
Modélisation de matériaux piézoélectriques et électrostrictifs par la méthode des éléments finis

Bertrand Dubus — Jean-Claude Debus — Jocelyne Coutte

*Institut d'Electronique et de Microélectronique du Nord, UMR 8520,
département ISEN
41, boulevard Vauban, F-59046 Lille cedex
dubus@isen.fr*

RÉSUMÉ. Le problème de la modélisation numérique du couplage électromécanique se manifestant sous forme d'effet piézoélectrique ou d'effet électrostrictif est abordé. Dans une première partie, les bases thermodynamiques conduisant à une formulation similaire des équations constitutives de la piézoélectricité et de l'électrostriction sont rappelées. A partir du principe des travaux virtuels, une formulation variationnelle unique de ces deux effets est obtenue pour les problèmes statique et dynamique, dans une deuxième partie. La discrétisation par éléments finis et l'application du principe variationnel produisent un système d'équations couplées linéaire ou non-linéaire suivant les cas. Deux applications illustrent ces développements dans une troisième partie : un moteur ultrasonore à base de céramiques PZT pour l'effet piézoélectrique, un barreau de céramique PMN-PT pour l'effet électrostrictif.

ABSTRACT. Numerical models used to describe the electromechanical coupling due to piezoelectric or electrostrictive effects are analysed. In the first section, the thermodynamic basis provides constitutive equations of piezoelectricity and electrostriction in a similar form. The principle of virtual works leads to a unique variational formulation of both effects. This formulation is derived for static and dynamic problems in the second section. The finite element discretization and the application of the variational principle provide linear or non-linear coupled set of equations. In the third section, two applications are presented: an ultrasonic rotor made of PZT ceramics for piezoelectricity, a PMN-PT bar for electrostriction.

MOIS CLÉS : piézoélectricité, électrostriction, transduction électromécanique, couplage électromécanique, méthode des éléments finis

KEY WORDS: piezoelectricity, electrostriction, electromechanical transduction, electro-mechanical coupling, finite element method

1. Introduction à la piézoélectricité et à l'électrostriction

1.1. Description des effets piézoélectrique et électrostrictif

Dans les matériaux isolants, les grandeurs mécaniques et électriques peuvent être couplées par l'intermédiaire de deux phénomènes physiques distincts : la piézoélectricité et l'électrostriction [MAS 50], [BER 64], [AUL 90], [WIL 88].

Certains matériaux présentent la propriété de se polariser électriquement lorsqu'ils sont déformés. Ce phénomène est appelé *effet piézoélectrique direct* lorsqu'il est *linéaire*, c'est-à-dire que la polarisation est proportionnelle à la déformation et que le signe de la polarisation s'inverse quand la déformation change de signe (Fig. 1a). Au niveau microscopique, le déplacement des atomes d'un solide déformé conduit à l'apparition de dipôles électriques microscopiques [AUL 90]. Dans certaines structures, les moments de ces dipôles se combinent pour donner naissance à un moment dipolaire par unité de volume (ou polarisation macroscopique) non nul. Cet effet piézoélectrique direct est toujours accompagné d'un *effet piézoélectrique inverse* pour lequel le solide se déforme lorsqu'il est placé dans un champ électrique. Cet effet, également linéaire, est interprété comme une force électrique agissant sur des atomes ionisés constituant le réseau cristallin. Cette force déplace anions et cations dans des directions opposées, conduisant ainsi à l'apparition de dipôles et d'un champ électrique macroscopique. La propriété de piézoélectricité est intimement liée aux symétries du matériau sur le plan microscopique. Parmi les 32 classes de cristaux existantes, seules les 20 classes non-centrosymétriques sont piézoélectriques. Les matériaux piézoélectriques les plus utilisés sont les cristaux de quartz, les céramiques PZT (titano-zirconate de plomb) et le polymère PVDF (polyfluorure de vinylidène).

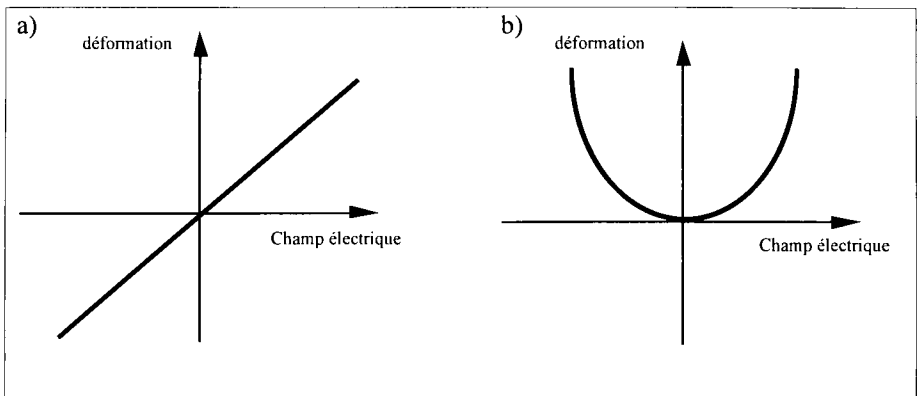


Figure 1. a) *effet piézoélectrique*, b) *effet électrostrictif*

Dans un matériau soumis à un champ électrique, l'*électrostriction* produit une déformation qui est une fonction *quadratique* de la polarisation (Fig. 1b). Au niveau microscopique, le mécanisme, similaire à l'effet piézoélectrique inverse, ne nécessite aucune propriété de symétrie particulière. Il s'agit d'un effet du second ordre qui existe dans tous les matériaux mais qui est souvent négligeable. Cependant, le titanate de baryum ainsi que les céramiques PMN (magnéso-niobate de plomb) présentent un effet électrostrictif important.

1.2. Equations constitutives de la piézoélectricité

Les équations de la piézoélectricité et de l'électrostriction peuvent être déduites des potentiels thermodynamiques [MAS 50], [WIL 88]. Si les effets élastiques, électriques et thermiques sont considérés, l'énergie interne U vérifie :

$$dU = \theta d\sigma + T_{ij} dS_{ij} + E_m dD_m \quad [1]$$

où σ désigne l'entropie et θ la température. T_{ij} et S_{ij} sont les termes du tenseur des contraintes et du tenseur des déformations. \mathbf{E} et \mathbf{D} désignent respectivement les vecteurs champ électrique et déplacement (ou excitation) électrique. Les indices i, j et m varient de 1 à 3. La notation d'Einstein est systématiquement utilisée. La fonction de Gibbs G s'écrit :

$$G = U - T_{ij} S_{ij} - E_m D_m - \sigma \theta \quad [2]$$

La différentielle de l'équation précédente conduit à :

$$dG = -S_{ij} dT_{ij} - D_m dE_m - \sigma d\theta \quad [3]$$

soit :

$$S_{ij} = - \left. \frac{\partial G}{\partial T_{ij}} \right|_{E, \theta} \quad D_m = - \left. \frac{\partial G}{\partial E_m} \right|_{T, \theta} \quad \sigma = - \left. \frac{\partial G}{\partial \theta} \right|_{T, E} \quad [4]$$

Considérant que G est une différentielle totale exacte, les constantes piézoélectriques isothermes sont définies par :

$$d_{mij}^{\theta} = \left. \frac{\partial D_m}{\partial T_{ij}} \right|_{\theta} = \left. \frac{\partial S_{ij}}{\partial E_m} \right|_{\theta} \quad [5]$$

