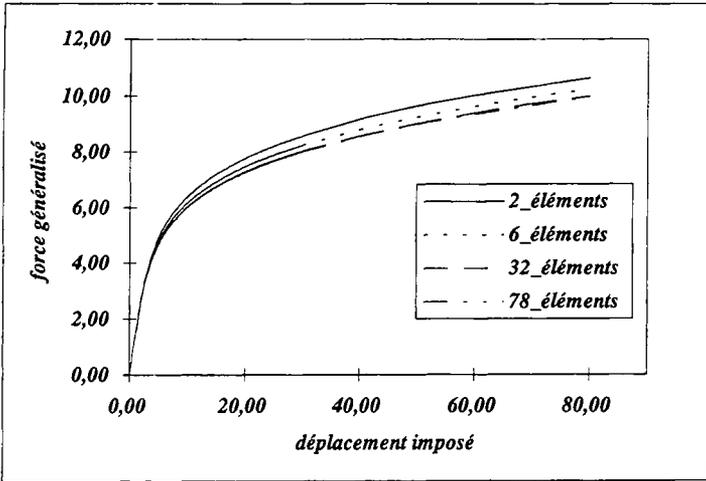


Figure 4.c. Evolution de la force généralisée en fonction du déplacement imposé pour un essai de traction frettée et pour différents maillages (loi de Ludwick $n = 0.2$, $r = 1$, $b/l = 1$)

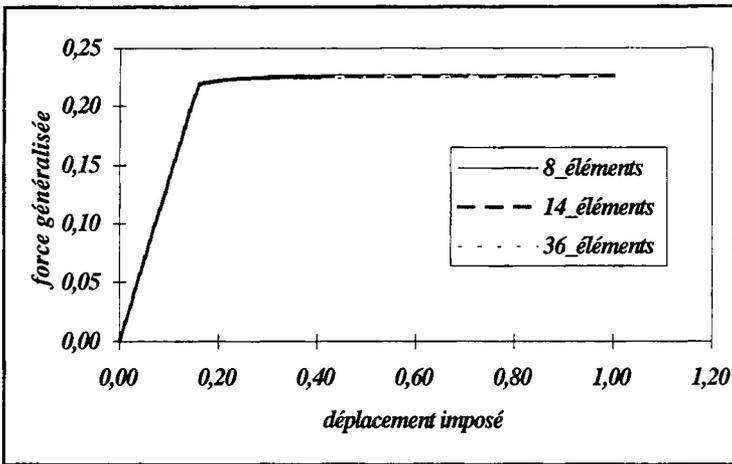


Figure 4.d. Evolution de la force généralisée en fonction du déplacement imposé pour un essai de traction frettée et pour différents maillages (plasticité parfaite, $r = 1$, $b/l = 5$)

En rapport plus direct avec le problème d'identification, cette dépendance du maillage est illustrée aux figures 5.a, 5.b et 5.c où l'on a représenté cette influence dans les 2 cas $b/l = 1$ et $b/l = 5$ sur trois caractéristiques susceptibles d'être utilisées pour l'identification :

- la pente élastique,
- le seuil de plastification,
- la contrainte limite en plasticité parfaite.

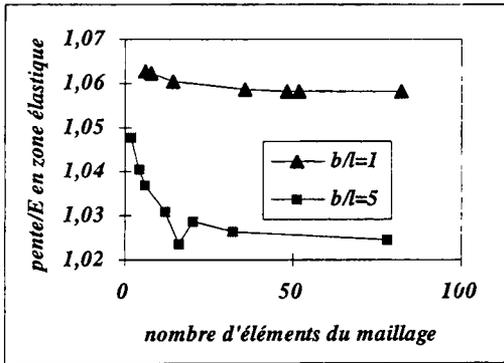


Figure 5.a. Pente/E en zone élastique en fonction de la finesse du maillage pour un essai de traction frettée en plasticité parfaite

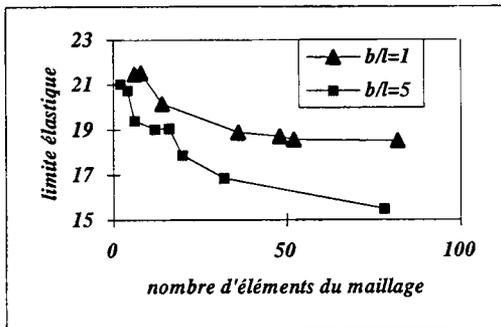


Figure 5.b. Début de la plastification en fonction de la finesse du maillage pour un essai de traction frettée en plasticité parfaite

