
Couplage de modèles et de méthodes numériques pour l'électromagnétisme en domaine temporel

★ **Malika Remaki** — ★★ **Frédéric Poupaud**
★ **Loula Fezoui** — ★ **Olivier Chanrion**

★ *INRIA—CERMICS*

2004 route des Lucioles, BP 93 — Sophia Antipolis — F-06902 Valbonne
Email : {mremaki, fezoui, ochanrio}@sophia.inria.fr

★★ *Laboratoire Dieudonné — UMR 6621 du CNRS. Université de Nice*
Sophia Antipolis, Parc Valrose—F- 06108 Nice cedex 2
Email : {Poupaud}@math.unice.fr

RÉSUMÉ. Nous présentons ici quelques problèmes de couplage en électromagnétisme. La première partie de ce papier est consacrée au couplage de modèles physiques (Vlasov-Poisson, Vlasov-Maxwell) rendant compte des interactions champ-particules. Dans la deuxième partie, on décrit un nouveau schéma hybride différences finies/volumes finis appliqué à la résolution numérique du système de Maxwell en domaine temporel.

ABSTRACT. This paper deals with coupling models and/or methods in electromagnetism. The first part of the paper is devoted to the coupling of physical models (Vlasov-Poisson, Vlasov-Maxwell) which describe some field-particle interactions. In the second part, we present a new hybrid finite difference/finite volume scheme applied to the time domain Maxwell equations.

MOTS-CLÉS : Electromagnétisme - Equations de Maxwell - Vlasov-Poisson - Vlasov-Maxwell - Volumes Finis - Différences finies.

KEY WORDS : Electromagnetism - Maxwell equations - Vlasov-Poisson - Vlasov-Maxwell - Finite Volume - Finite Difference.

Introduction

L'accroissement conséquent, ces dernières années, des performances des ordinateurs et le développement du calcul parallèle ont permis une amélioration certaine en électromagnétisme numérique. Néanmoins, la simulation d'un dispositif complexe (SER d'objets de grande taille, antennes à large bande, tubes hyperfréquences, etc..) reste très coûteuse en temps de calcul et en mémoire. Les remèdes envisagés sont nombreux et variés et nous consacrons ce papier à deux types de solutions : intervenir sur le modèle physique (pour accélérer la convergence vers l'état périodique par exemple) et/ou hybrider deux méthodes numériques afin d'en combiner les avantages.

La première partie de ce papier est consacrée au transport de particules chargées dans un champ électromagnétique. Ces interactions sont généralement modélisées par le système de Vlasov-Maxwell (ou de Vlasov-Poisson dans le cas d'un champ électrostatique). Dans tous les cas, l'analyse théorique du couplage et la construction de schémas numériques performants sont des problèmes difficiles. La méthode numérique utilisée ici pour résoudre le système couplé (Vlasov-Maxwell) combine un schéma de type volumes finis pour approcher le champ électromagnétique (Maxwell) avec une méthode particulière pour calculer la distribution des particules (Vlasov). On aborde en particulier le problème de la convergence vers un état périodique du point de vue pratique et théorique et on présente une méthode d'accélération de la convergence appelée méthode d'absorption limite.

Dans la deuxième partie, on s'intéresse à la résolution numérique du système de Maxwell dans le domaine temporel. Les méthodes le plus souvent utilisées dans ce cas sont de type différences finies (FDTD), éléments finis (FETD) et plus récemment encore, volumes finis (FVTD). Chacune de ces méthodes a ses avantages et ses inconvénients. On peut citer parmi ces derniers, la difficulté des différences finies à prendre en compte des lignes (ou surfaces) courbées, la présence de matrices de grande taille pour les éléments finis et le temps de calcul pour cette dernière et pour les volumes finis. Plusieurs tentatives d'hybridation de ces différents schémas ont vu le jour récemment et on trouvera quelques exemples dans les actes du colloque **PIERS** [PIE 98]. On s'intéresse plus particulièrement ici à l'hybridation des volumes finis et des différences finies. On présente un nouveau schéma volumes finis et une analyse de stabilité de son couplage avec le schéma de Yee (FDTD).

