
Un élément fini mixte tridimensionnel pour le calcul des contraintes d'interface

Alain Até — Shahram Aivazzadeh

*Laboratoire de Recherche en Mécanique et Acoustique
Institut Supérieur de l'Automobile et des Transports
Université de Bourgogne
49 Rue Mademoiselle Bourgeois, B.P. 31, F-58027 Nevers cedex
e-mail: Alain-Martial.Ate_isat@u-bourgogne.fr*

RÉSUMÉ. Nous présentons dans cet article un élément fini destiné au calcul des contraintes à travers une interface plane, dans le cadre d'une approche tridimensionnelle. Le principe variationnel utilisé ici pour formuler l'élément est le principe variationnel mixte de Hellinger-Reissner qui permet de prendre en compte la continuité des déplacements et des composantes transverses du tenseur des contraintes à travers une interface. Le test d'une poutre encadrée et l'analyse des contraintes dans une plaque sandwich sous chargement uniforme permettent de mettre en évidence la validité et l'efficacité de l'élément ainsi développé.

ABSTRACT. In this paper we present an interfacial finite element designed for analysing planar interfaces in a three-dimensional approach. The element is derived from Hellinger-Reissner's mixed variational principle and takes into account the continuity of the displacement and of the transverse stress components through the interface. Stress analysis of a sandwich plate is made to assess the validity and the effectiveness of the element models, with comparisons to closed-form and numerical solutions.

MOTS-CLÉS : Matériaux hétérogènes, analyse tridimensionnelle, contraintes d'interface, éléments finis mixtes, principe variationnel mixte.

KEY WORDS: Heterogeneous materials, interfacial stresses, mixed finite-elements, mixed principle, three-dimensional analysis.

1. Introduction

Les méthodes numériques et plus particulièrement les techniques par éléments finis constituent de nos jours un moyen pratique pour résoudre les équations aux dérivées partielles, celles-ci représentant souvent le modèle mathématique d'un problème de physique du milieu continu. Dans le cas particulier des problèmes de calcul des structures, les éléments finis les plus couramment utilisés sont basés sur les formulations variationnelles à un champ ; les éléments finis en déplacements étant sans doute ceux qui ont fait l'objet du plus grand nombre d'études.

Cependant, un des problèmes cruciaux que pose l'usage des méthodes par éléments finis à un champ, est la perte d'exactitude dans le calcul des inconnues secondaires : c'est le cas du calcul des contraintes par les méthodes en déplacements, ou du calcul des déplacements dans l'approche en contraintes. En effet, ces inconnues sont évaluées par dérivation ou par intégration des inconnues principales, ce qui conduit naturellement à des résultats relativement exacts compte tenu des conditions de continuité minimales que respectent les fonctions d'approximation. Ainsi, si l'on considère les méthodes d'éléments finis basés sur les déplacements, les contraintes évaluées à la frontière d'éléments adjacents peuvent différer de façon substantielle d'un élément à l'autre si l'on utilise un maillage grossier. Cette différence diminue dans le cas de solides homogènes avec le raffinement du maillage, par contre elle peut augmenter aux interfaces d'éléments à discontinuité matérielle comme dans les matériaux hétérogènes (les sandwiches, les assemblages collés...), ce qui n'est pas sans poser des difficultés au niveau de l'interprétation de ces contraintes. Les éléments finis basés sur les contraintes, en plus des difficultés liées à leur formulation, conduisent à des déplacements qui sont aussi discontinus aux frontières inter-éléments. Il faut signaler, dans le cas des matériaux hétérogènes, l'importance que revêtent les contraintes d'interface dans leur comportement. Une bonne évaluation de celles-ci suppose le respect des conditions de continuité des déplacements et du vecteur contrainte aux interfaces.

Dans ce travail, on présente un élément fini mixte tridimensionnel. C'est un élément à double interface qui est basé sur le principe variationnel mixte de Hellinger-Reissner. L'élément est construit à partir de la « procédure de relocalisation » suggérée par Aivazzadeh ([AIV 84]). Il faut rappeler ici que différents éléments finis d'interface ont été développés suivant cette approche ([BAB 91], [BIC 90], [BOU 92]) pour décrire des interfaces rectilignes, dans le cadre d'une analyse bidimensionnelle.

Après avoir indiqué les équations qui régissent la continuité à travers une interface, on rappelle brièvement le principe variationnel mixte de Hellinger-Reissner. Nous décrivons ensuite les différentes étapes qui conduisent à la formulation de l'élément. La validation de celui-ci procède en deux étapes : d'abord une discussion sur les critères de convergence suivie de résultats numériques du test d'une poutre en flexion ; enfin une application de calculs de contraintes dans une plaque sandwich sous chargement uniforme.

2. Relations de continuité à travers une interface et principe variationnel mixte de Hellinger-Reissner

L'hypothèse d'interface parfaite est posée ici : c'est-à-dire que deux points situés de part et d'autre de celle-ci sont intimement liés. Cette définition suppose la continuité des déplacements et l'équilibre des contraintes dans une interface (figure 1). Si l'on considère le cas d'une interface plane parallèle au plan (x_1, x_2) , la continuité des déplacements et l'équilibre des contraintes aux points P1 et P2 appartenant respectivement au milieu M1 et M2 et qui coïncident en un point P de l'interface s'expriment par les relations :

$$\begin{cases} \bar{T}_1 + \bar{T}_2 = 0 \\ \bar{U}(P_1) = \bar{U}(P_2) \end{cases}$$

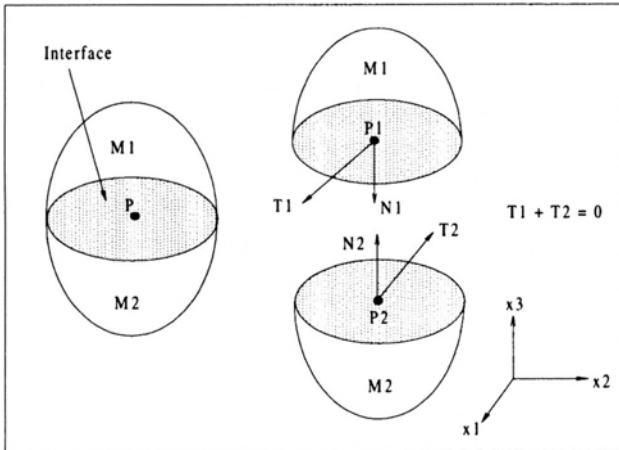


Figure 1. Continuité du vecteur contrainte à travers une interface parfaite

Une projection sur les axes de référence donne alors :

$$\begin{cases} \sigma_{ij}^1 n_j - \sigma_{ij}^2 n_j = 0 \\ U_i(P_1) = U_i(P_2) \end{cases} \quad [1]$$

