

---

# Propagation et rayonnement acoustique en présence d'un écoulement non uniforme par une méthode de couplage FEM/BEM

Mabrouk Ben Tahar — Jean Paul Dias

Université de technologie de Compiègne,  
Laboratoire de génie mécanique pour les matériaux et les structures  
UPRESA CNRS 6066 - BP 20529 F-60205 Compiègne cedex  
Email mabrouk.bentahar@utc.fr

---

*RÉSUMÉ.* Pour prendre en compte l'effet de l'écoulement, nous écrivons l'équation de l'acoustique linéaire en terme de potentiel des vitesses acoustiques pour les écoulements potentiels, obtenue par une linéarisation des équations d'Euler. Pour les écoulements quelconques, nous écrivons l'équation de l'acoustique en terme du déplacement acoustique lagrangien exprimé en fonction des variables eulériennes non perturbées (équation de Galbrun). A la première sont associées des conditions de continuité de la vitesse acoustique normale aux interfaces, à la seconde sont associées des conditions de continuité du déplacement acoustique normal lagrangien. Pour résoudre ces équations nous couplons deux méthodes numériques : éléments finis et éléments finis de frontières. La première est utilisée pour les domaines bornés où l'écoulement est non uniforme (problème de propagation) et la deuxième est utilisée pour les domaines non bornés en absence d'écoulement.

*ABSTRACT.* To take in to account the effects of non-uniform mean flow, we have developed the linear acoustic equation in terms of acoustic velocity potential when the mean flow in potential. This equation is obtained by linearisation of Euler's equations. For non-potential mean flow, we developed the linear acoustic equation in terms of lagrangian perturbed displacement written in Eulerian variables in association with mean flow: (mixed formulation or Galbrun equation). The first equation is associated with the continuity of normal component of velocity at the interface discontinuity and the second equation is associated with the continuity of normal component of lagrangian acoustical displacement. For solving these equations, we couple the two numerical methods: Finite Element Method (FEM) and Boundary Element Method (BEM). The first is used in bounded domain where the mean flow is non- uniform, and the second is used for unbounded domain without flow.

*MOTS-CLÉS :* propagation, rayonnement acoustique, écoulement, éléments finis, éléments finis de frontière.

*KEY WORDS:* propagation, acoustic radiation, mean flow, finite element, boundary element.

---

## 1. Introduction

Dans de nombreuses applications industrielles, en particulier dans le domaine aéronautique ou automobile, la propagation et/ou le rayonnement acoustique se fait à travers un écoulement non uniforme. La prise en compte de cet écoulement moyen est nécessaire dans toute prévision acoustique de telles applications. En effet l'écoulement peut être la source acoustique (aéroacoustique) ou tout simplement le support convectif de l'onde acoustique. Ces deux aspects peuvent être présents simultanément (bruit d'écoulement) comme ils peuvent être pris séparément (excitation mécanique d'une structure). Nous nous intéressons dans ce travail au seul aspect convectif.

Nous trouvons, dans la littérature, un grand nombre de travaux qui se rapportent à l'un ou l'autre des aspects de point de vue physique (discussions des équations et des approches), expérimental ou numérique.

### 1.1. Synthèse bibliographique

Nous présentons dans ce paragraphe un ensemble d'approches numériques qui ont été proposées pour l'étude du problème de rayonnement acoustique en présence d'écoulement, et en particulier la réponse apportée dans chaque cas à la traduction de la condition d'impédance associée à la limitation du domaine acoustique. La complexité des applications réelles à étudier (bruit des réacteurs d'avion, discrétion sous-marine, etc...), limite l'utilisation des méthodes analytiques à une première approche du problème. Ces méthodes sont basées dans leur majorité sur l'étude du tube semi-infini en utilisant, par exemple, une approche de type Wiener-Hopf ou une approche modale. Elles diffèrent les unes des autres par les hypothèses introduites sur la physique du problème (effet de convection, paroi traitée, introduction de baffle,...) ou par les hypothèses émises pour prendre en compte la condition de non-réflexion aux bouts. Johnston et Ogimoto [JOH 80] ont étudié le champ de pression rayonné par un tube de longueur finie plongé dans un écoulement uniforme, Osipove [OSI 83], [OSI 85] propose un développement sur les variables géométriques pour l'étude de propagation dans un tube à section à variation lente. Beaucoup de travaux sont faits pour la propagation du mode plan dans des tubes à section variable et en présence d'un écoulement généralement pris unidimensionnel. L. Leep-Apolloni et D. R. Dowling [LEE 97], J.S. Robertson *et al.* [ROB 89], proposent une approche analytique pour l'étude de l'effet d'un écoulement cisailé sur la propagation d'un mode plan. V. Easwaran et Munjal [EAS 92], E. Dokumaci [DOC 98] calcule des matrices de transfert pour étudier des échappements. Une autre grande famille d'étude est basée sur la technique de décomposition modale. Cole [COL 78] propose une décomposition modale (en fonction des modes locaux) pour l'étude du rayonnement d'un tube à température variable (variation de la célérité du son) P. Elisseff et H. Schmidt [ELI 97] utilisent

une approche modale pour étudier la propagation en présence d'un écoulement stratifié à faible nombre de Mach.

Les premières approches numériques étaient surtout appliquées aux problèmes de propagation dans des tubes de longueur finie et à géométrie complexe. L'étude du problème de rayonnement est venue par la suite, dans la plupart des cas, comme une extension de ces approches. Pour cette raison nous allons, dans un premier temps, présenter quelques-unes de ces approches du problème de propagation.

Bihadi et Y. Gervais [BIH 94] proposent une méthode de différences finies pour étudier la propagation en présence d'un écoulement cisailé (laminaire ou turbulent) et d'un gradient de température. Abrahamson A.L. [ABR 77] utilise une méthode d'éléments finis avec une condition de non-réflexion en présence d'un écoulement uniforme dans des conduits à géométrie de révolution. Eversman et Astley [AST 79], [AST 81], [EVE 81] étudient la propagation dans un tube de section variable en absence d'écoulement moyen par une méthode d'éléments finis. Ils prolongent cette étude aux cas de problèmes axisymétriques en présence d'un écoulement moyen unidimensionnel. La décomposition sur une base tronquée et l'introduction de la condition d'impédance aux deux bouts du tube limitent la validité de la méthode. Nayfeh, Shaker et Kaiser [NAY 78], [NAY 80,b], Cabelli [CAB 82] étudient la propagation dans un tube à section variable en présence d'un écoulement en utilisant une décomposition modale préalable, ils mettent une condition de non-réflexion modale aux deux bouts du tube. Kelly, Nayfeh et Warton [KEL 82], d'une part, Uenishi et Myers [UEN 84], d'autre part, ont utilisé la même méthode dans le cas bidimensionnel. Redon E. présente une méthode d'éléments finis pour le problème de propagation en présence d'un écoulement non isotherme [RED 96], il donne un grand nombre de références sur l'étude numérique de la propagation, particulièrement en présence d'écoulements cisailés.

Dans leur ensemble, ces approches permettent d'introduire sans grandes difficultés une grande variété de conditions aux limites, de variables physiques (célérité, écoulement, impédance...) et formes géométriques quelconques, tout en donnant une bonne approximation du problème interne en dehors de certaines fréquences critiques sensibles à la condition de réflexion. Ils montrent aussi l'influence de l'écoulement sur la propagation en modifiant la structure modale, particulièrement celle des modes proches de la fréquence de coupure des conduits. Cet aspect trouve son importance lorsqu'on passe au problème de rayonnement (problème externe en milieu infini).

Un certain nombre d'auteur de cette première partie ont étendu leurs travaux au problème de rayonnement. Le cas particulier d'un écoulement uniforme est ramené par une transformation géométrique à un problème sans écoulement est ne présente pas un intérêt particulier.

Baumester [BAU 79] utilise une méthode de différences finies pour un problème de propagation dans un tube de longueur finie. La condition d'impédance de rayonnement est introduite par une technique dite « spatial marching » qui consiste

à faire évoluer le domaine de la grille de différences finies par itérations successives et une adaptation de l'impédance à chaque pas.

Tyler et Sofrin [TYL 82] utilisent une approche modale pour la propagation dans un tube fini avec une condition de non-réflexion. L'étude de rayonnement extérieur est faite par un modèle simple basé sur l'approximation d'un piston dans un baffle infini.

Tag et Lumsdaire [TAG 78] utilisent une approche expérimentale pour déterminer l'impédance de sortie du tube pour un mode donné qu'ils exploitent ensuite comme condition aux limites pour le problème interne discrétisé par éléments finis.

Sigman, Majjigi et Zinn [SIG 78] étudient le rayonnement du tube fini à section variable avec un écoulement moyen. Ils utilisent l'hypothèse de Rice pour déterminer l'impédance de sortie du tube, qui suppose qu'à l'exception des modes proches de la fréquence de coupure, il n'y ait pas de réflexion à l'intérieur du tube. Pour ces modes ils introduisent l'impédance correspondante pour un tube uniforme. Les auteurs font remarquer que cette détermination n'est plus valable dans le cas où la section serait rapidement variable, à cause de la conversion de modes.

Kagawa, Yamabuchi et Yoshikawa [KAG 80] ont présenté une approche basée sur le couplage éléments finis - méthode analytique pour étudier le rayonnement de structures axisymétriques bafflées. La partie interne est modélisée par éléments finis et partie extérieure est prise en compte par un modèle analytique (piston - baffle) en écrivant l'égalité du potentiel acoustique et de sa dérivée normale à la sortie du tube.