1. Couplage de modèles

On s'intéresse dans cette section à la modélisation d'un plasma peu dense en présence d'un champ électromagnétique. Les applications visées sont nombreuses : canon à électron, diode à vide, environnement spatial, etc... On ne détaillera que deux d'entre elles par la suite. Ce sont celles liées à la modélisation des tubes hyperfréquences d'une part, et à la modélisation de la charge électrostatique des satellites soumis au vent solaire, d'autre part. Le champ électromagnétique est donné par un champ de

vecteur $(\mathbf{D}, \mathbf{B}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dépendant du temps $t \in \mathbb{R}$ et de la position $x \in \mathbb{R}^3$. Maxwell a déterminé les équations régissant la dynamique de ce champ dès 1870. Ce sont les fameuses équations de Maxwell qui s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\mathbf{B}) = -\mathbf{j}, \quad [1]$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0} \text{rot}(\mathbf{D}) = 0. \quad [2]$$

Les constantes physiques ε_0 , μ_0 sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide. Elles sont reliées à la vitesse de la lumière c par la relation :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \quad [3]$$

Le champ \mathbf{B} est appelé champ magnétique, \mathbf{D} est le déplacement électrique alors que $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}$ et $\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{D}$ sont l'induction magnétique et le champ électrique.

Le second membre de (1), \mathbf{j} , est une densité de courant due au mouvement des charges dans le milieu où se propage l'onde.

Les équations de Maxwell étaient à plus d'un titre révolutionnaires. Elles sont en effet parfaitement cohérentes avec la mécanique quantique et la relativité restreinte. Dans la hiérarchie des modèles, elles ont donc le même statut que les équations de Klein Gordon ou les équations de Dirac découvertes plus de 50 ans après.

Une particule non quantique mais relativiste de charge q_α de masse m_α de position X et d'impulsion P dans le champ (\mathbf{D}, \mathbf{B}) vérifie alors :

$$\frac{dX}{dt}(t) = v_\alpha(P(t)). \quad [4]$$

$$\frac{dP}{dt}(t) = F_\alpha(t, X(t), P(t)). \quad [5]$$

La vitesse de la particule v_α est reliée à son impulsion p par la relation :

$$v_\alpha(p) = \frac{cp}{\sqrt{m_\alpha^2 c^2 + p^2}}. \quad [6]$$

La force de Lorentz est donnée par :

$$\begin{aligned} F_\alpha(t, x, p) &= q_\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{D}(t, x) + v_\alpha(p) \wedge \mathbf{B}(t, x) \right). \\ &= q_\alpha \left(\mathbf{E}(t, x) + v_\alpha(p) \wedge \mathbf{B}(t, x) \right). \end{aligned} \quad [7]$$

En théorie cinétique des gaz, on décrit le plasma par la donnée de fonctions positives $f_\alpha = f_\alpha(t, x, p)$ appelées fonctions de distribution des particules de type α . Elles dépendent non seulement des variables d'espace et de temps (t, x) , mais aussi de l'impulsion $p \in \mathbb{R}^3$. Si Ω est un domaine de l'espace des phases $\{(x, p) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\}$,

alors $\int_{\Omega} f_{\alpha}(t,x,p)dx dp$ est le nombre des particules de type α dont la position et l'impulsion sont au temps t dans le domaine Ω .

La densité de charge ρ_{α} et la densité de courant \mathbf{j}_{α} dues aux particules α sont données par les relations :

$$\rho_{\alpha}(t,x) = q_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} f(t,x,p)dp \quad , \quad \mathbf{j}_{\alpha}(t,x) = q_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} v(p) f(t,x,p)dp. \quad [8]$$

La physique statistique montre que la fonction de distribution f_{α} résout une équation de Vlasov-Boltzmann :

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + v_{\alpha}(p) \cdot \nabla_x f_{\alpha} + F_{\alpha}(t,x,p) \cdot \nabla_p f_{\alpha} = C_{\alpha}(f). \quad [9]$$

La force de Lorentz $F_{\alpha}(t,x,p)$ est donnée par (7) et $C_{\alpha}(f)$ est un opérateur intégral en la variable p , l'opérateur de Boltzmann, qui modélise les collisions. Pour un plasma peu dense, on peut négliger les collisions et on obtient :

