
Écoulement tridimensionnel à surface libre

Approche h-s : Partie II

Khouane Meftah * — Gouri Dhatt * — Jean-Michel Tanguy **

*Université de Technologie de Compiègne,
Département de génie des systèmes mécaniques

** Centre d'Etudes Techniques Maritimes et Fluviales d'Aix-En-Provence

RÉSUMÉ. Les travaux qui font l'objet de la présente publication ont consisté à développer un modèle de simulation des écoulements à surface libre applicable en mer, en rivière et en lac sous l'action de sollicitations aussi diverses que les crues, les gradients de densité eau salée-eau douce, les surcotes marines ou les coups de vents. Ce modèle basé sur la méthode des éléments finis repose sur une approche que nous avons dénommée h-s qui privilégie, comme cela se passe en nature pour les problèmes que l'on souhaite étudier, la dimension horizontale par rapport à la dimension verticale qui subit un traitement particulier. A noter que la pression peut être hydrostatique ou non. Elle est basée sur une approximation de type éléments finis suivant le plan horizontal (x,y) et de type analytique (séries) selon z. Le choix de la série et le nombre de ses termes dépendent de la physique du problème et de la précision souhaitée. Nous avons utilisé un élément hybride T6L pour la discrétisation spatiale. Pour la discrétisation temporelle, nous avons utilisé deux schémas. Le premier est celui d'Euler implicite, réputé pour sa stabilité et qui convient bien pour la résolution des problèmes stationnaires, le second est explicite de type Lax-Wendroff qui s'adapte mieux pour les problèmes instationnaires.

ABSTRACT. The works that are the object of the present paper consist of developing a model to simulate free surface flows applicable at sea, river, and lake, under loads as various as floods, density gradient between salt water – fresh water, marine coast or gales. This model based upon finite element method, implies an approach that we called h-s. This latter privileges, as it occurs in nature for the problems that we wish to study, the horizontal dimension to vertical dimension, which under goes a special treatment. We note that the pressure can be hydrostatic or not. This method is based upon a finite element approximation along with the horizontal plane (x,y), and upon analytical one along with z. The choice of the series and the number of its terms depend on the physics of the problem and the required accuracy. We have used a hybrid element T6L for the spatial discretization. For the time discretization, we have used two schemes. The first one is that of backward Euler, and the second is explicit of Lax-Wendroff type which can better fit the non stationary problems.

MOTS CLÉS : hydrodynamique, surface libre, éléments finis, approche h-s, séries.

KEY WORD : hydrodynamic, free surface, finite element, approach h-s, series.

1. Introduction

La méthode des éléments finis, apparue à la fin des années 50, s'est particulièrement bien illustrée pour la résolution de problèmes de mécanique des structures. Son extension à la mécanique des fluides pour la résolution d'écoulements turbulents a commencé dans les années 70 avec les travaux de Taylor et Hood [TAY 73], Connor et Brebbia [CON 76]. Dans le domaine de la modélisation de la turbulence, citons, parmi d'autres, les travaux de Launder [LAU 84], Bouttes [BOU 94] en 2D, Rodi [LES 79] et Jaeger [JAE 90] en 3D.

Dans le domaine de l'hydraulique à surface libre, il s'est également avéré nécessaire de développer des modèles aux éléments finis pour reproduire les écoulements turbulents mus par la gravité en rivière, forcés par la marée en mer ou leur jonctions en estuaires. A cet égard nous pouvons citer le premier modèle 3D en couches par éléments finis de Wang [WAN 75] sur la base des travaux de Leendertse *et al* [LEE 73] en différences finies. C'est un modèle basé sur l'hypothèse de répartition hydrostatique des pressions ; il est obtenu par une intégration des équations de Navier-Stokes sur plusieurs couches. King *et al.* [KIN 87] ont repris ce modèle mais en utilisant une approximation verticale facilitant alors la mise en œuvre.

En France, nous citons les travaux de Provost et Poncet [PRO 78], ainsi que ceux de Daubert et Cahouet [DAU 84], Hauguel [HAU 86], Hervouet [HER 91] et Péchon au laboratoire National d'Hydraulique (LNH) de EDF. Le groupe UTC/STCPMVN appelé (GHN) a également apporté une contribution dans le domaine de la modélisation en hydraulique à surface libre par éléments finis en 2D et 3D. Cochet [COC 79], Hubert [HUB 84] et Zhang [ZHA 92] ont développé différents éléments pour la modélisation 2D horizontale de Saint-Venant. G. Rouas [ROU 96] a développé un modèle 2DV. Robert [ROB 83], Leclerc [LEC 85], Heniche [HEN 95] et Frenette [FRE 96] ont proposé chacun un modèle 3D à pression hydrostatique. Soulaïmani [SOU 91] pour sa part, a mis en œuvre un modèle 3D général en représentation eulérienne-lagrangienne.

La condition d'existence et d'unicité d'une solution au problème mixte de Stokes a été étudiée par Ladyzhenskaya [LAD 69], Brezzi [BRE 94] et Babuska [BAB 71]. Elle conduit à une condition de consistance entre les espaces de vitesse et de pression ; il s'agit de la condition de L.B.B. Compte tenu des différents travaux, il est établi que l'approximation des vitesses doit être plus riche que celle de la pression. Le non-respect de cette règle engendre une solution numérique polluée par des oscillations non physiques notamment en présence des conditions aux limites sévères [HUG].

De nombreux travaux de recherche ont été menés pour développer des éléments finis en 3D pour les fluides incompressibles. La règle était qu'il fallait prendre soin

d'enrichir l'approximation des vitesses par rapport à celle de la pression/hauteur d'eau.

Leclerc a développé le prisme à 15 nœuds (P15) avec une approximation quadratique en vitesse et linéaire en hauteur d'eau. Là également apparaissent des oscillations (cas de l'écoulement dans un coude). Hubert et Jaeger ont développé le cube à huit nœuds (H8) linéaire en vitesse et constant en pression. Le H8 se comporte suffisamment bien s'il n'est pas trop distordu, d'après Jaeger. Hubert a développé le H8N en ajoutant un degré de liberté supplémentaire (vitesse normale) sur chaque face du cube. Soulaïmani a développé le tétraèdre à 4 nœuds (T4) avec des approximations linéaires en pression et enrichies par une fonction bulle en vitesse. Heniche a développé le prisme à 6 nœuds (P6) linéaire en vitesse et en pression en utilisant une formulation de type Pétrov-Galerkin et moindres carrés.

Si tous les modèles bidimensionnels verticaux ou tridimensionnels donnent des réponses satisfaisantes dans des cas schématiques, ils sont loin d'être robustes, fiables et utilisables dans un contexte opérationnel. Par ailleurs, la demande s'oriente vers des modèles assez génériques mais modulables qui puissent traiter à la fois du 1D, du 2D ou du 3D (hydrostatique ou non), des écoulements en mer (courant, houle, estuaire), en rivière (longs linéaires ou localement) ou en lac (courants de densité, recirculations dues au vents).

Dans la première partie, nous avons développé un modèle bidimensionnel vertical basé sur une approche dite h-s. Dans cette seconde partie, nous étendons l'expression du champ de vitesse pour construire un modèle tridimensionnel complet. Rappelons que l'approche h-s consiste en une approximation de type éléments finis dans le plan (x,y) et de type analytique (séries) selon z . Le choix de la série ainsi que le nombre de ses termes dépendent de la physique du problème et de la précision souhaitée.

2. Généralités

2.1. Système de coordonnées

Considérons deux repères donnés par la figure 1, l'un fixe (X,Y,Z) ayant pour base (I,J,K) , l'autre mobile (x,y,z) attaché à la terre, et ayant pour base (i,j,k) , il tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, ω est la vitesse angulaire de la terre. Il est courant de choisir :

$$x \equiv \text{Est} \quad y \equiv \text{Nord} \quad z \equiv \text{Zénith}$$

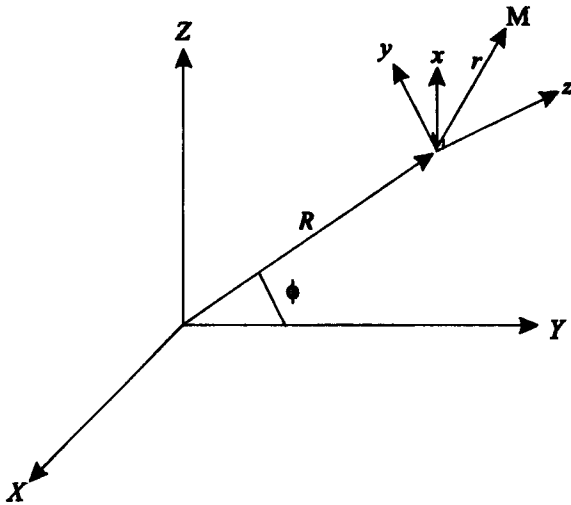


Figure 1. Systèmes de coordonnées

ϕ étant la latitude. En choisissant Z-X et z-y coplanaires (Figure 1), le vecteur de rotation $\bar{\omega}$ de la terre s'exprime dans le repère (x,y,z) comme suit :

$$\bar{\omega} = \omega [\cos(\phi)\bar{j} + \sin(\phi)\bar{k}] \tag{1}$$

Le rayon vecteur d'un point M quelconque dans le repère (x,y,z) s'écrit :

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} \tag{2}$$

La vitesse matérielle au point M dans le repère (x,y,z) s'écrit :

$$\bar{v} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k} \tag{3}$$

L'accélération matérielle au point M dans le repère (x,y,z) s'exprime par :

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{a}_{coriolis} + \bar{g} \tag{4}$$

\bar{g} est l'accélération de la pesanteur qui a pour valeur 9.81 m/s^2 .

$$\bar{a}_{coriolis} = 2\bar{\omega} \wedge \bar{v} = 2\omega \sin(\phi)(v\bar{i} - u\bar{j}) \tag{5}$$

2.2. Surface libre

La surface libre (Figure 2) est présentée sous la forme :

$$\Phi(x, y, t) = h(x, y, t) - z_s = 0 \quad [6.a]$$

Sous forme différentielle :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} u_s + \frac{\partial h}{\partial y} v_s - w_s = 0 \quad [6.b]$$

L'indice 's' est relatif à la surface libre.