Horowitz, Sigman et Zinn [HOR 86] utilisent, pour l'étude de rayonnement en présence d'un écoulement moyen non uniforme, l'association des deux méthodes numériques : éléments finis - équations intégrales par collocation. La première est utilisée pour discrétiser la zone interne contenant le tube, la deuxième pour la zone externe loin du tube (infinie). Dans une première étape ils mettent une condition de non-réflexion sur l'interface des deux zones, ce qui leur permet de résoudre le problème interne. Le potentiel ainsi déterminé sur l'interface est introduit comme une donnée, ce qui leur permet de résoudre le problème externe. Dans une deuxième étape, ils remplacent la condition de non-réflexion ( $z_i$ ) par une impédance ( $z_e$ ) déterminée à partir du premier calcul. Le processus itératif converge pour  $z_i = z_e$ . Baumeister et Majjigi [BAU 80] utilisent le même principe pour introduire la condition d'impédance. Ils considèrent que l'écoulement moyen est rotationnel alors que la perturbation acoustique est irrotationnelle. Baumeister et Horowitz [BAU 84] utilisent cette approche pour l'étude d'un turboréacteur (JT15D) et confirment son bon accord avec les résultats expérimentaux qu'ils obtiennent. Z. L. Ji, Q. Ma et Z. H. Zhang [JI 94], [JI 95] associent une approche par matrice de transfert (mode plan) à une méthode par représentation intégrale en utilisant la transformation d'un écoulement uniforme à l'extérieur du tube.

Le caractère commun à toutes ces études est la difficulté de prendre en compte d'une manière satisfaisante la condition d'impédance au bord du domaine fini à étudier. Pour s'affranchir de cette difficulté, plusieurs auteurs proposent le couplage direct de méthodes numériques. Si un consensus est établi pour utiliser la méthode des éléments finis à l'intérieur, il n'en est pas de même pour le problème externe où plusieurs approches sont proposées : éléments infinis, éléments d'enveloppe d'onde et représentations intégrales.

Le concept d'éléments infinis a été introduit pour la première fois par Bettess et Zienkiewicz [BET 77] pour adapter la méthode des éléments finis classique aux domaines non bornés. Il s'agit d'ajouter aux fonctions d'interpolation classiques, une fonction qui traduit le comportement asymptotique à l'infini de la variable cherchée (la condition de Sommerfeld pour un problème de rayonnement acoustique). La dépendance de ces fonctions d'une longueur caractéristique arbitraire limite l'intérêt de la méthode, particulièrement pour les problèmes d'ondes. Astley [AST 83,a] propose une variante de cette méthode, qui consiste à utiliser comme fonctions tests les fonctions complexes conjuguées des fonctions d'interpolation de type éléments infinis (éléments d'enveloppe d'onde). Astley et Eversman [AST 83,b] présentent une étude comparative dans un cas unidimensionnel de ces deux approches. Ils montrent l'insuffisance de la première pour les hautes fréquences. Ils portent leur choix sur la deuxième approche qui, d'une part, s'affranchit de la détermination arbitraire d'une longueur caractéristique nécessaire pour les éléments infinis et, d'autre part, présente une meilleure stabilité. Ces deux approches sont utilisées en absence d'écoulement à l'infini. Astley [AST 85] fait l'extension de cette approche au cas de rayonnement de structures axisymétriques en présence d'un écoulement moyen. Il introduit une phase qui tient compte de l'effet de convection de l'onde en se basant sur la théorie de rayon. Ce qui l'oblige à prendre un maillage qui coïncide avec les lignes de phases constantes. Cette technique d'éléments d'enveloppe d'onde a été par la suite souvent étudiée [BET 95], [AST 94], [AST 98] pour différents types d'application.

Astley et Bain [AST 86] utilisent une représentation intégrale pour étudier le rayonnement acoustique en présence d'un écoulement uniforme. Ils se ramènent au moyen d'un changement de variable à un problème sans écoulement. Ils utilisent une méthode de collocation avec un élément triangulaire constant, ce qui leur permet après transformation de la dérivée seconde de la solution élémentaire de Green en espace libre de s'affranchir de la singularité. Cette représentation est formée avec un potentiel mixte pour éviter le problème des fréquences irrégulières. Ben Tahar [BEN 91] propose une formulation variationnelle pour une représentation intégrale implicite qui prend en compte l'effet de l'écoulement comme une source acoustique volumique. Cette formulation implicite est résolue par un processus itératif. La convergence n'est assurée que pour des faibles nombres de Mach. Cette approche a été validée expérimentalement dans [LAZ 97]. Une démarche similaire est proposée par LEE *et al* [LEE 94].

En conclusion de cette revue bibliographique, que nous avons limité à la présentation de l'aspect numérique proposé pour la résolution d'un problème de propagation et/ou de rayonnement acoustique, nous pouvons dégager les deux remarques essentielles suivantes :

– la première est liée à la prise en compte de la condition de rayonnement à l'infini. En effet, elle apparaît comme la difficulté majeure pour les méthodes basées sur la technique des éléments finis qui nécessite l'introduction d'une condition d'impédance a priori non connue ;

– la deuxième est liée à la prise en compte d'un écoulement non uniforme, qui exclu le recours à une méthode basée sur les représentations intégrales qui prennent en compte d'une manière implicite la condition de rayonnement.

Ces deux remarques permettent de conclure à la nécessité de coupler les deux techniques : l'une capable de prendre en compte la présence d'un écoulement non uniforme (éléments finis), l'autre capable de prendre en compte la condition de rayonnement à l'infini (modèle analytique, représentation intégrale,...).

Toutefois le couplage de deux techniques pose un nouveau problème lié à la manière de faire ce couplage et à la définition de l'interface où va s'appliquer la condition de couplage [ATS 85], [AST 86], [BEN 91].

Il reste un problème tout aussi important dans le cas de l'acoustique en présence d'écoulement, c'est le choix même de l'équation de propagation. Nous trouvons une grande famille d'approche basée sur l'analogie de type Lighthill [BAI 94] et une autre basée sur la perturbation des équations de conservation [BLO 46], [POI 82].

Nous présentons dans cet article deux écritures de l'équation de l'acoustique linéaire, l'une eulérienne et l'autre mixte Lagrange/Euler. Pour la résolution numérique de ces équations dans le cas d'un problème de propagation (milieu fini) et rayonnement (milieu infini) nous proposons une formulation variationnelle que nous discrétisons par une méthode d'éléments finis (FEM) et une méthode d'éléments finis de frontière (BEM).

## **2. Equations de l'acoustique linéaire**

Nous présentons dans ce paragraphe deux formes des équations de l'acoustique linéaire : la première est obtenue par une linéarisation des équations d'Euler (représentation eulérienne) et la deuxième est obtenue par une linéarisation des équations de conservation en variables lagrangiennes puis transformés en fonctions des variables eulériennes associées à l'écoulement moyen (représentation mixte ou équation de Galbrun).

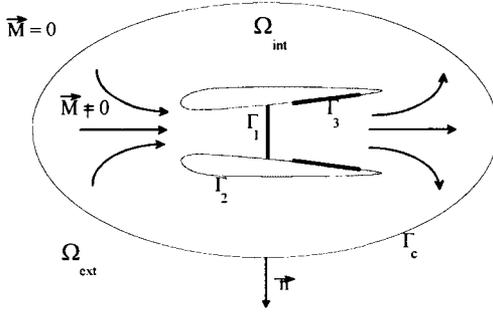


Figure 1. Répartition des domaines

Nous supposons que le fluide est parfait, isotherme et en absence de forces volumiques.

### 2.1. Equations de l'acoustique linéaire en représentation eulérienne

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de bilan de l'entropie sont données par le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 + \rho \vec{\omega} \wedge \vec{v} + \text{grad} p = 0 \\ \rho T \frac{ds}{dt} = 0 \end{cases} \quad [1]$$

A ce système d'équation s'ajoute la loi d'état des fluides parfaits :  $p = g(\rho, s)$

Les variations élémentaires de l'entropie par unité de masse et de la masse volumique peuvent s'exprimer en fonction de celle de la pression par :

$$ds = -\frac{C_p}{T} \frac{\gamma - 1}{\beta \gamma} dp, \quad dp = \frac{\gamma}{c^2} dp = \frac{1}{a^2} dp \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad [2]$$

Où  $C_p$  est la capacité calorifique à pression constante,  $C_v$  est la capacité calorifique à volume constant,  $a$  est la célérité du son dans le fluide considéré isotherme,  $c$  est la célérité du son dans le fluide pour une transformation adiabatique et  $\frac{\beta}{p}$  est le coefficient relatif de pression.

