

---

# Une méthode de pseudo-concentration pour la simulation 3D volumique du remplissage de moules d'injection

**Boussad Abbès\*** — **Rezak Ayad\*\*** — **Alain Rigolot\*\*\***

\* *Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Emballage et Conditionnement (ESIEC)  
Centre d'Etudes et de Recherche en Matériaux et Emballage (CERME)  
Esplanade Roland Garros BP 1029 – F-51686 Reims cedex 2  
boussad.abbes@univ-reims.fr*

\*\* *Université de Reims Champagne-Ardenne  
Groupe de Mécanique Matériaux et Structures (GMMS)  
Moulin de la housse, B.P. 1039 – F-51687 Reims cedex*

\*\*\* *Université Pierre et Marie Curie (PARIS VI)  
Laboratoire de Modélisation en Mécanique (LMM), UMR-CNRS n° 7607  
4 place Jussieu, Tour 66, 75252 Paris Cedex 05*

---

**RÉSUMÉ.** *Un algorithme permettant la simulation numérique 3D volumique du remplissage des moules d'injection par des polymères fondus est présenté. Les équations d'écoulement de fluides non-newtoniens sont résolues par la méthode des éléments finis avec une formulation mixte vitesse-pressure utilisant un mini-élément. Le suivi du front de matière est assuré à travers la résolution, par une technique de volume de contrôle, d'une équation de transport de la fonction pseudo-concentration. La capacité de l'algorithme proposé à simuler le remplissage de moules d'injection tridimensionnels est démontrée à travers des exemples d'écoulements et de géométries complexes.*

**ABSTRACT.** *A full 3D filling algorithm for injection moulding of molten polymers is presented. The non-Newtonian fluid flows governing equations are solved using a mixed velocity-pressure finite element formulation with a mini-element. To track the polymer front, a transport equation of a pseudo-concentration function is solved using a control volume technique. The ability of the proposed algorithm to simulate the filling of three-dimensional moulds is demonstrated through complicated flows and geometries examples.*

**MOTS-CLÉS :** *remplissage de moules 3D volumique, moulage par injection, méthode des éléments finis, méthode des volumes de contrôle, fonction de pseudo-concentration.*

**KEY WORDS:** *full 3D mould filling, injection moulding, finite element method, control volume method, pseudo-concentration function.*

---

## 1. Introduction

### 1.1. *La simulation numérique du moulage par injection : une nécessité incontournable*

Le procédé d'injection des polymères est une technologie de transformation qui a connu un développement extraordinaire depuis son apparition il y a plus d'un siècle. Actuellement, aucune industrie n'échappe à l'utilisation de ce procédé tant les techniques et les matériaux utilisés ne cessent d'évoluer. Malgré ces avancées significatives, une analyse technique révèle qu'il n'y a pas conceptuellement de grandes différences entre le procédé initialement breveté par John Wesley Hyatt et les méthodes actuelles [SCH 98]. Le procédé de base consiste toujours à transformer des matières plastiques en produits finis que l'on retrouve dans la vie courante. C'est un procédé par lequel un polymère à l'état fondu est injecté dans une cavité vide appelée empreinte pour obtenir la forme désirée. Le cycle du moulage par injection peut être divisé en trois phases physiques : le remplissage, le maintien et le refroidissement. La première phase est dynamique. Elle consiste à remplir le moule par le polymère fondu. Elle est suivie de la phase de maintien de la pression, pour compenser le retrait volumique dû à la variation de la densité du polymère au cours du refroidissement. Une fois le seuil d'injection solidifié, cette pression est éliminée et la pièce moulée reste dans le moule pour finir de refroidir, afin d'éviter des déformations excessives [AGA 96].

D'une manière symbolique, la fin du deuxième millénaire marquera sans doute un tournant dans le domaine de l'optimisation par simulation numérique des procédés technologiques de transformation des matières plastiques. La modélisation d'un écoulement de polymère fondu dans un moule d'injection, un métier récent qui devra évoluer dans une optique de rapprochement réaliste « Outils de simulation – Procédé » sans hypothèses simplificatrices, ne pourra en aucun cas être une affaire de la mécanique seule. Les codes de simulation du remplissage de moules d'injection par des polymères fondus sont devenus de nos jours de véritables outils métier d'aide à la conception de produits divers, alliant la science des polymères (physico-chimie, rhéologie, thermomécanique, ...) et les technologies de transformation.

La montée en puissance de nouveaux matériaux polymères ou bio-polymères explique la promotion et le développement de procédés de mise en œuvre nouveaux et complexes. En conséquence, une meilleure compréhension de l'interaction entre le matériau et son procédé de mise en œuvre ne peut être que bénéfique à tout industriel soucieux des exigences en matière de tolérance et de qualité des produits finis, en particulier :

– Le transformateur, devenu co-concepteur avec le mouliste, sous la pression de ses donneurs d'ordre, se fixe un objectif double : réaliser des produits finis, techniquement au point, qui répondent au cahier des charges, et maintenir la rentabilité de son activité.

– Le mouliste doit fournir un outillage de qualité rapidement opérationnel avec une garantie affichée de l'aspect du produit fini. Il doit ainsi effectuer une recherche d'optimisation de ses moules en utilisant des outils de simulation numérique.

– Le concepteur, qui utilise les outils de CAO et de simulation numérique, doit approcher au plus près la réalité, en fournissant une simulation du comportement thermomécanique et rhéologique de la matière plastique dans le moule et une action corrective prédictive de la CAO nécessaire au dimensionnement de l'outillage et au réglage des paramètres d'injection sur la presse à injecter.

– Sans toutefois oublier le chimiste qui est à l'origine de la matière première. Un outil de simulation numérique lui permet tout simplement de démontrer les capacités de son matériau.

L'outil de simulation numérique est devenu une nécessité incontournable et les quatre précédents acteurs de la filière plastique en sont ainsi tous bénéficiaires.

## 1.2. La simulation volumique : un outil d'aujourd'hui et de demain

On ne peut aborder le sujet de la simulation volumique sans parler de l'avancée importante, certes avec toutes ses limites, de la simulation surfacique. Cette dernière utilise une approche géométrique simplifiée, où la pièce est représentée par des coques et le système d'injection par des poutres. Les principaux codes de simulation de l'injection des thermoplastiques comme *Moldflow* (*Moldflow Co.*), *C-Mold* (*AC Technology*), *Strim-flow* (*Matra – Datavision*), *Ideas for Plastics* (*SDRC Co.*), *Fidap* (*Fluent Inc.*), *Fluidyn\_NS* (*Transoft International*) ou *Topflow* (*Systia*), utilisant cette approche, donnent une assez bonne prédiction de la phase dynamique de remplissage. Ces codes permettent de positionner les points d'injection pour obtenir un remplissage correct des empreintes, de maîtriser l'emplacement des lignes de soudure et de dimensionner correctement les canaux d'alimentation et les circuits de refroidissement du moule. Les phases de compactage et de refroidissement, le retrait et le gauchissement sont assez bien maîtrisés.

Compte tenu des hypothèses simplificatrices utilisées, ces logiciels ne prennent pas en compte les effets viscoélastiques, et ne tiennent pas compte de la solidification par couches successives du polymère, qui devient en fait un matériau multicouches. De nos jours, des procédés très prometteurs comme l'injection assistée par gaz et la co-injection présentent des effets tridimensionnels très marqués, qui ne peuvent être pris en compte à travers l'approche coque. Il s'agit pourtant de procédés qui commencent à trouver un réel écho auprès des industriels. Une simulation volumique serait utile et devrait progresser pour optimiser de tels procédés.

Des programmes de recherche en simulation 3D volumique d'écoulements de polymères dans les moules sont actuellement en cours de développement. Nous citons en particulier :

– Le programme *Moldflow* avec le module de remplissage *3D Flowcheck*. Celui-ci est intégré dans l'environnement de CAO de *Parametric Technology Co.*

- Le programme *C-Mold* « *Full 3D Simulation* », lancé au début des années 80 par le consortium *CIMP* [WAN 94a].
- Le programme Dupont avec le code *SolidFlow* [LEL 98].
- Le programme d'analyse d'écoulements 3D de *Rapra Technology* : *FillCalc*.
- Et d'autres [HAA 98], [HET 98], [PIC 98] ...etc.

La phase de remplissage des moules est de loin la plus complexe à modéliser ; en plus des équations d'écoulement non-linéaires à résoudre, il faut pouvoir suivre l'avancée du front de matière dans le moule. Il est donc nécessaire de construire un modèle capable de donner une bonne prédiction de la position du front de matière et de la pression générée dans l'outillage.

Durant les vingt dernières années, des efforts considérables ont conduit au développement de différents modèles pour la simulation de la phase de remplissage. Il existe trois grandes classes de méthodes :

– La méthode lagrangienne [FRE 81] : dans cette approche, le domaine fluide se déforme suivant le champ de vitesse, calculé de telle manière qu'un ensemble de nœuds coïncide toujours avec l'interface. L'application de cette méthode produit des maillages distordus, qu'il faut reconstruire de temps en temps en utilisant des techniques de remaillage. La difficulté majeure de cette approche réside dans le traitement des lignes de soudures apparaissant quand deux fronts se rencontrent.

– La méthode des marqueurs (*marker and cell method*) [NIC 71] : cette approche permet de suivre l'évolution de l'interface à travers un maillage fixe en suivant le mouvement de particules fictives (ou marqueurs). Les principaux inconvénients de cette méthode sont, d'une part, le nombre de particules qui augmente au cours du calcul, et, d'autre part, l'apparition de zones vides fictives dues à l'absence de marqueurs.