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + v_{\alpha}(p) \cdot \nabla_x f_{\alpha} + F_{\alpha}(t,x,p) \cdot \nabla_p f_{\alpha} = 0, \quad [10]$$

$$\rho_{\alpha} = q_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} f_{\alpha} dp \quad , \quad \mathbf{j}_{\alpha} = q_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} v_{\alpha}(p) f_{\alpha} dp, \quad [11]$$

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \quad , \quad \mathbf{j} = \sum_{\alpha} \mathbf{j}_{\alpha}. \quad [12]$$

ρ et \mathbf{j} désignant la densité totale de charge et de courant du plasma. Il faut remarquer que (10) n'exprime rien d'autre que la fonction de distribution est constante le long des trajectoires vérifiant (4) et (5). Il faut aussi remarquer que (10) peut se mettre sous forme conservative.

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \text{div}_x(v_{\alpha}(p)f_{\alpha}) + \text{div}_p(F_{\alpha}(t,x,p)f_{\alpha}) = 0.$$

En effet, la divergence $\text{div}_p(F_{\alpha}(t,x,p))$ est nulle. En intégrant cette dernière équation par rapport à p , on obtient les équations de conservation :

$$\frac{\partial \rho_{\alpha}}{\partial t} + \text{div}_x \mathbf{j}_{\alpha} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}_x \mathbf{j} = 0. \quad [13]$$

Le système (1), (2), (6), (7), (10), (11), (12) noté (VM) dans la suite est le système couplé de Vlasov-Maxwell.

Ce sont les équations fondamentales de la modélisation des plasmas peu denses. Parmi les propriétés principales de ce système citons en deux. Tout d'abord en prenant

la divergence en x des équations (1) et (2) et en utilisant (13), on démontre que les lois de Gauss

$$\operatorname{div}_x \mathbf{D} = \rho, \operatorname{div}_x \mathbf{B} = 0,$$

sont propagées par le système. C'est-à-dire que si elles sont vérifiées en un temps t_0 , elles seront vérifiées en tout temps $t \in \mathbb{R}$. D'autre part, l'énergie totale du système $\mathcal{E}(t)$ est conservée. Elle est donnée par :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\epsilon_0} |\mathbf{D}(t,x)|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}(t,x)|^2 dx + \sum_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^6} e_{\alpha}(p) f_{\alpha}(t,x,p) dx dp,$$

où $e_{\alpha}(p) = \sqrt{m_{\alpha}^2 c^4 + c^2 p^2}$ est l'énergie cinétique d'une particule d'impulsion p . On a donc $\frac{d}{dt} \mathcal{E} = 0$. Cette conservation est à la base, avec les lemmes de régularité en moyenne, de la théorie d'existence globale de solutions faibles de Diperna et Lions pour le problème de Cauchy, cf [DIL 89].

Pour les applications, le système (VM) doit être complété par des conditions aux limites. L'existence de solution globale a été démontrée par Y. Guo [GUO 93], voir aussi M. Bezart [BEZ 93], pour des conditions aux limites de type conducteur parfait. Pour le cas des solutions stationnaires, on se référera à [POU 92]. Il reste de nombreux problèmes ouverts concernant les solutions régulières. On pourra trouver dans [SCH 86], [AKU 86], [DEG 86] des résultats d'existence sur des intervalles de temps finis mais indépendants de la vitesse de la lumière, c . La limite $c/v_{ref} \rightarrow +\infty$ où v_{ref} est une vitesse de référence est rigoureusement déterminée. On montre que les solutions de Vlasov-Maxwell tendent vers les solutions du système de Vlasov-Poisson (VP) qui s'écrit :

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E(t,x) \cdot \nabla_v f_{\alpha} = 0, \quad [14]$$

$$E(t,x) = -\nabla \Phi(t,x), \quad [15]$$

$$-\epsilon_0 \Delta \Phi(t,x) = \rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} f_{\alpha} dv. \quad [16]$$

Il faut remarquer que dans la limite classique $c/v_{ref} \rightarrow +\infty$, la relation reliant l'impulsion et la vitesse devient $p = m_{\alpha} v$. On peut ainsi prendre v comme variable dans (10). Nous allons détailler maintenant deux applications où les systèmes (VM) et (VP) apparaissent.