La linéarisation de ce système d'équations consiste à supposer que toute fonction thermodynamique s'exprime sous la forme d'une valeur initiale stationnaire et d'une

perturbation non stationnaire :  $f_t(x,t) = f_e(x) + \varepsilon f(x,t)$ . Les valeurs initiales  $f_e(x)$  et les valeurs instantanées  $f_t(x,t)$  vérifient toutes les équations d'équilibre [BOL 46].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho_e \bar{v} + \rho \bar{v}_e) = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + r\bar{ot}\bar{v}_e \wedge \bar{v} + r\bar{ot}\bar{v} \wedge \bar{v}_e + \text{grad}(\bar{v}_e \cdot \bar{v}) + \frac{1}{\rho_e} \text{grad}p - \frac{1}{\rho_e^2} \text{grad}p_e = 0 \\ \frac{ds}{dt} = 0 \\ p = c^2 \rho + hs \end{array} \right. \quad [3]$$

$$h = \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho$$

Si nous supposons en plus que la transformation est isentropique, et que l'état initial est irrotationnel, nous obtenons la forme simplifiée de ces équations linéarisées suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(\rho_e \bar{v} + \rho \bar{v}_e) = 0 \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + r\bar{ot}\bar{v} \wedge \bar{v}_e + \text{grad}(\bar{v}_e \cdot \bar{v}) + \frac{1}{\rho_e} \text{grad}p - \frac{1}{\rho_e^2} \text{grad}p_e = 0 \\ p = c^2 \rho \end{array} \right. \quad [4]$$

Les relations thermodynamiques ci-dessus, nous permettent de dire que la perturbation de la vitesse est aussi irrotationnelle et poser :  $\bar{v}(x,t) = -\text{grad}\phi(x,t)$

où  $\phi(x,t)$  est le potentiel des vitesses acoustiques. La combinaison des trois équations, nous donne l'équation vérifiée par le potentiel des vitesses acoustiques [BEN 91] :

$$\begin{aligned} & \Delta\phi(x,t) - \frac{1}{c_e^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x,t) - \frac{2}{c_e^2} \left( \bar{v}_e(x) \cdot \text{grad} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) \right) \\ & - \frac{1}{c_e^2} (\bar{v}_e(x) \cdot \text{grad}(\bar{v}_e(x) \cdot \text{grad}\phi(x,t))) + \frac{1}{\rho_e} (\text{grad}\rho_e(x) \cdot \text{grad}\phi(x,t)) \\ & + \frac{1}{2c_e^4} (\bar{v}_e(x) \cdot \text{grad}c_e^2(x)) \times \left( \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) + 2(\bar{v}_e \cdot \text{grad}\phi(x,t)) \right) = 0 \end{aligned} \quad [5]$$

Nous remarquons à ce niveau que :

– la première ligne de cette équation correspond au cas où l'on considérerait que  $\rho_e = \text{cte}$  et  $c_e = \text{cte}$  (cas que nous développons dans toute la suite de cet exposé) ;

– la deuxième ligne correspond à la contribution de la compressibilité de l'état initial (cas généralisant le premier sans difficulté particulière) ;

– la troisième ligne correspond à la contribution de la variation de la célérité du son, cas que nous négligeons. En effet, pour des vitesses d'écoulement à nombre de Mach inférieur à 0.6, la variation de la célérité du son dans l'air est inférieure à 4 %. Ce qui nous permet de considérer une célérité constante  $c_e = c$  pour les applications qui nous intéressent.

L'équation, vérifiée par le potentiel des vitesses acoustiques, ci-dessus devient :

$$\Delta\phi(x,t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(x,t) - \frac{2}{c^2} \left( \bar{v}_e(x) \text{grad} \frac{\partial \phi}{\partial t}(x,t) \right) - \frac{1}{c^2} (\bar{v}_e(x) \text{grad} (\bar{v}_e(x) \text{grad} \phi(x,t))) + \frac{1}{\rho_e} (\text{grad} \rho_e(x) \text{grad} \phi(x,t)) = 0 \quad [6]$$

à ce système d'équation viennent s'ajouter les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} -\rho_e \times \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + (\bar{v}_e \cdot \text{grad} \phi) \right] = \bar{p} & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{V}_n \text{ sur } \Gamma_2 \text{ et } \rho_e \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] = -\frac{\partial p}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_c \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \langle \bar{v}_e, \text{grad} \phi \rangle = \frac{c}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad [7]$$

Au lieu de résoudre ce problème, nous proposons de chercher la solution sous forme de variables séparées avec une dépendance harmonique en temps, ce qui est le cas lorsque les excitations le sont elles-mêmes, ou ce qui revient à faire une transformée de Fourier temporelle dans le cas où les excitations auraient une dépendance temporelle quelconque :  $(f(x,t) = f(x)e^{-i\omega t})$

Sous cette hypothèse et à  $\rho_e = \text{cte}$  le problème aux limites vérifié par le potentiel des vitesses s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \Delta\phi(x) + k^2\phi(x) + 2ik(\bar{M}(x) \text{grad} \phi(x)) - (\bar{M}(x) \text{grad} (\bar{M}(x) \text{grad} \phi(x))) = 0 \\ \left[ ik\phi - (\bar{M}_e \cdot \text{grad} \phi) \right] = \frac{1}{\rho_e c} \bar{p} & \text{sur } \Gamma_1 \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{V}_n \text{ sur } \Gamma_2 \text{ et } i\omega \rho_e \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} & \text{sur } \Gamma_c \\ ik\phi - \langle \bar{M}_e, \text{grad} \phi \rangle + \frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 & \text{sur } \Gamma_3 \end{cases} \quad [8]$$

$$\text{où } \bar{M}(x) = \frac{\bar{v}_e}{c}$$

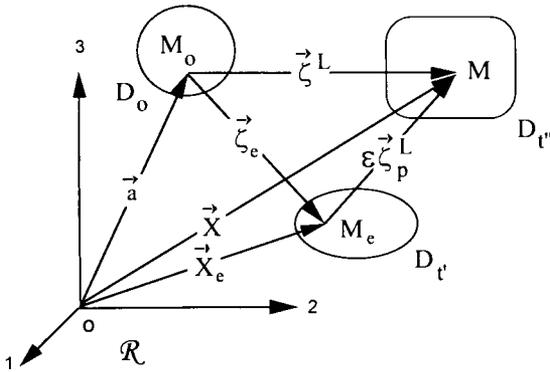
Nous remarquons, à ce niveau, que l'hypothèse de potentialité, de l'écoulement initial et perturbé, peut être une hypothèse très restrictive en particulier dans les problèmes aéroacoustiques.

Pour s'affranchir de cette restriction, nous présentons une deuxième approche de l'écriture de l'équation de propagation de l'acoustique linéaire.

**2.2. Equations de l'acoustique linéaire en représentation mixte : Equation de Galbrun**

Dans cette deuxième approche, nous écrivons les équations de conservation en fonction des variables lagrangiennes. La linéarisation de ces équations et leur transformation en fonction des variables spatiales eulériennes associées à l'écoulement moyen, nous donnent l'équation vérifiée par le déplacement lagrangien perturbé en représentation mixte.

Pour déterminer la transformation des variables spatiales, nous considérons un domaine  $D_0$  occupé par l'ensemble des particules qui constitue le milieu étudié à l'instant initial  $t'=0$  (ce domaine est choisi comme configuration de référence),  $D_t$  le domaine occupé par le système dans la configuration non perturbée à l'instant  $t$  et  $D_{t''}$  celui occupé par le système dans la configuration perturbée à l'instant  $t''$ . Toute grandeur perturbée, caractéristique du milieu dans le domaine  $D_t$ , est la perturbation de la grandeur d'entraînement correspondante dans le domaine  $D_{t''}$ , c'est-à-dire la somme de la grandeur d'entraînement non perturbée connue et d'une petite perturbation (au premier ordre).



**Figure 2.** Configuration d'entraînement non perturbée et configuration perturbée

La position  $X$  de la particule à l'instant  $t''$  s'écrit, donc, comme la somme d'une position  $x$  qu'elle occupait à l'instant  $t'$  et d'un déplacement  $\xi$ . De même, la position  $X_e$  de la particule à l'instant  $t$  est la somme de la position  $x$  qu'elle occupait à

l'instant  $t'$  et d'un déplacement  $\xi_e$ . Ce qui se traduit par la relation [POI 82], [GOY 98] :

$$\vec{X} = \vec{X}_e + \vec{\xi}_p^L \quad [9]$$

La relation entre les quantités lagrangiennes et eulériennes s'écrit :

$$\psi_p^L = \psi_p^E + \left( \xi_p^L \cdot \nabla^E \right) \psi_e \quad [10]$$

En appliquant ces deux relations de transformation, la linéarisation des équations de conservation, nous donnent :

$$\frac{\rho_p^L}{\rho_e} = - \frac{\partial \xi_p^L}{\partial X_e} \quad [11]$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_{ej}} v_{ej} \right) \left( \rho_e v_p^L \right) - \frac{\partial}{\partial X_{ej}} \left( \sigma_p^L \delta_{ij} + \sigma_{eli} \left( \frac{\partial \xi_p^L}{\partial X_{ek}} \delta_{ij} - \frac{\partial \xi_p^L}{\partial X_{el}} \right) \right) = 0 \quad [12]$$

Pour les mêmes hypothèses retenues ci-dessus pour la formulation eulérienne, nous avons :

$$\begin{cases} \sigma_{p_{ij}} = -p_p^L \delta_{ij} \\ \sigma_{e_{ij}} = -p_e \delta_{ij} \end{cases} \quad [13]$$

La combinaison des équations, linéarisées, de conservation de la masse et de la quantité de mouvement nous permet d'obtenir l'équation de Galbrun vérifiée par le déplacement lagrangien perturbé.

$$\begin{aligned} & \rho_e c_e^2 \frac{\partial^2 \xi_{pk}^L}{\partial X_{ei} \partial X_{ek}} + \rho_e \frac{\partial^2 \xi_{pi}^L}{\partial t^2} - 2\rho_e v_{ej} \frac{\partial}{\partial X_{ej}} \left( \frac{\partial \xi_{pi}^L}{\partial t} \right) - \rho_e v_{ej} \frac{\partial}{\partial X_{ej}} \left( v_{ek} \frac{\partial \xi_{pi}^L}{\partial X_{ek}} \right) \\ & + \frac{\partial p_e}{\partial X_{ej}} \frac{\partial \xi_{pj}^L}{\partial X_{ei}} = 0 \end{aligned} \quad [14]$$

Pour le problème harmonique en temps cette équation avec l'hypothèse de  $p_e = \text{cte}$  s'écrit [GOY 98] :

$$\rho_e c_e^2 \frac{\partial^2 \xi_{pk}^L}{\partial X_{ei} \partial X_{ek}} + \rho_e \omega^2 \xi_{pi}^L + 2i\omega \rho_e v_{ej} \frac{\partial \xi_{pi}^L}{\partial X_{ej}} - \rho_e v_{ej} \frac{\partial}{\partial X_{ej}} \left( v_{ek} \frac{\partial \xi_{pi}^L}{\partial X_{ek}} \right) = 0 \quad [15]$$

A cette équation sont associées les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_e c_e^2 \frac{\partial \xi_{pk}}{\partial X_{ek}} = -\bar{p} & \text{sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_c \\ \xi = \bar{\xi} & \text{sur } \Gamma_2 \\ \rho_e c_e^2 \frac{\partial \xi_{pk}}{\partial X_{ek}} = -i\omega Z \xi_{pk} \cdot n_k & \text{sur } \Gamma_3 \end{array} \right. \quad [16]$$

Où  $Z(\omega)$  représente l'impédance acoustique.