Sont également identifiées, les constantes d'élasticité isothermes à champ électrique constant :

$$s_{ijkl}^{E, \theta} = \left. \frac{\partial S_{ij}}{\partial T_{kl}} \right|_{E, \theta} \quad [6]$$

et les rigidités diélectriques isothermes à contrainte constante :

$$\epsilon_{mn}^{T, \theta} = \left. \frac{\partial D_m}{\partial E_n} \right|_{T, \theta} \quad [7]$$

Ainsi, en condition isotherme, les différentielles totales exactes de la déformation et du déplacement électrique s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} dS_{ij} = s_{ijkl}^{E, \theta} dT_{kl} + d_{mij}^{\theta} dE_m \\ dD_m = d_{mij}^{\theta} dT_{ij} + \epsilon_{mn}^{T, \theta} dE_n \end{cases} \quad [8]$$

La piézoélectricité est une théorie linéaire qui suppose que les quantités définies aux équations [5] à [7] sont constantes. Cette hypothèse est adaptée à la représentation de tous les matériaux piézoélectriques sous déformation et champ électrique modérés. Une démonstration similaire peut être faite à partir de la fonction enthalpie pour définir des constantes piézoélectriques, élastiques et diélectriques adiabatiques. Pratiquement, les différences entre constantes isothermes et adiabatiques sont faibles [NYE 57] ou même nulles si le matériau n'est pas pyroélectrique [MAS 66]. Dans la suite, la différence entre constantes isotherme et adiabatique est omise. Les équations constitutives de la piézoélectricité s'écrivent en choisissant la contrainte et le champ électrique comme variables indépendantes :

$$\begin{cases} S_{ij} = s_{ijkl}^E T_{kl} + d_{mij} E_m \\ D_m = d_{mij} T_{ij} + \epsilon_{mn}^T E_n \end{cases} \quad [9]$$

1.3. Equations constitutives de l'électrostriction

Dans les matériaux électrostrictifs, le couplage électromécanique, discuté plus en détail dans le paragraphe 1.4, est déterminé par le déplacement électrique, plutôt que par le champ électrique [MAS 50]. La contrainte, le déplacement électrique et l'entropie sont choisis comme variables indépendantes. L'enthalpie élastique H_1 est définie par :

$$H_1 = U - T_{ij} S_{ij} \quad [10]$$

Par suite :

$$dH_1 = -S_{ij} dT_{ij} + E_m dD_m + \theta d\sigma \quad [11]$$

et :

$$S_{ij} = - \left. \frac{\partial H_1}{\partial T_{ij}} \right|_{D, \sigma} \quad E_m = \left. \frac{\partial H_1}{\partial D_m} \right|_{T, \sigma} \quad \theta = \left. \frac{\partial H_1}{\partial \sigma} \right|_{T, D} \quad [12]$$

Quand la condition adiabatique est considérée, les variations de la déformation et du champ électrique sont développées au second ordre sous la forme :

$$\begin{aligned} dS_{ij} = & \frac{\partial S_{ij}}{\partial T_{kl}} dT_{kl} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial D_n} dD_n + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial T_{kl} \partial T_{qr}} dT_{kl} dT_{qr} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial T_{kl} \partial D_n} dT_{kl} dD_n + \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial D_n \partial D_o} dD_n dD_o \right] + \dots \end{aligned} \quad [13]$$

$$\begin{aligned} dE_m = & \frac{\partial E_m}{\partial T_{kl}} dT_{kl} + \frac{\partial E_m}{\partial D_n} dD_n + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 E_m}{\partial T_{kl} \partial T_{qr}} dT_{kl} dT_{qr} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^2 E_m}{\partial T_{kl} \partial D_n} dT_{kl} dD_n + \frac{\partial^2 E_m}{\partial D_n \partial D_o} dD_n dD_o \right] + \dots \end{aligned} \quad [14]$$

Dans la suite, l'analyse est limitée aux matériaux électrostrictifs isotropes (ce qui implique l'annulation de tous les tenseurs de rangs impairs) et linéaires sur le plan de leur comportement élastique ($\partial^2 S_{ij} / \partial T_{kl} \partial T_{qr} = 0$). Les constantes électrostrictives sont définies par :

$$2 Q_{ijn\sigma}^\sigma = - \left. \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial D_n \partial D_\sigma} \right|_\sigma = - \left. \frac{\partial^2 E_\sigma}{\partial T_{ij} \partial D_n} \right|_\sigma \quad [15]$$

Sont également identifiées, les constantes élastiques à déplacement électrique constant :

$$s_{ijkl}^{D,\sigma} = \left. \frac{\partial S_{ij}}{\partial T_{kl}} \right|_{D,\sigma} \quad [16]$$

et les imperméabilités diélectriques à contrainte constante :

$$\beta_{mn}^{T,\sigma} = \left. \frac{\partial E_m}{\partial D_n} \right|_{T,\sigma} \quad [17]$$

Ainsi, en condition adiabatique, les différentielles totales exactes de la déformation et du champ électrique s'écrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} dS_{ij} = s_{ijkl}^{D,\sigma} dT_{kl} + Q_{ijmn}^\sigma dD_m dD_n \\ dE_m = -2 Q_{ijnm}^\sigma dT_{ij} dD_n + \beta_{mn}^{T,\sigma} dD_n \end{array} \right. \quad [18]$$

Un système d'équations similaire peut être obtenu en condition isotherme à partir de la fonction élastique de Gibbs. Dans la suite, la différence de notation entre constantes isotherme et adiabatique est omise. Dans la théorie de l'électrostriction, les quantités définies aux équations [15] et [16] sont supposées constantes. Les matériaux électrostrictifs étant souvent utilisés sous déplacement électrique élevé, l'imperméabilité diélectrique [17] n'est pas constante. Cette variation est attribuée à la saturation de la polarisation. Les équations constitutives de l'électrostriction s'écrivent en choisissant la contrainte et le déplacement électrique comme variables indépendantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{ij} = s_{ijkl}^D T_{kl} + Q_{ijmn} D_m D_n \\ E_m = -2 Q_{ijnm} D_n T_{ij} + \beta_{mn}^T(\mathbf{D}) D_n \end{array} \right. \quad [19]$$

1.4. Le coefficient de couplage électromécanique

Historiquement, le coefficient de couplage électromécanique a été défini pour évaluer l'efficacité des matériaux piézoélectriques à convertir l'énergie électrique en énergie mécanique ou inversement. Par la suite, différentes définitions sont apparues suivant le type d'application envisagée.