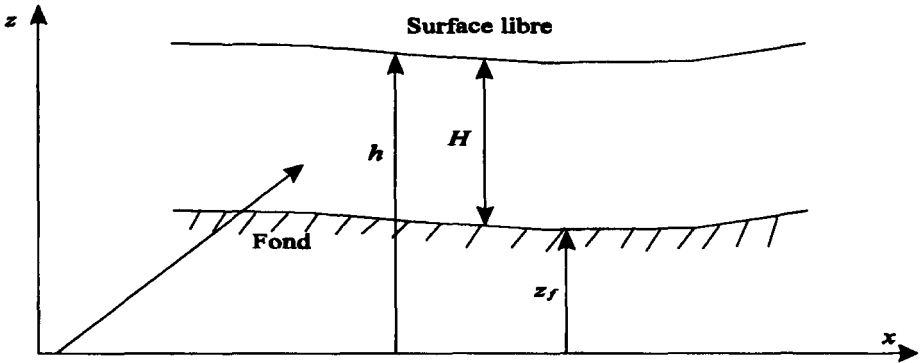


Figure 2. Représentation du fond et de la surface libre

2.3. Fond

La surface du fond (Figure 2) s'écrit sous forme différentielle :

$$\frac{\partial z_f}{\partial x} u_f + \frac{\partial z_f}{\partial y} v_f - w_f = 0 \quad [7]$$

3. Écritures fortes

3.1. Lois de Conservation

Les problèmes de fluides incompressibles sont caractérisés par les relations de la conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement.

$$Div \bar{v} = 0 \quad [8]$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{v} + \frac{1}{\rho} (\nabla p - Div \bar{\tau}) - \bar{F}ext = \bar{0} \quad [9]$$

$$\bar{F}ex = \bar{a}_{corolis} - g \bar{k} \quad [10]$$

3.2. Lois de comportement

3.2.1. Contraintes

Le tenseur des contraintes est de la forme [FRE 96, ROB 83]

$$\bar{\tau} = \rho \begin{bmatrix} 2v_{th}u_{,x} & v_{th}(u_{,x} + v_{,y}) & v_{tz}(u_{,z} + w_{,x}) \\ v_{th}(u_{,x} + v_{,y}) & 2v_{th}v_{,y} & v_{tz}(v_{,z} + w_{,y}) \\ v_{tz}(u_{,z} + w_{,x}) & v_{tz}(v_{,z} + w_{,y}) & 2v_{tz}w_{,z} \end{bmatrix} \quad [11]$$

3.2.2. Viscosité

La viscosité horizontale v_{th} est supposée constante, alors que la viscosité verticale v_{tz} qui est simulée par le concept de la longueur de mélange [FRE 96, HEN 95, ROB 83], s'exprime par la relation :

$$v_{tz} = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \quad [12]$$

l_m est la longueur de mélange verticale. Sa distribution suit une forme parabolique dissymétrique puisque les fluctuations turbulentes sont plus amorties par le fond que par la surface libre. Cette représentation a permis de reproduire correctement les profils de vitesses dans les écoulements à surface libre :

$$l_m = \kappa z \sqrt{1 - \frac{z}{H}} \quad [13]$$

où κ est la constante de Von Karman et H la profondeur d'écoulement.

3.3. Nature de la pression

A l'instant t, en un point donné, la pression p est égale à :

$$p(x, y, z, t) = p_{atm} + p_{hydrosta} + \rho p'$$

où p_{atm} est la pression atmosphérique, $p_{hydrosta}$ la pression due au poids de la colonne d'eau au niveau z et $\rho p'$ est la pression supplémentaire générée par le mouvement de l'eau.

$$\begin{aligned}
 p_{hydrosta}(x, y, z, t) &= \rho g(h(x, y, t) - z) \\
 p(x, y, z, t) &= \rho g(h(x, y, t) - z) + p_{atm} + \rho p'(x, y, z, t)
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

3.4. Conditions aux limites

Pour un fluide visqueux, les conditions aux limites sont, soit de type vitesse appliquées sur une surface S_1 , soit de type contrainte appliquées sur S_2 (Figure 3.a).

— Conditions sur u (dite condition de Dirichlet)

$$u = u_s \quad \text{sur } S_1 \tag{15}$$

— Condition sur τ_{ij} (dite condition de Cauchy-Neuman)

$$\bar{\tau}_n = \bar{\tau} \bar{n} \quad \text{sur } S_2 \tag{16}$$

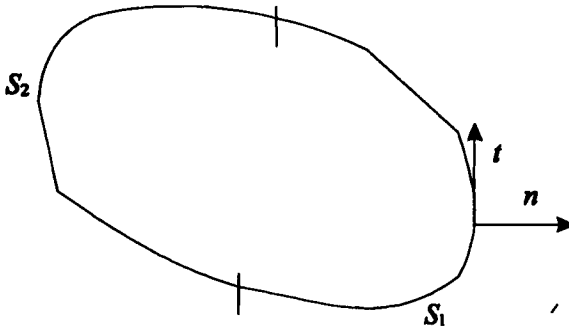


Figure 3.a. Conditions aux limites

En hydraulique, le domaine V est délimité par plusieurs frontières (Figure 3.b).

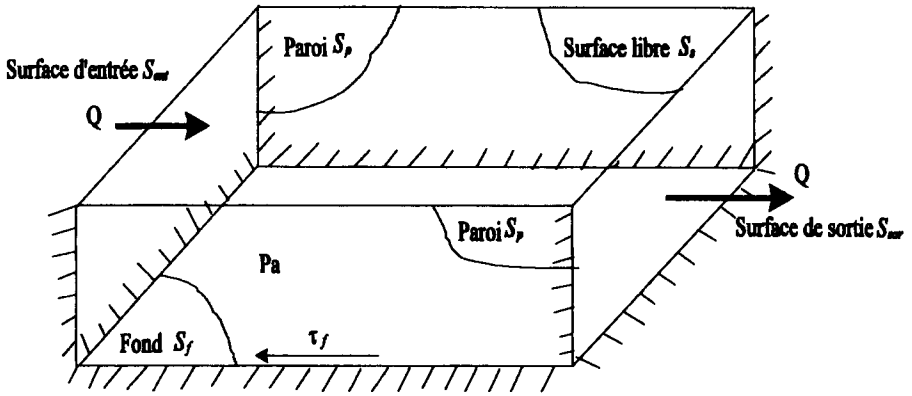


Figure 3.b. Contour du domaine

$$S = \partial V = S_f \cup S_s \cup S_p \cup S_{ent} \cup S_{sor}$$

La surface libre S_s est délimitée par les frontières suivantes (Figure 3.c).

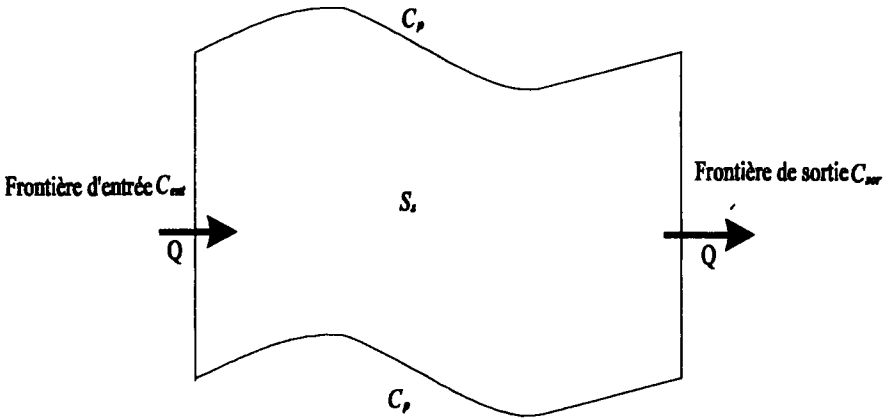


Figure 3.c. Contour de la surface libre

$$C = \partial S_s = C_{ent} \cup C_{sor} \cup C_p$$

3.4.1. Surface libre

Condition cinématique

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{Div} \bar{q} = 0 \quad [17]$$

$$q_x = \int_{z_f}^h u dz \quad q_y = \int_{z_f}^h v dz \quad [18]$$

Condition mécanique

La pression est égale à la pression atmosphérique.

$$p = p_{atm} \Rightarrow p' = 0 \quad [19]$$

La surface libre peut être aussi sollicitée par le vent dont la force a pour expression [HEN 95, LEC 85] :

$$\tau_s^i = -c_{10} \rho_a |\bar{w}_{10}| w_{10}^i \quad [20]$$

c_{10} : coefficient de frottement correspondant à une vitesse du vent mesurée à 10 m au-dessus de la surface du plan d'eau.

ρ_a : masse spécifique de l'air.

w_{10}^i : composante i de la vitesse du vent à 10 m.

3.4.2. Fond

Sur le fond, nous utilisons d'une part, la condition d'imperméabilité selon \bar{n} :

$$u_n = 0$$

D'autre part, la contrainte de frottement au fond peut être exprimée par :

$$\bar{\tau}_f = -\rho \beta |\bar{v}_f| \bar{v}_f \quad [21]$$

β s'exprime par l'une des trois expressions :

$$\beta = \frac{g}{C_f^2} \quad [22]$$

$$\beta = \frac{n^2 g}{H^{1/3}} \quad [23]$$

$$\beta = \frac{1}{\left[\frac{1}{k} \text{Log} \left(30 \frac{z_{\min}}{k_s} \right) \right]^2} \quad [24]$$

z_{\min}, k_s, κ sont respectivement la cote du fond, la rugosité du fond et la constante de Karmann. C_f, n sont respectivement les coefficients de frottement de type Chezy et Manning.

3.4.3 Parois

De même pour les parois, nous avons :

$$\begin{aligned} u_n &= 0 \\ \bar{\tau}_p &= -\rho c_p |\bar{u}_p| \bar{u}_p \end{aligned} \quad [25]$$

c_p est le coefficient de frottement sur les parois.

4. Ecritures faibles

Dans cette approche, nous allons affaiblir juste les deux équations de la conservation de la quantité de mouvement selon (x, y) et celle de la cinématique de la surface libre. L'équation de conservation de la quantité de mouvement selon z et celle de continuité sont utilisées au sens fort. La forme variationnelle associée aux équations [9] et [17] s'écrit :

$$\begin{aligned} W &= W_{N-S} + W_h \quad [26] \\ W_{N-S} &= \int_V \left[\delta U (U_{,i} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \cdot U + g \vec{\nabla} h) - \nabla \delta U \cdot \vec{p}' + \frac{1}{\rho} \nabla \delta U \cdot \bar{\vec{\tau}} - F_{zi}^{(x,y)} \right] dV \quad [27.a] \\ &\quad - \int_S \frac{1}{\rho} \delta U \bar{\tau}_n dS + \int_S \delta U_n \vec{p}' dS \\ W_h &= \int_{S_z} (\delta h h_{,i} - \vec{\nabla} \delta h \cdot \vec{q}) dS + \int_C \delta h q_n dC = 0; \quad [27.b] \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, $\bar{\vec{\tau}}, U, I$ désignent les quantités suivantes :

$$\bar{\vec{\tau}} = \rho \begin{bmatrix} 2\nu_{th} u_{,x} & \nu_{th}(u_{,x} + v_{,y}) & \nu_{tz}(u_{,z} + w_{,x}) \\ \nu_{th}(u_{,x} + v_{,y}) & 2\nu_{th} v_{,y} & \nu_{tz}(v_{,z} + w_{,y}) \end{bmatrix}, \quad U = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [28]$$

5. Traitement de la surface libre

La difficulté de la modélisation des écoulements à surface libre réside dans le fait que cette dernière constitue à la fois une frontière du domaine et une inconnue du problème. Pour aborder cette question, nous distinguons plusieurs approches.

5.1. Approche lagrangienne

Dans cette approche, les nœuds sont attachés au fluide. Chaque élément est lié avec la position d'un élément du fluide à chaque instant. Démarrant d'un maillage initial, les nœuds se déplacent dans le temps en gardant les connectivités initiales. Lorsque le maillage devient trop distordu, un remaillage est nécessaire. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de déterminer avec précision la position de la frontière mobile dans le cas de petits déplacements. Par contre, dans le cas de grandes déformations de la frontière mobile, le maillage devient très distordu. L'ajustement du maillage au voisinage de cette frontière est très complexe, ce qui peut être une cause d'instabilités numériques.

5.2. Approche eulérienne

Dans cette approche, le maillage est fixe dans tout le domaine et les éléments peuvent être entièrement ou partiellement occupés par le fluide ou complètement secs. L'avantage est que le calcul donne une bonne précision même dans le cas où la frontière mobile subirait de grandes déformations. La difficulté réside dans le développement d'une technique pour obtenir la frontière non stationnaire qui évite la violation de la continuité et de la conservation de la quantité de mouvement.

5.3. Approche lagrangienne-eulérienne

De manière à éviter les phénomènes de distorsion, Daubert et Cahouet [DAU 84] et Soulaïmani [SOU 91] utilisent la méthode eulérienne-lagrangienne où le domaine de calcul, obtenu au moyen d'une transformation géométrique du maillage, reste fixe. Cette méthode est très précise dans le suivi de la surface libre et en autorise de fortes cambrures. De plus, elle conserve son aspect eulérien dans le calcul des champs de vitesses et de pression. Contrairement à la méthode à maillage fixe, cette méthode, d'une part, n'est pas en mesure de simuler les écoulements à surfaces libres multiples, d'autre part, elle est difficile à mettre en œuvre pour les terrains complexes.