La détermination du déplacement lagrangien perturbé permet d'accéder aux autres grandeurs acoustiques. En effet, nous avons les relations suivantes :

$$p_p^L = -\rho_e c_e^2 \frac{\partial \xi_{pi}^L}{\partial X_{ei}} \quad \text{et} \quad \bar{v}_p^L = \frac{d \bar{\xi}_p^L}{dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_{ei} \cdot \frac{\partial}{\partial X_{ei}} \right) \bar{\xi}_p^L \quad [17]$$

Le déplacement lagrangien perturbé prend en compte les deux composantes rotationnelle et irrotationnelle, ce qui nous permet de prendre en compte, par la suite, les effets visqueux au moyen d'un modèle équivalent par exemple.

A la différence de la représentation eulérienne, où la condition aux limites naturelle à l'interface est la continuité de la composante normale de la vitesse acoustique qui n'est pas générale [POI 82], [MYE 80], la représentation mixte nécessite seulement la continuité du déplacement lagrangien perturbé normal à travers la surface de discontinuité dans l'état non perturbé.

$$\left\| \xi_{pk}^L n_{ek} \right\|_{\Sigma_c} = 0 \quad [18]$$

Où  $\Sigma_c$  est la surface de discontinuité dans l'état non perturbé.

Cette condition conduit à une discontinuité de la vitesse normale.

$$\left\| v_{pj}^L \right\|_{\Sigma_c} \cdot n_{ej} = \left\| v_{ei} \cdot \frac{\partial \xi_{pj}^L}{\partial X_{ei}} \right\|_{\Sigma_c} \cdot n_{ej} \quad [19]$$

Où  $\left\| \bullet \right\|$  désigne le saut d'une fonction à travers une surface de discontinuité.

Le choix de la condition aux limites adéquate reste un problème ouvert.

### 3. Equation de l'acoustique linéaire dans le domaine extérieur (sans écoulement)

#### 3.1. Equation de Helmholtz

Pour résoudre l'équation de propagation dans le domaine externe  $\Omega_{ext}$  (non borné), où l'écoulement est considéré nul, nous conservons les mêmes hypothèses physiques associées au domaine interne. En absence d'écoulement, les deux représentations précédentes (eulérienne et mixte) sont identiques. Le champ de pression acoustique, en absence de sources, vérifie l'équation homogène d'Helmholtz à laquelle, en plus des conditions aux limites classiques, nous associons la condition de rayonnement de Sommerfeld à l'infini.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta p(X) + k^2 p(X) = 0 \text{ pour } X \in \Omega_{ext} \\ + \text{Condition de Rayonnement de Sommerfeld} \end{array} \right. \quad [20]$$

Dans le cas IR3 cette condition s'écrit sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{r \rightarrow \infty} p(r) = O(1/r) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left( \frac{\partial p(r)}{\partial r} - ikp(r) \right) = o(1/r) \end{array} \right. \quad [21]$$

Où  $r$  est la distance du point  $X$  à l'origine.

#### 3.2. Condition de continuité à l'interface des deux domaines

La détermination de limitation du domaine extérieur se faire par un choix arbitraire qui satisfait la condition d'un écoulement supposé assez petit (nul) dans ce domaine. A l'interface  $\Gamma_c$  des deux domaines intérieur et extérieur, nous écrivons la continuité de la pression et du gradient de pression (équivalente à la continuité du déplacement normal) :

##### 3.2.1. Représentation eulérienne

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p_{ext}}{\partial n} = \frac{\partial p_{int}}{\partial n} = \rho_e i \omega \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ sur } \Gamma_c \\ p_{ext} = p_{int} = \rho_e i \omega \phi \text{ sur } \Gamma_c \end{array} \right. \quad [22]$$

3.2.2. Représentation mixte

$$\begin{cases} \frac{\partial p_{ext}}{\partial n} = \frac{\partial p_{int}}{\partial n} = \rho_e \omega^2 \xi_{pi} n_i \quad \text{sur } \Gamma_c \\ p_{ext} = p_{int} = -\rho_e c_e^2 \frac{\partial \xi_{pi}}{\partial X_{e_i}} \quad \text{sur } \Gamma_c \end{cases} \quad [23]$$

3.3. Représentation intégrale du champ de pression

Pour résoudre l'équation vérifiée par la pression acoustique, nous utilisons une représentation intégrale de ce champ. Cette représentation est obtenue en introduisant la solution élémentaire dans l'espace libre de l'équation de Helmholtz qui vérifie la condition de rayonnement de Sommerfeld  $G(X, Y)$  :

$$\begin{cases} \Delta G(X, Y) + k^2 p(X, Y) = \delta(X, Y) \\ \quad \quad \quad + CRS \end{cases} \quad [24]$$

Dans  $\mathbb{R}^3$ ,  $G(X, Y) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}$  où  $r = \left| \begin{matrix} \rightarrow \\ XY \end{matrix} \right|$

La convolution de l'équation de Helmholtz par cette solution élémentaire nous donne la représentation intégrale suivante de la pression acoustique pour  $X \in \Omega_{ext}$  :

$$p(X) = - \int_{\Gamma_c} p(Y) \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n(Y)} d\Gamma(Y) + \int_{\Gamma_c} \frac{\partial p(Y)}{\partial n(Y)} G(X, Y) d\Gamma(Y) \quad [25]$$

où la normale  $\vec{n}$  est ici la normale *rentrante* dans le milieu  $\Omega_{ext}$

Pour  $X \in \Gamma_c$  et  $Y \in \Gamma_c$ , nous avons :

$$\frac{1}{2} p(X) + v.p. \int_{\Gamma_c} p(Y) \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n(Y)} d\Gamma(Y) - \int_{\Gamma_c} \frac{\partial p(Y)}{\partial n(Y)} G(X, Y) d\Gamma(Y) = 0 \quad [26]$$

Si la singularité de l'intégrale de simple couche, est d'ordre inférieur à la dimension du domaine d'intégration ce qui donne des intégrales convergentes au sens classique, il n'en est pas de même de la singularité de l'intégrale de double couche qui est de même ordre que la dimension du domaine d'intégration et elle à prendre au sens d'une valeur principale de Cauchy.

En la dérivant par rapport à la normale, nous obtenons la représentation intégrale de dérivée normale de la pression :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial p(X)}{\partial n(X)} + P.F. \int_{\Gamma_c} p(Y) \frac{\partial^2 G(X, Y)}{\partial n(X) \partial n(Y)} d\Gamma(Y) - v.p. \int_{\Gamma_c} \frac{\partial p(Y)}{\partial n(Y)} \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n(X)} d\Gamma(Y) = 0 \quad [27]$$

Dans cette équation intégrale, la première intégrale est divergente et est à prendre au sens de la « Partie Finie de Hadamard ».

En appliquant la condition aux limites [22], nous avons :

$$\frac{1}{2} \phi(X) + v.p. \int_{\Gamma_c} \phi(Y) \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n(Y)} d\Gamma(Y) - \frac{1}{i\omega \rho_e} \int_{\Gamma_c} \frac{\partial p(Y)}{\partial n(Y)} G(X, Y) d\Gamma(Y) = 0 \quad [28]$$

En appliquant la condition aux limites [23], nous avons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \rho_e \omega^2 \xi_{pi}(X) n_i(X) - \int_{\Gamma_c} \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n(X)} \rho_e \omega^2 \xi_{pi}(Y) n_i d\Gamma_c(Y) \\ & + \int_{\Gamma_c} \frac{\partial^2 G(X, Y)}{\partial n(X) \partial n(Y)} p(Y) d\Gamma(Y) = 0 \quad \forall X \in \Gamma_c \end{aligned} \quad [29]$$

Dans cette équation intégrale, *la connaissance* de l'accélération sur la surface  $\Gamma_c$  permet d'accéder à la pression sur  $\Gamma_c$  et par la représentation intégrale [25], nous accédons à la pression en tout point du domaine extérieur. La résolution peut être faite par une méthode de collocation [SAY79].