– La méthode de pseudo-concentration [THO 86] : cette méthode découle de la méthode VOF [HIR 81]. Le maillage utilisé est fixe et le front de matière est repéré par une fonction  $F$  calculée sur tout le domaine. Les valeurs de cette fonction sont obtenues en résolvant une équation différentielle de type hyperbolique.

Dans cet article, nous proposons une implémentation de cette dernière technique pour simuler le remplissage de moules d'injection de géométries tridimensionnelles. Nous avons utilisé une méthode hybride élément fini volume de contrôle. Nous décrirons tout d'abord les modèles mathématiques nécessaires à la description du procédé d'injection. Nous détaillerons ensuite l'implémentation numérique de la méthode hybride élément fini volume de contrôle dans le cadre du logiciel POLYFLOW. La troisième partie est consacrée à la présentation des résultats numériques obtenus et aux comparaisons avec des résultats analytiques et expérimentaux.

## 2. Modèles mathématiques

### 2.1. Les équations d'écoulement

Pour un fluide incompressible, le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}_d + \boldsymbol{\tau} \quad [1]$$

où  $p$  représente la pression hydrostatique,  $\mathbf{I}_d$  le tenseur unité et  $\boldsymbol{\tau}$  le tenseur déviateur des contraintes.

La conservation de la masse pour un fluide incompressible conduit à l'équation de continuité :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad [2]$$

où  $\mathbf{v}$  représente le vecteur vitesse. Cette équation est une contrainte cinématique imposée aux mouvements possibles du fluide.

La conservation de la quantité de mouvement conduit à l'équation suivante :

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f} \quad [3]$$

où  $\rho$  représente la masse volumique du fluide et  $\mathbf{f}$  les forces volumiques.

Pour compléter le système d'équations précédent (i.e. [2] et [3]), nous définissons dans la section suivante les modèles rhéologiques qui lient le tenseur déviateur des contraintes aux déformations subies par le polymère fondu.

### 2.2. Les lois de comportement des matières plastiques

Trois classes de modèles rhéologiques sont utilisés dans le logiciel POLYFLOW :

– Modèle newtonien généralisé (relation algébrique explicite)

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D} \quad [4]$$

– Modèle viscoélastique différentiel (relation implicite : équation différentielle)

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\tau}, \lambda) \cdot \boldsymbol{\tau} + \lambda(\dot{\gamma}) \frac{\delta \boldsymbol{\tau}}{\delta t} = 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D} \quad [5]$$

– Modèle viscoélastique intégral (relation intégrale implicite)

$$\boldsymbol{\tau} = \int_{-\infty}^t \mathbf{M}(t-t') [\Phi_1 [\mathbf{C}_t^{-1} - \mathbf{I}_d] + \Phi_2 [\mathbf{C}_t - \mathbf{I}_d]] dt' \tag{6}$$

où  $\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)$  est le tenseur taux de déformation,  $\eta$  est la viscosité de cisaillement qui varie en fonction du taux de cisaillement ( $\dot{\gamma} = \sqrt{2\mathbf{D} : \mathbf{D}}$ ) à température constante,  $\lambda$  est le temps de relaxation,  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\tau}, \lambda)$  représente un tenseur dépendant du modèle choisi et  $\frac{\delta}{\delta t}$  représente la dérivée convective [GER 86].  $\mathbf{C}_t$  est le tenseur des déformations de Cauchy-Green droit,  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont des fonctions scalaires des invariants  $I_1 = \text{trace}(\mathbf{C}_t^{-1})$ ,  $I_2 = \text{trace}(\mathbf{C}_t)$  et  $\mathbf{M}(t-t')$  est appelée fonction mémoire [BIR 87].

Dans notre cas, on se limitera aux modèles newtoniens généralisés qui sont largement utilisés pour simuler les écoulements de polymères dans les outillages. Les modèles newtoniens généralisés les plus couramment utilisés sont donnés dans le tableau 1. Ces modèles ne peuvent pas décrire les phénomènes viscoélastiques relatifs aux contraintes normales et à la relaxation des contraintes, par exemple. La méthodologie développée ici reste applicable dans le cas où on utiliserait les modèles viscoélastiques.

Nom du modèle	Expression mathématique
Modèle newtonien	$\eta(\dot{\gamma}) = \text{constante}$
Modèle pseudo-plastique	$\eta(\dot{\gamma}) = K\dot{\gamma}^{n-1}$
Modèle de Bird-Carreau	$\eta(\dot{\gamma}) = K_1 + (K_1 + K_2) (1 + \lambda^2 \dot{\gamma}^2)^{\frac{(n-1)}{2}}$
Modèle de Cross	$\eta(\dot{\gamma}) = \frac{K}{(1 + (\lambda \dot{\gamma})^n)}$

**Tableau 1.** Exemples de modèles newtoniens généralisés.

$K, K_1, K_2, \lambda$  et  $n$  sont les paramètres des modèles obtenus par calage numérique des résultats de mesures de viscosité.

### 2.3. Le suivi du front de matière

Dans le cas général des problèmes de remplissage, le mouvement du front de matière peut être représenté par une fraction volumique  $F(\mathbf{x},t)$  définie dans tout le domaine de calcul. Cette fonction est souvent appelée fonction de pseudo-concentration [THO 86] et [DHA 90]. Elle prend la valeur un pour les régions remplies par le fluide et la valeur zéro ailleurs. La discontinuité de  $F(\mathbf{x},t)$  représente la position du front mobile. Le transport de cette interface par un champ de vitesse  $\mathbf{v}$  est donné par l'équation :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0 \quad [7]$$

Le suivi de l'interface mobile requiert un traitement numérique spécial de l'équation [7], à cause du caractère discontinu de la fonction  $F(\mathbf{x},t)$ . Généralement, deux types d'approches sont possibles pour la résolution de cette équation. On peut utiliser directement la méthode des éléments finis en recourant à des techniques de lissage [GAO 91] et [USM 92], ou en choisissant une approximation de type Lessaint-Raviart [FOR 95] et [HET 98]. La seconde méthode utilise le concept du volume de contrôle, en évaluant les quantités de fluide échangées par le volume de contrôle [MAS 95] et [VOL 95].

Les méthodes de volume de contrôle sont largement utilisées dans le cadre de maillages rectangulaires issus de la méthode des différences finies, mais conceptuellement, il n'y a aucune limitation et elles peuvent aussi bien s'appliquer dans le cadre de la méthode des éléments finis.

L'équation [7] est de type hyperbolique, elle n'est gouvernée que par la convection seule. Sa représentation discrète est sujette aux problèmes numériques usuels associés aux termes de convection. En utilisant des schémas de discrétisation classiques (explicite ou implicite), on obtient une dispersion de la solution numérique due à la diffusion artificielle introduite par l'approximation du terme convectif ( $\mathbf{v} \cdot \nabla F$ ). Pour pallier cette dispersion, il faut établir une meilleure approximation de ce terme. Nous citons trois méthodes capables de réduire ou d'éliminer les effets de cette dispersion artificielle :

- L'approximation Donneur-Accepteur [HIR 81], [TOR 85 ] et [KOT 91] utilise les informations en amont et en aval des frontières des volumes de contrôle pour estimer la forme de la surface libre et calculer les flux convectifs. Les équations de Navier-Stokes ne sont résolues que dans la partie du domaine contenant le fluide étudié et des conditions aux limites appropriées sont appliquées dans les cellules constituant l'interface. Cette méthode est explicite et nécessite la reconstruction de l'interface à chaque pas de temps.

- L'approximation de van Leer [LEE 77] utilise un schéma du second ordre pour estimer les flux convectifs. Les équations de Navier-Stokes sont résolues dans tout le domaine de calcul.

– L’approche développée par Swaminathan et Voller [SWA 94] permet d’éliminer le phénomène de dispersion en modifiant l’équation de transport [7]. L’idée de base est qu’un volume de contrôle partiellement rempli ne peut pas transmettre de fluide aux volumes de contrôles l’entourant. Avec cette hypothèse, une fois le volume de contrôle rempli, il ne peut plus se vider. En pratique, dans le cas de l’injection des polymères, cette hypothèse est tout à fait justifiée car on n’a jamais observé un recul du front de matière lors de la phase de remplissage. Cette méthode ne nécessite aucune reconstruction de l’interface.

Nous proposons ici une implémentation de cette dernière méthode dans le cadre de la méthode des éléments finis pour des géométries tridimensionnelles.