5.4. Notre approche *h-s* [MEF 98]

Pour remédier au problème de distorsion qui peut être la principale cause d'instabilité, et compte tenu du fait que pour les écoulements fluviaux et maritimes, la dimension horizontale est très dominante par rapport à la dimension verticale, nous avons développé une approche qui consiste à donner un traitement particulier aux variables selon z . Notre approche est basée sur une approximation de type éléments finis dans le plan horizontal (x,y) et de type analytique (séries) selon z , d'où l'appellation *h-s*.

Cette approche consiste d'abord à choisir une forme analytique (série) selon z des composantes horizontales de la vitesse ($u(x,y,z,t)$ et $v(x,y,z,t)$). Le choix de la série ainsi que le nombre de ses termes dépendent de la physique du problème et de la précision souhaitée. Cette série peut être de nature polynomiale, logarithmique, hyperbolique, trigonométrique ou autre. Etant choisi la forme de la vitesse horizontale, nous en déduisons les expressions analytiques de la composante verticale $w(x,y,z,t)$ et celle de la pression $p'(x,y,z,t)$ en utilisant respectivement l'équation de continuité et celle de la conservation de la quantité de mouvement selon z . Pour transformer le modèle initialement dépendant de x,y,z en un modèle dépendant de x,y uniquement, nous effectuons une intégration explicite des équations de Navier Stokes sur la verticale. Nous résolvons le modèle bidimensionnel obtenu par la méthode des éléments finis, puis nous restituons la forme générale des vitesses selon z au moyen de la forme analytique initialement choisie. Les avantages de cette approche sont les suivants :

a- Maillage 2DH

Cette approche est capable de mieux capter la variation selon z , car nous pouvons introduire directement les lois qui correspondent à la physique du problème. Elle permet un meilleur traitement de la surface libre. En effet, dans cette approche le maillage est bidimensionnel horizontal, chaque verticale contenant n nœuds est remplacée par un seul nœud très enrichi en degrés de liberté que nous avons surnommé super nœud (Figure 4).

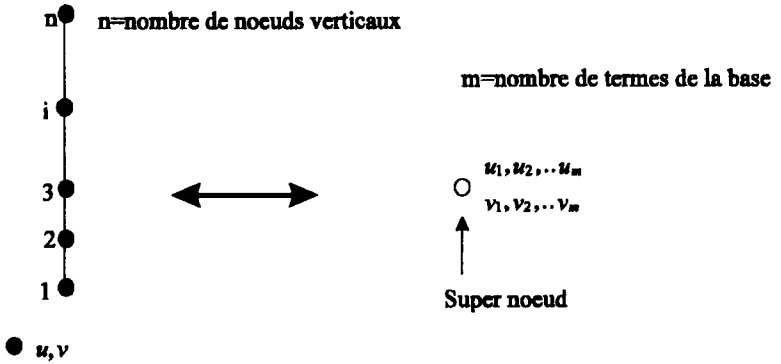


Figure 4. Maillage 2DH

Par conséquent, la variation de la surface libre est représentée uniquement par l'actualisation de la hauteur totale de l'écoulement H se trouvant dans les coefficients qui résultent de l'intégration explicite des équations de Navier Stokes sur la verticale (Equation [45]). Le fait d'éliminer le maillage vertical, principale cause d'instabilité, revient à donner au modèle plus de stabilité, d'efficacité et de robustesse.

b- Orthogonalité

Bien que l'orthogonalité de la série selon z ne soit pas une condition nécessaire, elle permet :

- de simplifier le calcul de la matrice masse,
- un meilleur conditionnement de la matrice tangente,
- de faciliter l'introduction des conditions aux limites [MEF 98].

c- Modèles dégradés

Il est très intéressant de noter que, dans le cas particulier où nous choisissons une approximation constante selon z (vitesse moyennée), nous retrouvons le modèle de Serre-Boussinesq [DUF 97], si en plus, nous supposons un profil hydrostatique de la pression, notre modèle se réduit alors à celui de Saint-Venant [ZHA 92].

5.4.1. Notation

Afin de réduire la lourdeur des expressions, nous adopterons la notation d'Einstein.

5.4.2. *Traitement selon z*

Pour bien situer notre démarche, nous présentons d'abord le traitement des termes selon la verticale. Notre objectif consiste à transformer le modèle en (x,y,z) en un modèle en (x,y) .

a- Expression de la composante horizontale de la vitesse.

Nous proposons la forme suivante du champ de vitesse :

$$u(x, y, z, t) = \phi_i(z) u_i(x, y, t) \quad i = 1, m \quad [29]$$

$$v(x, y, z, t) = \phi_i(z) v_i(x, y, t) \quad i = 1, m \quad [30]$$

— $\phi_i(z)$ représente le terme de la base, son choix dépend de la physique du problème. Elle peut être de nature polynomiale, logarithmique, hyperbolique, trigonométrique ou autre.

— m est le nombre des termes de la base, il permet de représenter la variation selon z avec la précision souhaitée.

b- Expression de la composante verticale de la vitesse

La vitesse verticale $w(x,y,z,t)$ s'obtient en intégrant l'équation de continuité du fond à une cote z :

$$\int_{z_f}^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0$$

$$w(x, y, z, t) = w_f(x, y, t) + \Psi_i(z) w_i(x, y, t) \quad [31]$$

D'après [7] :

$$w_f(x, y, t) = \frac{\partial z_f}{\partial x} \phi_i(z_f) u_i + \frac{\partial z_f}{\partial y} \phi_i(z_f) v_i$$

$$w_i(z) = - \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) \quad [32]$$

$$\Psi_i(z) = \int_{z_f}^z \phi_i(z) dz \quad [33]$$

c- Expression de la pression non hydrostatique

Considérons l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon z , en négligeant les contraintes visqueuses, cette dernière se réduit à :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad [34]$$

En tenant compte de la relation [14], l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} = 0 \quad [35]$$

En remplaçant u , v et w par les expressions [29], [30], [31] et en intégrant l'équation [35] de z à h , nous obtenons :

$$\begin{aligned} p'(x, y, z, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \left[-\theta_i(z) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} \right) + (h-z) \phi_i(z_f) \left(\frac{\partial z_f}{\partial x} u_i + \frac{\partial z_f}{\partial y} v_i \right) \right] \\ & + s_{ij}(z) \left(u_i \frac{\partial w_j}{\partial x} + v_i \frac{\partial w_j}{\partial y} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} \right) \right) \\ & + g_i(z) \phi_j(z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} \left(u_i \frac{\partial u_j}{\partial x} - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x} - u_j \frac{\partial v_i}{\partial y} + v_i \frac{\partial u_j}{\partial y} \right) \\ & + g_i(z) \phi_j(z_f) \frac{\partial z_f}{\partial y} \left(v_i \frac{\partial v_j}{\partial y} - v_j \frac{\partial v_i}{\partial y} - v_j \frac{\partial u_i}{\partial x} + u_i \frac{\partial v_j}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad [36]$$

avec

$$\theta_i(z) = \int_z^h \Psi_i(z) dz \quad [37]$$

$$g_i(z) = -\Psi_i(z) + \int_{z_f}^h \phi_i(z) dz \quad [38]$$

$$s_{ij}(z) = \int_z^h \phi_i(z) \Psi_j(z) dz \quad [39]$$

5.4.3. Intégration explicite sur la verticale

Nous choisissons les fonctions de pondération $\delta u, \delta v$ de la même forme que u et v .

$$\delta u(x, y, z) = \phi_i(z) \delta u_i(x, y) \quad [40]$$

$$\delta v(x, y, z) = \phi_i(z) \delta v_i(x, y) \quad [41]$$

Reprenons la forme faible [27.a] et remplaçons $\delta u, \delta v, u, v, w, p'$ respectivement par les relations [40], [41], [29], [30], [31], [36]. En intégrant du fond à la surface libre et en divisant le tout par H, nous obtenons :

Termes de domaines

$$\begin{aligned}
 W_{D1} = \int_A \left\{ \delta u_i \left[a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + b_{ijk} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} u_j + \frac{\partial u_k}{\partial y} v_j \right) + c_{ijk} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} u_j + \frac{\partial v_k}{\partial y} u_j \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + d_{ijk} u_j \left(\frac{\partial z_f}{\partial x} u_k + \frac{\partial z_f}{\partial y} v_k \right) + e_{ij} u_j + \sigma_i \left(g \frac{\partial h}{\partial x} - F_{zx}^i \right) \right] \right. \\
 \left. + g_{ij} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x} \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial y} \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) \right. \\
 \left. - \frac{\partial \delta u_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left[p_{ij} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} \right) + x_{ij} \left(\frac{\partial z_f}{\partial x} u_j + \frac{\partial z_f}{\partial y} v_j \right) \right] \right. \\
 \left. - \frac{\partial \delta u_i}{\partial x} q_{ijk} \left[\left(\frac{\partial w_k}{\partial x} u_j + \frac{\partial w_k}{\partial y} v_j \right) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} \right) \right] \right. \\
 \left. - \frac{\partial \delta u_i}{\partial x} r_{ijk} \left[\frac{\partial z_f}{\partial x} \left(u_j \frac{\partial u_k}{\partial x} - u_k \frac{\partial u_j}{\partial x} - u_k \frac{\partial v_j}{\partial y} + v_j \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{\partial z_f}{\partial y} \left(v_j \frac{\partial v_k}{\partial y} - v_k \frac{\partial v_j}{\partial y} - v_k \frac{\partial u_j}{\partial x} + u_j \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) \right] \right\} dA \tag{43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_{D2} = \int_A \left\{ \delta v_i \left[a_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial t} + b_{ijk} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x} u_j + \frac{\partial v_k}{\partial y} v_j \right) + c_{ijk} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} v_j + \frac{\partial v_k}{\partial y} v_j \right) \right. \right. \\
 \left. \left. + d_{ijk} v_j \left(\frac{\partial z_f}{\partial x} u_k + \frac{\partial z_f}{\partial y} v_k \right) + e_{ij} v_j + \sigma_i \left(g \frac{\partial h}{\partial x} - F_{zx}^i \right) \right] \right. \\
 \left. + g_{ij} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x} \frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial y} \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) \right. \\
 \left. - \frac{\partial \delta v_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} \left[p_{ij} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} \right) + x_{ij} \left(\frac{\partial z_f}{\partial x} u_j + \frac{\partial z_f}{\partial y} v_j \right) \right] \right. \\
 \left. - \frac{\partial \delta v_i}{\partial y} q_{ijk} \left[\left(\frac{\partial w_k}{\partial x} u_j + \frac{\partial w_k}{\partial y} v_j \right) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} \right) \right] \right. \\
 \left. - \frac{\partial \delta v_i}{\partial y} r_{ijk} \left[\frac{\partial z_f}{\partial x} \left(u_j \frac{\partial u_k}{\partial x} - u_k \frac{\partial u_j}{\partial x} - u_k \frac{\partial v_j}{\partial y} + v_j \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) + \right. \right. \\
 \left. \left. \frac{\partial z_f}{\partial y} \left(v_j \frac{\partial v_k}{\partial y} - v_k \frac{\partial v_j}{\partial y} - v_k \frac{\partial u_j}{\partial x} + u_j \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) \right] \right\} dA \tag{44}
 \end{aligned}$$

$$a_{ij} = \frac{1}{H} \int_{z_f}^h \phi_i(z) \phi_j(z) dz, \quad b_{ijk} = \frac{1}{H} \int_{z_f}^h \phi_i(z) \phi_j(z) \phi_k(z) dz \quad [45. a]$$

$$c_{ijk} = \frac{1}{H} \int_{z_f}^h \phi_i(z) \frac{\partial \phi_j(z)}{\partial z} \Psi_k(z) dz, \quad d_{ijk} = \frac{1}{H} \phi_k(z_f) \int_{z_f}^h \phi_i(z) \frac{\partial \phi_j(z)}{\partial z} dz \quad [45. b]$$

$$e_{ij} = \frac{1}{H} \int_{z_f}^h v_{tz} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dz, \quad p_{ij} = -\frac{1}{H} \int_{z_f}^h \phi_i(z) \theta_j(z) dz \quad [45. c]$$

$$r_{ijk} = \frac{\phi_k(z_f)}{H} \int_{z_f}^h \phi_i(z) g_j(z) dz, \quad x_{ij} = \frac{1}{H} \phi_j(z_f) \int_{z_f}^h \phi_i(z) (h - z) dz \quad [45. d]$$

$$q_{ijk} = \frac{1}{H} \int_{z_f}^h \phi_i(z) s_{ij}(z) dz, \quad \sigma_i = \frac{1}{H} \int_{z_f}^h \phi_i(z) dz \quad [45. e]$$