#### 4. Formulations variationnelles associées aux différents problèmes

Pour résoudre numériquement ces différents problèmes aux limites, nous leur associons des formulations variationnelles. Nous supposons dans la suite que la vitesse normale de l'écoulement initial sur le bord  $\Gamma_3$  est nulle :  $(\vec{v}_e, \vec{n})|_{\Gamma_3} = 0$  et que nous avons d'autre part  $(\vec{v}_e, \vec{n})|_{\Gamma_c} = 0$

##### 4.1. Représentation eulérienne

La forme variationnelle associée au problème de propagation en termes de potentiel des vitesses acoustiques, est obtenue en multipliant l'équation [8] par une fonction de pondération quelconque  $\psi^*$  et en intégrant sur le volume  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega} [\Delta \phi + \phi + 2ik(\vec{M}_e, \text{grad}\phi) - (\vec{M}_e, \text{grad}(\vec{M}_e, \text{grad}\phi))] \psi^* d\Omega = 0 \quad \forall \psi^* \quad [30]$$

L'utilisation du théorème de la divergence, de l'intégration par parties et l'application des conditions aux limites nous donne :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \phi k^2 \psi^* d\Omega + \int_{\Omega} 2ik \langle \bar{M}_e, \text{gr}\bar{a}d\phi \rangle \psi^* d\Omega - \int_{\Omega} (\text{gr}\bar{a}d\phi, \text{gr}\bar{a}d\psi^*) d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} (\bar{M}_e, \text{gr}\bar{a}d\phi) (\bar{M}_e, \text{gr}\bar{a}d\psi^*) d\Omega \\
 & + \int_{\Gamma_1} (\text{gr}\bar{a}d\phi, \vec{n}) \psi^* d\Gamma - \int_{\Gamma_1} ik\phi (\bar{M}_e, \vec{n}) \psi^* d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_3} ik\beta\phi \psi^* d\Gamma_3 \quad \forall \psi^* \quad [31] \\
 & + \int_{\Gamma_3} \beta (\bar{M}_e, \text{gr}\bar{a}d\phi) \psi^* d\Gamma_3 \quad - \int_{\Gamma_c} \frac{i}{\rho_e c k} \frac{\partial p}{\partial n} \psi^* d\Gamma_c \\
 & = - \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\rho_e c} (\bar{M}_e, \vec{n}) \bar{p} \psi^* d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_2} \bar{V}_n \psi^* d\Gamma_2
 \end{aligned}$$

Où  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_3$  sont supposées hermétique vis-à-vis de l'écoulement initial.

La discrétisation par éléments finis nous donne le système matriciel suivant :

$$[Z_E] \{\phi_i\} + [H_E] \left\{ \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_i \right\} = \{F_{E_i}\} \quad [32]$$

La connaissance, aux nœuds du maillage, de la valeur de  $\frac{\partial p}{\partial n}$  sur la surface  $\Gamma_c$  permet de déterminer la solution  $\phi$  du domaine interne.

### 4.2. Représentation mixte

Nous obtenons la forme variationnelle associée au problème écrit en représentation mixte, en multipliant l'équation [15] par un vecteur de pondération et  $W^*$  en intégrant sur le volume  $\Omega$ . Afin de ne pas alourdir l'écriture, nous supposant dans la suite que la pression initiale dans le domaine  $\Omega$  est constante.

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left[ \rho_e c_e^2 \frac{\partial^2 \xi_{pk}}{\partial X_{ei} \partial X_{ek}} + \rho_e \omega^2 \xi_{pi} \right] W_i^* d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left[ 2i\omega \rho_e v_{ej} \frac{\partial \xi_{pi}}{\partial X_{ej}} - \rho_e v_{ej} \frac{\partial}{\partial X_{ej}} \left( v_{ek} \frac{\partial \xi_{pi}}{\partial X_{ek}} \right) \right] W_i^* d\Omega = 0
 \end{aligned} \quad [33]$$

Avec  $W_i^*$  une fonction de pondération quelconque.

Une intégration par parties et l'introduction des conditions aux limites nous donne :

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Omega} \rho_e \omega^2 \xi_{p_i} W_i^* d\Omega_1 - \int_{\Omega} 2i\omega \rho_e v_{ej} \frac{\partial \xi_{p_i} W_i^*}{\partial X_{ej}} d\Omega_1 \\
 & + \int_{\Omega} \rho_e c_e^2 \frac{\partial \xi_{p_k}}{\partial X_{ek}} \frac{\partial W_i^*}{\partial X_{ei}} d\Omega_1 - \int_{\Omega} \rho_e v_{ek} \frac{\partial \xi_{p_i}}{\partial X_{ek}} v_{ej} \frac{\partial W_i^*}{\partial X_{ej}} d\Omega_1 \\
 & - \int_{\Gamma_1} \rho_e v_{ek} \frac{\partial \xi_{p_i}}{\partial X_{ek}} (v_{ej} n_j) W_i^* d\Gamma_1 - \int_{\Gamma_3} i\omega Z \xi_{p_j} n_j W_i^* n_i d\Gamma_3 - \int_{\Gamma_c} p W_i^* n_i d\Gamma_c \\
 & = \int_{\Gamma_1} \bar{p} W_i^* n_i d\Gamma_1 \quad \forall W_i^* / W_i^* \Big|_{\Gamma_2} = 0
 \end{aligned} \tag{34}$$

Cette écriture à l'avantage d'introduire d'une manière naturelle les conditions aux limites (pression acoustique, vitesse acoustique et impédance) accessibles directement par une mesure expérimentale.

La discrétisation par éléments finis de frontière nous donne le système matriciel suivant [DIA 99] :

$$[Z_G] \{\xi_i\} - [H_G] \{p_i\} = \{FG_i\} \tag{35}$$

La connaissance, aux nœuds du maillage, de la valeur de  $p$  sur la surface  $\Gamma_c$  permet de déterminer la solution  $\phi$  du domaine interne.

### 4.3. Domaine extérieur

La pondération de la représentation intégrale de dérivée normale de la pression par une fonction test et l'intégration sur le contour  $\Gamma_c$ , nous donne la formulation intégrale associée au domaine externe :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \phi(X) \sigma^*(X) d\Gamma(X) + v.p. \int_{\Gamma_c \times \Gamma_c} \phi(Y) \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n(Y)} \sigma^*(X) d\Gamma(X) d\Gamma(Y) \\
 & - \frac{1}{i\omega \rho_e} \int_{\Gamma_c \times \Gamma_c} \frac{\partial p(Y)}{\partial n(Y)} G(X, Y) \sigma^*(X) d\Gamma(X) d\Gamma(Y) = 0
 \end{aligned} \tag{36}$$

La discrétisation par éléments finis de frontière nous donne le système matriciel suivant :

$$[C_E] \{\phi_i\} + [A] \{\sigma_i\} = \{0\} \tag{37}$$

La connaissance, aux nœuds du maillage, de la valeur de  $\phi$  sur la surface  $\Gamma_c$  permet de déterminer la solution  $\left\{ \frac{\partial p}{\partial n} \right\}$  sur cette même surface et la représentation intégrale [25] permet d'accéder à la pression acoustique en tout point du domaine extérieur.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} p^*(X) \rho_e \omega^2 \xi_{pi}(X) n_i(X) d\Gamma(X) \\
 & - \int_{\Gamma_c \times \Gamma_c} p^*(X) \frac{\partial G(X, Y)}{\partial n(X)} \rho_e \omega^2 \xi_{pi}(Y) n_i(Y) d\Gamma_c(Y) d\Gamma_c(X) \\
 & + \int_{\Gamma_c \times \Gamma_c} p^*(X) \frac{\partial^2 G(X, Y)}{\partial n(X) \partial n(Y)} p(Y) d\Gamma(Y) d\Gamma(X) = 0 \quad \forall p^*, X \in \Gamma_c \text{ et } Y \in \Gamma_c
 \end{aligned} \tag{38}$$

La discrétisation par éléments finis de frontière nous donne le système matriciel suivant :

$$[C_G] \{ \zeta_i \} + [D] \{ p_i \} = \{ 0 \} \tag{39}$$

La connaissance, aux nœuds du maillage, de la valeur de  $\xi$  sur la surface  $\Gamma_c$  permet de déterminer la solution  $p$  sur cette même surface et la représentation intégrale [25] permet d'accéder à la pression acoustique en tout point du domaine extérieur.

#### 4.4. Couplage des deux domaines

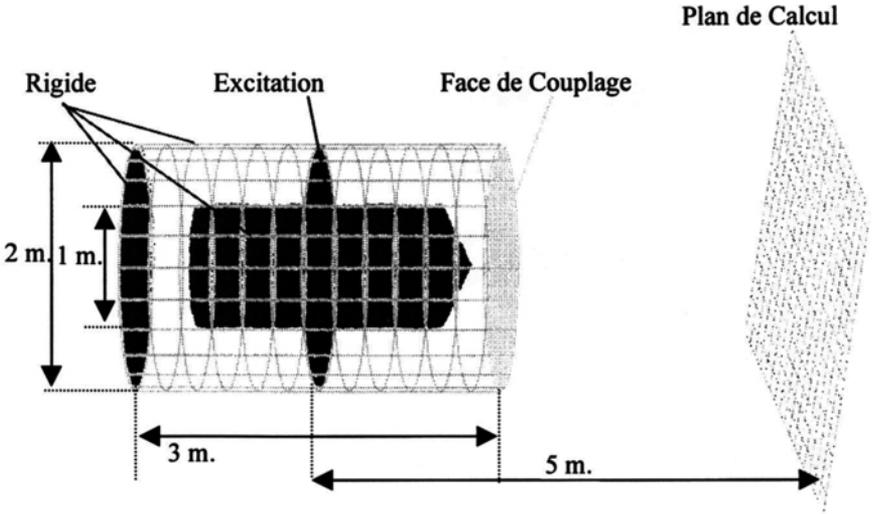
Pour obtenir le système d'équations associé à la résolution simultanée des deux domaines, nous couplons les systèmes [32] ou [35] aux systèmes [37] ou [39] respectivement :

$$\begin{pmatrix} Z_E \\ \dots \\ C_E \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \begin{pmatrix} H_E \\ \dots \\ A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_i \\ \dots \\ \sigma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} FE_i \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{40}$$

$$\begin{pmatrix} Z_G \\ \dots \\ C_G \end{pmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \begin{pmatrix} H_G \\ \dots \\ D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_i \\ \dots \\ p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} FG_i \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{41}$$

La résolution de ces deux systèmes couplés, par élimination sur l'une ou l'autre des variables, permet de déterminer la solution [DIA 99].