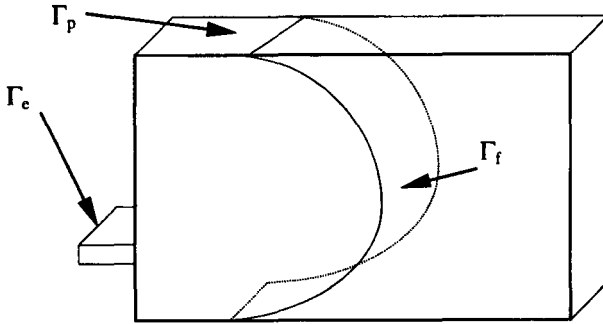
#### 2.4. Les conditions aux limites et les conditions initiales

La résolution des équations de Navier-Stokes nécessite des conditions aux limites appropriées sur les bords du domaine de calcul  $\Omega$ . La figure 1 représente un schéma illustrant les différentes conditions rencontrées dans la phase de remplissage des moules. A l’entrée du moule  $\Gamma_e$ , le débit volumique ou la contrainte (i.e. la pression) est imposé. Sur le front mobile  $\Gamma_f$ , les tensions de surface sont négligeables, ce qui revient à l’égalité des contraintes normales à travers l’interface ; cette condition est satisfaite de manière faible dans la formulation variationnelle (voir § 3.1). Sur les parois du moule  $\Gamma_p$  en contact avec le polymère, la condition de non glissement est imposée. La condition physique « correcte » près de la ligne de contact avec le front mobile n’est pas encore complètement établie [ZAN 93]. Comme une condition de non-glissement dans les parties en contact avec l’air va empêcher le polymère d’entrer en contact avec les parois du moule, nous avons choisi de supposer l’air libre en glissement le long des parois du moule. Ce type de condition est dynamique et change avec le mouvement du polymère dans le moule. Ces conditions ont été implémentées en utilisant des conditions de Robin ajustables [HAA 97] :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_n = 0 \\ \mathbf{a}\mathbf{v}_t + \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \mathbf{x}_t} = 0 \end{cases} \text{ avec: } \mathbf{a} = \begin{cases} 10^9 & \text{si } F \geq 0.5 \\ 0 & \text{si } F < 0.5 \end{cases} \quad [8]$$

L’équation [7] étant de nature hyperbolique, il n’y a donc pas de conditions aux limites à imposer. Cependant, une condition initiale est nécessaire. La fonction de pseudo-concentration est initialisée à l’unité sur la section  $\Gamma_e$  par où le fluide entre dans le domaine de calcul et à zéro ailleurs. Les champs de vitesse et de pression sont initialisés à zéro dans tout le domaine de calcul.





**Figure 1.** Schéma tridimensionnel de la cavité d'un moule

### 3. Formulation élément fini – volume de contrôle

La résolution numérique du remplissage des moules d'injection est décomposée en deux étapes. D'abord, pour une fonction de pseudo-concentration  $F$  connue dans tout le domaine  $\Omega$ , les équations [2] et [3] sont résolues par la méthode des éléments finis. Ensuite, à partir du champ de vitesse  $\mathbf{v}$  calculé, l'équation [7] est résolue par la méthode des volumes de contrôle. La position de l'interface  $\Gamma_f$  est repérée par l'isovaleur  $\frac{1}{2}$  de la fonction  $F$ . L'interface se situe généralement à l'intérieur des éléments, ce qui nous conduit à définir des propriétés physiques et rhéologiques moyennes  $\bar{\alpha}$  pour ces éléments par :

$$\bar{\alpha} = \alpha_1 F + \alpha_2 (1 - F) \quad [9]$$

où  $\alpha_i$  représente la masse volumique  $\rho$ , la viscosité  $\eta$ , les paramètres rhéologiques  $K$ ,  $n$  ou toute autre propriété physique du fluide  $i$ .

Dans les calculs numériques, l'air est souvent remplacé par un fluide fictif ayant la même densité que l'air, mais une viscosité  $10^3$  à  $10^6$  fois plus petite que celle du polymère considéré [HAA 98]. Ceci permet de réduire le nombre de Reynolds dans la partie du domaine de calcul contenant le fluide fictif ; et ainsi simplifier le problème en considérant le même type d'équation dans tout le domaine.

#### 3.1. Formulation variationnelle du problème

Soit à résoudre le problème défini par les équations [2] et [3], avec une loi de comportement de type [4] pour un fluide newtonien généralisé. Nous considérons les équations de Navier-Stokes sachant que pour les problèmes d'écoulement de

polymères, les termes d’inertie sont négligeables. Nous supposons que l’écoulement est isotherme et que le domaine de calcul  $\Omega$  est fixe.

Nous définissons deux fonctions tests  $\mathbf{u} \in H^1_{\Gamma_e, \Gamma_p}(\Omega)^3$  et  $q \in L^2(\Omega)$  telles que :

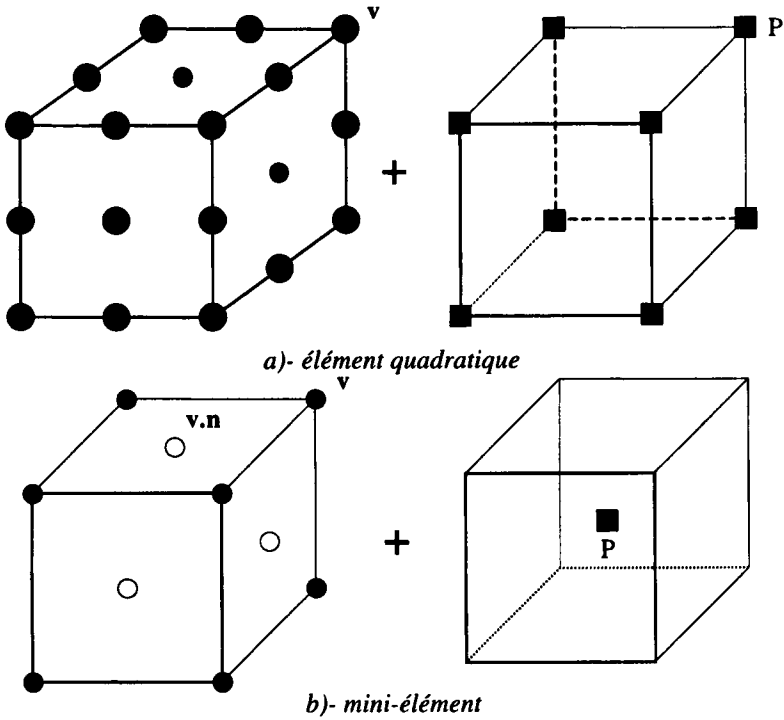
$$\begin{aligned}
 H^1_{\Gamma_e, \Gamma_p}(\Omega)^3 &= \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3 \mid \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_e \cup \Gamma_p \right\} \\
 H^1(\Omega)^3 &= \left\{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \mid \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} d\Omega < \infty \right\} \\
 L^2(\Omega) &= \left\{ q \mid \int_{\Omega} q \cdot q d\Omega < \infty \right\}
 \end{aligned}$$

L’équation de la quantité de mouvement [2] est d’abord multipliée par  $\mathbf{u} \in H^1_{\Gamma_e, \Gamma_p}(\Omega)^3$ , puis intégrée par parties. La condition d’incompressibilité [3] est multipliée par  $q \in L^2(\Omega)$  et intégrée sur tout le domaine. Ces opérations conduisent à la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases}
 \int_{\Omega} \bar{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} (2\bar{\eta} \mathbf{D}(\mathbf{v}) : \mathbf{D}(\mathbf{u}) - p \nabla \cdot \mathbf{u}) d\Omega - \underbrace{\int_{\Gamma_e} ((\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} d\Gamma}_{=0} \\
 = \int_{\Omega} \bar{\rho} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} d\Omega \\
 \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0
 \end{cases} \tag{10}$$

Le terme  $\int_{\Gamma_e} ((\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} d\Gamma$  est nul car les tensions de surfaces sont négligeables.

L’approximation spatiale utilisée est de type Galerkin et l’approximation mixte vitesse-pression est adoptée [BRE 91]. Pour les écoulements 3D, on peut utiliser, comme d’ailleurs pour les cas 2D, une représentation quadratique pour la vitesse et une représentation linéaire (continue ou discontinue) pour la pression. Cependant, pour des maillages éléments finis très denses, l’élément quadratique (figure 2.a) s’avère très coûteux en terme de temps calcul et d’espace mémoire. Nous avons choisi d’utiliser l’élément introduit par Fortin [FOR 84] qui est plus précis que l’élément linéaire. Ce mini-élément est implémenté comme une correction de l’élément linéaire : un degré de liberté supplémentaire est introduit sur le milieu des faces de l’élément, mais il ne concerne que la composante normale de la vitesse (figure 2.b). Ceci minimise le coût de la correction et vérifie la condition de Ladyzhenskaya – Babuska – Brezzi (LBB).



**Figure 2.** *Eléments finis utilisés*

La discrétisation du problème [10] conduit à un système d'équations différentielles non-linéaires du premier ordre, de forme générale :

$$\mathbf{M}(\mathbf{X})\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}(\mathbf{X})\mathbf{X} + \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad [11]$$

où  $\mathbf{X}$  est le vecteur des inconnues des vitesses et de la pression et  $\dot{\mathbf{X}}$  est le vecteur des dérivées temporelles des vitesses. Les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  sont généralement appelées matrices masse et rigidité respectivement. Le vecteur  $\mathbf{F}$  correspond aux forces volumiques. La discrétisation temporelle du système [11] est de type Euler implicite et l'algorithme itératif de Newton (l'algorithme itératif de Picard dans certains cas) est utilisé pour les termes non-linéaires. L'application de ces algorithmes conduit pour chaque pas de temps ou chaque itération, à un système d'équations algébriques linéaires résolu par une méthode frontale. Le principe de base de cette méthode est que l'assemblage de la contribution de chaque élément est suivi d'une élimination de certains termes de la matrice globale qui n'interviennent plus dans sa construction. Pour la méthode frontale, on ne stocke en mémoire centrale que les termes actifs de la matrice, conduisant finalement à une matrice

triangulaire supérieure ; la solution du système étant obtenue par simple substitution [POL 90].