Dans le calcul intégral précédent, le domaine d'intégration est l'intervalle $[z_f, h]$, or h est une variable du problème, et par conséquent nous sommes obligés de calculer ses intégrales pour chaque pas temps (ou pour chaque itération éventuellement) et surtout pour chaque élément, ce qui alourdit considérablement le modèle. Pour contourner cet inconvénient, nous choisissons nos fonctions, dans la mesure du possible, de telle sorte qu'après changement de variable, ces fonctions ainsi que le domaine d'intégration ne dépendent plus des variables de notre problème.

Le calcul des coefficients ci-dessus peut se faire d'une manière complètement analytique dans la mesure où les fonctions choisies sont faciles à intégrer, mais elles doivent présenter une relation de récurrence permettant de calculer chaque groupe de coefficients. Si le calcul s'avère fastidieux, nous pouvons utiliser l'intégration numérique de Gauss.

Termes de contour

— Fond

$$\frac{-1}{\rho H} \int_{S_f} \delta u \tau_{nx} dS = \int_A f_{ij} \delta u_i u_j dA \quad [46. a]$$

$$\frac{-1}{\rho H} \int_{S_f} \delta u \tau_{ny} dS = \int_A f_{ij} \delta v_i v_j dA \quad [46. b]$$

$$f_{ij} = \frac{\beta}{H} \phi_i(z_f) \phi_j(z_f) |\phi_k(z_f)| \sqrt{u_k^2 + v_k^2} \quad [47]$$

— Surface libre

$$\frac{1}{\rho H} \int_{S_f} \delta u \tau_{nx} dS = \frac{\phi_i(h)}{\rho H} \int_A \delta u_i \tau_x^i dA \quad [48.a]$$

$$\frac{1}{\rho H} \int_{S_f} \delta v \tau_{ny} dS = \frac{\phi_i(h)}{\rho H} \int_A \delta v_i \tau_y^i dA \quad [48.b]$$

Dans le cas du vent, τ_i^j est donnée par l'équation [20]

— Parois

$$\frac{-1}{\rho H} \int_{S_p} \delta u_i \tau_{ni} dS = \eta_{ijk} \int_{C_p} \delta u_n c_p u_{ij} |u_{ik}| dC \quad [49]$$

$$\eta_{ijk} = \frac{1}{H} \int_{z_i}^h \phi_i(z) \phi_j(z) |\phi_k(z)| dz \quad [50]$$

t est la direction tangentielle.

6. Choix des éléments

L'élément utilisé dans cette étude est l'élément T6L. C'est un triangle à six nœuds composé de 4 sous-triangles à trois nœuds (Figure 5.a) où l'approximation des vitesses est linéaire dans chaque sous-triangle, et l'approximation du niveau d'eau est linéaire dans le triangle principal.

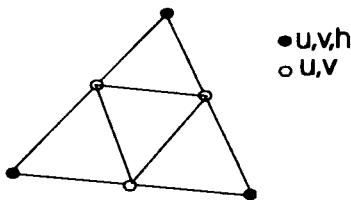


Figure 5.a. Elément de domaine T6L

Il en résulte un élément de frontière L3L à 3 nœuds, composé de 2 sous-éléments L2 (Figure 5.b).

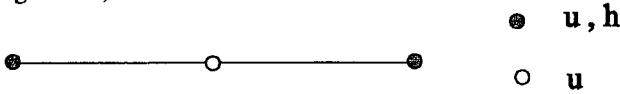


Figure 5.b. Élément de frontière L3L

7. Schéma de discrétisation temporelle

Pour pouvoir résoudre notre système d'équations, il nous faut une méthode d'approximation des dérivées temporelles qui soit simple, performante et qui ne dégrade pas l'approximation spatiale. Nous avons opté pour deux types de schémas, le premier est celui d'Euler implicite qui s'adapte bien aux problèmes stationnaires. Pour les problèmes transitoires, nous avons opté pour un schéma explicite de type Lax-Wendroff.

7.1. Schéma d'Euler implicite

La dérivée temporelle est approximée par :

$$\dot{U} = \frac{U_{t+\Delta t} - U_t}{\Delta t} \Big|_{t+\Delta t} \quad [51]$$

La forme variationnelle mixte W , après discrétisation spatiale et introduction des conditions aux limites, se présente sous la forme matricielle :

$$W = \langle \delta U \rangle \left\{ [M] \{ \dot{U} \} + [K(U)] \{ U \} - \{ F \} \right\} = 0 \quad [52]$$

$[M]$: La matrice masse

$[K(U)]$: La matrice de rigidité

$\{F\}$: Le vecteur des sollicitations

$\{U\}$: Le vecteur global des degrés de liberté u, h

$\langle \delta U \rangle$: Le vecteur global des degrés de liberté virtuels $\delta u, \delta v, \delta h$

La matrice masse $[M]$ est donnée par la relation [67].

En injectant la relation [51] dans [52], nous obtenons le système algébrique [53] non linéaire, que nous résolvons par la méthode de Newton-Raphson.

$$[M]\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\} + \Delta t [K(U_{t+\Delta t})]\{U_{t+\Delta t}\} - \{F\} = 0 \quad [53]$$

Méthode de Newton Raphson

Le système à résoudre est donné par :

$$[K_T]\{\Delta U^i\} = \{R_{ni}\} \quad [54]$$

$$[K_T] = [M] + \Delta t [K(U_{t+\Delta t}^{i-1})] \quad [55]$$

$$\{R_{ni}\} = \Delta t (\{F_{t+\Delta t}\} - [K(U_{t+\Delta t}^{i-1})]\{U_{t+\Delta t}^{i-1}\}) - [M]\{U_{t+\Delta t}^{i-1}\} - \{U_t\} \quad [56]$$

La matrice tangente $[K_T]$ est obtenue par discrétisation de ΔW [52]. La solution est calculée par des accroissements successifs :

$$\{U_{t+\Delta t}^i\} = \{U_{t+\Delta t}^{i-1}\} + \{\Delta U^i\} \quad [57]$$

La convergence de la méthode est quadratique. La solution est atteinte lorsque la norme $\{\Delta U^i\}$ est inférieure ou égale à la précision souhaitée.

Le schéma implicite d'Euler est réputé stable mais souffre d'un handicap sérieux pour les problèmes instationnaires à savoir :

- la diffusion importante de la solution pour les grands pas de temps,
- le coût élevé du calcul, du stockage et de la décomposition de la matrice tangente.

7.2. Schéma de Lax-Wendroff

Soient les équations de Navier-Stokes intégrées sur la verticale et écrites sous forme conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t} (U + Div(p_1 I)) + Div(\bar{q}^c + \bar{q}^d + p_2 I) + f = 0 \quad [58]$$

Ces équations peuvent être déduites des relations [43], [44] et [17].

$$U = \begin{Bmatrix} a_{ij} u_j \\ a_{ij} v_j \\ h \end{Bmatrix} \quad [59.a]$$

$$p_1 = p_{ij} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} \right) + x_{ij} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z_f}{\partial x} u_j + \frac{\partial z_f}{\partial y} v_j \right) \quad [59.b]$$

$$\begin{aligned}
 p_2 = & q_{ijk} \left[\left(\frac{\partial w_k}{\partial x} u_j + \frac{\partial w_k}{\partial y} v_j \right) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial v_j}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial y} \right) \right] \\
 & + r_{ijk} \left[\frac{\partial z_f}{\partial x} \left(u_j \frac{\partial u_k}{\partial x} - u_k \frac{\partial u_j}{\partial x} - u_k \frac{\partial v_j}{\partial y} + v_j \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) \right] \\
 & + r_{ijk} \left[\frac{\partial z_f}{\partial y} \left(v_j \frac{\partial v_k}{\partial y} - v_k \frac{\partial v_j}{\partial y} - v_k \frac{\partial u_j}{\partial x} + u_j \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{59.c}$$

$$q_x^c = \left\{ \begin{array}{l} b_{ijk} u_j u_k + \sigma_i gh \\ b_{ijk} u_j v_k \\ H\bar{u} \end{array} \right\}, q_y^c = \left\{ \begin{array}{l} b_{ijk} u_j v_k \\ b_{ijk} v_j v_k + \sigma_i gh \\ H\bar{v} \end{array} \right\} \tag{60.a}$$

$$q_x^d = \left\{ \begin{array}{l} -g_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \\ -g_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x} \\ 0 \end{array} \right\}, q_y^d = \left\{ \begin{array}{l} -g_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial y} \\ -g_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial y} \\ 0 \end{array} \right\} \tag{60.b}$$

$$f = \left\{ \begin{array}{l} c_{ijk} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} u_j + \frac{\partial v_k}{\partial y} u_j \right) + d_{ijk} u_j \left(\frac{\partial z_f}{\partial x} u_k + \frac{\partial z_f}{\partial y} v_k \right) + e_{ij} u_j - \sigma_i F_{ext}^x \\ c_{ijk} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} v_j + \frac{\partial v_k}{\partial y} v_j \right) + d_{ijk} v_j \left(\frac{\partial z_f}{\partial x} u_k + \frac{\partial z_f}{\partial y} v_k \right) + e_{ij} v_j - \sigma_i F_{ext}^y \\ 0 \end{array} \right\} \tag{61}$$

La discrétisation temporelle se fait de la manière suivante :

$$U^{n+1} + Div(p_1 I)^{n+1} = U^n + Div(p_1 I)^n - \Delta t \left(Div(\bar{q}^c)^{n+\frac{1}{2}} + Div(\bar{q}^d + p_2 I)^n + f^n \right) \tag{62}$$

L'écriture faible associée à la relation [58] s'écrit après intégration par parties :

$$W = \int_A \left\{ \left(\delta U \Delta U - \bar{\nabla} \delta U (\Delta p_1 \mathbf{I}) + \Delta t \delta U f^n \right) - \Delta t \bar{\nabla} \delta U \left((\bar{q}^c)^{n+\frac{1}{2}} + (\bar{q}^d + p_2 \mathbf{I})^n \right) \right\} dA \quad [63]$$

$$+ \Delta t \oint_{S_2} \delta U \left[(\bar{q}^c)^{n+\frac{1}{2}} + (\bar{q}^d + p_2 \mathbf{I})^n \right] \bar{n} dS = 0$$

$$(\bar{q}^c)^{n+\frac{1}{2}} = \begin{Bmatrix} b_{ijk} u_j u_k + \sigma_i g h \\ b_{ijk} u_j v_k \\ H \bar{u} \end{Bmatrix}^{n+\frac{1}{2}} \bar{i} + \begin{Bmatrix} b_{ijk} u_j v_k \\ b_{ijk} v_j v_k + \sigma_i g h \\ H \bar{v} \end{Bmatrix}^{n+\frac{1}{2}} \bar{j} \quad [64]$$