A partir des fonctions thermodynamiques, le coefficient de couplage k est défini comme le rapport de la densité d'énergie mutuelle (élasto-diélectrique) par la moyenne géométrique de la densité d'énergie élastique et de la densité d'énergie diélectrique [CAD 46], [BER 64] :

$$k = \frac{U_{mut}}{\sqrt{U_{élas} U_{diél}}} = \frac{T_{ij} d_{mij} E_m}{\sqrt{T_{kl} s_{klqr}^E T_{qr} E_n \epsilon_{no}^T E_o}} \quad [20]$$

Quand le matériau est utilisé comme convertisseur statique d'énergie électrique en énergie mécanique, le coefficient de couplage est défini comme la racine carrée du rapport de l'énergie mécanique stockée par l'énergie électrique fournie à l'entrée [MAS 50] :

$$k = \sqrt{\frac{U_{élas}}{U_{élas} + 2U_{mut} + U_{diél}}} = \sqrt{\frac{T_{ij} s_{ijkl}^E T_{kl}}{T_{qr} s_{qrst}^E T_{st} + 2 T_{qr} d_{mqr} E_m + E_m \epsilon_{mn}^T E_n}} \quad [21]$$

Quand le matériau est utilisé comme transducteur, l'application d'un champ électrique sinusoïdal met le transducteur en résonance élastique. Cette résonance peut être décrite mathématiquement comme un pôle dans le plan complexe des fréquences. Le coefficient de couplage représente l'amplitude de ce pôle. Il est déterminé par les fréquences de résonance parallèle f_p et série f_s qui correspondent respectivement aux maxima des parties réelles de l'impédance et de l'admittance électriques [MEI 73] :

$$k = \sqrt{\frac{f_p^2 - f_s^2}{f_p^2}} \quad [22]$$

Une propriété importante des matériaux piézoélectriques, utilisée en particulier dans les lignes à retard, est la variation de la vitesse de propagation des ondes acoustiques avec les conditions aux limites électriques. Si pour un mode considéré, la vitesse de propagation est v^D (resp. v^E) quand le déplacement électrique (resp. le champ électrique) est maintenu constant, le coefficient de couplage est défini par [IKE 66] :

$$k = \sqrt{\frac{(v^D)^2 - (v^B)^2}{(v^D)^2}} \quad [23]$$

Une discussion complète sur ce sujet peut être trouvée dans [SMI 78]. Il faut toutefois noter que toutes les définitions conduisent au même résultat pour des géométries élémentaires [WIL 88].

2. Méthode des éléments finis appliquée aux matériaux piézoélectriques et électrostrictifs

2.1. Hypothèses, équations fondamentales et conditions aux limites

Soit un corps Ω piézoélectrique ou électrostrictif limité par une frontière Γ orientée vers l'extérieur. Les équations à résoudre sont la relation fondamentale de la dynamique :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad [24]$$

et le théorème de Gauss qui s'écrit en l'absence de charges électriques macroscopiques :

$$\frac{\partial D_m}{\partial x_m} = 0 \quad [25]$$

Le tenseur des déformations s'écrit dans le cadre des petites déformations :

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad [26]$$

et le champ électrique dans le cadre de l'électrostatique :

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \quad [27]$$

où \mathbf{u} est le vecteur déplacement et φ le potentiel électrostatique.

A ces équations, il faut associer, dans un milieu piézoélectrique, les équations constitutives de la piézoélectricité exprimées à partir de [9] en choisissant la déformation et le champ électrique comme variables indépendantes :

$$\begin{cases} \mathbf{T} = [\mathbf{c}^E] \mathbf{S} - [\mathbf{e}]^t \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = [\mathbf{e}] \mathbf{S} + [\boldsymbol{\varepsilon}^S] \mathbf{E} \end{cases} \quad [28]$$

\mathbf{T} et \mathbf{S} sont les tenseurs condensés des contraintes et des déformations. $[\mathbf{c}^E]$, $[\mathbf{e}]$ et $[\boldsymbol{\varepsilon}^T]$ désignent respectivement les tenseurs condensés des rigidités élastiques à champ électrique constant, des constantes piézoélectriques et des permittivités diélectriques à déformation constante. Dans un milieu électrostrictif, les équations de l'électrostriction sont exprimées avec le même choix de variables indépendantes :

$$\begin{cases} \mathbf{T} = [\mathbf{c}^E([\mathbf{Q}], \mathbf{D})] \mathbf{S} - [\mathbf{e}([\mathbf{Q}], \mathbf{D})]^t \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = 2 [\mathbf{e}([\mathbf{Q}], \mathbf{D})] \mathbf{S} + [\boldsymbol{\varepsilon}^S([\mathbf{Q}], \mathbf{D})] \mathbf{E} \end{cases} \quad [29]$$

avec :

$$[\mathbf{c}^E([\mathbf{Q}], \mathbf{D})] = [\mathbf{s}^D]^{-1} - 2 [\mathbf{s}^D]^{-1} [\mathbf{g}([\mathbf{Q}], \mathbf{D})]^t [\boldsymbol{\varepsilon}^S([\mathbf{Q}], \mathbf{D})] [\mathbf{g}([\mathbf{Q}], \mathbf{D})] [\mathbf{s}^D]^{-1} \quad [30]$$

$$[\mathbf{e}([\mathbf{Q}], \mathbf{D})] = [\boldsymbol{\varepsilon}^S([\mathbf{Q}], \mathbf{D})] [\mathbf{g}([\mathbf{Q}], \mathbf{D})] [\mathbf{s}^D]^{-1} \quad [31]$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}^S([\mathbf{Q}], \mathbf{D})] = \left([\boldsymbol{\beta}^T] + 2 [\mathbf{g}([\mathbf{Q}], \mathbf{D})] [\mathbf{s}^D]^{-1} [\mathbf{g}([\mathbf{Q}], \mathbf{D})]^t \right)^{-1} \quad [32]$$

L'équation [29] est obtenue à partir de l'équation [19] en posant :

$$\mathbf{g}_{ijn} = \mathbf{Q}_{ijmn} \mathbf{D}_m \quad [33]$$

puis en inversant le système d'équations obtenu. Les équations [30] à [32] sont similaires aux relations usuelles entre tenseurs pour un matériau piézoélectrique.

Les conditions aux limites mécaniques peuvent être de type déplacement \mathbf{u}^0 imposé sur Γ_u (type Dirichlet) :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i^0 \quad [34]$$

ou de type densité surfacique de force f^0 imposée sur Γ_f (type Neumann) :

$$T_{ij} n_j = f_i^0 \quad [35]$$

\mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la surface considérée. Les conditions aux limites électriques sont de type potentiel électrique φ^0 imposé sur Γ_φ (type Dirichlet) :

$$\varphi = \varphi^0 \quad [36]$$

ou de type densité surfacique de charge électrique q^0 imposée sur Γ_q (type Neumann) :

$$D_m n_m = q^0 \quad [37]$$

La condition aux limites [35] est appliquée à l'interface solide-vide en posant $f_i^0 = 0$. Cette condition peut également constituer une approximation raisonnable pour représenter la dynamique de solides immergés dans des fluides légers.

L'application des conditions aux limites [36] et [37] dépend du problème considéré. Lorsqu'une électrode est déposée sur le matériau piézoélectrique ou électrostrictif, la condition [36] est prescrite si l'électrode est mise à la masse ($\varphi^0=0$) et la condition [37] si elle est en circuit ouvert ($q^0=0$). En l'absence d'électrode, la densité surfacique de charge électrique est nulle sur la surface. Les conditions à prescrire sont la conservation de la composante normale du déplacement électrique et des composantes tangentielles du champ électrique à travers la surface. Si la permittivité diélectrique du milieu piézoélectrique considéré est grande par rapport à la permittivité diélectrique du milieu extérieur (cas de l'interface céramique PZT-air par exemple), la composante du champ électrique normale à la surface tend vers zéro dans le matériau et la condition [37] avec $q^0=0$ apparaît comme une approximation raisonnable. Dans le cas contraire (cas de l'interface PVDF-air par exemple), aucune simplification sur la condition à l'interface n'est possible et le milieu extérieur doit être considéré dans le cadre de l'électrostatique.