Où σ^1 et σ^2 désignent le tenseur des contraintes aux points P1 et P2, et les n_j les cosinus directeurs de la normale sortante au point P1. Pour une interface parallèle au plan (x_1, x_2) , les conditions de continuité décrites par le système d'équations [1] s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma_{3i}^1 = \sigma_{3i}^2 \\ U_i^1 = U_i^2 \\ i = 1, 2, 3 \end{cases} \quad [2]$$

Les variables σ_{3i} , u_i ($i = 1, 2, 3$) sont appelées variables d'interface. Une méthode par éléments finis adaptée à l'analyse d'une telle interface peut s'appuyer sur un principe variationnel mixte qui intègre ces variables comme arguments. Nous avons adopté dans notre approche le principe variationnel mixte de Hellinger-Reissner dont la fonctionnelle de base est décrite ci-après :

$$V(\sigma_{ij}, u_i) = \int_{\Omega} \{ \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u) - W_c(\sigma_{ij}) - \bar{f}_i u_i \} dv - \int_{\Gamma_1} \bar{t}_i u_i ds \quad [3]$$

$W_c(\sigma_{ij})$ est une densité d'énergie de déformation complémentaire ; ε_{ij} désignent les composantes du tenseur des déformations ; \bar{f}_i et \bar{t}_i désignent les composantes des forces de volume et des forces de surface. Γ_1 est la portion de la frontière du domaine Ω où sont imposés les efforts surfaciques. Le principe variationnel mixte de Hellinger-Reissner [REI 50] s'énonce comme suit : *Parmi tous les champs de contraintes et les champs de déplacements cinématiquement admissibles, les champs de déplacements u et de contraintes σ solutions des équations d'équilibre de l'élasticité linéaire rendent stationnaire la fonctionnelle de Reissner.*

En effet la première variation de la fonctionnelle décrite par l'intégrale [3] s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta V &= \delta \left\{ \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - W_c(\sigma_{ij}) - \bar{f}_i u_i) dv - \int_{\Gamma_1} \bar{t}_i u_i ds \right\} \\ &= \int_{\Omega} (\varepsilon_{ij} - \frac{\partial W_c}{\partial \sigma_{ij}}) \delta \sigma_{ij} dv + \int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dv - \int_{\Omega} \bar{f} \delta u dv - \int_{\Gamma_1} \bar{t} \delta u ds \end{aligned}$$

Par symétrie du tenseur des contraintes, une intégration par parties donne :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dv = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i ds - \int_{\Omega} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \delta u_i dv$$

Finalement, la première variation de la fonctionnelle V s'écrit :

$$\delta V = \int_{\Omega} (\varepsilon_{ij} - \frac{\partial W_c}{\partial \sigma_{ij}}) \delta \sigma_{ij} dv - \int_{\Omega} (\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \bar{f}_i) \delta u_i dv + \int_{\Gamma_1} (\sigma_{ij} n_j - \bar{t}_i) \delta u_i ds$$

u est un champ cinématiquement admissible, δu_i est nul sur la frontière Γ_u , la condition de stationnarité : $\delta V = 0$ s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ij} = \frac{\partial W_c}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{dans } \Omega \quad (i) \\ \sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (ii) \\ \sigma_{ij} \cdot n_j = \bar{t}_i \quad \text{sur } \Gamma_t \quad (iii) \end{array} \right. \quad [4]$$

En adjoignant la condition limite en déplacements : $u = \bar{u}$ sur la frontière Γ_u aux équations (ii) et (iii) du système d'équations [4], on retrouve bien les équations différentielles de l'élasticité linéaire ; les équations (i) expriment, quant à elles, la loi de comportement.

3. Principe de construction de l'élément

On décrit ici les différentes étapes qui conduisent à la formulation complète de l'élément ; l'objectif poursuivi est de développer un élément fini mixte tridimensionnel adapté à l'analyse des contraintes dans une interface plane et qui respecte les conditions de continuité décrites par le système d'équations [2]. L'élément à double interface présenté est noté HR-48 (figure 2.b), c'est un hexaèdre à huit nœuds dont les degrés de liberté à chaque nœud comprennent trois déplacements et les trois composantes transverses σ_{3i} du tenseur des contraintes. Les faces supérieure et inférieure sont considérées ici comme des interfaces. Cet élément est construit à partir d'un élément mixte complet noté HR-72 (figure 2.a) où les composantes du tenseur des contraintes non nécessaires à l'équilibre des contraintes à l'interface sont associées à des nœuds localisés dans l'élément. Ces nœuds internes sont homothétiques des nœuds externes, par une homothétie centrée au centre de l'élément.

Les variables d'interface u_i et σ_{3i} , $i = 1, 2, 3$ utilisent les fonctions d'interpolation isoparamétrique classiques permettant de transformer l'élément réel (hexaèdre à côtés rectilignes) en un élément de référence de forme cubique dont les valeurs des coordonnées aux nœuds sont égales à ± 1 . Les fonctions d'interpolation de ces variables sont décrites par l'équation [5].

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{3i} = \sum_{k=1}^8 N_k(r, s, t) \sigma_{3i}^k \\ u_i = \sum_{k=1}^8 N_k(r, s, t) u_i^k \end{array} \right. \quad i=1,2,3 ;$$

avec :

$$N_i(r,s,t) = \frac{1}{8}(1+r_i r)(1+s_i s)(1+t_i t) \quad [5]$$

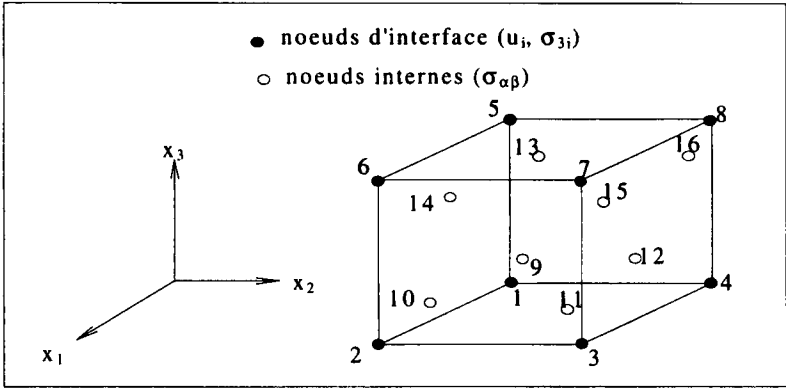


Figure 2.a. *Elément de déclinaison (HR_72)*

Condensation
↓

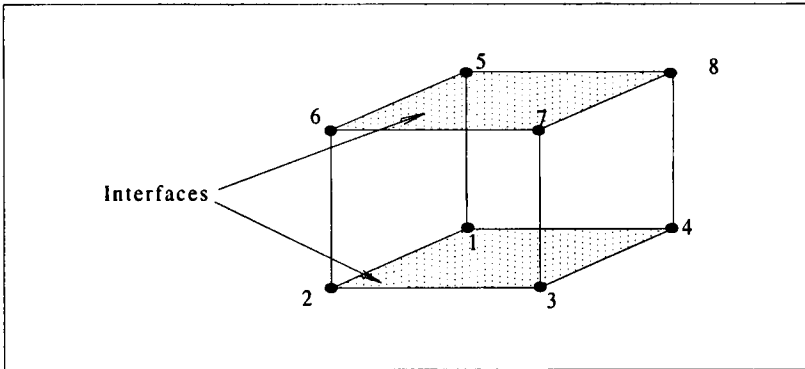


Figure 2.b. *Elément à double interface (HR_48)*

L'approximation des variables statiques excédentaires $\sigma_{\alpha\beta}$ s'écrit de manière équivalente :