**3.2. Technique des volumes de contrôle pour le suivi du front de matière**

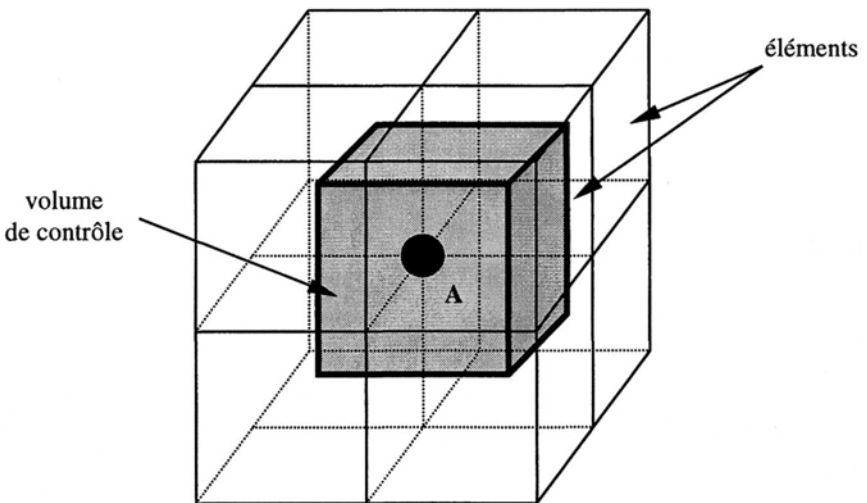
Swaminathan et Voller [SWA 94] ont réécrit l'équation [7] en introduisant une deuxième fonction  $G(x,t)$  pour obtenir l'équation suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (Gv) = 0 \tag{12}$$

$$\begin{cases} \text{si } F < 1 \text{ alors } G = 0 \\ \text{si } F = 1 \text{ alors } G > 0 \end{cases} \tag{13}$$

où les fonctions  $F(x,t)$  et  $G(x,t)$  sont reliées par la relation [13] pour traduire le fait qu'un volume de contrôle ne peut pas transmettre de fluide tant qu'il n'est pas complètement rempli.

Pour utiliser la méthode des volumes de contrôle, chaque nœud du maillage élément fini est entouré d'un volume de contrôle centré en ce nœud et délimité par les milieux des faces et par les centres des éléments l'entourant (figure 3).



**Figure 3.** Définition d'un volume de contrôle centré au nœud A  
 Pour chaque volume de contrôle K, nous écrivons alors :

$$\int_K \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (Gv) \right) dV = 0 \tag{14}$$

En appliquant le théorème de Gauss, nous obtenons :

$$V_K \frac{\partial F_K}{\partial t} + \oint_{\partial K} (Gv) \cdot n dS = 0 \quad [15]$$

où  $\mathbf{n}$  représente la normale extérieure au bord  $\partial K$  du volume de contrôle  $K$  de volume  $V_K$ .

**A chaque pas de temps  $n$  :**

– Le champs  $F$  à l'itération  $(m-1)$  et au pas de temps  $n-1$  étant connu, résoudre l'équation [16] pour obtenir le champs  $G$  à l'itération  $(m)$  :

$$(F_K^{(m-1)} - F_K^{n-1}) + \frac{\Delta t}{V_K} \sum_{i=1}^{N_f} Q_i^{(m)} = 0 \quad [16]$$

$$\text{avec : } Q_i^{(m)} = \int_{\partial K_i} \mathbf{q}_i^{(m)} \cdot \mathbf{n}_i dS \quad \text{et} \quad \mathbf{q}_i^{(m)} = G_K^{(m)} \mathbf{v}_i^n \quad [17]$$

( $N_f$  représente le nombre de faces du volume de contrôle et  $\mathbf{n}_i$  la normale extérieure à la face  $i$ )

– Résoudre l'équation [18] pour obtenir le champs  $F$  à l'itération  $(m)$ :

$$(F_K^{(m)} - F_K^{(m-1)}) + \frac{\Delta t}{V_K} \sum_{i=1}^{N_f} \tilde{Q}_i^{(m)} = 0 \quad [18]$$

$$\text{avec : } \tilde{Q}_i^{(m)} = \int_{\partial K_i} \mathbf{q}_i^{(m)} \cdot \mathbf{n}_i dS \quad \text{tel que} \quad \mathbf{q}_i^{(m)} \cdot \mathbf{n}_i > 0 \quad [19]$$

– Corriger les champs  $F$  et  $G$  tels que :

$$\begin{cases} F_K^{(m)} = \text{MAX}(0, \text{MIN}(F_K^{(m)}, 1)) \\ \text{si } F_K^{(m)} < 1 \text{ alors } G_K^{(m)} = 0 \end{cases} \quad [20]$$

– Vérifier la convergence de l'algorithme, telle que :

$$\begin{aligned} \text{MAX} \left( \left| F_K^{(m)} - F_K^{(m-1)} \right| \right)_{K=1}^{K=N_K} &< \varepsilon_F \\ \text{MAX} \left( \left| G_K^{(m)} - G_K^{(m-1)} \right| \right)_{K=1}^{K=N_K} &< \varepsilon_G \end{aligned} \quad [21]$$

( $\varepsilon_F$  et  $\varepsilon_G$  sont généralement pris égaux à  $10^{-4}$ )

**Tableau 2.** Algorithme itératif pour la résolution de l'équation de transport

En considérant une approximation constante par volume de contrôle pour chacun des champs  $F$  et  $G$  (notées respectivement  $F_K$  et  $G_K$ ), l'équation [15] est résolue par

l'algorithme itératif résumé dans le tableau 2 et l'algorithme général de résolution peut être résumé comme suit :

- La position initiale du front de matière est connue.
- A chaque pas de temps :
  - Résoudre les équations de Navier-Stokes pour obtenir les champs de vitesse et de pression.
  - Résoudre l'équation de transport pour obtenir la nouvelle position du front.
  - Aller au nouveau pas de temps.

#### 4. Résultats numériques

Trois exemples sont présentés dans ce paragraphe, le premier est un cas académique pour lequel il existe une solution analytique pour l'évolution du front et de la pression en fonction du temps. L'influence du type d'élément fini utilisé, du maillage et du pas de temps est examinée à travers cet exemple. Le deuxième test numérique concerne l'écoulement autour d'un obstacle, il permet de montrer la capacité de la méthode à résoudre des écoulements avec des multifronts. Le dernier exemple concerne le remplissage d'un moule pour éprouvette haltère disponible au laboratoire. Une comparaison entre les positions des fronts de matière calculées et celles issues des photographies d'éprouvettes incomplètes est présentée à des fins de validation.

##### 4.1. Remplissage radial d'un disque

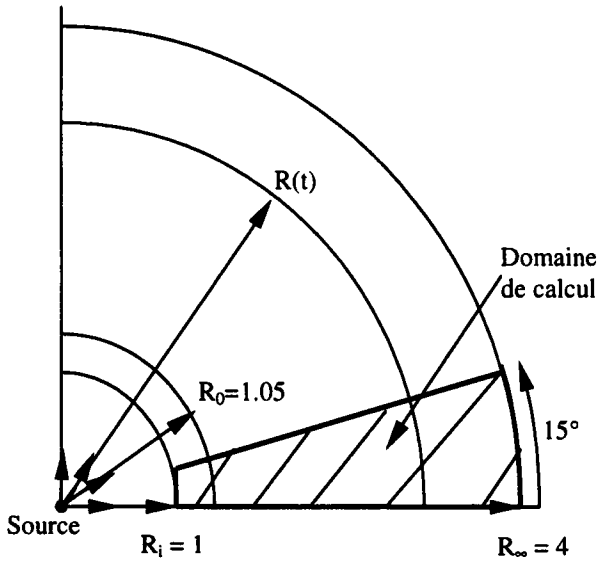
Dans un écoulement radial avec une source ponctuelle, le fluide s'écoule à travers la source ponctuelle à débit constant. Les valeurs adimensionnelles constantes de la masse volumique, de la viscosité et du débit volumique du fluide étudié sont  $\rho = 1$ ,  $\eta = 1$  et  $Q = 2\pi$  respectivement. Pour le fluide fictif les valeurs  $\rho_a = 10^{-3}$  et  $\eta_a = 10^{-3}$  sont utilisées. C'est un problème unidimensionnel où seule la composante radiale de la vitesse est non nulle. Cependant, pour l'exemple 3D présenté, le domaine tridimensionnel autour d'une source linéique d'axe l'axe du disque est utilisé pour la simulation numérique (figure 4). Dans cet exemple, les termes d'inertie ne sont pas négligés. En supposant un écoulement stationnaire entre deux pas de temps successifs  $t_n$  et  $t_{n+1}$  [WAN 94b], le problème admet la solution analytique suivante (voir Annexe) :

$$v_r = \frac{1}{r} \quad [22]$$

$$R(t) = \sqrt{2t + R_0^2} \quad [23]$$

$$P(r, t) = -\frac{2\eta}{R^2(t)} + \frac{\rho}{2} \left( \frac{1}{R^2(t)} - \frac{1}{r^2} \right) \quad [24]$$

où  $v_r$ ,  $r$ ,  $R_0$ ,  $R(t)$  et  $P(r,t)$  sont la composante radiale de la vitesse, la distance radiale à partir de la source ponctuelle, la position initiale du front, la position du front à l'instant  $t$  et la pression à l'instant  $t$  au point situé à la position  $r$ , respectivement.



**Figure 4.** *Domaine de calcul pour le remplissage radial d'un disque*

Pour comparer les résultats numériques à la solution analytique, ce problème a été analysé avec les maillages représentés sur la figure 5 et dont les caractéristiques sont données dans le tableau 3. Pour chacun des maillages, deux simulations avec des pas de temps différents  $\Delta t_1 = 0.2$  s et  $\Delta t_2 = 0.1$  s ont été effectuées en utilisant l'élément quadratique et le mini-élément de la figure 2.