La valeur de $U^{n+\frac{1}{2}}$ est obtenue sur chaque point de l'élément ou sur chaque point d'intégration numérique.

$$U^{n+\frac{1}{2}} = U^n - \frac{\Delta t}{2} \text{Div}(\bar{q}^c)^n \quad [65]$$

La discrétisation par éléments finis conduit au système algébrique

$$[M]\{\Delta U\} = \{R\} \quad [66]$$

$$[M] = \sum_{\text{éléments T6L}} [m_e] \quad [67]$$

$$\{R\} = \{R^A\} + \{R^{S_2}\} \quad [68]$$

$$\{R^A\} = \sum_{\text{éléments T6L}} \{r^A\} \quad [69]$$

$$\{R^{S_2}\} = \sum_{\text{éléments L3L}} \{r^{S_2}\} \quad [70]$$

$[m_e]$ est la matrice masse élémentaire associée à la forme faible :

$$W_m = \int_A (\delta U \Delta U - \bar{\nabla} \delta U (\Delta p_1 \mathbf{I})) dA \quad [71]$$

$\{r^A\}$ est le résidu élémentaire de domaine associé à la forme faible :

$$W^A = -\Delta t \int_{A^e} \left\{ \delta U f^n - \bar{\nabla} \delta U \left((\bar{q}^c)^{n+\frac{1}{2}} + (\bar{q}^d + p_2 \mathbf{I})^n \right) \right\} dA \quad [72]$$

$\{s_i\}$ est le résidu de contour associé à la forme faible :

$$W_{s_i} = -\Delta t \oint_{s_i} \delta U \left[\left(\bar{q}^c \right)^{n+\frac{1}{2}} + \left(\bar{q}^d + p_2 \mathbf{I} \right)^n \right] \bar{n} dS \quad [73]$$

La valeur de $U^{n+\frac{1}{2}}$ est donné par la relation [65].

La valeur de U^n est calculée sur l'élément de frontière L3L. Par contre, la quantité $Div(\bar{q}^c)^n$ est calculée sur l'élément de domaine T6L adjacent. Au niveau informatique, il faut donc identifier l'élément du domaine touchant l'élément de frontière. La résolution du système algébrique [66] s'effectue par la méthode itérative de Jacobi.

Algorithme pour le schéma de Lax-Wendroff

Boucle sur les pas de temps

Boucle sur les éléments de domaine (éléments T6L)

- Calculer la masse élémentaire associée à la forme W_m^c (relation [71]).
 - Calculer $U^{n+\frac{1}{2}}$ (relation [65]).
 - Calculer $(\bar{q}^c)^{n+\frac{1}{2}}$ (relation [64]).
 - Calculer le résidu $\{s_i\}$ associé à la forme $W_{s_i}^c$ (relation [72]).
 - Assembler la matrice masse et le résidu.

Fin de la boucle sur les éléments de domaine

Boucle sur les éléments de frontière

- Identifier l'élément de domaine correspondant.
- Extraire la quantité $Div(\bar{q}^c)^n$.
- Calculer le résidu $\{s_i\}$ associé à la forme $W_{s_i}^c$ (relation [73]).
- Assembler la matrice masse et le résidu.

Fin de la boucle sur les éléments de frontière

- Résolution itérative du système algébrique $[M] \{\Delta U\} = \{R\}$.
- Application des conditions aux limites.
- Mise à jour de la solution $\{U^{n+1}\} = \{U^n\} + \{\Delta U\}$.

Fin de la boucle sur les pas de temps

8. Organigramme de l'approche h-s

- Choisir une forme analytique(séries) selon z pour les composantes horizontales de la vitesse (équations [29], [30]).
- En déduire l'expression de la composante verticale de la vitesse (équation [31])
- En déduire l'expression de la partie non hydrostatique de la pression (équation [36]).
- Intégrer explicitement la forme faible sur la verticale.
- Résoudre le modèle en (x,y) obtenu par la méthode des éléments finis.
- Restituer les valeurs des variables hydrodynamiques selon z .

9. Tests de validation

9.1. Écoulement dans un coude

Description du cas test

Objectif du cas test

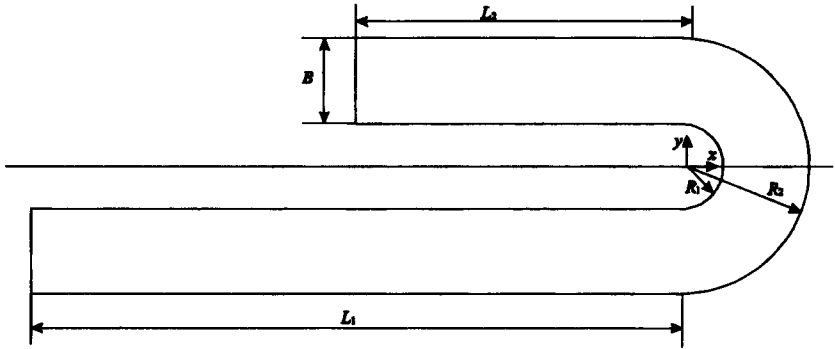
Le but de ce cas consiste à tester l'aptitude du modèle à reproduire un écoulement tridimensionnel. De nombreux travaux de recherches sur le thème conduisent aux conclusions suivantes.

- Sous l'action combinée de la force d'inertie et du frottement, l'écoulement dans coude a une structure hélicoïdale.
 - Le début de la recirculation apparaît avant l'entrée du coude.
 - En surface, les filets liquides sont orientés vers l'extérieur du coude.
 - Au fond, les filets liquides sont orientés vers l'intérieur du coude.
 - La surface libre a une pente inclinée vers l'intérieur du coude.
- La distribution de la vitesse moyenne est décroissante sur la partie concave et croissante sur la partie convexe.
- Inversion de la tendance à la sortie du coude et sur une bonne distance le long du canal à la sortie.

Description du cas test

$$J_f(\text{pente}) = 310^{-4} \text{ m/m}, \quad z_f = -0.045 - J_f s(m), \quad H = 0.06 \text{ m}$$

$$L_1 = 6 \text{ m}, \quad L_2 = 3 \text{ m}, \quad B = 0.8 \text{ m}, \quad R_1 = 0.4 \text{ m}, \quad R_2 = 1.2 \text{ m}$$

**Figure 6. Géométrie du canal****Equation/Solution**

A l'instar de Leschziner et Rodi (1979), nous avons adopté les résultats de Rozovskii (1965) comme valeurs de référence pour notre modèle. Comme nous n'avons pas la référence originale, nous nous sommes servis des valeurs citées par les premiers auteurs. Leschziner et Rodi [LES 79] ont utilisé ces résultats pour développer un modèle de turbulence (modèle $\kappa - \epsilon$). Leur modèle a été formulé en coordonnées polaires et un lissage des hauteurs d'eau a été réalisé en post-traitement en utilisant un modèle laplacien.

Données Physiques**Conditions aux limites**

Nous imposons en amont et en aval la cote de la surface libre :

$$h_{\text{amont}} = 0.015, \quad h_{\text{aval}} = 0.0115$$

Conditions initiales

Nous choisissons comme conditions initiales :

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad h = 0.015$$

Nous avons d'abord lancé un calcul sans les termes de convection, le résultat obtenu sera utilisé comme conditions initiales.

Paramètres physiques

- viscosité cinématique : $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s}^2$
- viscosité verticale : type longueur de mélange
- viscosité horizontale : $\nu_{th} = 0.00085 \text{ m}^2 / \text{s}^2$
- coefficient de frottement au fond : $C_f = 45 \text{ m}^{0.5} / \text{s}$
- coefficient de frottement aux parois : $c_p = 0.0048$

Le nombre de Reynolds est de 15.6, et le nombre de Froude est de 0.114, ce qui donne une vitesse moyenne V :

$$V = 0.26 \text{ m / s}$$

Maillage

- Nombre de nœuds : 2761
- Nombre d'éléments (domaine) T6L : 1290
- Nombre d'éléments (frontière) L3L : 186

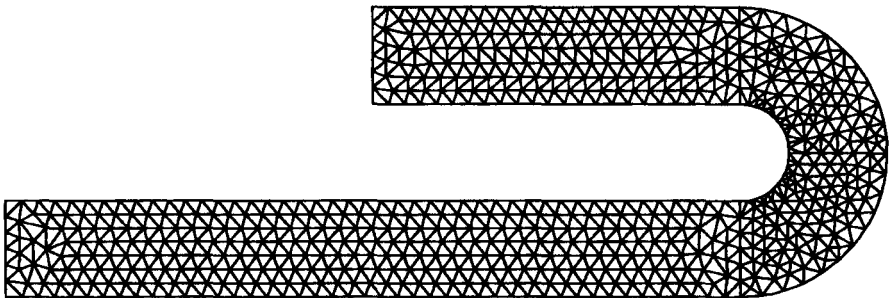


Figure 7. *Peau de maillage 2D*

Données Numériques

- Ecoulement stationnaire : Euler Implicite
- Nombre d'itérations : 9
- Critère de convergence : $(\Delta U / U) < 10^{-6}$, U étant la norme du vecteur solution de composantes (u, v, h) .

Choix d'approximation de la vitesse

Nous choisissons une base polynomiale cubique.

$$u(x, y, z) = u_1(x, y) + \phi_2(z)u_2(x, y) + \phi_3(z)u_3(x, y) + \phi_4(z)u_4(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_1(x, y) + \phi_2(z)v_2(x, y) + \phi_3(z)v_3(x, y) + \phi_4(z)v_4(x, y)$$

$$\phi_2(z) = \sqrt{3}\xi, \quad \phi_3(z) = \frac{\sqrt{5}}{2}[3\xi^2 - 1], \quad \phi_4(z) = \frac{\sqrt{7}}{2}[5\xi^3 - 3\xi], \quad \xi = \frac{2}{H}(z - z_f) - 1$$

Résultats et commentaires

Nombre de pas de temps	Nombre d'itération	NNT	NDLT	NEQ	Stockage ligne de ciel mots réels
1	9	2761	22827	21277	13 612 004

Méthode de résolution	Norme du résidu	Type de machine	Temps CPU (s)
Directe	10 ⁻⁶	Dec Alpha 300	100.8

Sur les figures (8.a), (8.b) et (8.c), nous avons montré respectivement la topographie expérimentale de la surface libre, celle simulée par Leschziner et Rodi, ainsi que la topographie calculée par notre modèle.