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha\beta} = \sum_{j=9}^{16} N_j(r, s, t) \sigma_{\alpha\beta}^j ; \text{ où :} \\ \alpha, \beta = 1, 2 \end{cases}$$

$$N_j(r, s, t) = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{r}{r_j}\right) \left(1 + \frac{s}{s_j}\right) \left(1 + \frac{t}{t_j}\right). \tag{6}$$

Si l'on note k le rapport de cette homothétie, alors les coefficients r_j , t_j , et s_j qui apparaissent dans l'équation [6] ont pour valeur $\pm k$. La matrice de rigidité-souplesse obtenue par la discrétisation de la fonctionnelle de Reissner prend alors la forme :

$$K_e = \begin{bmatrix} \int N_\sigma^T S N_\sigma dv & \int N_\sigma^T B dv \\ \Omega e & \Omega e & 0 \\ \int B^T N_\sigma dv & \Omega e & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\sigma\sigma} & K_{\sigma u} \\ K_{\sigma u}^T & 0 \end{bmatrix} ;$$

B désigne la matrice d'interpolation des déformations, la matrice d'interpolation des contraintes N_σ est déterminée par les fonctions polynomiales définies dans les équations [5] et [6]. S désigne la matrice des coefficients de souplesse élastique et est définie par :

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E}{- \nu} & \frac{E}{- \nu} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E}{- \nu} & \frac{E}{- \nu} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{pmatrix}$$

La matrice K_e est évaluée par une intégration numérique exacte utilisant la méthode de quadrature de Gauss à huit points. Afin d'éliminer les ddl statiques internes, le vecteur des composantes du tenseur des contraintes est découpé en deux sous-vecteurs comme suit :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix} ; \text{ avec :}$$

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix}, \text{ et } \sigma_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix}.$$

En adoptant le même découpage pour le vecteur des contraintes nodales, la matrice de rigidité de l'élément HR_72 se présente alors sous la forme :

$$K_e = \begin{bmatrix} K_1 & K_{12} & K_{1u} \\ K_{12}^T & K_2 & K_{2u} \\ K_{1u}^T & K_{2u}^T & 0 \end{bmatrix}$$

Les sous-matrices K_1 et K_2 sont des matrices carrées de dimension 24.

Les équations d'Euler relatives aux contraintes nodales d'interface, aux contraintes nodales excédentaires et aux déplacements s'écrivent alors :

$$\begin{cases} K_1 \sigma_1^n + K_{12} \sigma_2^n + K_{1u} u_1^n = 0 & \text{(i)} \\ K_{12}^T \sigma_1^n + K_2 \sigma_2^n + K_{2u} u_1^n = 0 & \text{(ii)} \\ K_{1u}^T \sigma_1^n + K_{2u}^T \sigma_2^n = f_u & \text{(iii)} \end{cases}, \text{ avec :}$$

$$f_u = \int_{\Gamma_t} N_u^T \bar{t} ds$$

Nous rappelons que les équations d'Euler ci-dessus sont écrites au niveau élémentaire. En éliminant le vecteur des contraintes nodales excédentaires du système d'équations précédent, on aboutit au système linéaire :

$$\begin{bmatrix} K_{\sigma\sigma}^* & K_{\sigma u}^* \\ K_{\sigma u}^{*T} & K_{uu}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^n \\ u_1^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_u \end{bmatrix}; \text{ où :}$$

$$\begin{cases} K_{\sigma\sigma}^* = K_1 - K_{12} K_2^{-1} K_{12}^T \\ K_{\sigma u}^* = K_{1u} - K_{12} K_2^{-1} K_{2u} \\ K_{uu}^* = -K_{2u}^T K_2^{-1} K_{2u} \end{cases}$$

La matrice K^* est la matrice de l'élément à double interface. Contrairement à la matrice de l'élément mixte complet, cette dernière est pleine, c'est une matrice mal conditionnée : le rapport des termes extrêmes non nuls est de l'ordre du carré du module de Young. Il faut ensuite passer à la validation de l'élément par une étude de critères de convergence, c'est l'objet du prochain paragraphe.

4. Discussion sur la convergence de l'élément

L'importance et la complexité des problèmes à résoudre en calcul des structures exigent que l'on s'entoure d'un certain nombre de garanties quant à la validité et à l'exactitude de la solution du modèle mathématique qui décrit le problème physique étudié. Il existe pour cela un certain nombre de critères qui permettent de dire si la solution par éléments finis converge vers la solution exacte du problème. Parmi ces critères, on peut citer les critères de complétude et de compatibilité liés aux conditions de convergence de la méthode d'approximation de Ritz ; on peut aussi souligner le critère de compatibilité des interpolations dû à Olson et Mirza. Ce critère permet dans le cas des formulations mixtes de se prémunir de l'apparition des modes complémentaires à énergie de déformation nulle.

4.1. Critère de complétude

Un élément sera dit complet si l'approximation du champ de déplacements permet de représenter tous les modes de corps rigide et les états de déformations constantes non nulles de l'élément. Pour un problème tridimensionnel, on dénombre six modes de corps rigide : trois translations et trois rotations, auxquelles correspond un état de contraintes nul. On peut facilement les identifier par une étude de valeurs et vecteurs propres de la matrice discrétisée qui permet de représenter l'énergie de déformation de l'élément. D'un point de vue théorique, il est important qu'apparaissent les termes constants de la base polynomiale pour décrire les mouvements de translation de l'élément.

Une étude des valeurs propres a été faite sur la matrice non condensée (élément HR_72) obtenue par discrétisation de la fonctionnelle de Reissner sur un élément cubique dont la longueur d'un côté est égale à 2 mm ; le module de Young du matériau qui constitue l'élément est pris égal à 10 MPa et le coefficient de Poisson égal à 0.25. Cette étude indique la présence de six valeurs propres nulles auxquelles correspondent des états de contraintes et de déformations nuls ; on peut aussi remarquer la présence de quarante-huit valeurs propres négatives.