1.1. Tubes hyperfréquences

Les tubes hyperfréquences sont des dispositifs permettant d'engendrer des ondes électromagnétiques intenses. Le principe est le suivant : on envoie des paquets d'électrons suivant une fréquence $\nu = \frac{1}{T}$ dans un tube. Des cavités métalliques dont une fréquence de résonance électromagnétique est justement ν sont en regard du tube. Les modes propres sont excités par les particules qui transfèrent leur énergie cinétique en énergie électromagnétique. Cette dernière est collectée en fin de dispositif par un guide d'onde. La modélisation est basée sur les équations de Vlasov-Maxwell (VM) posées sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ pour (1) et (2) sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times \mathbb{R}^3$ pour (10) où Ω est un ouvert représentant la géométrie du tube hyperfréquence. Sa frontière est composée de trois parties distinctes : l'entrée Γ_e , le bord métallique Γ_m , et la sortie Γ_s . Les conditions aux limites sur le champ électromagnétique sont de type conducteur parfait sur Γ_m :

$$\mathbf{D}(t,x) \wedge n(x) = 0 \quad , \quad x \in \Gamma_m \quad , \quad t \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

où $n(x)$ désigne la normale extérieure de Γ_m en x . Sur Γ_e et Γ_s , on prend des conditions aux limites absorbantes du premier ordre, les conditions de Silver Müller :

$$\mathbf{D}(t,x) \wedge n(x) + \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} (\mathbf{B} \wedge n(x)) \wedge n(x) = 0 \quad , \quad x \in \Gamma_e \cup \Gamma_s \quad , \quad t \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

On peut aussi prendre une couche limite absorbante de type Bérenger, comme dans [BPO 97]. Pour la fonction de distribution f_α des électrons, on doit imposer une valeur pour les vitesses entrantes. On a :

$$f_\alpha(t,x,p) = g(t,x,p) \quad , \quad x \in \Gamma_e \quad , \quad v(p).n(x) < 0 \quad , \quad t \in \mathbb{R}, \tag{19}$$

où g est donné et est une fonction $T = \frac{1}{\nu}$ périodique. La distribution g représente le paquet d'électrons qu'on injecte dans le dispositif à la fréquence ν . Sur les autres parties du bord, il n'y a pas d'électrons émis et donc :

$$f_\alpha(t,x,p) = 0 \quad , \quad x \in \Gamma_m \cup \Gamma_s \quad , \quad v(p).n(x) < 0 \quad , \quad t \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Pour résoudre numériquement ce système, nous avons développé un code volumes finis (Maxwell), particulière (Vlasov), [IPC 95]. La partie volumes finis est discutée en détail dans le paragraphe suivant. La méthode particulière consiste à suivre les trajectoires (4) et (5) pour des particules numériques $(X_k^h(t), P_k^h(t))$. Le couplage s'effectue par une méthode, P.I.C, «Particles in Cells». La méthode volumes finis exige de connaître $\int_{C_i} \mathbf{j}(t,x) dx$ où les C_i sont les volumes de contrôle. Une discrétisation de cette quantité est donnée par :

$$\sum_{X_k^h \in C_i} \omega^h v (P_k^h(t)) \quad .$$

ω^h étant la charge électrique correspondant aux particules numériques.

D'autres méthodes ont été développées comme des méthodes d'éléments finis, particulières par d'autres équipes, voir [ADS 96]. Une des grandes difficultés de ce problème est que l'on est intéressé à l'obtention du régime permanent. Ce régime est caractérisé comme étant donné par des solutions périodiques en temps, de période T , au problème (VM) complété par (17)–(20). Il n'est pas atteint par les codes numériques d'évolution en temps pour deux raisons. Une première raison est que ce régime ne peut être physiquement atteint que pour des temps t très grands devant T , de plus des problèmes de coût de calcul ne permettent pas d'atteindre numériquement ce temps. Une autre raison, peut-être plus importante, est que le problème de par sa non-linéarité engendre des hautes fréquences. On se rapproche donc des limites de l'optique géométrique et donc aussi des rayons piégés. Il en résulte que le problème discrétisé est très faiblement dissipatif.