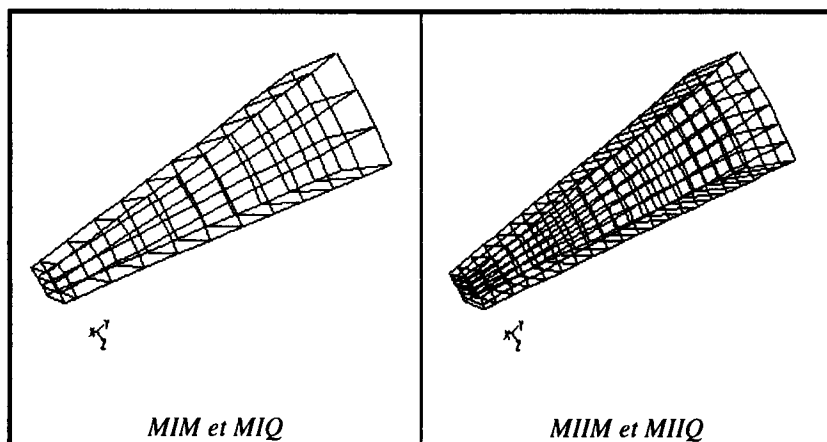


Figure 5. Maillages d'une tranche du disque

Type d'élément	Maillage	Nombre d'éléments	No de d.d.l. pour F	No de d.d.l. pour v	No de d.d.l. pour P
Mini-élément	MIM	33	96	726	33
Mini-élément	MIIM	126	308	2517	126
Quadratique	MIQ	33	96	1449	96
Quadratique	MIIQ	126	308	5031	308

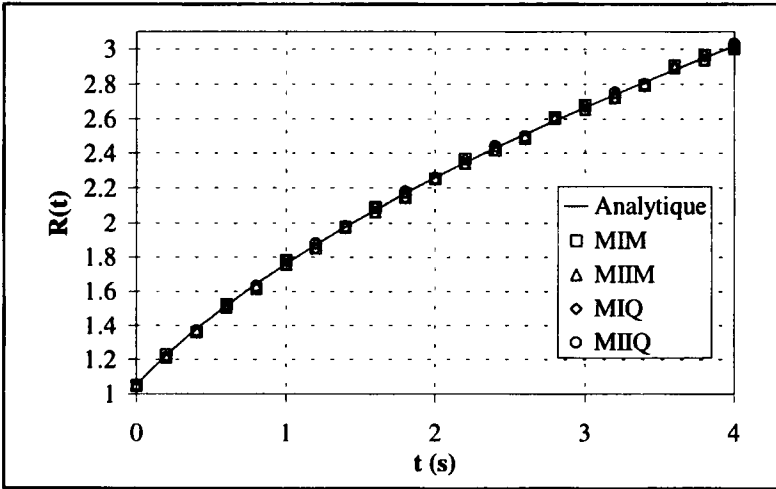
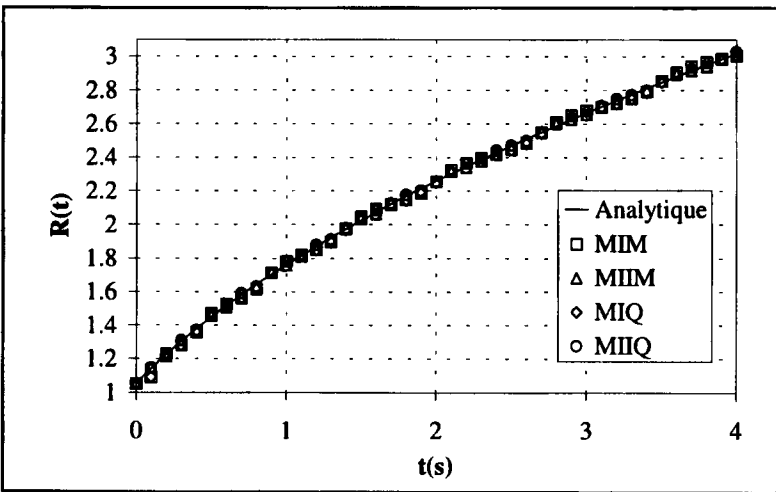
Tableau 3. Caractéristiques des maillages utilisés pour la simulation numérique du remplissage radial d'un disque

Sur la figure 6, Nous avons tracé la position du front de matière à différents instants. Les solutions numériques sont confondues avec la solution analytique quels que soient le pas de temps, le type d'élément et le maillage utilisés.

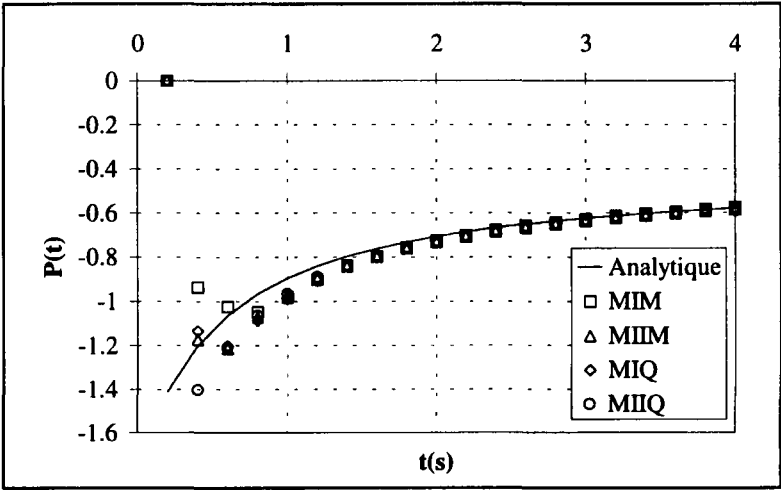
Sur la figure 7, nous avons représenté l'évolution de la pression en fonction du temps pour un point situé à la position  $r = 1.10$ . Nous montrons que la méthode proposée permet une bonne prédiction de la pression. Nous notons, au début du remplissage, une dépendance de la pression par rapport au pas de temps  $\Delta t$ , au raffinement du maillage et au type d'élément utilisé. La dépendance par rapport au maillage et au type d'élément utilisé est tout à fait classique pour la méthode des éléments finis. On observe, en effet, que les résultats obtenus avec l'élément quadratique sont plus précis que ceux obtenus avec le mini-élément ; et que le raffinement du maillage permet d'améliorer la solution. L'influence du pas de temps, quant à elle, peut être liée à trois facteurs :



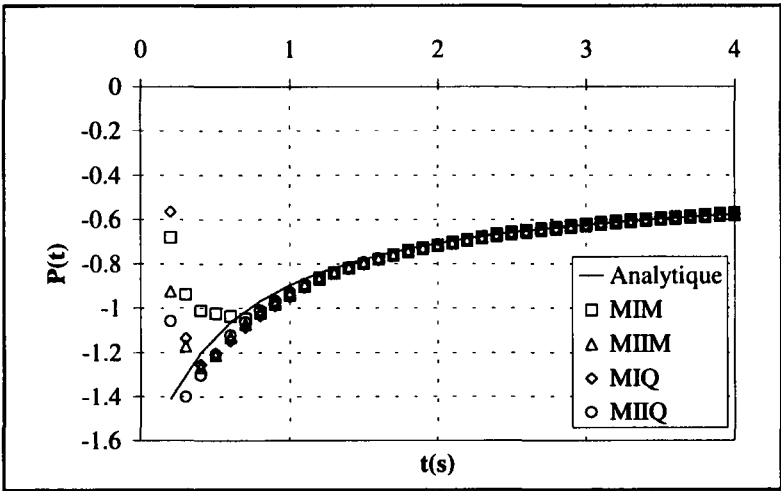
- à l'initialisation (les champs de vitesse et de pression sont nuls dans tout le domaine au début du calcul),
- au schéma en temps utilisé (schéma d'ordre 1 en temps),
- à la résolution du problème instationnaire alors que l'hypothèse de la solution analytique suppose un écoulement stationnaire entre deux pas de temps successifs  $t_n$  et  $t_{n+1}$ .

a)-  $\Delta t = 0.2$  sb)-  $\Delta t = 0.1$  s

**Figure 6.** Comparaison de la position du front de matière avec la solution analytique.



a)-  $\Delta t = 0.2$  s



b)-  $\Delta t = 0.1$  s

**Figure 7.** Comparaison de la pression calculée au point situé à  $r = 1.10$  avec la solution analytique

#### 4.2. Écoulement autour d'un obstacle

Nous considérons ici un écoulement autour d'un obstacle. Cette géométrie conduit à la séparation du fluide en deux fronts distincts, qui se rejoignent au-delà de l'obstacle. Nous avons considéré une plaque trouée dont la géométrie et les dimensions sont données sur la figure 8. Le polymère utilisé est un PMMA (Lucryl G55 – BASF) dont la viscosité en fonction de la vitesse de cisaillement à la température d'injection de 220°C est représentée sur la figure 9. Le modèle de Cross obtenu par calage numérique de la courbe de viscosité est utilisé pour la simulation numérique. L'air est remplacé par un fluide fictif obéissant à la même loi que le PMMA mais dont les valeurs des paramètres rhéologiques sont  $10^5$  fois plus petits que ceux du polymère. L'équation [9] est utilisée pour définir la viscosité dans les éléments partiellement remplis.

Les simulations numériques ont été effectuées pour un débit  $Q = 25 \text{ cm}^3/\text{s}$  avec les maillages MPT1 et MPT2 de la figure 10 et dont les caractéristiques sont données dans le tableau 4.