Matrice	λ_{\max}	Trace
Hexaèdre en déplacements	20	106.667
Élément mixte condensé	20	106.667

Tableau 1. Trace et valeur propre maximale des matrices de rigidité de l'hexaèdre en déplacement et l'élément mixte condensé

Pour ce qui est de la rigidité de l'élément, nous avons fait une étude comparative des valeurs propres de la matrice de rigidité de l'élément hexaédrique en déplacements,

avec celles de la matrice de rigidité obtenue par condensation de la sous-matrice des variables statiques de l'élément mixte. Le tableau 1 donne les valeurs de la plus grande valeur propre et de la trace de ces deux matrices. On constate ici que les deux éléments ont le même comportement au niveau énergétique (même trace) ; d'ailleurs, les valeurs propres des deux matrices sont rigoureusement identiques.

La nécessité de décrire les états de déformations constantes se justifie physiquement par le fait que, lorsque le maillage est suffisamment raffiné, les déformations sont quasi constantes sur chaque élément : on peut ainsi représenter des champs de déformations à variations complexes dans la structure. Pour un problème variationnel d'ordre n , il est nécessaire que l'approximation polynomiale soit complète jusqu'à l'ordre n afin de représenter les termes constants de la fonctionnelle.

4.2. *Compatibilité des interpolations*

Bien qu'il soit possible d'évaluer indépendamment les différents champs qui interviennent dans les modèles mixtes, il est important de contrôler l'ordre d'approximation des polynômes d'interpolation des champs de contraintes et de déplacements. Mirza et Olson [OLS 83] ont établi une condition sur la compatibilité des interpolations qui s'énonce comme suit : *Le champ de déformation dérivant (par la loi de comportement) de l'approximation des contraintes doit posséder au moins tous les modes de déformations du champ de déformations issu du gradient des déplacements.*

Plusieurs études ([OLS 83], [BIC 90]) ont montré que, quand ce critère est violé, la matrice de rigidité-souplesse qui permet de définir l'énergie de déformation d'un élément présente des modes parasites. La condition de Mirza et Olson est respectée pour nos différents éléments. En effet, nous avons utilisé le même ordre d'approximation pour l'interpolation des contraintes et des déplacements. Le champ de déformations induit par l'approximation des contraintes (au travers de la loi de comportement) est au moins du même ordre que le gradient des déplacements.

D'autres travaux indiquent qu'une condition nécessaire pour la stabilité de la solution éléments finis basés sur le principe variationnel mixte de Reissner est que le nombre de paramètres décrivant les contraintes soit supérieur au nombre de degrés de liberté en déplacements, diminué du nombre de modes de corps rigide. La condition de stabilité évoquée ici traduit à la fois la possibilité d'inverser la matrice globale du système linéaire résultant et l'absence de phénomènes de verrouillage qui conduiraient dans le cas des éléments basés sur le principe variationnel mixte de Hellinger-Reissner à des résultats nuls ou divergents en déplacements. Tous les éléments mixtes que nous avons formulés respectent cette condition.

Pour les éléments de déplacements, les critères de complétude et de compatibilité déterminent la convergence de l'élément qui est ici monotone. La nature de la convergence des éléments mixtes n'est pas connue avec certitude.

4.3. Test d'une poutre console

Nous considérons une poutre console encastrée sur l'extrémité $x_3 = 0$ et soumise à une force transversale f sur l'autre. La géométrie de la poutre est définie par la figure 3. La poutre est supposée isotrope de module de Young $E = 150000$ MPa et de coefficient de Poisson $\nu = 0.25$. L'intensité de la force F est de 300 N.

On compare à travers différents maillages la flèche obtenue au point A de la poutre par l'élément mixte à double interface ; et par l'élément hexaédrique à déplacements. La solution de référence dans les différentes comparaisons est celle de la théorie des poutres de Timoshenko. Les graphiques de la figure 4 montrent que l'élément mixte converge plus rapidement que l'élément en déplacements qui utilise la même approximation. Ce résultat indique que l'élément en déplacements est plus rigide que l'élément mixte. Les graphiques de la figure 5 montrent la variation de la contrainte de flexion le long de la face supérieure de la poutre. Cette contrainte est évaluée en faisant une moyenne des contraintes nodales calculées à partir du champ de déplacements. Les deux éléments donnent sensiblement les mêmes résultats qui sont en accord avec ceux de la théorie de Timoshenko.

En outre, l'élément mixte que nous avons développé donne une réponse très satisfaisante quand le paramètre d'allongement L/h devient grand, contrairement à l'élément hexaédrique en déplacement qui ne donne une réponse satisfaisante que pour les poutres épaisses comme le montrent les graphes de la figure 6. Les résultats qui apparaissent dans la figure 6 ont été établis pour des maillages respectifs de $4 \times 4 \times 20$ éléments d'interface et $4 \times 4 \times 40$ éléments en déplacements.

Il faut aussi souligner que l'élément mixte d'interface développé peut être appliqué aux matériaux quasi incompressibles (coefficient de Poisson proche de la valeur 0.5). Dans ce cas, la convergence est lente avec une précision qui reste assez satisfaisante.