### 5. Exemple d'application



**Figure 3.** Géométrie du problème

Nous présentons dans ce paragraphe un exemple numérique qui met en évidence l'effet de l'écoulement sur la propagation et le rayonnement acoustique. Il s'agit d'un cylindre avec un corps central (figure 3). Cet ensemble est maillé avec 768 éléments finis de volume, 384 éléments finis de frontière et 96 éléments finis surfaciques de couplage. Le rayon du cylindre extérieur est de 1 m, sa longueur est de 3 m, le corps central est de rayon 0,5 m et de longueur 2 m. Le plan de mesure pour le rayonnement est perpendiculaire à l'axe du cylindre et il est situé à 5 m (figure 3).

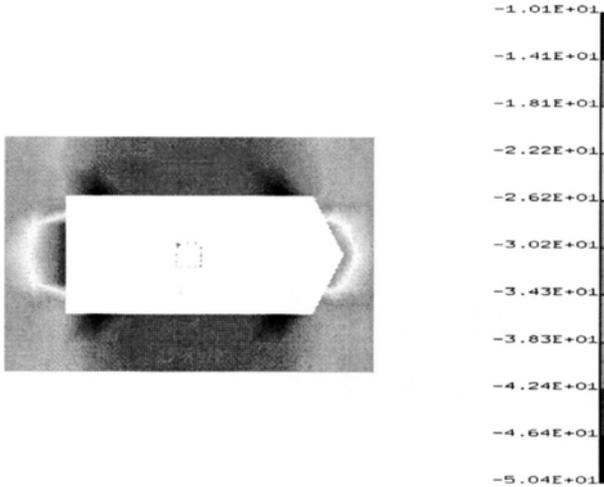
La masse volumique du fluide est de  $1,25 \text{ Kg/m}^3$  et la célérité du son est de  $340 \text{ m/s}$  (air).

Pour le calcul de l'écoulement à l'intérieur du cylindre, nous supposons que le fluide est incompressible et nous imposons la même vitesse d'entrée et de sortie aux deux bouts du cylindre.

Pour le calcul acoustique, nous imposons un déplacement sur une section au centre du cylindre ( $y = 0$ ). L'arrière du cylindre est fermé et l'avant forme la surface

de coulage entre le milieu intérieur (le cylindre) et le milieu extérieur (infini). Les calculs sont faits pour une fréquence de 270 Hz ( $ka = 5$ ).

La figure 4 représente la composante de l'écoulement suivant l'axe du cylindre.



**Figure 4.** *Écoulement suivant l'axe du cylindre*

Nous présentons sur les figures 5 à 8 la variation de la partie imaginaire et du module de déplacement acoustique en fonction de l'écoulement dans différents plans. La figure 5 représente ces variations, plus celle de la partie réelle, dans un plan de coupe à l'intérieur du cylindre. La figure 6 représente ces variations dans une section située en amont de l'écoulement au niveau de la pointe du corps central ( $y = 1,25$  m). La figure 7 représente ces variations dans une section située en amont de l'écoulement non loin de la section d'excitation ( $y = 0,75$  m). La figure 8 représente ces variations dans une section située en aval de l'écoulement ( $y = -1,25$  m). La figure 9 représente la variation de la partie imaginaire et du module de la pression acoustique en fonction de l'écoulement dans un plan situé à  $y=5$ m. Il est dans le domaine extérieur (rayonnement) et en amont de l'écoulement.

Tous les résultats présentés ci-dessus sont obtenus par la formulation couplée en représentation mixte. Nous remarquons sur toutes ces figures (la partie imaginaire) l'influence de l'écoulement sur la phase et une diminution globale de l'amplitude (à l'exception du cas de rayonnement pour  $M=0,1$ ) lorsque l'écoulement augmente. Dans le cylindre, il y a un changement de la structure radiale du champ accompagnée d'un léger phénomène de réfraction vers le centre du cylindre pour la section  $y=0,75$  (section amont) et d'un léger phénomène de réfraction vers les bords du cylindre pour la section  $y=-1,25$  (section aval).

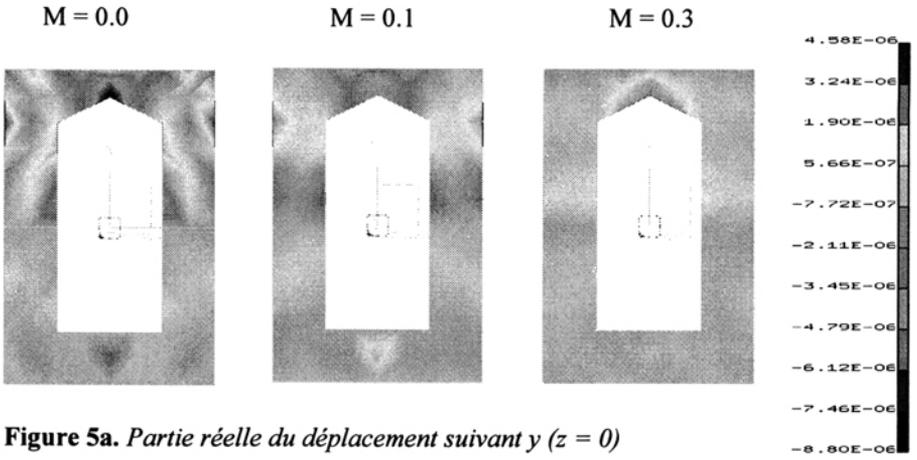


Figure 5a. Partie réelle du déplacement suivant  $y$  ( $z = 0$ )

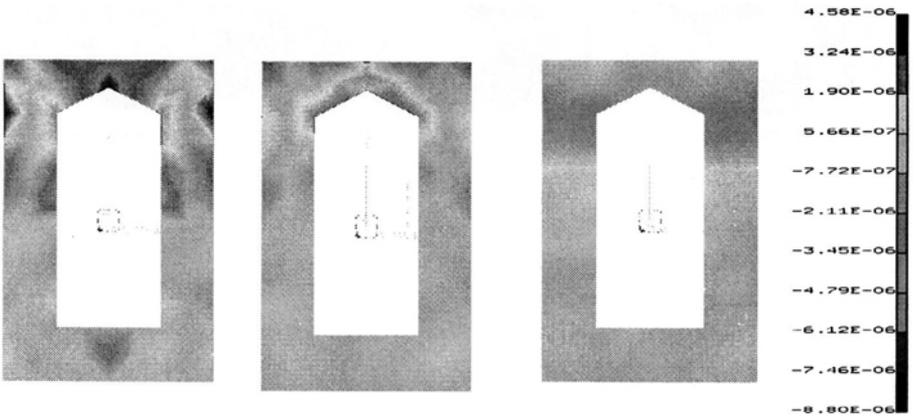


Figure 5b. Partie imaginaire du déplacement suivant  $y$  ( $z = 0$ )

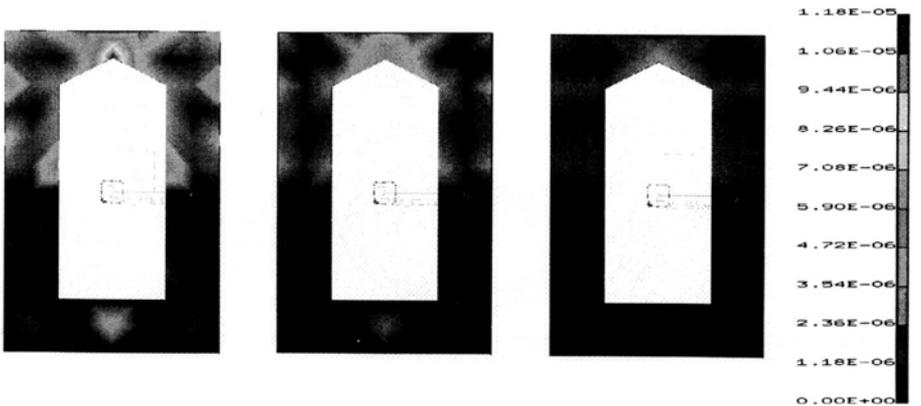


Figure 5c. Module du déplacement suivant  $y$  ( $z = 0$ )

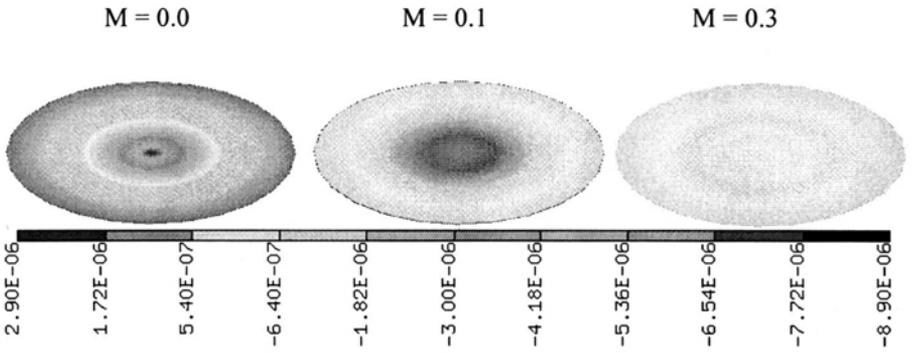


Figure 6a. Partie imaginaire du déplacement suivant  $y$  ( $y = 1.25$ )