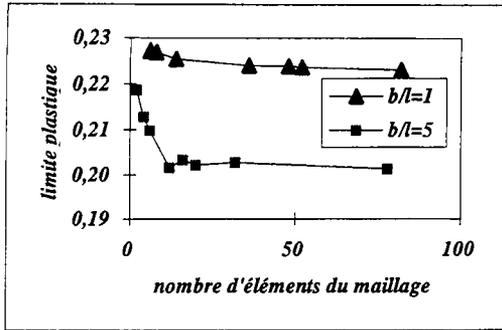


Figure 5.c. Valeur limite de la force généralisée en fonction de la finesse du maillage pour un essai de traction frettée en plasticité parfaite

5.2. Influence du rapport b/l

Nous nous limitons maintenant à des maillages à une trentaine d'éléments. Nous avons représenté aux figures 6.a, 6.b et 6.c, respectivement pour les trois cas d'écroutissage traités, et pour une valeur fixée $r = 1$: matériau isotrope, les courbes de réponse obtenues pour divers rapports b/l . La figure 6.d représente l'évolution de la valeur limite de la contrainte en fonction de b/l pour une plasticité parfaite.

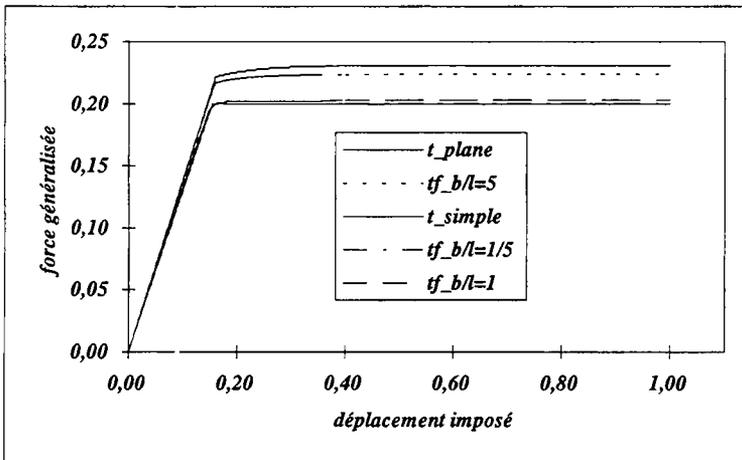


Figure 6.a. Evolution de la force généralisée en fonction du déplacement imposé pour les essais de traction simple, de traction plane et de traction frettée à différentes valeurs de b/l (plasticité parfaite, $r = 1$)

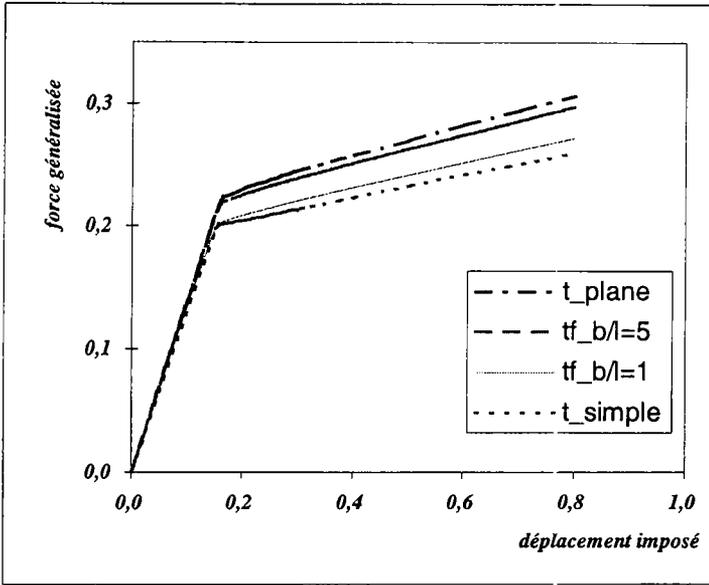


Figure 6.b. Evolution de la force généralisée en fonction du déplacement imposé pour les essais de traction simple, de traction plane et de traction frettée à différentes valeurs de b/l (écrouissage linéaire, $r = 1$)