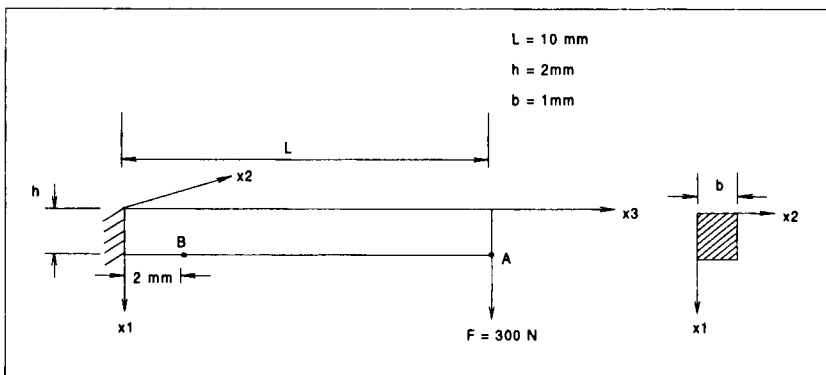


Figure 3. Géométrie de la poutre

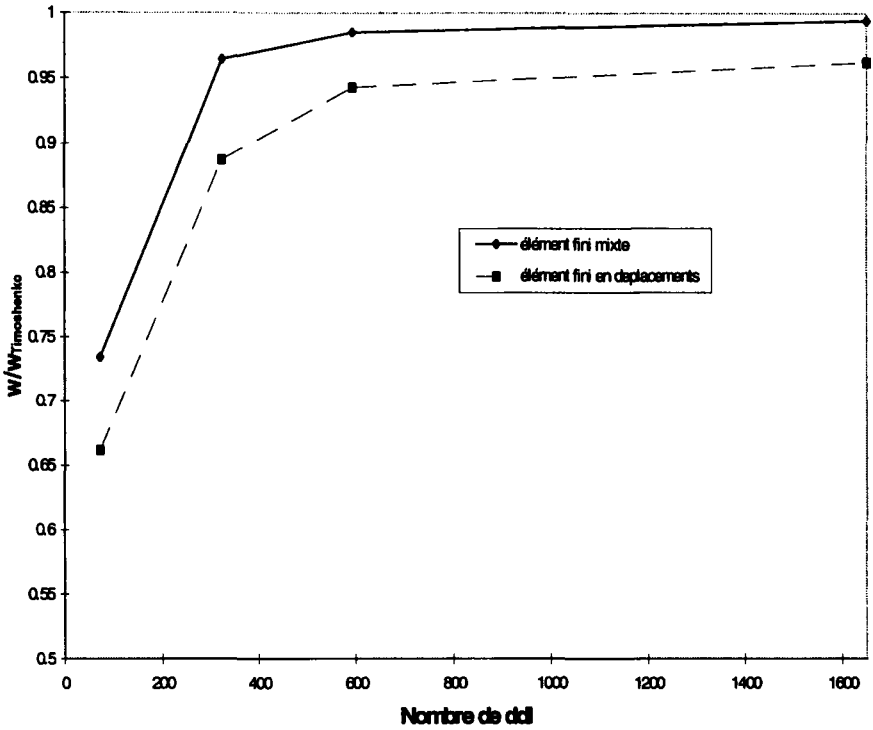


Figure 4. Convergence de la flèche au point A

D'autres tests de convergence simples (traction, cisaillement) sur des matériaux homogènes donnent des résultats très satisfaisants. Afin de mettre en évidence l'efficacité de l'élément développé pour le calcul des matériaux hétérogènes, on donne dans le paragraphe suivant quelques résultats d'une étude concernant une plaque sandwich.

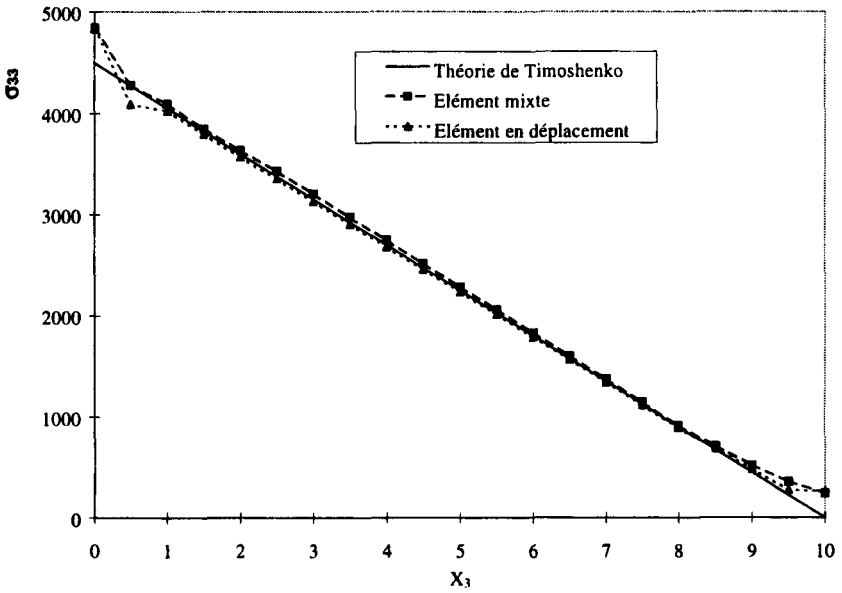


Figure 5. Contrainte de flexion sur la face supérieure de la poutre

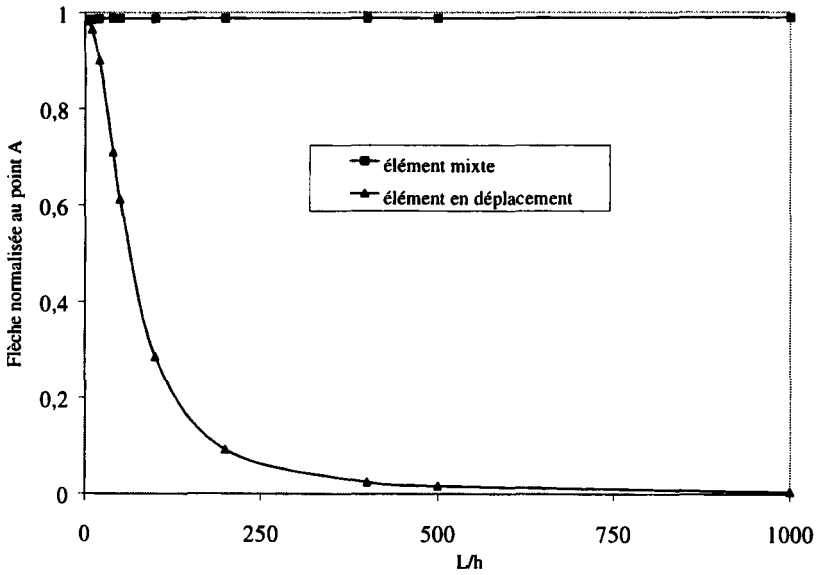


Figure 6. Influence du paramètre d'allongement L/h

5. Plaque sandwich sous chargement normal unitaire

Nous analysons ici une plaque sandwich sous chargement uniforme unitaire sur sa face supérieure. La figure 7 donne les caractéristiques géométriques des différents composants de la plaque.

Les peaux sont identiques et ont un comportement orthotrope avec :

$$E_{11} = 175000 \text{ MPa}, E_{22} = E_{33} = 7000 \text{ MPa} ;$$

$$G_{23} = 1400 \text{ MPa}, G_{12} = G_{23} = 3500 \text{ MPa} ;$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = 0.01, \nu_{23} = 0.25.$$

Alors que le cœur est un matériau transverse isotrope où :

$$E_{11} = E_{22} = 280 \text{ MPa}, E_{33} = 3000 \text{ MPa} ;$$

$$G_{23} = 1400 \text{ MPa}, G_{13} = G_{23} = 420 \text{ MPa} ;$$

$$\nu_{12} = 0.25 \quad \nu_{13} = \nu_{23} = 0.02.$$

Dans cette analyse, nous représentons les variations dans l'épaisseur des contraintes transverses en certains points de la plaque ; des comparaisons avec les résultats de la solution tridimensionnelle de Pagano [PAG 70] sont également établies. Enfin, une comparaison est établie avec les résultats d'autres analyses pour deux valeurs de l'élançement de la plaque.