Une partie de la thèse de M. Bostan [BOS 99], a consisté à chercher une solution à ce problème. Nous avons tout d'abord cherché à établir théoriquement l'existence de ces solutions périodiques. Ce problème est difficile et pourrait ne pas avoir de solution dans le cas général. Nous l'avons cependant résolu dans une limite non relativiste où Vlasov-Maxwell est remplacé par Vlasov-Poisson. La géométrie est alors quelconque et on peut démontrer l'existence de solutions périodiques sous la condition que la vitesse d'injection des particules soit assez grande pour qu'elles quittent le domaine en temps fini, cf [BOP 97]. Le même type de résultat peut être établi pour Vlasov-Maxwell mais uniquement en 1-D, cf [BOS 99]. Cette étude théorique nous a donné l'idée d'une méthode d'accélération de la convergence vers une solution périodique. Nous l'avons appelé Méthode d'Absorption Limite, M.A.L, car elle a des liens évidents avec le principe d'absorption limite de la théorie de la diffusion. Au niveau continu, cette méthode consiste à introduire un paramètre fictif d'absorption $\lambda > 0$. Les équations modifiées sont alors :

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \text{rot}(\mathbf{B}) + \mathbf{j} = -\lambda \mathbf{D},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon_0} \text{rot}(\mathbf{D}) = -\lambda \mathbf{B},$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_\alpha(p) \cdot \nabla_x f_\alpha + F_\alpha(t, x, p) \cdot \nabla_p f_\alpha = -\lambda f_\alpha(t, x, p),$$

avec les mêmes conditions aux limites (17)–(20). On démontre alors, au moins dans un cadre simplifié, qu'on atteint une solution périodique dans un temps de l'ordre de $\frac{1}{\lambda}$ et que cette solution est proche de la solution périodique de l'ordre de $\sqrt{\lambda}$. Cette méthode, exposée dans [BOS 99] en détail, a donné des résultats numériques impressionnants et très convaincants, (un article en préparation y est consacré).

1.2. Charges des satellites

Nous avons depuis un an commencé une étude de la charge électrostatique des satellites dans leur environnement spatial (c'est l'objet de la thèse d'O. Chanrion).

Nous nous contenterons ici d'exposer les grandes lignes de la modélisation. Si la géométrie du satellite est représentée par un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$, le but est de déterminer sa charge surfacique ρ_s sur le bord ∂D . A l'extérieur du satellite dans $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus D$, on décrit le plasma par les équations de Vlasov-Poisson (VP) stationnaires. L'originalité du modèle réside dans les conditions aux limites. On suppose tout d'abord qu'à l'infini le plasma est à l'équilibre thermodynamique. On impose donc :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0, \tag{21}$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f_\alpha(x, v) = \frac{N_\alpha}{(V_\alpha \sqrt{2\pi})^3} \exp\left(-\frac{v^2}{2V_\alpha^2}\right), \tag{22}$$

avec $\sum_\alpha q_\alpha N_\alpha = 0$ (neutralité à l'infini). Les vitesses thermiques V_α sont données par $V_\alpha = \sqrt{\frac{kT}{m_\alpha}}$ où k est la constante de Boltzmann et T la température du plasma à l'infini. Au niveau du satellite et en première approximation (on néglige les ré-émissions), on a :

$$f_\alpha(x, v) = 0 \text{ pour } x \in \partial D, v \cdot n(x) > 0, \tag{23}$$

où $n(x)$ est la normale extérieure à la surface du satellite. Il n'y a par contre aucune condition sur le potentiel sur le bord ∂D . Celui-ci est déterminé de manière indirecte par une condition de flux. A l'équilibre, le flux de charge arrivant sur le satellite doit en effet être nul. On a donc :

$$\sum_\alpha q_\alpha \int_{\mathbb{R}^3} v f_\alpha(t, x, v) dv = 0 \text{ pour } x \in \partial D. \tag{24}$$

Le système de Vlasov-Poisson (VP) stationnaire avec les conditions aux limites (21)-(24) est vraiment non standard. Son étude théorique est en progrès. On récupère la charge surfacique ρ_s du satellite par la relation :

$$\rho_s = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial n} \text{ sur } \partial D. \tag{25}$$

Nous orientons notre recherche vers deux buts : modéliser l'effet d'un moteur à plasma et obtenir des modèles réduits plus simples à résoudre. Il faut remarquer que les codes existants actuellement sont basés sur l'hypothèse que la longueur de Debye est très grande devant la longueur du satellite. De plus, par analyse monodimensionnelle on peut réduire (24) à une relation donnant le potentiel sur ∂D . Par exemple, dans le cas d'un plasma composé d'électrons α et d'une espèce d'ions β on a :

$$\Phi|_{\partial D} = -\frac{U_T}{2} \ln\left(\frac{m_\beta}{m_\alpha}\right),$$

où $U_T = \frac{kT}{q}$ est le potentiel thermique et où $m_\beta \gg m_\alpha$.