2.2. Formulation variationnelle du problème statique

Dans un premier temps, toutes les variables physiques sont supposées indépendantes du temps. En particulier, le premier membre de l'équation [24] est mis à zéro. Considérant un déplacement arbitraire généralisé élémentaire δw :

$$\delta \mathbf{w} = \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \varphi \end{Bmatrix} \quad [38]$$

où $\delta \mathbf{u}$ et $\delta \varphi$ sont respectivement des variations élémentaires du déplacement et du potentiel électrostatique, le principe des travaux virtuels s'écrit :

$$\iiint_{\Omega} (\mathbf{T}_{ij} \delta S_{ij} - D_i \delta E_i) d\Omega - \iint_{\Gamma} (\delta \mathbf{u}_i T_{ij} n_j + \delta \varphi D_i n_i) d\Gamma = 0 \quad [39]$$

ou sous forme condensée :

$$\iiint_{\Omega} \delta \Sigma^i \Theta d\Omega - \iint_{\Gamma} \delta \mathbf{w}^i \theta d\Gamma = 0 \quad [40]$$

Σ est le vecteur généralisé des déformations défini par :

$$\Sigma = \begin{Bmatrix} \mathbf{S} \\ -\mathbf{E} \end{Bmatrix} \quad [41]$$

Θ le vecteur généralisé des contraintes :

$$\Theta = \begin{Bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{Bmatrix} \quad [42]$$

et θ le vecteur généralisé des forces surfaciques agissant sur Γ :

$$\theta = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ -q \end{Bmatrix} \quad [43]$$

Les termes de l'intégrale de volume représentent la variation de l'enthalpie électrique du domaine considéré. Les intégrales de surface représentent le travail des forces extérieures et l'échange d'énergie électrique avec les générateurs extérieurs. Dans le cas d'un problème piézoélectrique, les équations [24], [25] et [28] et les conditions aux limites [34] à [37] sont respectivement les équations d'Euler et les conditions aux limites associées à la quantité stationnaire L_p définie par [ALL 70], [DEC 84] :

$$\begin{aligned}
 L_p = & \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[S_{ij} c_{ijkl}^E S_{kl} - 2S_{kl} e_{ikl} E_i - E_i \epsilon_{ij}^S E_j \right] d\Omega \\
 & - \iint_{\Gamma_u} (u_i - u_i^0) n_j T_{ij} d\Gamma - \iint_{\Gamma_f} u_i f_i^0 d\Gamma \\
 & - \iint_{\Gamma_\phi} (\phi - \phi^0) n_i D_i d\Gamma - \iint_{\Gamma_q} \phi q^0 d\Gamma
 \end{aligned} \tag{44}$$

L'application du principe variationnel à la quantité stationnaire L_p conduit à l'équation [39]. Par ailleurs, l'application de la méthode des résidus pondérés aux équations [24] et [25] pour un domaine électrostrictif conduit également à l'équation [39] [DEB 98].

2.3. Formulation variationnelle du problème dynamique

La dépendance temporelle des variables physiques est considérée. La position de la surface Γ est supposée indépendante du temps. Par contre, les conditions imposées sur cette surface peuvent dépendre du temps. Parmi tous les déplacements généralisés admissibles satisfaisant les conditions aux limites spatiales [34] à [37] et les conditions aux limites temporelles $\delta \mathbf{w} = \mathbf{0}$ en $t=t_1$ et en $t=t_2$, la solution vérifie [WAS 75] :

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\Omega} \left[\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right) - (T_{ij} \delta S_{ij} - D_i \delta E_i) \right] d\Omega \right. \\
 & \left. + \iint_{\Gamma} (\delta u_i T_{ij} n_j + \delta \phi D_i n_i) d\Gamma \right] dt = 0
 \end{aligned} \tag{45}$$

Le terme intervenant dans l'intégrale de volume correspond à la variation du Lagrangien du problème considéré défini comme la densité d'énergie cinétique moins l'enthalpie électrique. L'intégration temporelle par partie du terme d'énergie cinétique et les conditions aux limites temporelles $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ en $t=t_1$ et en $t=t_2$ conduisent à :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\iiint_{\Omega} \left[\rho \delta u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + (T_{ij} \delta S_{ij} - D_i \delta E) \right] d\Omega - \iint_{\Gamma} (\delta u_i T_{ij} n_j + \delta \varphi D_i n_i) d\Gamma \right] dt = 0 \quad [46]$$

Le choix de t_1 et de t_2 étant arbitraire, on obtient finalement :

$$\iiint_{\Omega} \left[\rho \delta u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + (T_{ij} \delta S_{ij} - D_i \delta E) \right] d\Omega - \iint_{\Gamma} (\delta u_i T_{ij} n_j + \delta \varphi D_i n_i) d\Gamma = 0 \quad [47]$$

2.4. Application de la méthode des éléments finis au problème statique

Après discrétisation spatiale du domaine Ω par éléments finis, le déplacement \mathbf{u}^e en un point situé à l'intérieur de l'élément e est relié au vecteur \mathbf{U}^e des valeurs nodales du déplacement :

$$\mathbf{u}^e = [\mathbf{N}_i^e] \mathbf{U}^e \quad [48]$$

où $[\mathbf{N}_i^e]$ est une matrice formée à partir des fonctions d'interpolation. Le tenseur condensé des déformations \mathbf{S}^e s'écrit :

$$\mathbf{S}^e = [\mathbf{B}_i^e] \mathbf{U}^e \quad [49]$$

où $[\mathbf{B}_i^e]$ est une matrice formée à partir des dérivées des fonctions d'interpolation. Le potentiel électrique φ^e est relié aux valeurs nodales du potentiel électrique Φ^e :

$$\varphi^e = (\mathbf{N}_\varphi^e)^t \Phi^e \quad [50]$$

où \mathbf{N}_φ^e est un vecteur formé à partir des fonctions d'interpolation. Le champ électrique \mathbf{E}^e s'écrit :

$$\mathbf{E}^e = -[\mathbf{B}_\phi^e] \Phi^e \tag{51}$$

où $[\mathbf{B}_\phi^e]$ est une matrice formée à partir des dérivées des fonctions d'interpolation. A l'intérieur de l'élément e , le vecteur généralisé [41] des déformations s'écrit :

$$\Sigma^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}^e \\ -\mathbf{E}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_u^e] & 0 \\ 0 & [\mathbf{B}_\phi^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^e \\ \Phi^e \end{Bmatrix} \tag{52}$$

Le vecteur généralisé des contraintes [42] s'écrit :

$$\Theta^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}^e \\ \mathbf{D}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{c}^E] & -[\mathbf{e}]^t \\ \alpha [\mathbf{e}] & [\mathbf{\epsilon}^S] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_u^e] & 0 \\ 0 & -[\mathbf{B}_\phi^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^e \\ \Phi^e \end{Bmatrix} \tag{53}$$

avec $\alpha=1$ pour un milieu piézoélectrique et $\alpha=2$ pour un milieu électrostrictif. Après discrétisation, l'équation [39] s'écrit :

$$\sum_e \iiint_{\Omega^e} \left\{ \delta \mathbf{U}^{e^t}, \delta \Phi^{e^t} \right\} \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_u^e]^t & 0 \\ 0 & [\mathbf{B}_\phi^e]^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{c}^E] & -[\mathbf{e}]^t \\ \alpha [\mathbf{e}] & [\mathbf{\epsilon}^S] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{B}_u^e] & 0 \\ 0 & -[\mathbf{B}_\phi^e] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^e \\ \Phi^e \end{Bmatrix} d\Omega^e - \sum_e \iint_{\Gamma^e} \left\{ \delta \mathbf{U}^{e^t}, \delta \Phi^{e^t} \right\} \begin{Bmatrix} [\mathbf{N}_u^e]^t \mathbf{f}^e \\ -(\mathbf{N}_\phi^e)^t \mathbf{q}^e \end{Bmatrix} d\Gamma^e = 0 \tag{54}$$