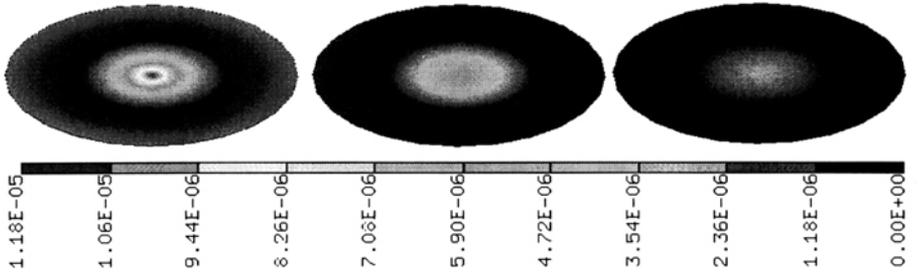


Figure 6b. Module du déplacement suivant  $y$  ( $y = 1.25$ )

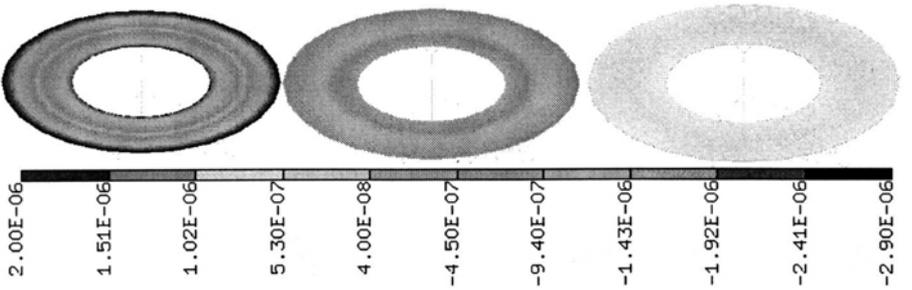


Figure 7a. Partie imaginaire du déplacement suivant  $y$  ( $y = 0.75$ )

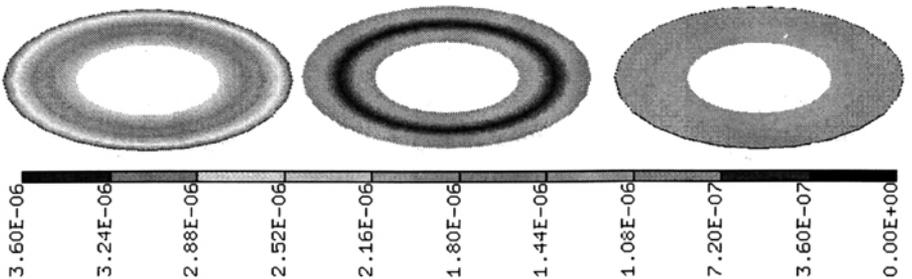


Figure 7b. Module du déplacement suivant  $y$  ( $y = 0.75$ )

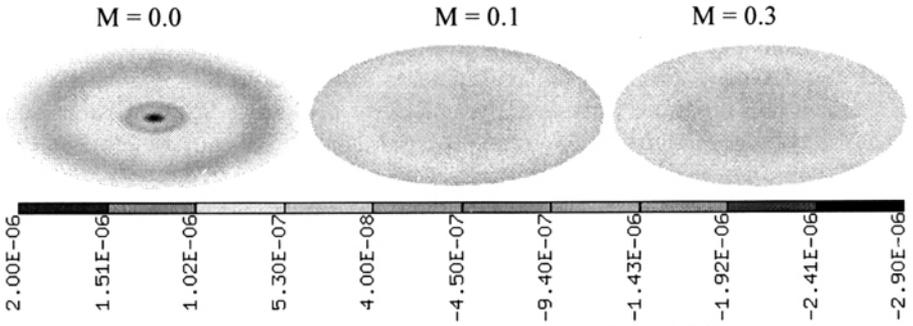


Figure 8a. Partie imaginaire du déplacement suivant  $y$  ( $y = -1.25$ )

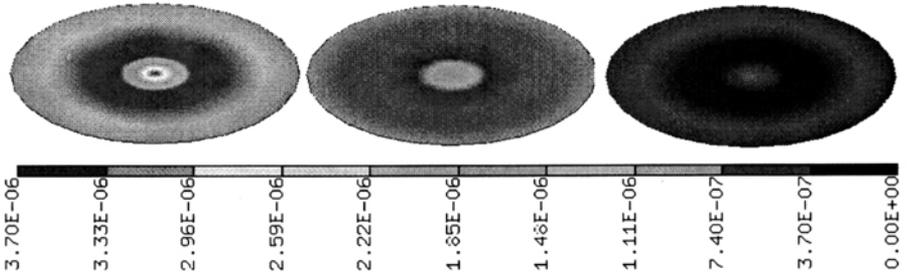


Figure 8b. Module du déplacement suivant  $y$  ( $y = -1.25$ )

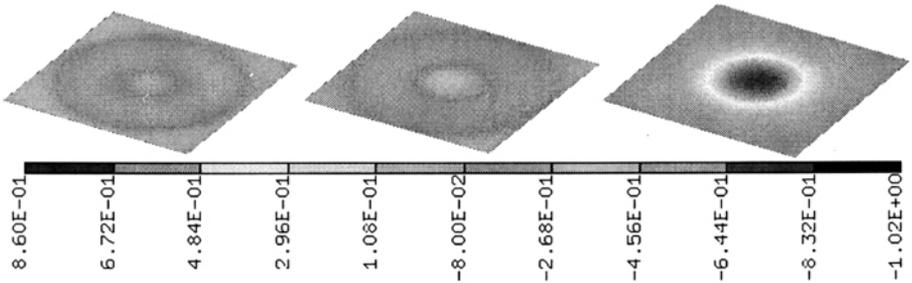


Figure 9a. Partie imaginaire de la pression sur le plan de calcul

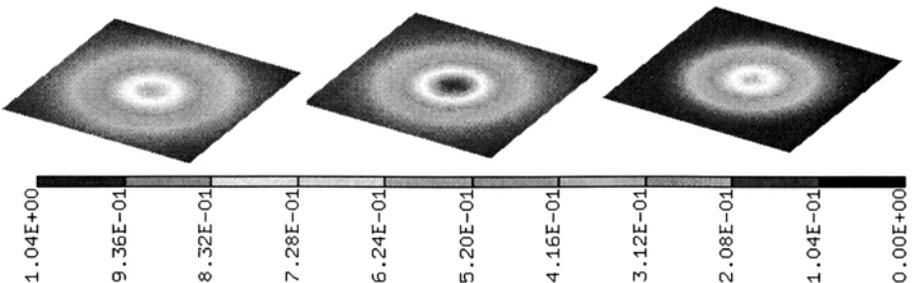


Figure 9b. Module de la pression sur le plan de calcul

## 6. Conclusion

Nous avons présenté dans cet article deux formes de l'équation de l'acoustique linéaire et les conditions aux limites qui leurs sont associées en présence d'un écoulement non uniforme localisé. La première est déduite de la linéarisation des équations d'Euler et écrite en terme de potentiel des vitesses acoustiques. Elle est valable pour les écoulements potentiels. Elle a l'avantage d'être scalaire. La deuxième est obtenue par une linéarisation des équations lagrangiennes de conservation. Elle est valable pour les écoulements non potentiels. Elle a l'avantage d'utiliser des conditions aux limites explicites. A chacune de ces deux représentations nous avons associé une formulation variationnelle couplée pour l'étude d'un problème de propagation / rayonnement. La discrétisation est faite par éléments finis et éléments finis de frontière. Nous avons mis en évidence l'influence de l'écoulement sur la propagation et le rayonnement acoustique pour une application de type aéronautique.

## 7. Bibliographie

- [ABR 77] ABRAHAMSON A.L., « A finite element algorithm for sound propagation in axisymmetric ducts containing compressible mean flow », *A.A.I.A. 4<sup>th</sup> Aeroacoustics Conference*, Oct. 3-5. Atlanta, Georgia, 1977.
- [AST 79] ASTLEY R.J., EVERSMAN W., « A finite element formulation of the eigenvalue problem in lined ducts with flow », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 65, n° 1, p. 61-74, 1979.
- [AST 81] ASTLEY R.J., EVERSMAN W., « Acoustic transmission in non-uniform ducts with mean flow. Part 2 : The finite element method », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 74, n° 1, p. 103-121, 1981.
- [AST 83,a] ASTLEY R.J., « Wave envelope and infinite elements for acoustical radiation », *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol. 3, p. 507-526, 1983.
- [AST 83,b] ASTLEY R.J., EVERSMAN W., « Finite element formulations for acoustical radiation », *Journal of Sound and Vibration*, vol.88, n° 1, 1983, p. 47-64.
- [AST 85] ASTLEY R.J., « A finite element, wave envelope formulation for acoustical radiation in moving flows », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 103, n° 4, p. 471-485, 1985.
- [AST 86] ASTLEY R.J., BAIN J.G., « A three-dimensional boundary element scheme for acoustic radiation in low Mach number flows », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 109, n° 3, 1986, p. 445-465.
- [AST 94] ASTLEY R.J., MACAULAY G.J., COYETTE J.P., « Mapped wave envelope elements for acoustical radiation and scattering », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 170, n° 1, 1994, p. 97-118.