Ce type de modèle n'est malheureusement pas valable à toutes les altitudes orbitales et ne tient pas compte d'un éventuel plasma créé par le moteur du satellite.

Comme illustration numérique, on présente ici, un modèle de charge d'une sphère permettant de se passer de l'hypothèse de faible dimension du satellite devant la longueur de Debye. Le plasma est toujours décrit par les équations de Vlasov-Poisson (VP) stationnaires. Celles-ci sont résolues par une méthode de caractéristiques. En utilisant le fait que les fonctions de répartition des ions et électrons f_e et f_i sont constantes le long des trajectoires des particules, on calcule par intégration numérique les densités spatiales n_e et n_i ainsi que les courants incidents à la sphère. Ces courants dépendent *a priori* du potentiel spatial et ne permettent pas de ramener l'équation d'équilibre des courants (24) à la connaissance du potentiel de surface. Nous nous sommes donc dirigés vers une approche quasi-stationnaire pour atteindre l'état d'équilibre. A chaque pas de temps, les courants incidents nous permettent de calculer l'incrément de charge surfacique ρ_s par la discrétisation de l'équation de conservation :

$$\frac{d\rho_s}{dt} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} v f_{\alpha}(t, x, v) dv \quad \text{pour } x \in \partial D. \quad [26]$$

Connaissant la charge surfacique, l'équation (25) nous donne une condition de Neumann pour résoudre l'équation de Poisson :

$$\begin{aligned} -\Delta\Phi(x) &= \frac{\epsilon}{\epsilon_0}(n_i(x) - n_e(x)), \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= \frac{\rho_s}{\epsilon_0}, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x) &= 0. \end{aligned} \quad [27]$$

Le potentiel étant recalculé on peut de nouveau déterminer densités et courants. En itérant ce processus, on converge vers un état stationnaire vérifiant l'équation (24).

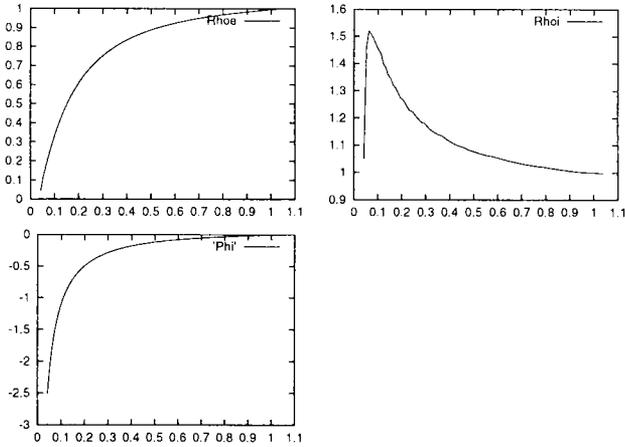


Figure 1. Etat stationnaire des densités et potentiel en fonction du rayon

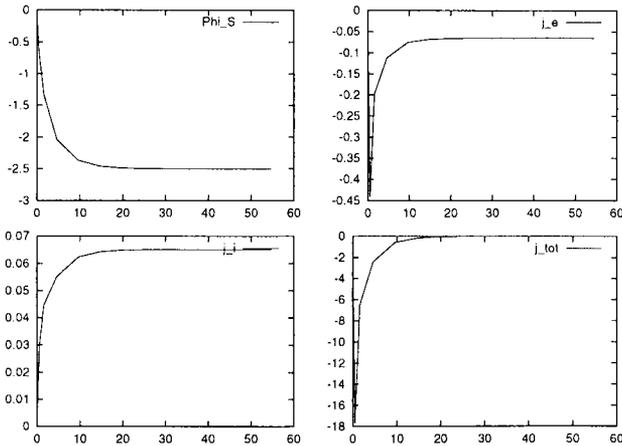


Figure 2. Evolution temporelle des potentiel et courants surfaciques

1.3. Conclusion

Nous avons décrit dans ce chapitre des modèles couplés d'interactions entre particules et ondes électromagnétiques. Les équations fondamentales sont les équations de Vlasov-Maxwell. Ces équations sont cependant très complexes : l'équation de Vlasov est posée sur \mathbb{R}^7 et le système de Maxwell ne se réduit pas à un régime harmonique à cause du couplage. Une première solution à ce problème est d'essayer de trouver des