ou encore :

$$\left\{ \delta \mathbf{U}^t, \delta \Phi^t \right\} \left(\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}] & [\mathbf{K}_{u\phi}] \\ \alpha [\mathbf{K}_{u\phi}]^t & [\mathbf{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ -\mathbf{Q} \end{Bmatrix} \right) = 0 \tag{55}$$

avec :

$$[K_{uu}] = \sum_e [K_{uu}^e] = \sum_e \iiint_{\Omega^e} [B_u^e]^t [c^E] [B_u^e] d\Omega^e \quad [56]$$

$$[K_{u\phi}] = \sum_e [K_{u\phi}^e] = \sum_e \iiint_{\Omega^e} [B_u^e]^t [e] [B_\phi^e] d\Omega^e \quad [57]$$

$$[K_{\phi\phi}] = \sum_e [K_{\phi\phi}^e] = - \sum_e \iiint_{\Omega^e} [B_\phi^e]^t [\epsilon^S] [B_\phi^e] d\Omega^e \quad [58]$$

$$\mathbf{F} = \sum_e \mathbf{F}^e = \sum_e \iint_{\Gamma_f^e} [N_f^e]^t \mathbf{f}^0 d\Gamma_f^e + \sum_e \iint_{\Gamma_u^e} [N_u^e]^t [\mathbf{T}] \mathbf{n} d\Gamma_u^e \quad [59]$$

$$\mathbf{Q} = \sum_e \mathbf{Q}^e = \sum_e \iint_{\Gamma_q^e} \mathbf{N}_q^e q^0 d\Gamma_q^e + \sum_e \iint_{\Gamma_\phi^e} \mathbf{N}_\phi^e (\mathbf{D} \mathbf{n}) d\Gamma_\phi^e \quad [60]$$

L'équation [55] étant valable quelle que soit la valeur du déplacement arbitraire, nous obtenons finalement :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ \alpha [K_{u\phi}]^t & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ -\mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad [61]$$

$[K_{uu}]$, $[K_{u\phi}]$ et $[K_{\phi\phi}]$ sont appelées respectivement matrice de rigidité élastique, matrice électromécanique et matrice de rigidité diélectrique du solide piézoélectrique ou électrostrictif. Ces matrices et les vecteurs \mathbf{U} , Φ , \mathbf{F} et \mathbf{Q} résultent de l'assemblage des matrices et vecteurs élémentaires décrits précédemment. \mathbf{F} est le vecteur des valeurs nodales des forces appliquées et \mathbf{Q} le vecteur des valeurs nodales des charges électriques. Pour des raisons de commodité, le système [61] peut être réécrit en séparant les potentiels électriques des électrodes Φ_{el} , pour lesquels des charges peuvent être apportées par les générateurs extérieurs des autres potentiels Φ_i appelés « internes ». Dans la suite, les vecteurs du premier membre seront appelés « inconnues » et les vecteurs du second membre « réactions ».

Pour un domaine piézoélectrique, le système d'équation obtenu est linéaire et la matrice de rigidité est symétrique. Lorsque le domaine étudié est électrostrictif, les matrices intervenant dans le premier membre sont fonctions du déplacement électrique, lui même fonction des vecteurs inconnus \mathbf{U}^e et Φ^e . Le système d'équation à résoudre est non linéaire et la matrice de rigidité n'est pas symétrique à cause du coefficient α .

2.5. Application de la méthode des éléments finis au problème dynamique

La discrétisation effectuée repose sur une hypothèse de séparation des variables spatiale et temporelle. La discrétisation spatiale est identique au cas du problème statique. Elle est donnée par les équations [48] à [51] et par :

$$\ddot{\mathbf{u}}^e = [\mathbf{N}_u^e] \ddot{\mathbf{U}}^e \tag{62}$$

où $\ddot{\mathbf{u}}^e$ et $\ddot{\mathbf{U}}^e$ sont respectivement le vecteur accélération en un point de l'élément e et le vecteur des valeurs nodales de l'accélération. Le report de ces équations dans l'équation intégrale [47] et l'assemblage conduisent au système :

$$\{\delta \mathbf{U}^t, \delta \Phi\} \left(\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}] & [\mathbf{K}_{u\phi}] \\ \alpha [\mathbf{K}_{u\phi}]^t & [\mathbf{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & [\mathbf{Q}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{Q}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\Phi} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ -\mathbf{Q} \end{Bmatrix} \right) = 0 \tag{63}$$

La matrice de masse cohérente $[\mathbf{M}]$ est définie par :

$$[\mathbf{M}] = \sum_e [\mathbf{M}^e] = \sum_e \iiint_{\Omega^e} \rho [\mathbf{N}_u^e]^t [\mathbf{N}_u^e] d\Omega^e \tag{64}$$

Le déplacement élémentaire généralisé étant arbitraire, l'équation [63] conduit au système :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}] & [\mathbf{K}_{u\phi}] \\ \alpha [\mathbf{K}_{u\phi}]^t & [\mathbf{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{M}] & [\mathbf{Q}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{Q}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ -\mathbf{Q} \end{Bmatrix} \tag{65}$$

Le vecteur des valeurs nodales de la dérivée seconde du potentiel électrique par rapport au temps a été introduit pour uniformiser la notation.

Trois types d'analyses sont considérées :

– Pour un milieu piézoélectrique, l'analyse harmonique est obtenue en supposant que toutes les variables physiques du problème ont une dépendance temporelle en $e^{+j\omega t}$. Dans ce cas, l'équation [65] devient :

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{K}_{uu}] - \omega^2 [\mathbf{M}] & [\mathbf{K}_{u\phi}] \\ [\mathbf{K}_{u\phi}]^t & [\mathbf{K}_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ -\mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad [66]$$

L'équation [66] peut être également obtenue à partir de la fonctionnelle [44] en incluant les termes d'énergie cinétique [ALL 70], [DEC 84]. Cette analyse correspond à la réponse du solide piézoélectrique à une sollicitation extérieure à la pulsation ω , généralement sous forme de force extérieure ou de potentiel électrique appliqué aux électrodes. Dans ce cas, les courants entrant dans les électrodes s'écrivent :

$$\mathbf{I}_{ei} = j\omega \mathbf{Q}_{ei} \quad [67]$$

L'impédance électrique d'entrée de chaque électrode est dès lors donnée par le rapport $\Phi_{ei} / \mathbf{I}_{ei}$. Les pertes d'origine mécanique, piézoélectrique ou diélectrique associées respectivement aux hystérésis contrainte-déformation, contrainte-champ électrique et déplacement électrique-champ électrique, peuvent être décrites à l'aide de constantes physiques complexes [HOL 67].

– L'analyse modale d'un milieu piézoélectrique est obtenue en annulant pour chaque ligne du système [66] soit l'inconnue, soit la réaction. La résolution de l'équation [66] devient une recherche de valeurs propres et vecteurs propres que l'on associe respectivement aux pulsations et modes de résonances du solide piézoélectrique. L'annulation des potentiels électriques associés aux électrodes conduit à l'obtention de la pulsation de résonance série ω_s et des modes associés. L'annulation des charges électriques sur les électrodes conduit à l'obtention de la pulsation de résonance parallèle ω_p et des modes associés. L'association de ces deux résultats permet une détermination du coefficient de couplage à partir de l'équation [22].