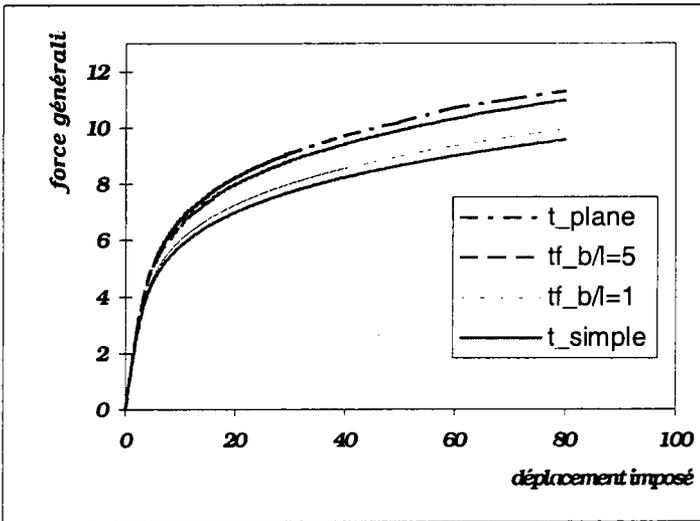


Figure 6.c. Evolution de la force généralisée en fonction du déplacement imposé pour les essais de traction simple, de traction plane et de traction frettée à différentes valeurs de b/l (loi de Ludwick $n = 0.2$, $r = 1$)

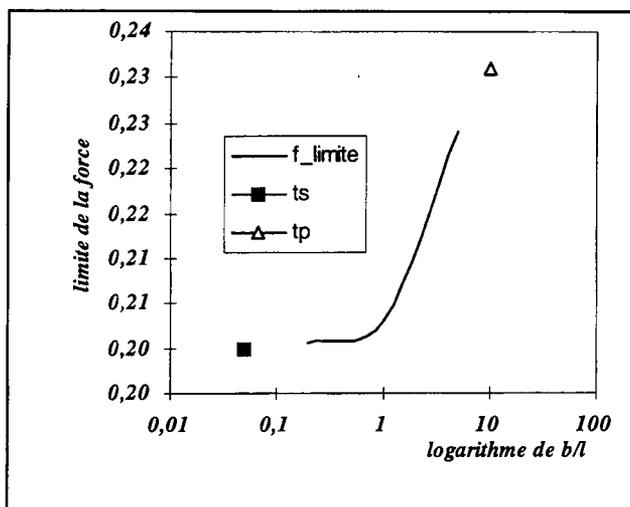


Figure 6.d. Valeur limite de la force généralisée en fonction du logarithme du déplacement imposé pour les essais de traction simple, de traction plane et de traction frettée à différentes valeurs de b/l (plasticité parfaite, $r = 1$)

On constate sur ces courbes, comme il était prévisible, qu'on obtient bien la traction simple pour $b/l \ll 1$ et la traction plane pour $b/l \gg 1$. La convergence n'est toutefois pas symétrique, alors que la courbe obtenue pour $b/l = 1/5$ approche déjà de très près la courbe de traction simple. Il n'en est pas de même en traction plane pour $b/l = 5$. Une correction prenant en compte la non-homogénéité de l'essai est nécessaire en traction plane, elle ne l'est pas en traction simple.

5.3. Identification de r

Nous pouvons maintenant aborder l'identification de r . Partant de la fonction $\gamma(\bar{\epsilon})$, identifiée en traction simple, un calcul de la réponse pour le rapport b/l correspondant à l'éprouvette de traction plane ($b/l = 5$ dans notre exemple) permettra de tracer la courbe correspondante pour différentes valeurs de r . Ces courbes sont représentées aux figures 7.a, 7.b et 7.c pour les trois lois d'écroutissage considérées. L'identification à l'expérience donnera alors la valeur de r . Pratiquement, on cherche à minimiser une erreur quadratique entre les deux courbes et une méthode de dichotomie simple et rapidement convergente donnera r . Remarquons, là encore, que tous ces calculs ne concernent que la loi plastique locale. Toute la partie élastique est contenue dans les opérateurs du paragraphe 3.

Il convient toutefois de remarquer que notre calcul est académique car limité par deux restrictions :

- la forme rectangulaire simple de l'éprouvette. Ceci n'est pas un problème majeur, il suffira de mailler la géométrie réelle d'une éprouvette.
- l'hypothèse des petites transformations, évidemment inacceptables dans une perspective mise en forme. Nous travaillons à l'extension aux grandes transformations.

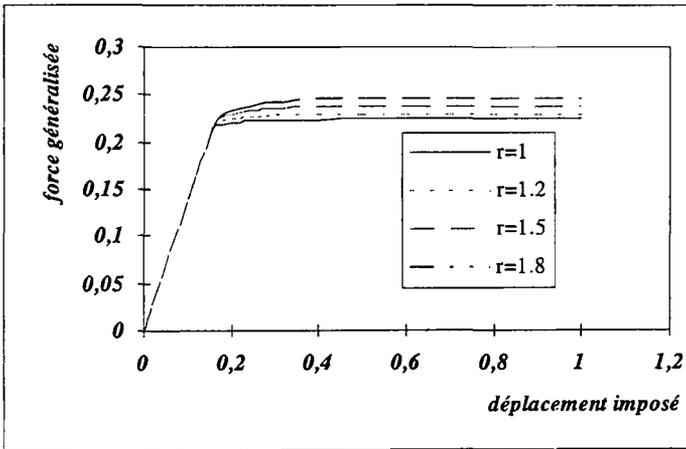


Figure 7.a. Evolution de la force généralisée en fonction du déplacement imposé pour les essais de traction frettée, pour différentes valeurs de r (plasticité parfaite, $b/l = 5$)