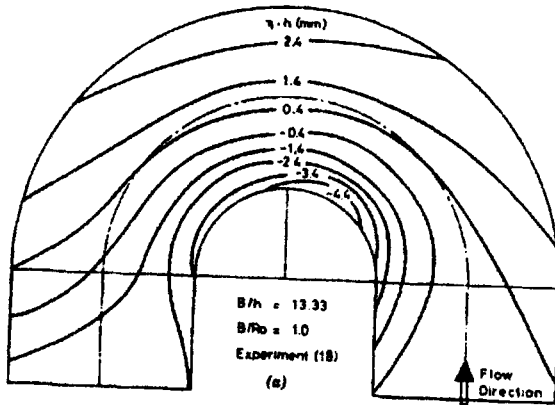


Figure 8.a. Topographie expérimentale de la surface libre

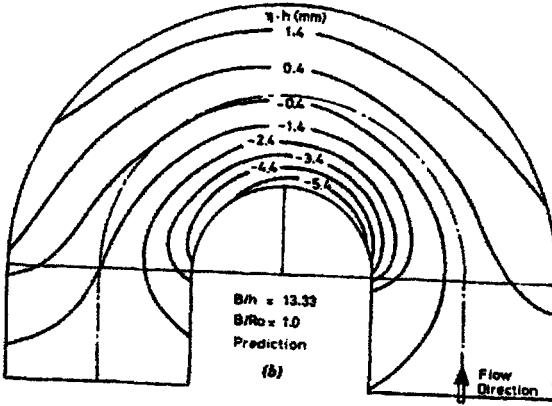


Figure 8.b. Topographie simulée par Leschziner et Rodi

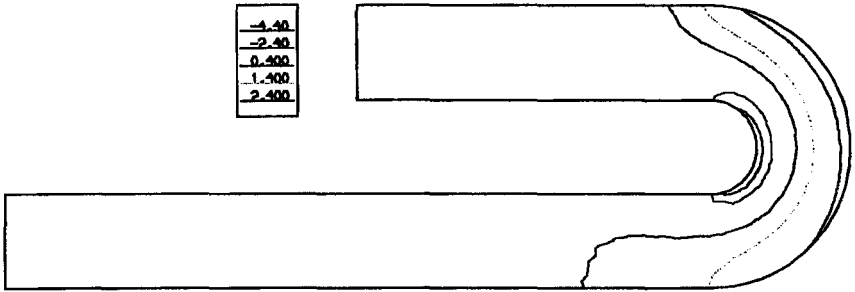


Figure 8.c. Topographie simulée par notre modèle 3D

Les figures (9.a), (9.b) et (9.c) montrent respectivement le champ des vitesses au fond, moyennes et en surface. Conformément à l'expérience, les vecteurs vitesses en surface sont dirigés vers l'extérieur du coude, alors qu'au fond, ils sont dirigés vers l'intérieur.

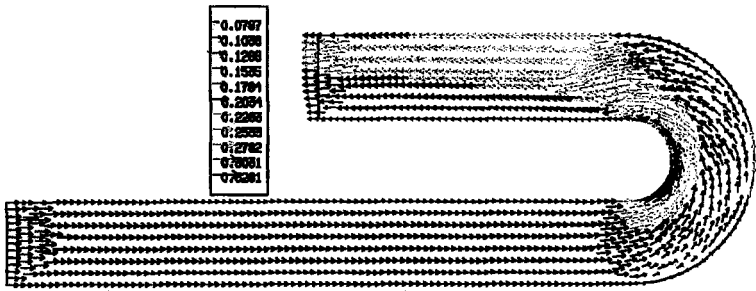


Figure 9.a. Vitesses au fond

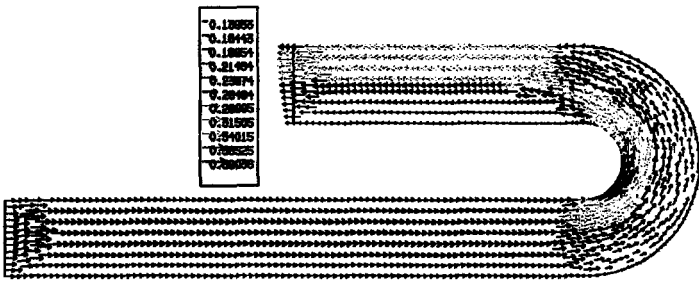


Figure 9.b. Vitesses moyennes

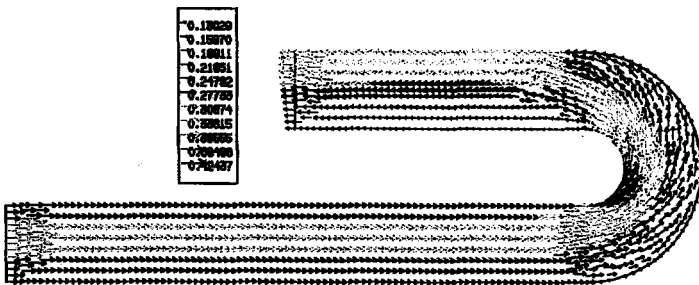


Figure 9.c. Vitesses en surface

Sur la figure 10, nous comparons en $\theta = 102^\circ$ les vitesses tangentielles moyennes V_θ expérimentales, simulées par Leschziner et Rodi, ainsi que les valeurs calculées par notre modèle 3D. V est la vitesse moyenne à l'entrée, $V = 0.26\text{m/s}$ et y_θ est la distance transversale.

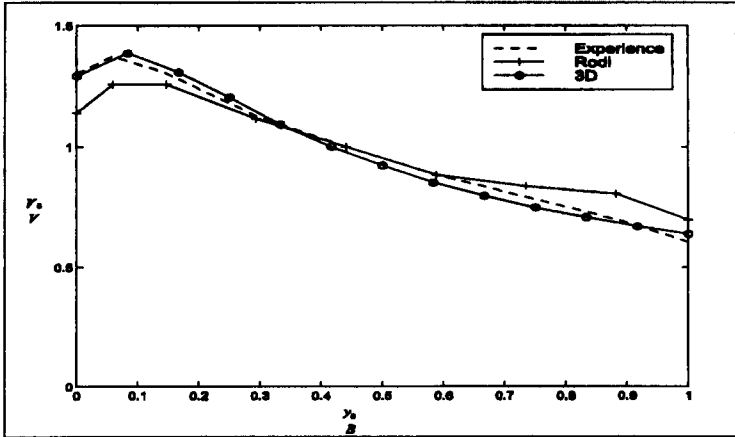


Figure 10. Variation de la vitesse transversale coude pour $\theta = 102^\circ$

Courants secondaires

Les courants secondaires sont constitués par les composantes transversales et verticales de la vitesse d'eau. La figure 12 illustre ce type de courant.

Sur la figure 11, sont reportées les distributions de la vitesse radiale expérimentales, calculées par Leschziner et Rodi, ainsi que les distributions simulées par notre modèle 3D.

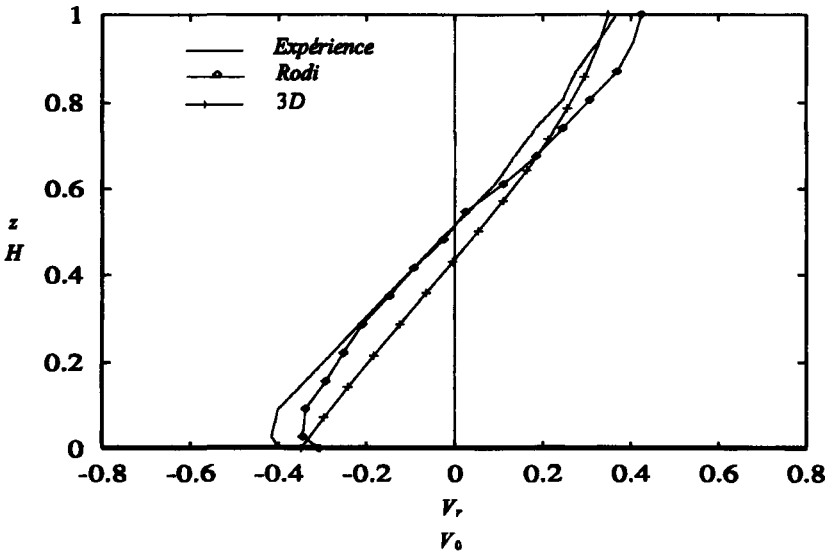


Figure 11. Variation de la vitesse radiale avec la profondeur au milieu du coude pour $\theta = 102^\circ$

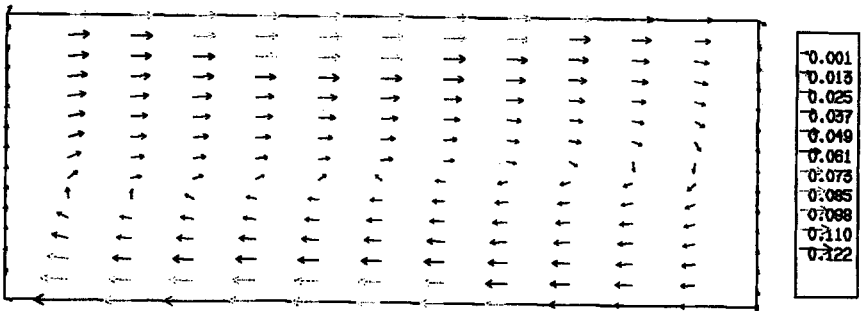


Figure 12. Courants secondaires pour $\theta = 102^\circ$

9.2. Ecoulement autour d'un épi

Description du cas test

Objectif du cas test

Ce cas test a pour but la reproduction du champ de contraintes au fond ainsi que le champ de vitesse autour d'un épi dans un canal droit à fond plat.

Description du cas test

$$\begin{aligned} \text{pente} &= 0 \text{ m/m}, H = 0.19 \text{ m}, z_f = 0 \text{ m}, L_1 = 1.22 \text{ m} \text{ (4 ft)} \\ L_2 &= 1.525 \text{ m} \text{ (5 ft)}, B = 0.915 \text{ m} \text{ (3 ft)}, b = 0.152 \text{ m} \text{ (0.5 ft)} \end{aligned}$$

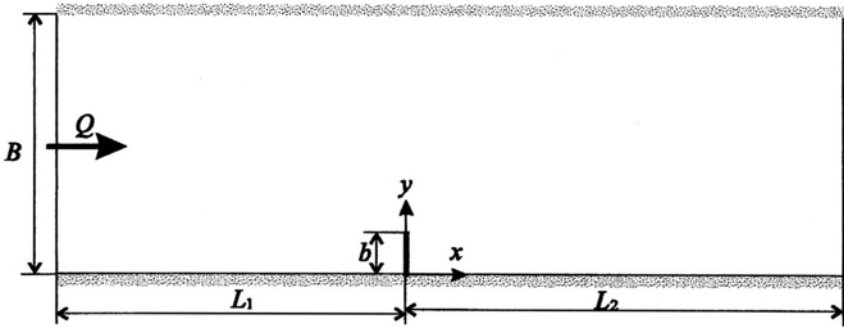


Figure 13. Vue de dessus du canal

Equation/Solution

Nous exploitons les résultats expérimentaux établis par Rajaratnam et Nwachukwu [RAJ 83] pour un nombre de Froude égal à 0.19.

Données Physiques

Conditions aux limites

Amont

Nous imposons en amont le débit par unité de largeur :

$$q_{\text{amont}} = 0.0487 (\text{m}^3 / \text{s} / \text{m})$$

Aval

Nous imposons la cote de la surface libre :

$$h_{aval} = 0.19m$$

Conditions initiales

Nous choisissons comme conditions initiales :

$$u = 0, v = 0, w = 0, h = 0.19$$

Nous lançons d'abord un calcul sans le terme de convection, le résultat obtenu sera utilisé comme conditions initiales.

Paramètres physiques

viscosité cinématique	: $\nu = 10^{-6} (m^2 / s)$
viscosité verticale	: type longueur de mélange
viscosité horizontale	: $\nu_{th} = 0.0009 m^2 / s$
frottement au fond (loi logarithmique)	: $k_s = z_{min} = 0.01H, c_{k_s} = 10$
frottement aux parois (Chezy)	: $c_p = 0.0157$
Nombre de Froude	: $Fr = 0.19$

Maillage

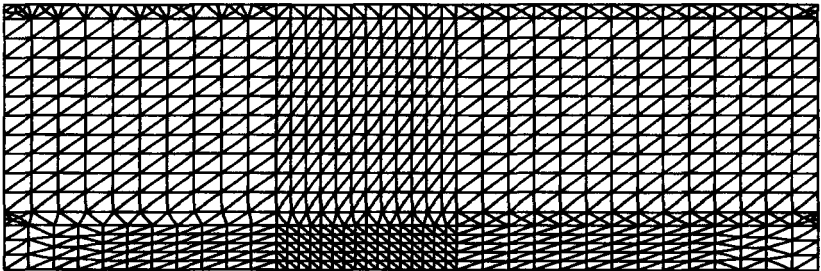


Figure 14. Maillage 2D

Nombre de nœuds	: 2843
Nombre d'éléments de domaine T6L	: 1371
Nombre d'éléments de parois L3L	: 100
Nombre d'éléments de débit L3L	: 17

Données numériques

Écoulement stationnaire : Euler Implicite

Nombre d'itérations : 10

Critère de convergence : $(\Delta U / U < 10^{-6})$, U étant la norme du vecteur solution de composantes (u, v, h) .