– L'analyse transitoire correspond au cas d'une dépendance temporelle quelconque des variables physiques. L'équation [65] peut s'écrire :

$$[\mathbf{K}] \mathbf{X} + [\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{R} \quad [68]$$

L'équation [68] est formellement identique à l'équation obtenue pour la résolution d'un système purement mécanique. Les principes de discrétisation temporelle utilisés sont classiques et dérivent des principes utilisés en mécanique linéaire pour les milieux piézoélectriques et en mécanique non linéaire pour les milieux électrostrictifs [ZIE 89], [DHA 82], [ZIE 87]. Il faut cependant noter le caractère non inversible de la matrice $[\mathbf{M}]$ qui interdit l'utilisation de certains algorithmes (différence centrale par exemple). Une solution alternative consiste à condenser les degrés de libertés électriques dans l'équation [65] :

$$\left([K_{uu}] - \alpha [K_{u\phi}] [K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{u\phi}]^t \right) \mathbf{U} + [M] \dot{\mathbf{U}} = \mathbf{F} - [K_{u\phi}] [K_{\phi\phi}]^{-1} \mathbf{Q} \quad [69]$$

Cette condensation présente l'inconvénient de modifier la structure des matrices, initialement à caractère bande autour de la diagonale, et donc d'alourdir le calcul numérique. La prise en compte de pertes intrinsèques dans le solide piézoélectrique implique l'ajout d'un terme d'amortissement visqueux sous la forme :

$$\begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{u\phi}] \\ \alpha [K_{u\phi}]^t & [K_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C_{uu}] & [C_{u\phi}] \\ [C_{u\phi}]^t & [C_{\phi\phi}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ -\mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad [70]$$

3. Exemples d'applications

Cette partie illustre la modélisation numérique de dispositifs électromécaniques par deux exemples. Le premier exemple, piézoélectrique, est analysé en terme d'analyse modale et d'analyse harmonique. Le deuxième exemple, électrostrictif, utilise les analyses statique et transitoire. Les résultats présentés sont obtenus à partir des développements des paragraphes précédents, implantés dans le logiciel ATILA [ATI 98].

3.1. Moteur ultrasonore à base de céramique piézoélectrique PZT

Les moteurs ultrasonores utilisent l'effet piézoélectrique pour déformer une pièce mécanique appelée stator. Cette déformation entraîne un rotor par l'intermédiaire de forces de frottement. Les moteurs les plus efficaces sont circulaires et reposent sur la création d'une onde progressive qui induit un déplacement elliptique de la surface du stator [SAS 85]. La géométrie est à symétrie de révolution. La segmentation des électrodes (Fig. 2) produit des modes de résonances décalés spatialement. L'application d'une excitation électrique ayant un déphasage temporel entre électrodes adapté, engendre l'onde progressive. Celle-ci correspond à la rotation du mode autour de l'axe de révolution.

Le stator considéré est constitué d'un anneau de céramique PZT collé sur un anneau de bronze [BUC 98]. Sur le plan mécanique, la liaison entre les anneaux est assimilée à un encastrement parfait. Les surfaces extérieures sont supposées libres de toute force. Sur le plan électrique, pour chaque segment, une électrode est mise à la masse en alternant face supérieure et face inférieure. Les autres électrodes sont réunies en deux voies A et B excitées en quadrature de phase. Ce dispositif est

équivalent à l'application sur la face supérieure de la céramique d'un potentiel électrique d'amplitude identique et de phase donnée à la figure 2, l'interface PZT-bronze étant alors un plan de masse.

L'analyse modale d'un tel dispositif a pour objet la détermination de la fréquence de fonctionnement (fréquence de résonance) et du coefficient de couplage à partir de l'expression [22]. Cette analyse est effectuée en annulant le potentiel électrique de la voie A et en considérant que les électrodes connectées à la voie B sont soit à la masse (résonance série), soit en circuit ouvert (résonance parallèle). Le tableau 1 compare les valeurs expérimentales et mesurées.

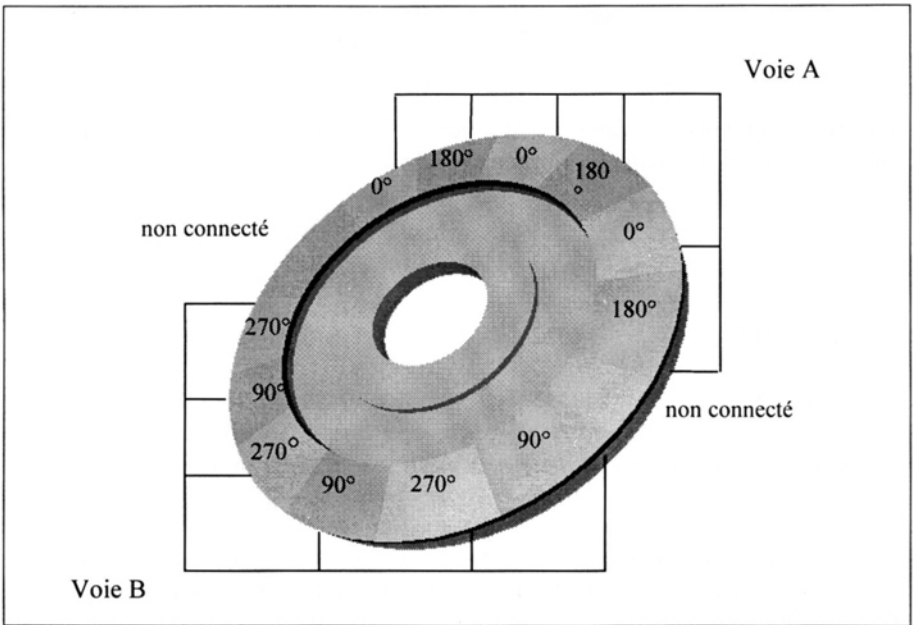


Figure 2. Géométrie du stator du moteur ultrasonore et segmentation des électrodes

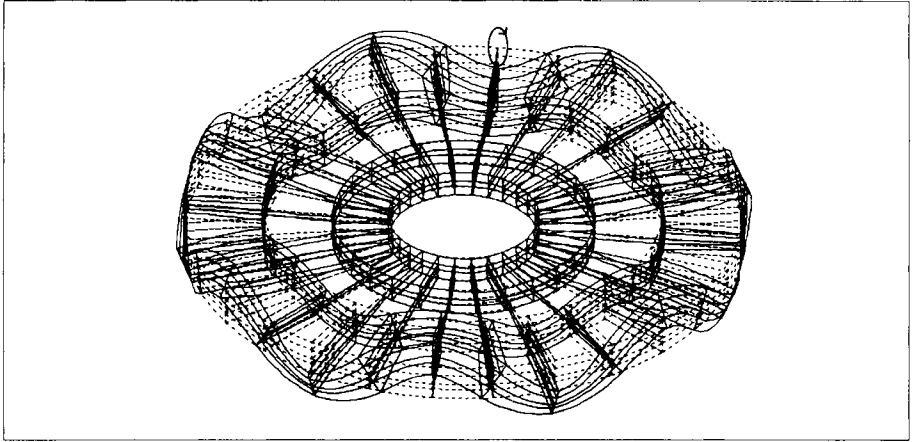


Figure 3. Déformée du stator sous excitation électrique déphasée. La polarisation elliptique du déplacement à la surface est mise en évidence.

	f_s (Hz)	f_p (Hz)	k (%)
calcul MEF	51522	51815	10,6
mesure	49440	49684	9,9

Tableau 1. Caractéristiques calculées et mesurées du stator du moteur ultrasonore

L'analyse harmonique est conduite en fixant la fréquence d'excitation à la fréquence de résonance et en excitant chaque électrode avec la phase indiquée à la figure 2. La figure 3 présente la déformée du stator à un instant donné. L'onde progressive engendrée (mode 7) et le déplacement elliptique de la surface sont clairement identifiés.