modélisations plus simples qui restent adaptées au problème étudié. Nous avons donné deux exemples allant dans ce sens : la méthode d'absorption limite pour l'obtention des solutions périodiques, un système de Vlasov-Poisson réduit pour les problèmes de charge de satellites. Il reste néanmoins que dans bien des cas, on a à résoudre le système de Maxwell en domaine temporel. Il est alors nécessaire d'utiliser des méthodes numériques qui soient précises et peu coûteuses. La méthode la plus simple et la plus économique est certainement la méthode des différences finies de Yee. Malheureusement elle ne peut pas prendre en compte des géométries complexes. Dans ce cas les méthodes des volumes finis sont mieux adaptées mais leur coût calcul est plus important. L'idée naturelle est donc de coupler les deux méthodes pour utiliser les volumes finis près des bords et le schéma de Yee ailleurs. C'est l'objet du chapitre suivant.

2. Couplage de méthodes numériques

2.1. Introduction

Depuis sa première référence [YEE 66] il y a une trentaine d'années, le schéma de Yee a été largement utilisé et étudié. Sa popularité tient à son faible coût en temps de calcul et en mémoire et à la simplicité de son implémentation. Malgré de nombreux travaux pour généraliser le schéma initial aux grilles non orthogonales (voir [HOL 83] et [YEE 87] par exemple), l'application des schémas FDTD à des dispositifs complexes (milieu hétérogène non structuré, lignes de courant courbes, etc..) s'avère insatisfaisante et on assiste depuis quelques années à des tentatives d'hybridation du schéma de Yee avec des volumes finis (voir [YEE 94] et [PIE 98] par exemple) ou des éléments finis ([PIE 98]). Nous nous intéressons ici au couplage du schéma de Yee avec des schémas FVTD. Ces derniers schémas, mal connus encore en électromagnétisme numérique, s'avèrent aussi flexibles que les éléments finis quand il s'agit d'opérer dans des maillages non structurés et ont le caractère local des différences finies (pas de matrice à inverser). Le nouveau schéma volumes finis, présenté ici, a de plus l'avantage de partager beaucoup des bonnes propriétés du schéma de Yee (conservation de l'énergie et faible coût par exemple). On pourra se référer à [REM 99] pour une description plus détaillée de ce schéma et des comparaisons avec le schéma de Yee ou avec des formulations volumes finis plus classiques.

Le principe du couplage que nous présentons ici diffère de ceux des travaux cités par sa simplicité. En effet, au lieu de faire appel à une grille duale (comme dans [YEE 94] et autres références citées ci-dessus), nous proposons de réaliser le couplage des grilles et celui des schémas de façon séparée (figure 3). Comme dans tous les travaux sur les méthodes hybrides FV/FDTD, nous utilisons le schéma de Yee dans la zone structurée (ie maillée par une grille orthogonale) et dans la zone non structurée (maillage de type éléments finis par exemple) on utilise le schéma volumes finis. La principale différence est que nous réalisons le couplage entre les deux schémas dans la zone structurée (voir figure ci-dessous).

On trouvera dans [BON 97], une description d'un schéma FVTD en maillage hybride (triangles/rectangles) et on se restreint ici à décrire le nouveau schéma FVTD et son couplage avec le schéma de Yee sur une grille structurée. Une analyse de stabilité du couplage sera également présentée.