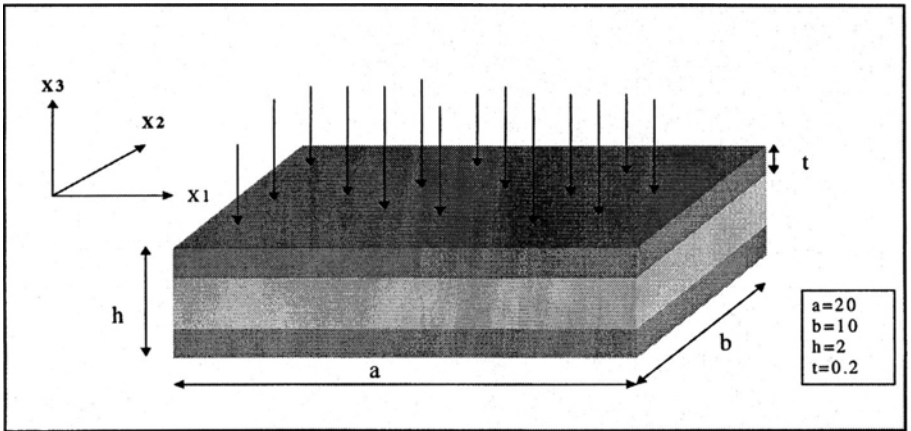


Figure 7. Plaque sandwich simplement appuyée sur les cotés latéraux

Pour des raisons de symétrie, seul le quart de la plaque est maillé et modélisé par des éléments à double interface HR-48. Le tableau 1 donne le détail du maillage ; n_1 , n_2 et n_3 indiquent le nombre d'éléments dans les trois directions de la plaque. Les conditions aux limites et les conditions de symétrie appliquées à la plaque sont reportées dans le tableau 3. Il existe plusieurs solutions analytiques pour le problème

étudié mais on s'intéresse ici à la solution tridimensionnelle de Pagano pour établir des comparaisons avec les résultats de l'analyse par l'élément d'interface développé.

Maillage	nombre d'éléments ($n_1 \times n_2 \times n_3$)	Nombre total de ddl
Peau supérieure	10×8×2	
Cœur	10×8×4	5346
Peau inférieure	10×8×2	

Tableau 2. Définition du maillage utilisé

	Cinématiques	Statiques
Conditions aux limites	$u_2 = u_3 = 0$ pour $x_1 = 0$ $u_1 = u_3 = 0$ pour $x_2 = 0$	-
Conditions de symétries	$u_1 = 0$ pour $x_1 = a/2$ $u_2 = 0$ pour $x_2 = b/2$	$\sigma_{13} = 0$ pour $x_1 = a/2$ $\sigma_{32} = 0$ pour $x_2 = b/2$

Tableau 3. Conditions aux limites et conditions de symétries

La figure 8 représente les variations de la contrainte de cisaillement σ_{31} dans l'épaisseur aux points P1($x_1 = a/4$, $x_2 = b/4$) et P2($x_1 = a/4$, $x_2 = b/2$). On peut remarquer la bonne concordance des deux approches. Les figures 9 et 10, quant à elles, représentent les variations de la contrainte σ_{31} aux interfaces supérieure et inférieure. On peut remarquer ici la quasi-symétrie des résultats. On constate également que cette contrainte est maximale vers le bord de la plaque ($x_1 = 0$ ou $x_1 = a$) et à mi-largeur ($x_2 = b/2$) de la plaque. Le calcul montre aussi que cette contrainte est nulle sur toute la section ($x_2 = 0$) : on rappelle que sur cette section les déplacements tangentiels sont nuls. Ce résultat est confirmé par la solution de Pagano. Des résultats équivalents sont obtenus pour la contrainte de cisaillement σ_{32} . La figure 11 représente les variations de cette contrainte dans l'épaisseur en différents points de la plaque. Comme dans le cas précédent, l'élément d'interface donne des résultats similaires à ceux de l'analyse de Pagano [PAG 70]. Ce cisaillement est moins important que le cisaillement σ_{31} . Enfin, la figure 12 représente les variations de la contrainte normale σ_{33} dans l'épaisseur aux points P1($x_1 = 5$, $x_2 = 2.5$) et P2($x_1 = 5$, $x_2 = 5$). La solution éléments finis reste en bonne concordance avec la solution de Pagano. Les graphes de cette figure montrent également la bonne satisfaction des conditions aux limites portant sur la contrainte normale ; plus généralement les conditions aux limites affectant les contraintes transverses sont respectées.

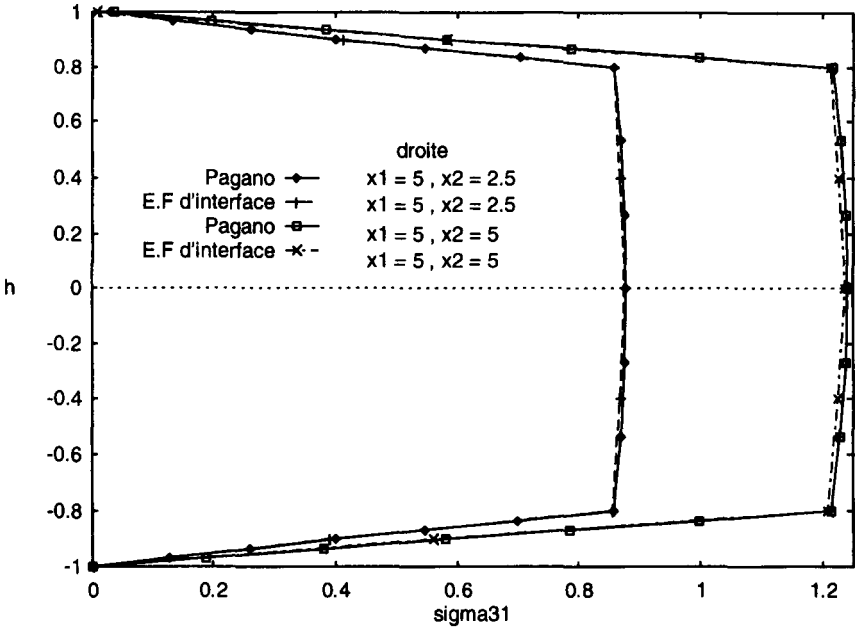


Figure 8. Distribution de la contrainte σ_{31} dans l'épaisseur

Dans le tableau 4 sont représentées la flèche au centre de la plaque, point P1($x_1=a/2, x_2=b/2, x_3=h/2$) et les contraintes de cisaillement σ_{31} et σ_{32} au point P2($x_1=a/4, x_2=b/4, x_3=t$) de l'interface inférieure. Dans ce tableau, on compare à travers différents élancements de la plaque les résultats obtenus par l'élément d'interface à ceux de l'étude comparative établie par Vannucci [VAN 97]. Le déplacement u_3 et les cisaillements sont rendus adimensionnels en les multipliant respectivement par les coefficients c_1 et c_2 définis par :

$$c_1 = 10 \frac{E_{22} h^3}{q a^4} \quad , \quad c_2 = 10^5 \frac{h}{E_{22} a} .$$

E_{22} désigne le module de Young dans la direction x_2 des peaux et q une pression unitaire s'exerçant sur la surface supérieure de la plaque. Les résultats des différentes analyses sont globalement équivalents, toutefois, l'élément Ansys-solid (hexaèdre en déplacements à huit nœuds) donne des résultats moins précis par rapport à la solution de Pagano. Il faut souligner au passage la bonne qualité de l'élément DSQ de Batoz ([BAT 90]).