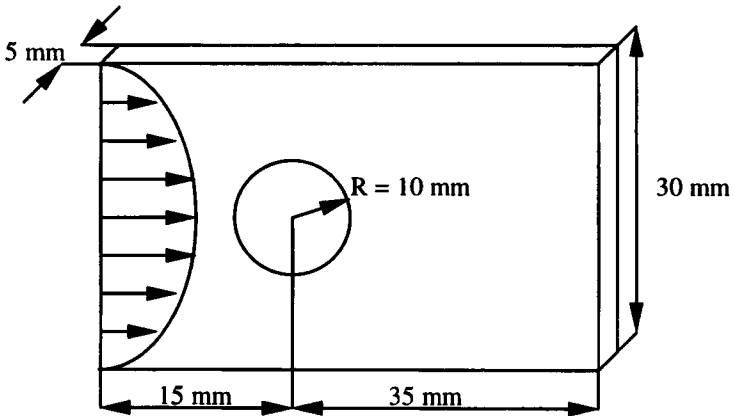


Figure 8. Géométrie de la plaque trouée

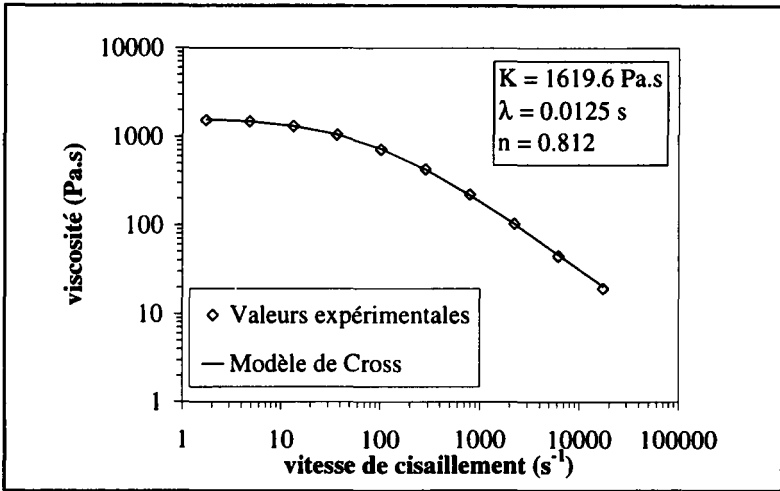


Figure 9. Courbe de viscosité du PMMA (Lucryl G 55 - BASF) à 220° C

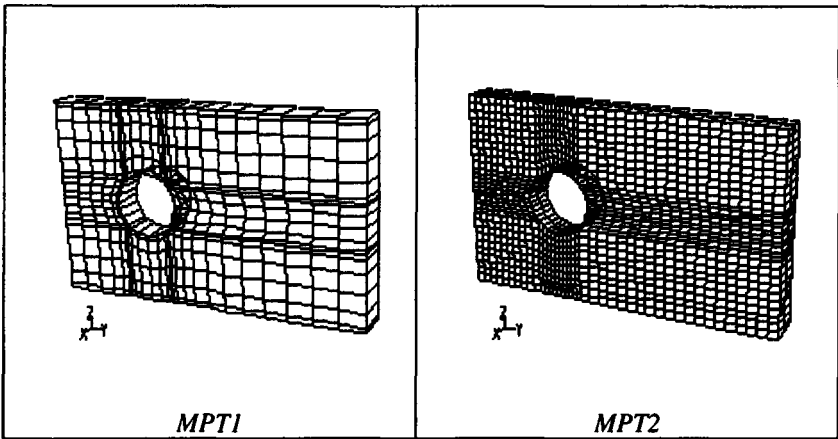


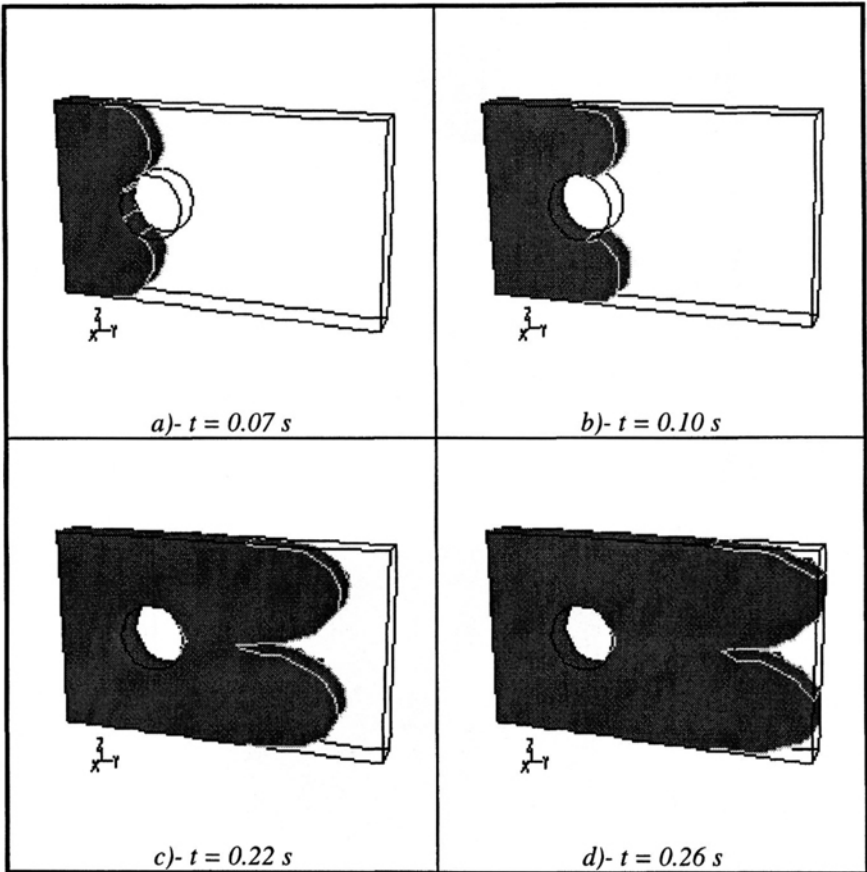
Figure 10. Maillages de la plaque trouée

Type d'élément	Maillage	Nombre d'éléments	No de d.d.l. pour F	No de d.d.l. pour v	No de d.d.l. pour P
Mini-élément	MPT1	396	900	7614	396
Mini-élément	MPT2	2200	3570	34350	2200

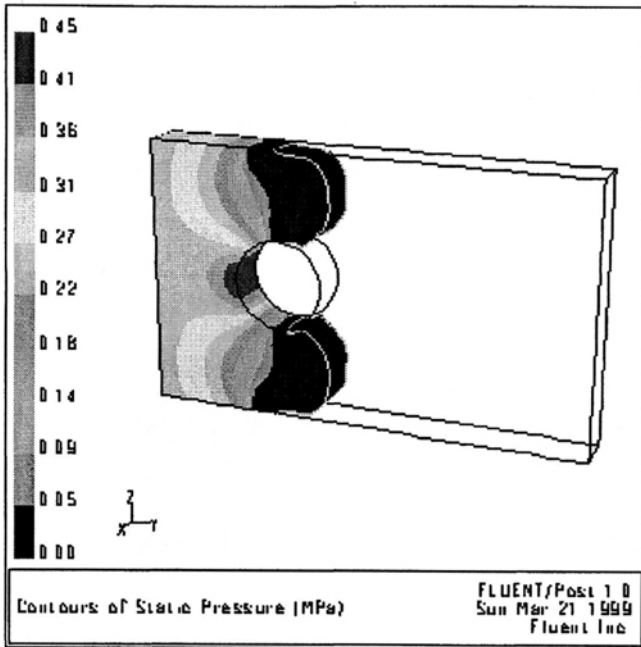
Tableau 4. Caractéristiques des maillages utilisés pour la simulation numérique du remplissage de la plaque trouée

Des écoulements de cette nature sont souvent rencontrés dans le cas de remplissage de moules d'injection possédant des noyaux. La figure 11 représente l'évolution des fronts de matière et permet de montrer la capacité de la méthode présentée à bien simuler des écoulements avec plusieurs fronts de matières.

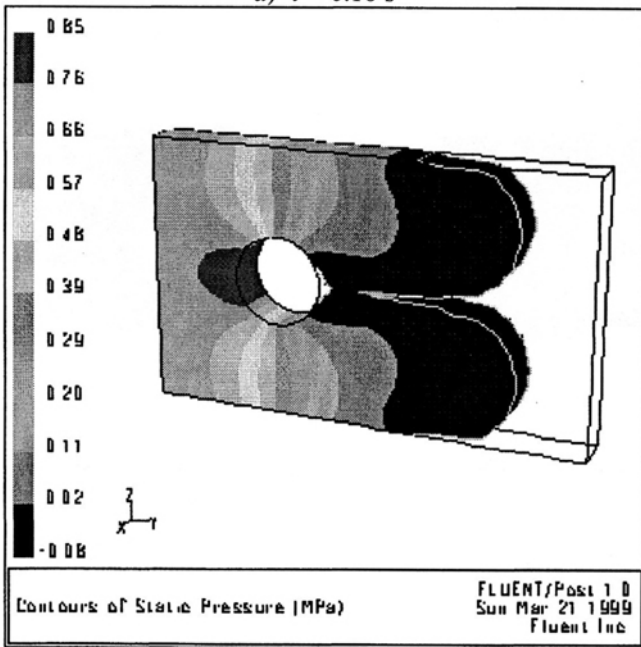
Sur la figure 12, nous avons représenté les cartes de pressions obtenues avec le maillage MPT2 aux instants  $t = 0.10$  s et  $t = 0.22$  s.