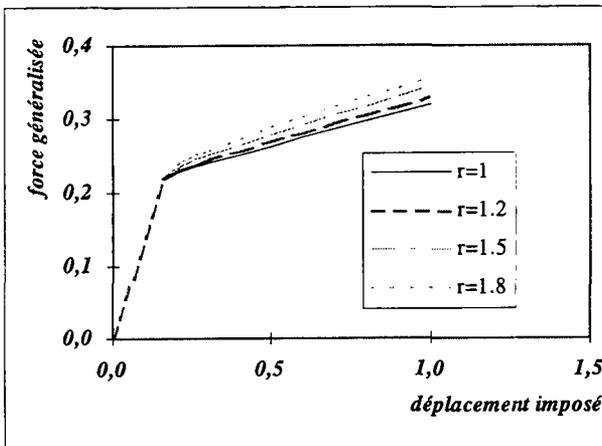


Figure 7.b. Evolution de la force généralisée en fonction du déplacement imposé pour les essais de traction frettée, pour différentes valeurs de r (écrouissage linéaire, $b/l = 5$)

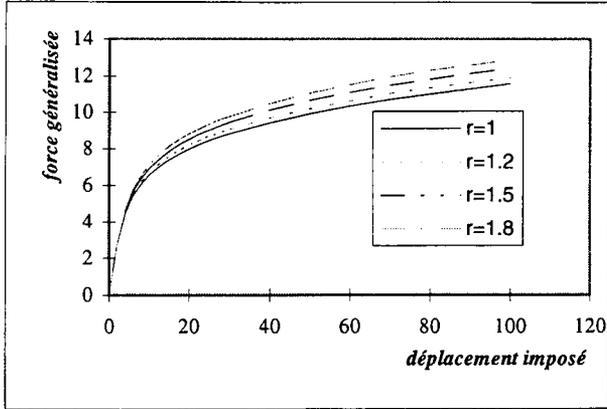


Figure 7.c. Evolution de la force généralisée en fonction du déplacement imposé pour les essais de traction frettée, pour différentes valeurs de r (loi de Ludwick $n = 0.2$, $b/l = 5$)

6. Conclusion

Un algorithme de calcul de structures élastoplastiques est présenté. Il permet de calculer la réponse élastoplastique d'une structure par un calcul purement élastique, en remplaçant la structure par un système plastique discret qui peut ensuite, selon la nature du modèle de plasticité utilisé, être intégré par une technique numérique adaptée. Cet algorithme semble particulièrement adapté au couplage avec l'expérience pour l'identification des modèles de comportement à partir d'essais non homogènes. Nous travaillons sur l'amélioration de l'algorithme d'intégration temporelle utilisé ainsi que sur la comparaison de l'approche proposée à d'autres méthodes d'identification.

7. Bibliographie

- [BEL 96] BEL HADJ SALAH H., SIDOROFF F. & DOGUI A., « Sur une nouvelle approche de calcul de structures élastoplastiques » *CIMASI'96*, Casablanca, Maroc, 14-16 novembre 1996.
- [BEN 90] BENCHOUIKH A., DOGUI A. & SIDOROFF F., « Critères de plasticité isotropes transverses en contraintes planes », *10^e Cong. Fr. Méc.*, Paris, 1990.
- [BEN 92] BENCHOUIKH A., Formulation et identification de loi de comportement pour tôles minces en emboutissage, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1992.
- [BOE 84] BOEHLER J. P. & EL AOUFI L., « Hétérogénéité des champs de contraintes et de déformations dans les matériaux anisotropes », Communication au 19^e colloque du

G.F.R., novembre 1984, in *Rhéologie de matériaux anisotrope*, p. 131-149, Cepadues Editions, 1986.

[DUV 90] DUVAUT, G., *Mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1990.

[FEN 95] FENNAN, A., Homogénéisation élastoplastique discrète, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, 1995.

[GAV 97] GAVRUS A., MASSONI E. & CHENOT J.L., « Identification du comportement rhéologique par analyse inverse », *Actes du 3^e coll. Nat. En calcul de structures*, Givens, 20-23 mai 1997.

[GEL 96] GELIN J.C. & GHOUATI O., « An inverse solution procedure for material parameters identification in large plastic déformations », *Com. Nume. methods. Eng*, vol. 12, p. 161-173, 1996.