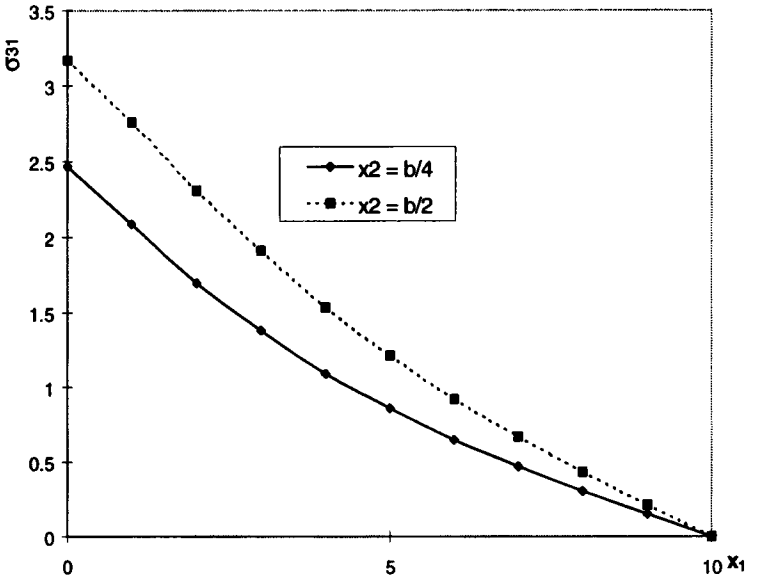


Figure 9. Variations de la contrainte σ_{31} sur l'interface inférieure

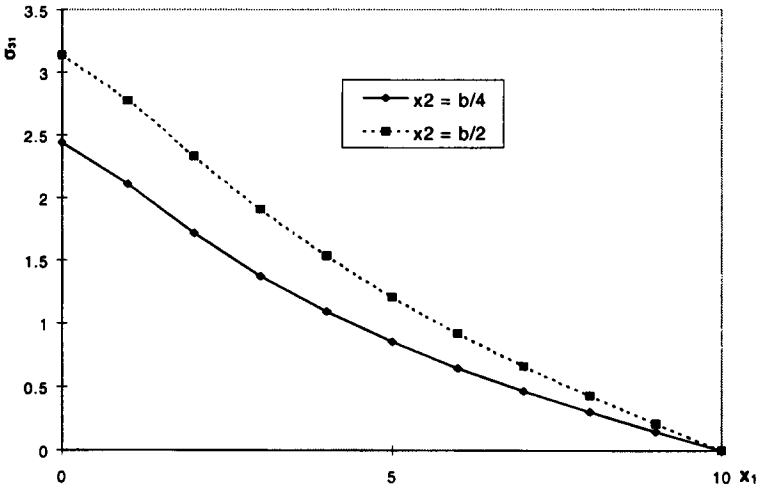


Figure 10. Variations de la contrainte σ_{31} sur l'interface supérieure

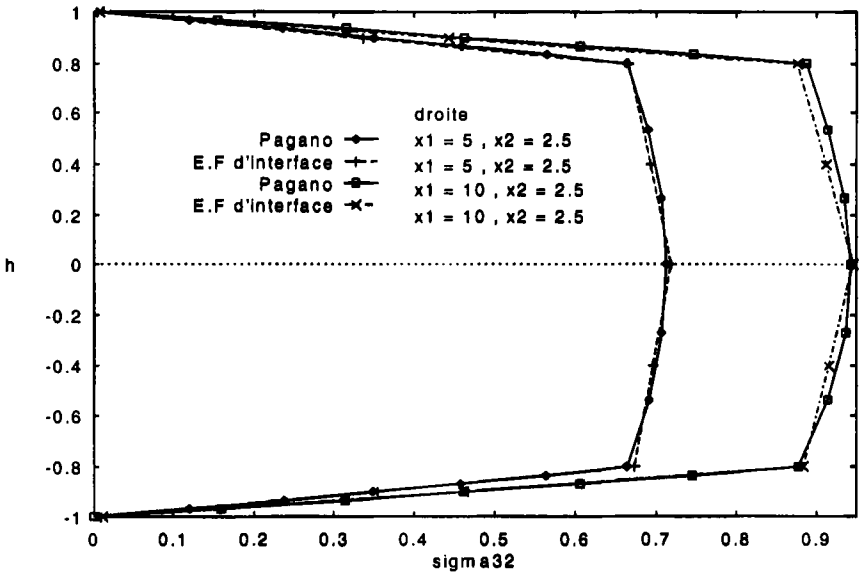


Figure 11. Variations de la contrainte σ_{32} dans la section $x_2 = b/4$

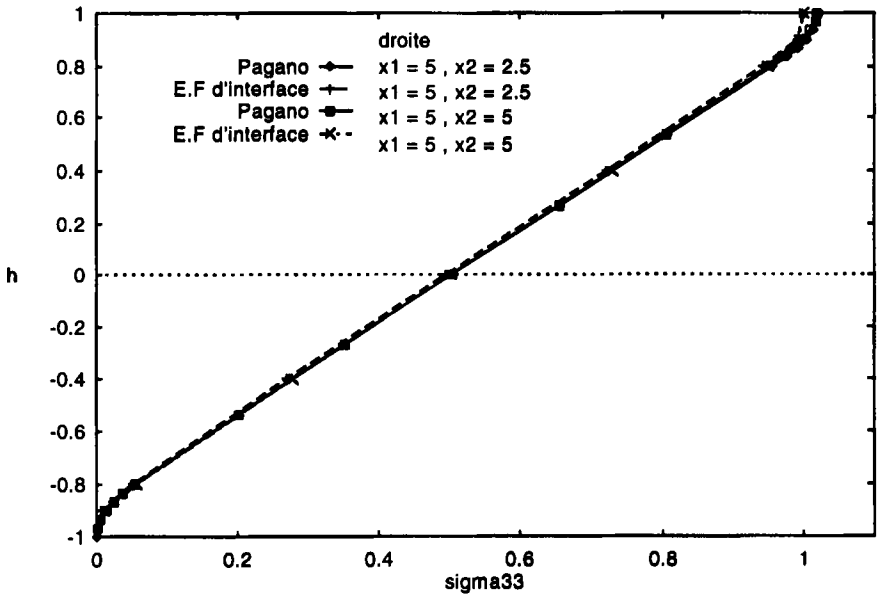


Figure 12. Variations de la contrainte normale σ_{33}

a/h = 5		Point P1	Point P2	
t/h	Méthode	u_3	σ_{31}	σ_{32}
	Pagano	2.473	2.493	1.904
0.10	élément HR-48	2.449	2.444	1.901
	Ansys-solid	2.184	4.163	0.251
	DSQ	2.559	2.425	1.880
	Pagano	9.328	2.949	0.893
0.01	élément HR-48	9.340	2.253	1.072
	Ansys-solid	8.736	4.468	1.560
	DSQ	9.632	2.300	0.908
a/h = 10				
	Pagano	1.647	3.195	1.420
0.10	élément HR-48	1.631	3.223	1.422
	Ansys-solid	1.512	2.990	1.308
	DSQ	1.694	3.282	1.384
	Pagano	8.474	2.314	0.875
0.01	élément HR-48	8.393	2.371	1.009
	Ansys-solid	8.022	2.624	1.456
	DSQ	8.561	2.521	0.838