3.2. Barreau de céramique électrostrictive PMN-PT

Si l'on considère les céramiques PMN-PT (solution solide de magnéniobate de plomb et de titanate de plomb) dans la phase de transition ferroélectrique-paraélectrique, la courbe déplacement électrique-champ électrique ne présente pas d'hystérésis important et les équations constitutives [19] peuvent être utilisées à température constante. Le modèle de saturation de la polarisation le plus communément accepté [HOM 94] s'écrit :

$$\beta_{mn}^T = \frac{\delta_{mn}}{k} \operatorname{atanh}\left(\frac{|\mathbf{P}|}{P_s}\right) \quad [71]$$

où \mathbf{P} désigne le vecteur polarisation macroscopique, P_s la polarisation spontanée (correspondant à la valeur asymptotique de la polarisation à très fort champ électrique), δ_{ij} le symbole de Kronecker et k une nouvelle constante du matériau telle que :

$$\beta_{mn}^T \Big|_{\mathbf{P}=\mathbf{0}} = \frac{\delta_{mn}}{k P_s} \quad [72]$$

La céramique PMN-PT possède une grande permittivité diélectrique relative, ce qui permet d'écrire $\mathbf{P} \approx \mathbf{D}$ dans la relation [71].

Dans le cas statique, la résolution de l'équation [61] est effectuée par méthode itérative directe [DEB 98]. L'étape d'évaluation de \mathbf{D} au point de Gauss après résolution s'avère être la plus délicate et détermine la convergence de la solution. Après résolution de l'équation [61], la déformation et le champ électrique peuvent être évalués exactement (à la discrétisation près) en tout point d'un élément à l'aide des expressions [49] et [51]. Par contre, le calcul du déplacement électrique ne peut être qu'approché car il repose sur l'équation non linéaire [53]. Cette équation présente l'inconvénient de pouvoir conduire à des valeurs de déplacement électrique supérieures à P_s qui rendent impossible l'évaluation des tenseurs lors de l'itération suivante. Une méthode d'évaluation alternative inversant exactement la loi de polarisation à contrainte nulle s'avère plus performante [DEB 98].

Dans le cas dynamique, une méthode de collocation en temps est utilisée. L'équation discrétisée obtenue devient linéaire. La matrice de rigidité doit être recalculée pour chaque instant de calcul mais aucune itération n'est nécessaire à l'intérieur de chaque pas de temps. La méthode retenue associe la méthode de différence centrale et la condensation des degrés de liberté électriques. La résolution temporelle est classique avec un nouvel assemblage de la matrice de rigidité à chaque pas de temps.

Un barreau de céramique électrostrictive PMN-PT-La étudié au NUWC New London à température ambiante est considéré [MAC 96]. Le barreau est long (10x2x2 mm) et les électrodes sont situées aux deux extrémités. Une contrainte statique longitudinale est appliquée à l'échantillon ainsi qu'une tension quasi statique (1 Hz). La figure 4 présente les variations mesurées et calculées du déplacement électrique et de la déformation quasi-statique avec le champ électrique appliqué sous différentes précontraintes. La déformation statique due à la contrainte

appliquée n'est pas représentée. L'accord obtenu est globalement satisfaisant et valide la loi de comportement choisie pour un problème unidimensionnel.

L'étude dynamique de transducteurs électroacoustiques linéaires à vide a pour objectif principal de déterminer deux grandeurs caractéristiques : la fréquence de résonance et le coefficient de couplage. Ces notions ne peuvent être rigoureusement définies dans le cas de systèmes vibratoires non linéaires. Sur le plan pratique, il reste cependant indispensable de définir la fréquence de fonctionnement du transducteur et d'évaluer quantitativement le phénomène de transduction électromécanique. C'est pourquoi, nous continuons à évaluer la fréquence de résonance et le coefficient de couplage pour un transducteur électrostrictif. La méthode retenue [COU 97] consiste à étudier la réponse du transducteur à des échelons de tension et de charge.

Considérons le barreau de PMN-PT étudié, initialement soumis à un champ électrique E_{mit} . A l'instant $t=0$, le barreau est soumis à un échelon de tension correspondant à un champ électrique $E_{éch}$. La figure 5a, qui présente le déplacement de l'extrémité du barreau calculé par éléments finis, montre une oscillation libre du barreau. La transformée de Fourier rapide de cette réponse (Fig. 5b) laisse apparaître une fréquence prédominante f^E correspondant au mode de vibration naturelle du barreau à champ électrique constant. Cette fréquence vérifie :

$$f^E \approx \frac{1}{2\pi \sqrt{\rho s_{11}^E}} \quad [73]$$

De même, l'application d'un échelon de charge permet d'obtenir une oscillation libre du barreau à excitation électrique constante et la fréquence associée :

$$f^D \approx \frac{1}{2\pi \sqrt{\rho s_{11}^D}} \quad [74]$$

On remarquera que la loi de comportement [19] devient linéaire quand l'excitation électrique est maintenue constante. Par conséquent, la fréquence f^D est indépendante de l'amplitude de la sollicitation appliquée. A partir des équations [73] et [74], le coefficient de couplage peut être calculé suivant la définition d'Ikeda [23] comme suit :

$$k^2 \approx \frac{(f^D)^2 - (f^E)^2}{(f^D)^2} \quad [75]$$

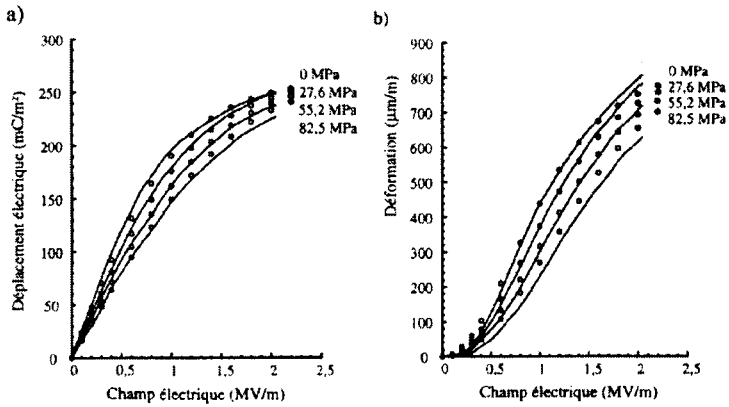


Figure 4. Barreau de PMN-PT sous champ électrique quasi statique pour différentes précontraintes statiques. a) déplacement électrique, b) déformation. Trait plein : mesure, symboles : calcul MEF.

La figure 6a présente l'évolution du coefficient de couplage du barreau de PMN en fonction E_{init} et E_{ech} en l'absence de précontrainte. Les résultats sont proches de la courbe obtenue par McLaughlin *et al* [MAC 96] en mode quasi-statique à partir de l'équation [21]. Le coefficient de couplage varie entre 0 et 45 % suivant les champs appliqués. La figure 6b présente la même courbe sous précontrainte appliquée. L'application de la précontrainte fait chuter le coefficient de couplage.

Remerciements

Les auteurs remercient Monsieur Lionel Buchaillet pour les résultats expérimentaux sur le moteur piézoélectrique.