- [AST 98] ASTLEY R.J., MACAULAY G.J., COYETTE J.P., CREMERS L., « Three-dimensional wave-envelope elements of variable order for acoustic radiation and scattering. Part I. Formulation in the frequency domain », *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 103, n° 1, 1998, p. 49-63.
- [BAI 94] BAILLY C., « Modélisation du rayonnement acoustique des écoulements turbulents libres subsoniques et supersoniques », Thèse de doctorat, Université de Nantes, Ecole Centrale de Paris, 1994.
- [BAU 79] BAUMEISTER K.J., « Numerical spatial marching techniques in duct acoustics », *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 65, n° 2, 1979.
- [BAU 80] BAUMEISTER K.J., MAJJIGI R.K., « Applications of velocity potential function to acoustic duct propagation using finite elements », *A.I.A.A. Journal*, vol. 18, n° 5, 1980.
- [BAU 84] BAUMEISTER K.J., HOROWITZ S.J., « Finite element – integral acoustic simulation of JT15D turbofan engine », *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, vol. 106, p. 405-513, 1984.
- [BEI 98] BEISSNER K., « The acoustic radiation force in lossless fluids in eulerian and lagrangian coordinates », *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 103, n° 5, 1998, p. 2321-2332.
- [BEN 91] BEN TAHAR M., « Formulation variationnelle par équations intégrales pour le rayonnement acoustique en présence d'un écoulement non-uniforme », Thèse de doctorat d'état, Université de Technologie de Compiègne, 1991
- [BET 77] BETTES P., ZIENKIEWICZ O.C., « Diffraction and refraction of surface waves using finite and infinite elements », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, 1977, p. 1271-1290.
- [BET 95] BETTES P., CHADWICH E., « Wave envelope examples for progressive waves », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, 1995, p. 2487-2508.
- [BIH 94] BIHHADI A., GERVAIS Y., « A finite difference method for acoustic wave propagation in a duct with mean flow and temperature gradients », *Acta Acustica* 2, 1994, p. 343-357.
- [BLO 46] BLOKHINTZEV D., « The propagation of sound in an inhomogeneous and moving medium », *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 18, n° 2, 1946, p. 322-328.
- [CAB 82] CABELLI A., « The influence of flow on the acoustic characteristics of a duct bend for higher order modes – A numerical study », *Journal of Sound and Vibration*, vol.82, n° 1, 1982, p. 131-149.
- [CHO 83] CHO Y.C., INGARD K.U., « Mode propagation in nonuniform circular ducts with potential flow », *A.I.A.A. Journal*, vol. 21, n° 7, 1983.
- [COL 78] COLE J.E., « Sound propagation in a duct with axial sound speed variation : an exact solution », *Journal of Sound and Vibration*, vol.63, n° 2, 1978, p. 237-246.

- [DIA 99] DIAS J.P., BEN TAHAR M., « A Mixed BEM/FEM formulation for Acoustic Propagation and Radiation Problem in the Presence of Non Uniform Mean Flow », *Sixth International Congress on Sound and Vibration*, 5 – 8 Juin 1999. Copenhagen, Denmark
- [DOK 98] DOKUMACI E., « On transmission of sound in a non-uniform duct carrying a subsonic compressible flow », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 210, n° 3, 1998, p. 391-401.
- [EAS 92] EASWARAN V., MUNJAL M.L., « Plane wave analysis of conical and exponential pipes with incompressible mean flow », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 152, n° 1, 1992, p. 73-93.
- [ELI 97] ELISSEFF P., SCHMIDT H., « Acoustic propagation through a low mach number, stratified flow », *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 101, n° 4, 1997, p. 1936-1944.
- [EPS 97] EPSTEIN R.J., BLISS D.B., « An acoustic boundary element method using analytical :numerical matching », *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 103, n° 1, 1998, p. 143-147.
- [EVE 81] EVERSMAN W., ASTLEY R.J., « Acoustic transmission in non-uniform ducts with mean flow. Part 1: The method of weighted residuals », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 74, n° 1, p. 89-101, 1981.
- [GLA 85] GLADENKO A.F., LEONT'EV E.A., « Propagation of acoustic disturbances in a smoothly non-uniform cylindrical duct with an isentropic potential flow », *Sov. Phys. Acoust.*, vol.31, n° 2, 1985.
- [GOY 98] GOY E., DIAS J.P. and BEN TAHAR M., « Resolution of Vibroacoustic Problem in the Presence of Non Uniform Mean Flow » *Fourth AIAA/CEAS Joint Aeroacoustics Conference*, 2 - 4 Juin 1998, Toulouse, France, CD/Rom 3-2
- [GUP 95] GUPTA V.H., EASWARAN V., MUNJAL M.L., « A modified segmentation approach for analyzing plane wave propagation in non-uniform ducts with mean flow », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 182, n° 5, 1995, p. 697-707.
- [HOR 86] HOROWITZ S.J., SIGMAN R.K., ZINN B.T., « An iterative finite element – integral technique for predicting sound radiation from turbofan inlets in steady flight », *A.I.A.A. Journal*, vol. 24, n° 8, 1986.
- [JI 94] JI Z.L., MA Q., ZHANG Z.H., « Application of the boundary element method to predicting acoustic performance of expansion chamber mufflers with mean flow », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 173, n° 1, 1994, p. 57-71.
- [JI 95] JI Z.L., MA Q., ZHANG Z.H., « A boundary element scheme for evaluation of four-pole parameters of ducts and mufflers with low Mach number non-uniform flow », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 185, n° 1, 1995, p. 107-117.
- [JOH 80] JOHNSTON G.W., OGIMOTO K., « Sound radiation from a finite length unflanged circular duct with uniform axial flow. 2. Computed radiation characteristics », *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 68, n° 6, 1980.
- [KAG 80] KAGAWA Y., YAMABUCHI T., YOSHIKAWA T., OOIE S., KYOUNO N., SHINDOU T., « Finite element approach to acoustic transmission–radiation systems and application to

- horn and silencer design », *Journal of Sound and Vibration*, vol.69, n° 2, 1980, p. 207-228.
- [KEL 82] KELLY J.J., NAYFEH A.H., WATSON L.T., « Acoustic propagation in partially choked converging – diverging ducts », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 81, n° 4, p. 519-534, 1982.
- [LAZ 97] LAZREQ Z., BEN TAHAR M., VILLE J.M., AUGER J.M., « A mixed experimental and theoretical method for noise propagation and radiation. prediction of cowled axial fan », *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 100, n° 1, 1997, p. 166-177.
- [LEE 94] LEE L., WU T. W. AND ZHANG P., « A dual-reciprocity method for acoustic radiation in a subsonic non-uniform flow », *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 13, 1994 Elsevier Science Limited, p. 365-370.
- [LEE 97] LEEP-APOLLINI L., DOWLING D.R., « Comparisons of exact and approximate convection of plane waves in a simple shear flow », *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 102, n° 6, 1997, p. 3378-3386.
- [MYE 80] MYERS M. K., « On the acoustic boundary condition in the presence of flow », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 71, n° 3, p. 429-434, 1980.
- [NAY 78] NAYFEH A.H., SHAKER B.S., KAISER J.E., « Computation of one-dimensional waves in near-sonic flows », *A.I.A.A Journal*, vol. 16, n° 11, 1978.
- [NAY 80,a] NAYFEH A.H., « Intensification and refraction of acoustical signals in partially choked converging ducts », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 73, n° 4, p. 519-531, 1980.
- [NAY 80,b] NAYFEH A.H., SHAKER B.S., KAISER J.E., « Transmission of sound through nonuniform circular ducts with compressible mean flows », *A.I.A.A. Journal*, vol. 18, n° 5, 1980.
- [OSI 83] OSIPOV A.A., « Variational principle for problems in the acoustics of non-uniform gas flows », *Sov. Phys. Acoust.*, vol. 29, n° 5, 1983.
- [OSI 85] OSIPOV A.A., « Short-wave approximation for the calculation of sound propagation in potential gas flows in ducts », *Sov. Phys. Acoust.*, vol. 31, n° 1, 1985.
- [POI 82] POIREE B., « Les équations de l'acoustique linéaire et non linéaire dans les fluides en mouvement », Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie CURIE, PARIS VI, 1982.
- [RED 96] REDON E., « Etude de la propagation acoustique en espace confiné en présence d'écoulement non isotherme par la méthode des éléments finis ». Thèse de doctorat, Université de Poitiers, Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers, 1996.
- [ROB 89] ROBERTSON J.S., SIEGMANN W.L., JACOBSON J., « A treatment of three-dimensional underwater acoustic propagation through a steady shear flow », *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 86, n° 4, 1989, p. 1484-1489.
- [SIG 78] SIGMAN R.K., MAJJIGI R.K., ZINN B.T., « Determination of turbofan inlet acoustics duct propagation using finite elements », *A.I.A.A. Journal*, vol. 16, n° 11, 1978.
- [TAG 78] TAGAUD I., LUMSDAIRE., « An efficient finite element technique for sound propagation in axisymmetric hard wall carrying high subsonic Mach number flows », *A.I.A.A.*, paper 78-1154, Seattle, Washington, 1978.

- [TYL 82] TYLER J.M., SOFRIN T.G., « Axial flow compressor noise studies », *SAE Transactions*, vol.70, 1982, p. 309-322.
- [UEN 84] UENISHI K., MYERS M.K., « Two-dimensional acoustic field in a non-uniform duct carrying compressible flows », *A.I.A.A. Journal*, vol. 22, n° 9, 1984.
- [ZHA 96] ZHANG P., WU T.W., LEE L., « A coupled FEM/BEM formulation for acoustic radiation in a subsonic non-uniform flow », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 192, n° 1, 1996, p. 333-347.
- [ZHE 94] ZHENLIN J., QIANG M., Z. ZHIHUA., « Application of the boundary element method to predicting acoustic performance of expansion chamber mufflers with mean flow », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 173, n° 1, 1994, p. 57-71.