Choix d'approximation de la vitesse

Nous choisissons la forme suivante de la vitesse :

$$u(x, y, z) = u_1(x, y) + \phi_2(z)u_2(x, y) + \phi_3(z)u_3(x, y) + \phi_4(z)u_4(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v_1(x, y) + \phi_2(z)v_2(x, y) + \phi_3(z)v_3(x, y) + \phi_4(z)v_4(x, y)$$

$$\phi_1(z) = \text{Log} \left(30 \frac{z}{c_k k_s} \right) / \text{Log} \left(11 \frac{H}{c_k k_s} \right)$$

$$\phi_2(z) = \sqrt{3}\xi, \quad \phi_3(z) = \frac{\sqrt{5}}{2} [3\xi^2 - 1], \quad \phi_4(z) = \frac{\sqrt{7}}{2} [5\xi^3 - 3\xi], \quad \xi = \frac{2}{H}(z - z_f) - 1$$

Résultats et commentaires

Nombre de pas de temps	Nombre d'itération	NNT	NDLT	NEQ	Stockage ligne de ciel mots réels
1	10	2843	23849	2239 9	19 929 054

Méthode de résolution	Norme du résidu	Type de machine	Temps CPU (s)
Directe	10^{-6}	Dec Alpha 300	220

La figure 15 montre la topographie numérique de la surface libre. Le niveau d'eau est perturbé au voisinage de l'épi, sa valeur maximale qui atteint 3.2 % se situe juste en amont. Nous enregistrons un minimum de 2.5 % en aval de l'épi.

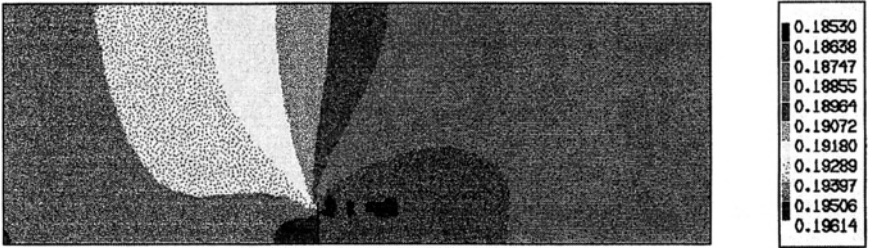


Figure 15. *Topographie numérique de la surface libre*

Les figures (16.a),(16.b),(16.c) montrent le champ des vitesses au fond, moyennes et en surface. Nous remarquons une grande zone de recirculation en aval de l'épi. Au fond, nous constatons un courant de retour en amont de l'épi et qui peut être à l'origine du phénomène d'érosion.

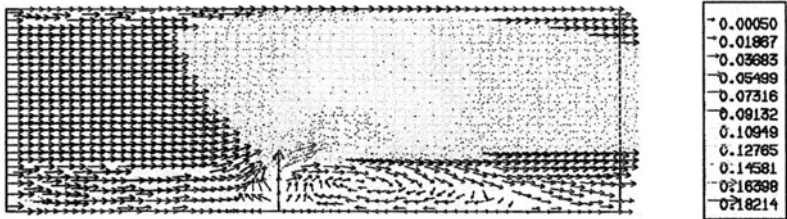


Figure 16.a. *Vitesses au fond*

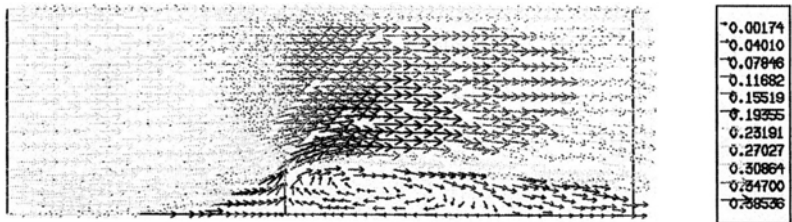


Figure 16.b. *Vitesses moyennes*

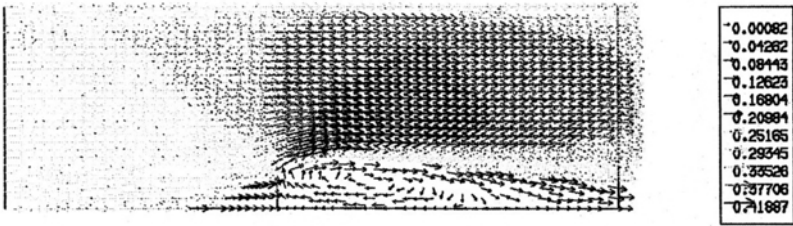
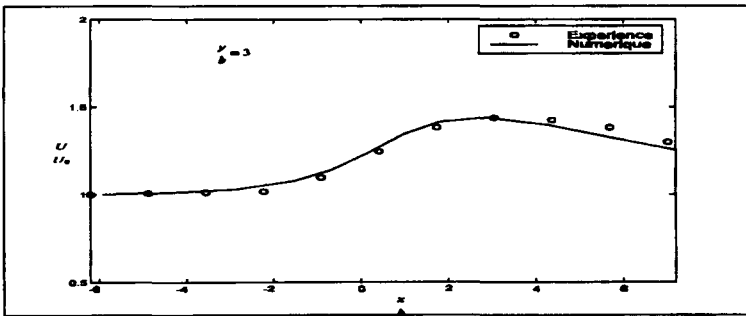
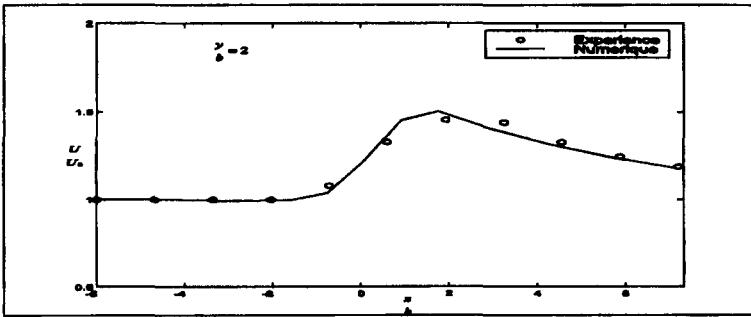


Figure 16.c. Vitesses en surface

Etude de la variation de la vitesse

Si U_0 est la vitesse moyenne en amont de l'écoulement, et U est la vitesse moyenne pour différentes régions du canal, la variation de U/U_0 en fonction de y/b est donnée par les figures (17), (a),(b),(c). Nous remarquons d'après l'expérience que le rapport U/U_0 augmente après le passage de l'épi et atteint une valeur maximale de 1.45. Notre modèle surestime ce pic, légèrement en amont, avec une erreur de 3 %.



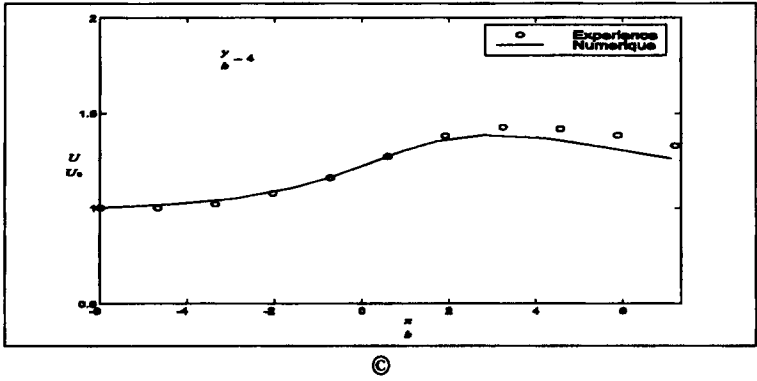


Figure 17. Distribution des vitesses le long de l'axe du canal pour différentes valeurs de y/b

Etude des contraintes au fond

Sur la figure (18) nous avons le champ expérimental de contraintes au fond où la valeur maximale est concentrée au musoir de l'épi. Sur la figure (19) est reportée le champ de contraintes au fond calculé par notre modèle.

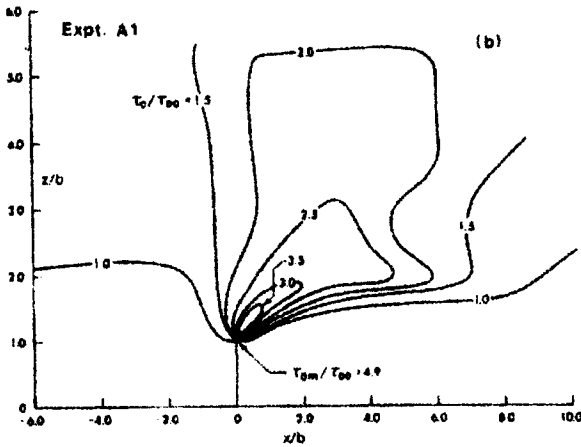


Figure 18.. Champ expérimental de la contrainte au fond

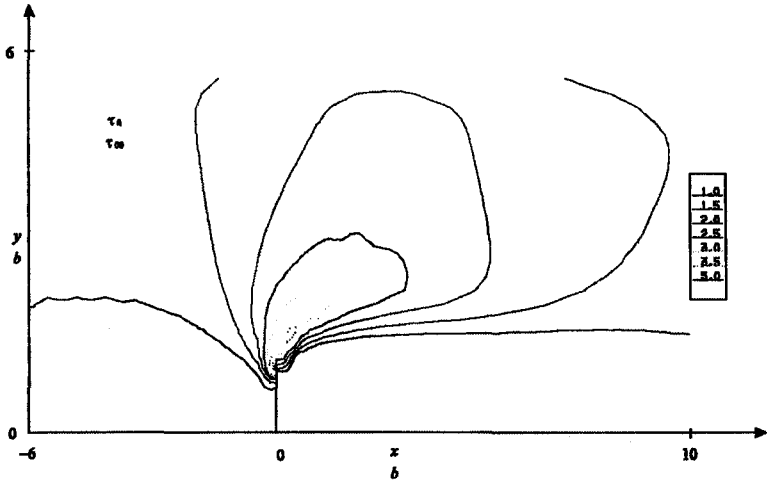
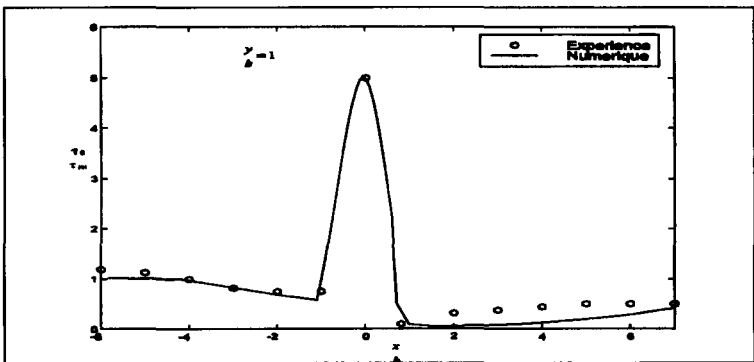
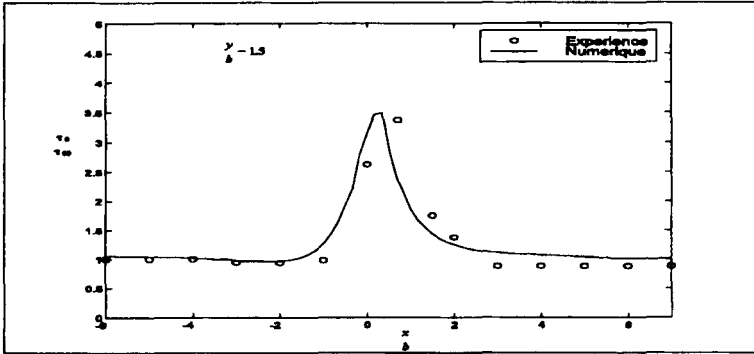