**Figure 11.** Evolution des fronts de matière (pour le maillage MPT1).



a)-  $t = 0.10\text{ s}$



b)-  $t = 0.22\text{ s}$

Figure 12. Cartes des pressions (pour le maillage MPT2)

### 4.3. Remplissage d'un moule pour éprouvette

Cet exemple consiste à étudier le remplissage d'un moule d'une éprouvette de traction normalisée. Le polymère utilisé est de l'amidon de blé thermoplastique biodégradable dont la viscosité en fonction de la vitesse de cisaillement à la température d'injection de 130°C est représentée sur la figure 13. Le modèle pseudo-plastique obtenu par calage numérique de la courbe de viscosité est utilisé pour la simulation numérique. Comme pour l'exemple précédent, l'air est remplacé par un fluide fictif obéissant à la même loi que l'amidon thermoplastique mais dont les valeurs des paramètres rhéologiques sont  $10^5$  fois plus petites que celles du polymère.

La simulation numérique a été effectuée pour un débit  $Q = 15 \text{ cm}^3/\text{s}$  avec le maillage de la figure 14 constitué de 1272 mini-éléments hexaédriques.

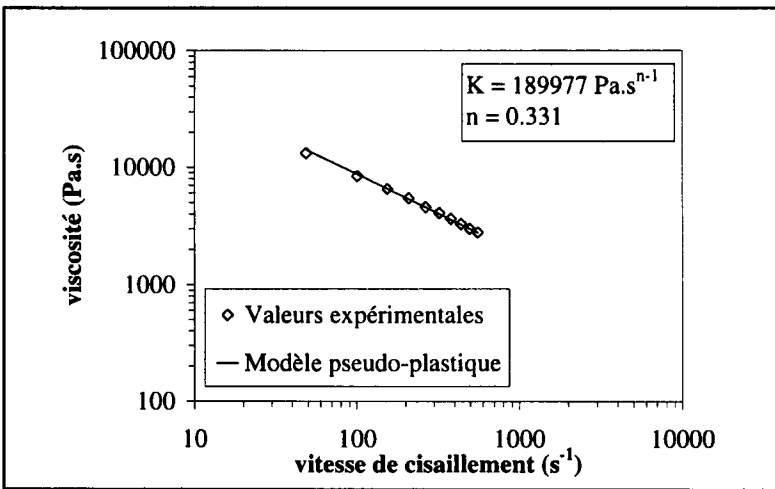
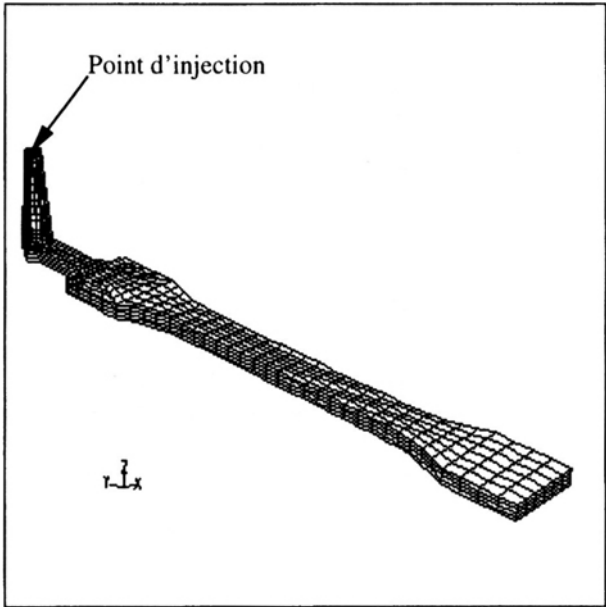


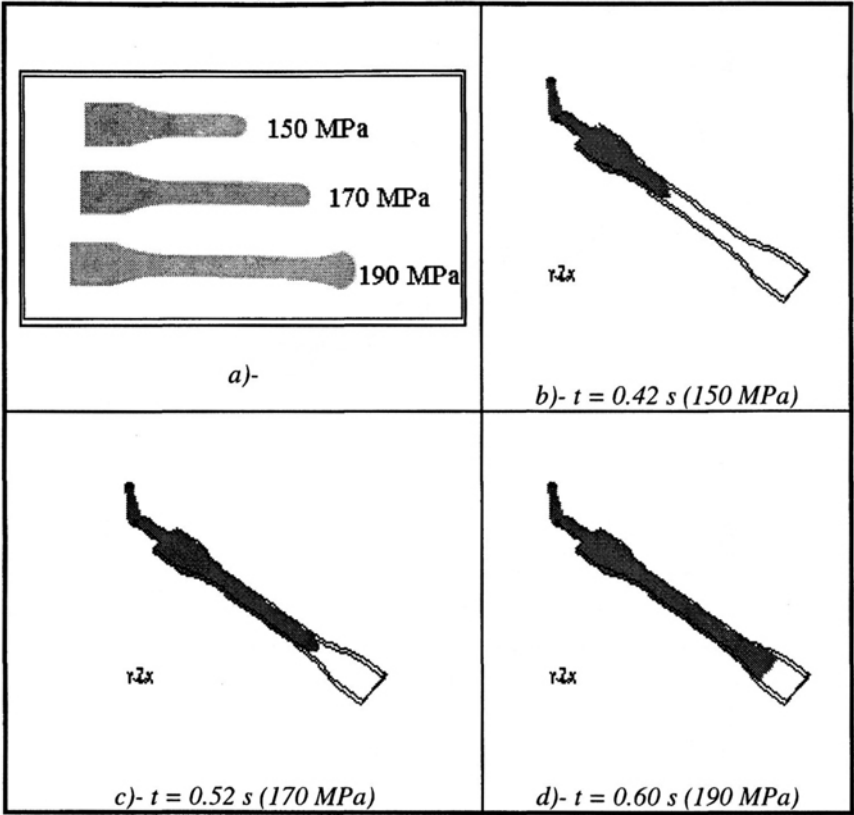
Figure 13. Courbe de viscosité de l'amidon de blé thermoplastique à 130°C



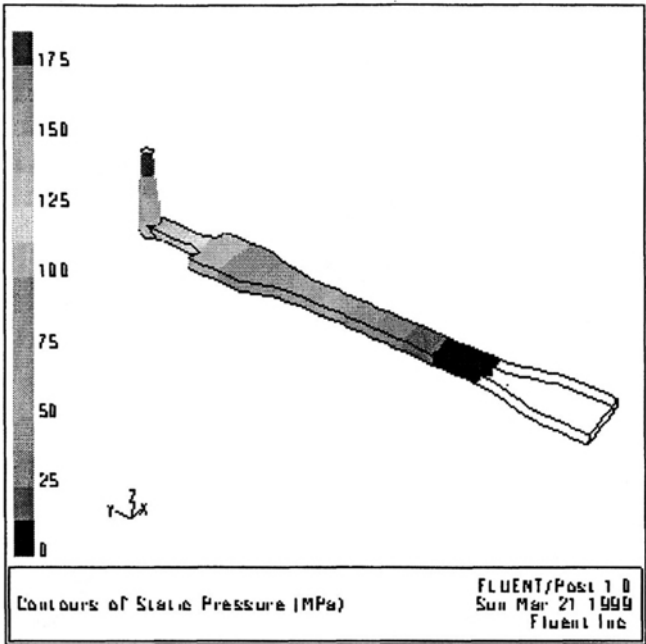
**Figure 14.** *Maillage élément fini de l'éprouvette*

Une comparaison avec des résultats expérimentaux, obtenus lors d'une précédente étude [ABB 98], de la position du front de matière à trois instants distincts est représentée sur la figure 15. Cette comparaison est faite par rapport à une photographie d'éprouvettes incomplètes réalisées en arrêtant le remplissage du moule à des instants prédéfinis. Nous observons une bonne prédiction numérique du front de matière par rapport aux incomplets réalisés sur une presse à injecter DK-Codim (NGH 50/100). Sur la figure 16, nous avons tracé les cartes des pressions calculées aux instants  $t = 0.52$  s et  $t = 0.60$  s.

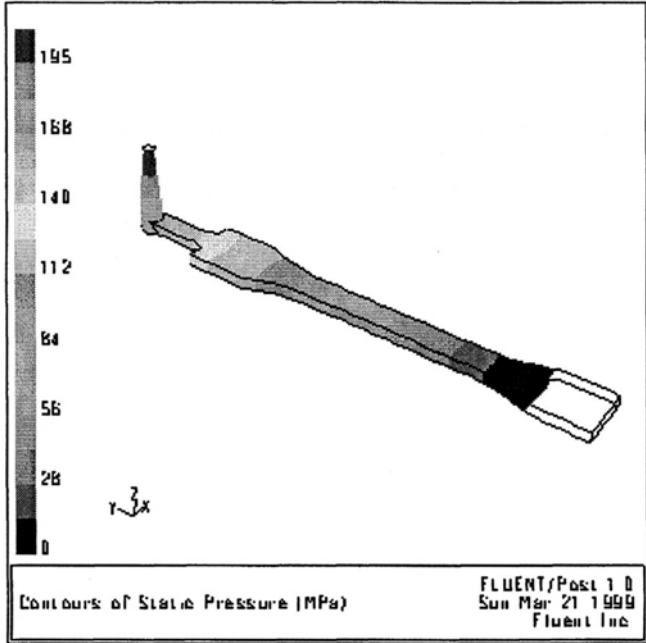




**Figure 15.** Comparaison de la position du front de matière :  
a)- photographie d'éprouvettes incomplètes réelles,  
b)-, c)- et d)- : résultats numériques



a) -  $t = 0.52$  s



b) -  $t = 0.60$  s

Figure 16. Cartes des pressions calculées au cours du remplissage de l'éprouvette

## 5. Conclusion

Dans ce travail, nous avons présenté une méthode hybride élément fini – volume de contrôle pour résoudre les problèmes de remplissage de moules d'injection tridimensionnels. Aucune hypothèse n'est faite sur la représentation géométrique du domaine d'écoulement, comme c'est actuellement le cas dans la plupart des logiciels industriels où l'approche coque est utilisée. L'évolution de l'interface polymère/air est décrite par une équation de transport de la fonction pseudo-concentration qui permet d'éviter les problèmes de remaillage rencontrés en utilisant les méthodes lagrangiennes. Nous avons montré à travers les exemples d'injection 3D présentés que la méthode proposée est capable de bien décrire l'évolution du front de matière et permet une bonne prédiction de la pression dans les moules. Les procédés de co-injection et d'injection assistée par gaz, où les effets tridimensionnels sont très importants, sont deux autres applications de cet algorithme de remplissage 3D volumique.