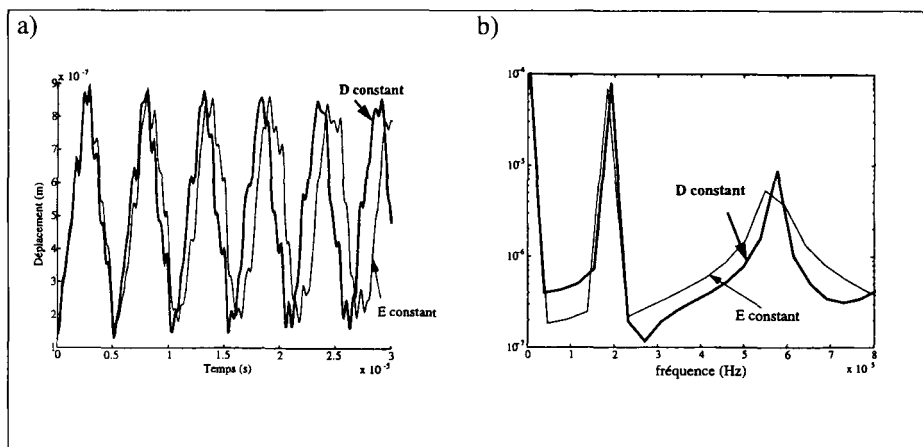


Figure 5. *Vibration du barreau de PMN-PT ($E_{ini}=0,2$ MV/m, $E_{éch}=0,2$ MV/m, $Q_{éch}=23,8$ nC). a) déplacement de l'extrémité du barreau en fonction du temps, b) transformée de Fourier du déplacement*

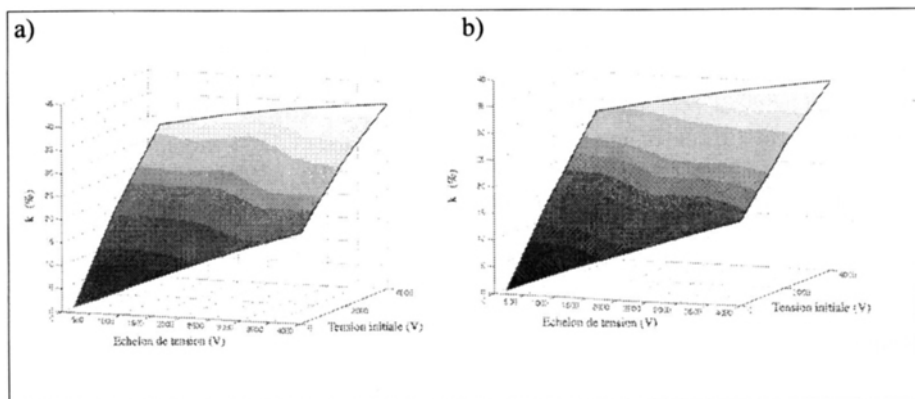


Figure 6. *Variation du coefficient de couplage du barreau de PMN-PT avec la tension initiale et l'échelon de tension (longueur du barreau : 1cm). a) précontrainte nulle, b) précontrainte de 30 MPa*

4. Bibliographie

- [ALL 70] ALLIK H., HUGHES T.J.R., « Finite element method for piezoelectric vibration », *Int. J. Num. Meth. Eng.* vol. 2, 1970, p. 151-157.
- [ATI 98] *ATILA finite element code for piezoelectric and magnetostrictive transducers modeling, version 5.1.1, user's manual*, Institut Supérieur d'Electronique du Nord, Lille, 1998.
- [AUL 90] AULD B.A., *Acoustic fields and waves in solids*, 2ème édition, Krieger Publishing Company, Malabar, 1990.
- [BER 64] BERLINCOURT D.A., CURRAN D.R., JAFFE H., « Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers », *Physical acoustics, principles and methods* vol. 1A édité par W.P. Mason, Academic Press, New York, 1964, p. 169-270.
- [BUC 98] BUCHAILLOT L., BONNAMY A., « Intégration d'un moteur piézoélectrique dans un équipement aéronautique », *Actes du Congrès MAGELEC 98*, ENSEEIHT, Toulouse, 1998, p. 131-137.
- [CAD 46] CADY W.G., *Piezoelectricity*, Dover, New York, 1964.
- [COU 97] COUTTE J., DEBUS J.-C., DUBUS B., BOSSUT R., « Non-linear time domain analysis of electrostrictive materials by the finite element method » *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 101, 1997, p. 3165.
- [DEB 98] DEBUS J.-C., DUBUS B., COUTTE J., « Finite element modeling of lead magnesium niobate electrostrictive materials: static analysis », *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 103, 1998, p. 3336-3343.
- [DEC 84] DECARPIGNY J.-N., « Application de la méthode des éléments finis à l'étude de transducteurs piézoélectriques », Thèse de Doctorat d'Etat, Université des Sciences et Techniques de Lille, 1984.
- [DHA 82] DHATT G., TOUZOT G., *Introduction à la méthode des éléments finis*, Collection Université de Compiègne, Maloigne, 1982.
- [HOL 67] HOLLAND R., « Representation of dielectric, elastic and piezoelectric losses by complex coefficients », *IEEE Trans. on Sonics and Ultrason.* vol. 14, 1967, p. 18-20.
- [HOM 94] HOM C.L., SHANKAR N., « A fully coupled constitutive model for electrostrictive ceramic materials », *J. of Intell. Mater. Syst. and Struc.* vol. 5, 1994, p. 795-801.
- [IKE 72] IKEDA T., « On the relations between electromechanical coupling coefficients and elastic constants in piezoelectric crystals », *Jpn. J. Appl. Phys.* vol. 11, 1972, p. 463.
- [MAC 96] MC LAUGHLIN E.A., POWERS J.M., MOFFETT M.B., JANUS R.S., « Characterization of PMN-PT-La for use in high-power electrostrictive projectors », *J. Acoust. Soc. Am.* vol. 100, 1996, p. 2729.
- [MAS 50] MASON W.P., *Piezoelectric crystals and their application to ultrasonics*, D. Van Nostrand Company, Princeton, 1950.

- [MAS 66] MASON W.P., *Crystal physics of interaction processes*, Academic Press, New York, 1966.
- [MEI 73] MEITZLER A.H., O'BRIAN H.M., TIERSTEN H.F., « Definition and measurement of radial mode coupling factors in piezoelectric ceramics with large variations in Poisson's ratio », *IEEE Trans. on Sonics and Ultrason.* vol. 20, 1973, p. 233.
- [NYE 57] NYE J.F., *Physical properties of crystals*, Oxford, Londres, 1957.
- [SAS 85] SASHIDA T., « Motor utilizing ultrasonic oscillation » U.S. Patent 4,562,374, 1985, p. 12-31.
- [SMI 78] SMITS J.G., « Eigenstates of coupling factor and loss factor of piezoelectric ceramics », Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Twente, 1978.
- [WAS 75] WASHIZU K., *Variational methods in elasticity and plasticity*, 2ème édition, Pergamon Press, Oxford, 1975.
- [WIL 88] WILSON O.B., *Introduction to theory and design of sonar transducer*, Peninsula Publishing, Los Altos, 1988.
- [ZIE 87] ZIENKIEWICZ O.C., Wood W.L., « Transient response analysis », *Finite element handbook*, édité par H. Kardestuncer, McGraw-Hill, New York, 1987, p. 2.275-2.314.
- [ZIE 89] ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L., *The finite element method*, 4ème édition, McGraw-Hill, New York, 1989.