Figure 19. Champ numérique de la contrainte au fond

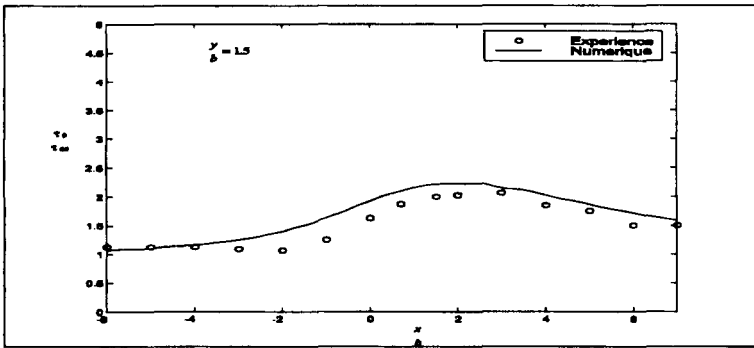
Si τ_{00} est la contrainte au fond en amont et τ_0 la contrainte au fond en différentes sections de l'écoulement, sur les figures (20), (a), (b), (c), nous avons montré la variation du rapport τ_0/τ_{00} en fonction de x/b . D'après l'expérience, la contrainte maximale, égale à 4.9 fois la contrainte en amont, se situe à l'extrémité de l'épi. Nous remarquons que les valeurs numériques sont très proches des valeurs expérimentales, ce qui prouve le bon comportement de notre modèle.



(a)



(b)



(c)

Figure 20. Distribution des contraintes le long de l'axe du canal pour différentes valeurs de y/b

10. Conclusion

Dans cette étude, nous avons développé un modèle tridimensionnel basé sur une approximation de type éléments finis dans le plan (x,y) et de type analytique (séries) selon z . Cette approche nommée h-s consiste d'abord à choisir une forme analytique (série) selon z pour les composantes horizontales de la vitesse $u(x,y,z,t)$ et $v(x,y,z,t)$ puis à en déduire la forme de la composante verticale $w(x,y,z,t)$ et celle de la pression $p'(x,y,z,t)$. Le choix de la série ainsi que le nombre de ses termes dépendent de la physique du problème et de la précision souhaitée. Une intégration explicite de la forme faible sur la verticale permet de transformer le modèle dépendant initialement de (x,y,z) en un modèle dépendant de (x,y) seulement. Cette approche donne un meilleur traitement de la surface libre car elle permet d'introduire directement des fonctions qui correspondent à la physique du problème. En outre, le maillage bidimensionnel 2DH rend le modèle plus stable et plus robuste.

Les résultats obtenus par les deux exemples précédents nous démontrent l'aptitude du modèle à reproduire les principales caractéristiques du champ de vitesses, du niveau d'eau, et du champ des contraintes de frottement au fond pour un écoulement à prédominance tridimensionnelle et fortement convectif. Le modèle est stable, nous atteignons une erreur de l'ordre de 10^{-6} sur le résidu pour moins de 10 itérations. En outre, Le modèle requiert des conditions aux limites relativement simples à déterminer. Pour le cas test du coude, nous notons avec satisfaction que nos résultats sont comparables en qualité avec ceux de Leschziner et Rodi [LES 79] qui ont pourtant appliqué une démarche bien plus sophistiquée et sans doute beaucoup plus exigeante en terme de durée de calcul. Pour le cas test de l'épi, notre modèle reproduit avec une grande précision les champs de vitesses et de frottement au fond, et donne de meilleurs résultats par rapport à ce qui existe dans la littérature [BOU 94, HEN 95].

11. Références

- [BAB 71] BABUSKA L., « Error bound for finite element method », *Num. Math.*, vol.16, 1971.
- [BAT 90] BATOZ J.L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*, vol 1, Hermès, Paris, 1990.
- [BOU 94] BOUTTES F., Simulation d'écoulements à surface libre avec turbulence, Thèse de doctorat, Div Modèles Numériques en Mécanique, Université de Technologie de Compiègne, 1994.
- [BRE 74] BREZZI F., « On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers », *R.A.I.R.O., Série Rouge, R2*, 129-151, 1974.
- [COC 79] COCHET J.F., Modélisation d'écoulements stationnaires et non stationnaires par éléments finis, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, 1979.
- [COM 82] COMOLET R., *Mécanique expérimentale des fluides. Dynamique des fluides réels*, tome II, 3^{ème} édition, Masson 1982.
- [CON] CONNOR J.J., BREBBIA C.A., *Finite element technique for fluid flows*, Neunes-Butterworks, London, U.K., 1976.
- [DAU 84] DAUBERT O., CAHOUE J., Approche numérique de la houle par les équations de Navier-Stokes, Annales des ponts et chaussées, Laboratoire National d'Hydraulique, parties 1 et 2, 1984.
- [DAU 67] DAUBERT A., GRAFFE J., « Quelques aspects des écoulements presque horizontaux à deux dimensions en plan et non permanents application aux estuaires », *La houille blanche*, 847-859, 1967.
- [DHA 92] DHATT G., Finite element modeling of fluids, Div. Modèles Numérique en Mécanique, Université de Technologie de Compiègne, mars 1992.

- [DHA 91a] DHATT G, TANGUY J.M., Eléments finis en mécanique des fluides, support de cours, Université de Technologie de Compiègne, 1991.
- [DHA 91b] DHATT G., TANGUY J.M., Hydraulique Numérique, 1 et 2 parties, support de cours d'éléments finis en hydraulique, Div. Modèles Numériques en Mécanique, Université de Technologie de Compiègne, 1991.
- [DHA 84] DHATT G., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S. A. Editeur, 1984.
- [DUF 97] DUFRESNE M., Modélisation de la houle par éléments finis, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, 1997.
- [FRE 96] FRENETTE R., Modélisation tridimensionnelle par les éléments finis du transport des sédiments dans les cours d'eau, Thèse de doctorat, Université de Laval, Québec, juin 1996.
- [HAD 95] HADJI S., Méthodes de résolution pour les fluides incompressibles, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, 1995.
- [HAU 86] HAUGUEL A., « Méthodes et outils numériques en mécanique des fluides », *La houille blanche*, n°3, 193-200, 1986.
- [HEN 91] HENICHE M., Simulation de la propagation d'une onde de marée dans un canal avec frontières ouvertes, Rapport de stage de D.E.A, Div. Modèles Numériques en mécanique, Université de Technologie de Compiègne, 1991.
- [HEN 93] HENICHE M., DHATT G., « Simulation d'écoulements à surface libre par un super élément fini tridimensionnel », *Proceeding du 4^e Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur*, Alger, Algérie, 662-666, novembre 1993.
- [HEN 93] HENICHE M., Modélisation tridimensionnelle par éléments finis d'écoulement à surface libre, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, 1992.
- [HER 91] HERVOUET J.M, PÉCHON P., « Modélisation numériques des écoulements à surface libre, l'état de l'art au laboratoire national d'Hydraulique (LNH) », *La houille blanche*, n°2, 93-106, 1991.
- [HUB 84] HUBERT G., Modélisation d'écoulements de fluides incompressibles par la méthode des éléments finis, thèse de doctorat, Div Modèles Numériques en Mécanique, Université de Technologie de Compiègne, 1984.
- [HUG] HUGHES T.J.R., *Finite element methods for fluids, Division of Applied Mechanics*, Stanford University, CA 94305-4040, U.S.A.
- [JAE 90] JAEGER M, Simulation numérique d'écoulements turbulents incompressibles et isothermes de fluides newtoniens par éléments finis tridimensionnels, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, 1990.

- [KIN 78] KING L.P., NORTON W.R., « Recent application of RMA's finite element models for two dimensional hydrodynamics and water quality », *Proc. of the 2nd Int. Conf. on Finite Element in Water Resources*, Pentch Press, 1978.
- [LAD 69] LADYZHENSKAYA O.A., *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York, U.S.A, 1969.
- [LAU 84] LAUNDER B.E., REYNOLDS W.C., RODI W., *Modèles de turbulence et leurs applications*, Collection du centre de Recherches et d'essais de Chatou, Eyrolles, n°56, tome 2, 1984.
- [LAX 67] LAX P.D., WENDROFF B., « Systems of conservation laws », *Comm. Pure and Applied Mathematics*, 13:217, 1967.
- [LEC 4] LECLERC M., Modélisation tridimensionnelle des écoulements à surface libre par éléments finis : application aux lacs, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, 1985.
- [LEE 73] LEENDERTSE J.J., LIU S.K., *A three dimensional model for estuaries and coastal seas*, Volume 1 : Principals of computation, Rand, Santa Monica, California, U.S.A, R-1417-OWRR, 1973.
- [LES 79] LESCHZINER M.A., RODI W., « Calculation of strongly curved open channel flow », *Journal of Hydraulics Division*, 1297-1314, October 1979.
- [MEF 96] MEFTAH K., DHATT G., « Résolution de l'équation de transport stationnaire par la méthode de distribution de fluctuation », *Congrès Magrébin*, Gardaia, mars 1996.
- [MEF 98] MEFTAH K., Modélisation tridimensionnelle de l'hydrodynamique et du transport par suspension, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, 1998.
- [PRO 78] LE PROVOST C., PONCET A., « Finite element method for spectral modelling of tides », *I.J.N.M.F.*, vol. 12, 853-871, 1978.
- [RAJ 83] RAJARATNAM N., NWACHUKW B.A., « Flow near groin-like structures », *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 19, n°3, 463-480, March, 1983.
- [ROB 83] ROBERT J.L., Modélisation tridimensionnelle des écoulements à surface libre permanents et non permanents par la méthode des éléments finis, Thèse de Ph.D, Dept Génie Civil, Univ. de Laval, Québec, 1983.
- [ROU 96] ROUAS G., Etude et modélisation par élément finis des procédés hydro-sédimentaires estuariens, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, 1996.
- [SOU 91] SOULAÏMANI A., FORTIN M., DHATT G., EOUELLET Y., « Finite element simulation of two and three dimensional free surface flows », *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.86 ; num.3, April 1991.
- [TAN 91] TANGUY J.M., Modélisation du transport solide par les courants à l'aide de la méthode des éléments finis, Thèse de Ph. D., Dept. Génie Civil, Université Laval, Québec, Canada, février 1991.

- [TAN 97] TANGUY J.M., ZHANG B., MEFTAH K, SIMONE L., « Dye tracing in the Seine river and its numerical simulation », *Water for a changing global community, 27 th Congress of the International Association for Hydraulic Research*, 1997.
- [TAY 73] TAYLOR C., HOOD P., A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element method, *Computers and Fluids*, vol.1 1-28, 1973.
- [WAN 75] WANG H.P., « Multi-level finite hydrodynamic model of Black Island Sound », *Finite Element in Water Resources*, 469-493, 1975.
- [ZHA 92] ZHANG B., Modélisation d'écoulement à surface libre avec fronts mobile par éléments finis, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, 1992.