Tableau 4. Etude comparative de différentes analyses

6. Conclusion

L'élément d'interface développé dans cette recherche présente un intérêt quand on veut affiner le calcul des contraintes et en particulier les contraintes transverses à travers une interface. En effet, ces contraintes déterminent souvent l'endommagement (délaminage, fissure interfaciale) aux interfaces des matériaux ou structures hétérogènes tels les composites, les assemblages collés. L'analyse des contraintes dans une plaque sandwich sous chargement uniforme montre la bonne corrélation de nos résultats avec ceux de la solution analytique tridimensionnelle de Pagano. Une comparaison a été établie avec d'autres solutions par éléments finis ; elle montre également la bonne qualité de l'élément. La formulation de l'élément à partir d'un principe variationnel mixte permet d'envisager une étude des effets de bord dans les composites et stratifiés, des travaux de recherche sont en cours dans ce sens.

7. Bibliographie

- [AIV 84] AIVAZZADEH S., *Éléments finis d'interface. Application aux assemblages collés et structures stratifiées*, Thèse de Docteur Ingénieur de l'Université de Technologie de Compiègne, Spécialité Mécanique appliquée à la Construction, 1984.
- [ATE 98] ATE A., *Éléments finis mixtes tridimensionnels pour le calcul des champs de contrainte dans les structures hétérogènes*, Thèse de Doctorat de l'Université de Bourgogne, 1984.
- [BAB 91] BABI M., *Éléments finis spécialisés pour l'analyse des interfaces*, Thèse de Doctorat de l'Université Claude Bernard, Lyon I, 1991.
- [BAT 96] BATHE K.J., *Finite element procedures*, Prentice Hall Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [BAT 90] BATOZ J.L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*, vol.1 et 2, 1990, Hermes, Paris.
- [BAT 89] BATOZ J.L., LARDEUR P., « A discrete shear triangular nine degree of freedom element for the analysis of thick to very thin plates », *International journal for numerical methods in engineering*, 28, 1989.
- [BIC 90] BICHARA M., *Formulation d'éléments finis d'interface. Application aux assemblages collés*, Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, 1990.
- [BOU 92] BOUZERD H., *Éléments finis mixtes pour interface cohérente et fissurée*, Thèse de Doctorat de l'Université Claude Bernard, Lyon I, 1992.
- [COO 72] COOK R.D., « Two hybrid elements for analysis of thick, thin and sandwich plates », *International journal for numerical methods in engineering*, John Wiley & Sons, Ltd vol. 5, p. 277-288, 1972.
- [ENG 87] ENGRAND D., « Effets locaux dans les structures composites », *Calcul des structures et intelligence artificielle*, Edition Pluralis, vol. 1, p. 3-6, 1987.
- [HAB 90] HABIB M., AIVAZZADEH S., VERCHERY G., « Edge effect analysis in adhesively bonded composite tubes using axisymmetric interface finite elements », *Computer aided design in composite material technology, Computational mechanics publications*, Springer Verlag, p. 415-428, 1990.
- [HAD 91] HADJ-RABAH Y., *Etude par éléments finis d'interface des effets de bord et des défauts dans les assemblages collés*, Thèse de Doctorat de l'Université de Bourgogne, 1991.
- [HUA 90] HUANG K., HOA S.V., SANKAR T.S., « Three dimensional finite element formulation for stress analysis of anisotropic laminate structures », *Composite material design analysis, Computational mechanics publications*, Springer Verlag, p. 189-200, 1990.
- [NEV 87] NEVERS T., « Singularités et délaminage dans les structures composites », *Calcul des structures et intelligence artificielle*, Edition Pluralis, vol. 1, p. 23-37, 1987.
- [NOO 83] NOOR A.K., « Multifield (mixed and hybrid) finite element models, State of the art surveys in finite element technology », *American Society of Mechanical Engineers*, Chap. 5, p. 127-162, 1983.

- [OLS 83] OLSON M.D., « Mixed finite element method in elasticity and elastic contact problems », *Hybrid and mixed finite elements methods*, John Wiley and Sons, Chap. 2, p. 19-48, 1983.
- [PAG 89] PAGANO N.J., SONI S.R., « Interlaminar response of composite materials », *Composite materials series, Models for studying free-edge effects*, vol. 5, 1989.
- [PAG 70] PAGANO N.J., « Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates », *Journal of composite materials*, vol. 4, p. 20-34, 1970.
- [PEN 90] PENADO F.E., DROPEK R. K., « Numerical design and analysis », *Adhesives and sealants, Engineered material handbook*, Edition ASM International, vol. 3, p. 477-500, 1990.
- [PHA 76] PHAM DANG T, Théories des plaques sandwichs élastiques anisotropes, Thèse de Docteur Ingénieur de l'Université de Technologie de Compiègne. Spécialité Mécanique appliquée à la Construction, 1976.
- [REI 50] REISSNER E., « On variational theorem in elasticity », *Journal of mathematics and physics*, vol. 3, p. 90-95, 1950.
- [SPI 81] SPILKER R.L., « High order three-dimensional hybrid-stress elements for thick plate analysis », *International journal for numerical methods in engineering*, John Wiley & Sons Ltd, vol. 17, p. 53-69, 1981.
- [SPI 82] SPILKER R.L., SPINGH S.P., « Three dimensional hybrid-stress isoparametric quadratic displacement elements », *International journal for numerical methods in engineering*, John Wiley & Sons, Ltd, vol. 18, p. 445-465, 1982.
- [VAN 98] VANNUCCI P., AIVAZZADEH S., VERCHERY G., « A comparative analysis of some theories and finite elements for sandwich plates and shells », *Mechanics of sandwich structures*, Kluwer Academic Publishers, p. 43-52, 1998.
- [VER 87] VERCHERY G., « Méthodes numériques de calcul des champs de contrainte dans les matériaux hétérogènes », *Calcul des structures et intelligence artificielle*, Edition Pluralis, vol. 1, p. 7-21, 1987.
- [ZIE 89] ZIENKIEWICZ, TAYLOR, *The finite element method*, vol. 1, McGrawHill Book Company, London 1989 (4th edition).