## 6. Bibliographie

- [ABB 98] ABBÈS B., AYAD R., PRUDHOMME J.-C. and ONTENIENTE J.-P., « Numerical simulation of thermoplastic wheat starch injection molding process », *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 38, N° 12, 1998, p. 2029-2038.
- [AGA 96] AGASSANT J.-F., AVENAS P., SERGENT J.-Ph., VERGNES B. et VINCENT M., *La mise en forme des matières plastiques*, Lavoisier – Technique et Documentation, 1996.
- [BIR 87] BIRD R.B., ARMSTRONG R.C. and HASSAGER O., *Dynamics of polymeric liquids*, Wiley, New York, 1987
- [BRE 91] BREZZI F. and FORTIN M., *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, 1991.
- [DHA 90] DHATT G., GAO D.M. and BEN CHEIKH A., « A finite element simulation of metal flow in moulds », *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, vol. 30, 1990, p. 821-831.
- [FOR 84] FORTIN A., Méthodes d'éléments finis pour les équations de Navier-Stokes, Thèse de doctorat, Université Laval, Québec, 1984.
- [FOR 95] FORTIN A., BÉLIVEAU A. and DEMAY Y., « Numerical solution of transport equations with applications to non-Newtonian fluids », in M.M. MARQUES and J.F. RODRIGUES (Eds.), *Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, Longman, Harlow, 1995, p. 311-322.
- [FRE 81] FREDERIKSEN C.S. and WATTS A.M., « Finite element method for time dependent incompressible free surface flow », *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, 1981, p. 282-304.
- [GAO 91] GAO D.M., Modélisation numérique du remplissage des moules de fonderie par la méthode des éléments finis, Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1991.
- [GER 86] GERMAIN P., *Mécanique*, Ellipses, Paris, 1986, p. 389-397.

- [HAA 97] HAAGH G.A.A.H., ZUIDEMA H., VAN DE VOSSE F.N., PETERS G.W.M. and MEIJER H.E.H., « Towards a 3-D finite element model for the gaz-assisted injection moulding process », *Intern. Polym. Process.* XII, Vol. 3, 1997.
- [HAA 98] HAAGH G.A.A.H. and VAN DE VOSSE F.N., « Simulation of three-dimensional polymer using a pseudo-concentration method », *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 28, 1998, p. 1355-1369.
- [HET 98] HÉTU J.-F., GAO D.M., GARCIA-REJON A. and SALLOUM G., « 3D finite element method for the simulation of the filling stage in injection molding », *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 38, N° 2, 1998, p. 223-236.
- [HIR 81] HIRT C.W. and NICHOLS B.D., « Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries », *J. Comput. Phys.*, Vol. 39, 1981, p. 201-225.
- [KOT 91] KOTHE D.B., MJOLSNESS R.C. and TORREY M.D., « RIPPLE: A computer program for incompressible flows with free surfaces », Technical Report LA-12007-MS, Los Alamos National Laboratory - Los Alamos (New Mexico), 1991.
- [LEE 77] VAN LEER B., « Towards the ultimate conservative difference scheme IV : A new approach to numerical convection », *J. Comput. Phys.*, Vol. 23, 1977, p. 276-299.
- [LEL 98] VAN DER LELIJ A.J., « Simulation of injection moulding using solid elements », *British Plastics and Rubber*, April 1998, p. 24-27.
- [MAS 95] MASHAYEK F. and ASHGRIZ N., « Advection of axisymmetric interfaces by the volume-of-fluid method », *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 20, 1995, p. 1337-1361.
- [NIC 71] NICHOLS B.D. and HIRT C.W., « Improved free surface boundary conditions for numerical incompressible flow calculations », *J. Comput. Phys.*, Vol. 8, 1971, p. 434-448.
- [PIC 98] PICHELIN E. and COUPEZ T., « Finite element solution of the 3D mold filling problem for viscous incompressible fluid », *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 163, 1998, p. 359-371.
- [POL 90] POLYFLOW, Reference Manual, 1990.
- [SCH 98] SCHMIDT L.R., « Plastics processing technology : Opportunities for the next decade in injection molding », *Plastics Engineering*, October 1998, p. 27-31.
- [SWA 94] SWAMINATHAN C.R. and VOLLER V.R., « A time-implicit filling algorithm », *Appl. Math. Modelling*, Vol. 18, 1994, p. 101-108.
- [THO 86] THOMPSON E., « Use of pseudo-concentration to follow creeping viscous flow during transient analysis », *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 6, 1986, p. 749-761.
- [TOR 85] TORREY M.D., CLOUTMAN L.D., MJOLSNESS R.C. and HIRT C.W., « NASA-VOF2D: A computer program for incompressible flows with free surfaces », Technical Report LA-10612-MS, Los Alamos National Laboratory - Los Alamos (New Mexico), 1985.
- [USM 92] USMANI A.S., CROSS J.T. and LEWIS R.W., « A finite element model for the simulations of the mould filling in metal casting and the associated heat transfer », *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 35, 1992, p. 787-806.
- [VOL 95] VOLLER V.R. and PENG S., « An algorithm for analysis of polymer filling of molds », *Polym. Eng. Sci.*, Vol. 35, N° 22, 1995, p. 1758-1765.

- [WAN 94a] WANG K.K., « Twenty years of CIMP research towards CAE for injection molding », *Adv. CAE Polym. Process.*, Vol. 49, 1994, p. 1-5.
- [WAN 94b] WANG S.P. and WANG K.K., « A net inflow method for incompressible viscous flow with moving free surface », *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 18, 1994, p. 669-694.
- [ZAN 93] VAN DER ZANDEN A.J.J., The thermodynamics of a moving fluid-liquid contact line, Ph.D. Thesis, Eindhoven University of Technology, 1993.

### Annexe. Démonstration des relations [22] à [24]

L'écoulement est purement radial (i.e.  $v_\theta=v_z=0$  en coordonnées cylindriques), stationnaire, newtonien et incompressible. Les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement en l'absence de forces extérieures et en présence des termes d'inertie, s'écrivent dans le sous-domaine occupé par le polymère :

$$\frac{dv_r}{dr} + \frac{v_r}{r} = 0 \quad [A1]$$

$$\rho v_r \frac{dv_r}{dr} = -\frac{dp_p}{dr} \quad [A2]$$

L'équation différentielle [A1] s'intègre pour donner la vitesse radiale  $v_r = \frac{A}{r}$ . Pour un débit  $Q=2\pi$ , la constante  $A=1$  et nous retrouvons la relation [22].

En utilisant la définition de la vitesse  $v_r = \frac{dr}{dt}$ , nous obtenons la relation [23] :

$$\int_{R_0}^{R(t)} r dr = \int_0^t dt' \Rightarrow R(t) = \sqrt{2t + R_0^2}$$

L'équation différentielle [A2] peut s'intégrer de la manière suivante :

$$\frac{dp_p}{dr} = -\rho \frac{1}{r} \left( -\frac{1}{r^2} \right) \Rightarrow \int_{p_p(r)}^{p_p(R)} dp = \rho \int_r^R \frac{dr'}{r'^3} \Rightarrow p_p(r) = p_p(R) + \frac{\rho}{2} \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

Pour déterminer l'expression de  $p_p(R)$ , nous utilisons la relation [A3] représentant la condition d'équilibre de l'interface polymère/air ( $\sigma_p \cdot \mathbf{n} = \sigma_a \cdot \mathbf{n}$ ) :

$$(-p_p \mathbf{I} + 2\eta_p \mathbf{D}) \cdot \mathbf{n} = (-p_a \mathbf{I} + 2\eta_a \mathbf{D}) \cdot \mathbf{n}$$

D'une part, comme la viscosité de l'air  $\eta_a$  est très faible devant celle du polymère  $\eta_p$ , nous pouvons négliger les termes visqueux pour l'air. D'autre part, la pression qui

règne dans le sous-domaine occupé par l'air est également négligeable (i.e.  $p_a \approx 0$ ).  
 Nous pouvons alors écrire :

$$\sigma_p \cdot \mathbf{n} \Big|_{r=R(t)} = \left( -p_p + 2\eta_p \frac{dv_r}{dr} \right) \Big|_{r=R(t)} \approx 0 \Rightarrow p_p(R) = -\frac{2\eta_p}{R^2(t)} \quad [A3]$$

Finalement, nous retrouvons la relation [24] qui donne l'évolution de la pression en fonction du temps dans le sous-domaine occupé par le polymère (i.e.  $r \leq R(t)$ ) :

$$p_p(r, t) = -\frac{2\eta_p}{R^2(t)} + \frac{\rho}{2} \left( \frac{1}{R^2(t)} - \frac{1}{r^2} \right)$$

tandis que la pression dans la région occupée par l'air (i.e.  $r > R(t)$ ) est nulle :

$$p_a(r, t) = 0$$

Nous remarquons qu'il y a une discontinuité de la pression à travers l'interface (i.e. pour  $r=R(t)$ ).