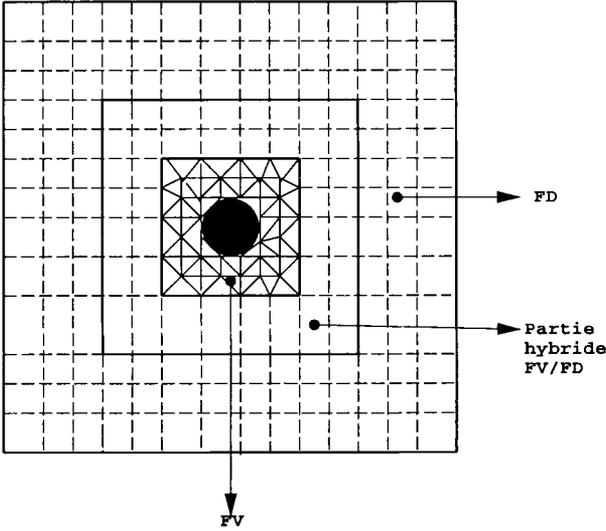


Figure 3. Les différentes zones du maillage.

2.2. Description des schémas utilisés dans le couplage

Nous décrivons brièvement les deux schémas (FVTD et FDTD) utilisés ici et on se référera à [REM 99] pour le schéma volumes finis et à [YEE 66] et [TAF 75] pour le schéma aux différences finies.

2.3. Le schéma volumes finis

On considère le système de Maxwell (dans le vide) sous la forme conservative :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \vec{\nabla} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = 0, \tag{28}$$

où \mathbf{Q} représente le champ électromagnétique. En intégrant la forme [28] sur chaque volume de contrôle \mathbf{V} on obtient :

$$\int_{\mathbf{V}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathbf{V}} \mathbf{IF}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} ds = 0, \quad [29]$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure à $\partial \mathbf{V}$. Supposons que la dérivée en temps est constante sur chaque volume \mathbf{V} , on obtient :

$$Vol(\mathbf{V}) \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \sum_{\mathbf{v}' \text{ voisin de } \mathbf{v}} \Phi(\mathbf{Q}_{\mathbf{v}}, \mathbf{Q}_{\mathbf{v}'}) = 0, \quad [30]$$

où Φ est la fonction de flux numérique définie ici par :

$$\Phi(U, U') = \frac{\mathcal{F}(U, \eta) + \mathcal{F}(U', \eta)}{2}, \quad [31]$$

$$\text{où } \mathcal{F}(U, \eta) = \eta \cdot \mathbf{IF}(U) \text{ et } \eta = \int_{\partial \mathbf{V} \cap \partial \mathbf{V}'} \mathbf{n} ds.$$

REMARQUE. –

Notons que la fonction de flux ainsi définie est centrée et ne contient aucune viscosité interne ou artificielle. Il est connu qu'une telle approximation couplée avec des schémas explicites de type Runge-Kutta (y compris le schéma d'ordre un d'Euler) rend le schéma instable sauf à choisir des approximations en temps d'ordre élevé (4 au moins, cf [DEP 95]). C'est pour cette raison que nous avons choisi un schéma temporel de type saute-mouton :

$$\begin{cases} \mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{B}^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t \Psi_1(\mathbf{D}^n), \\ \mathbf{D}^{n+1} = \mathbf{D}^n - \Delta t \Psi_2(\mathbf{B}^{n+\frac{1}{2}}), \end{cases} \quad [32]$$

où Ψ_1 et Ψ_2 représentent les flux numériques après discrétisation spatiale.

Ce schéma est d'ordre deux en temps et en espace et conserve l'énergie. La condition de stabilité dans le cas de maillages structurés composés de parallélépipèdes de côtés $\Delta x, \Delta y$ et Δz est donnée par :

$$C_{max} \Delta t \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2} \right)} \leq 2, \quad [33]$$

où C_{max} est la vitesse maximale de l'onde dans le domaine de propagation. On se référera à [REM 99] pour la démonstration de ces résultats.

2.4. Le schéma aux différences finies

Le schéma de Yee s'écrit sous forme condensée :

$$\int_S \frac{\mathbf{B}^{n+1/2} - \mathbf{B}^{n-1/2}}{\Delta t} ds + \int_{\partial S} \mathbf{E}^n dl = 0,$$

$$\int_S \frac{\mathbf{D}^{n+1} - \mathbf{D}^n}{\Delta t} ds - \int_{\partial S} \mathbf{H}^{n+1/2} dl = 0,$$

où S est une surface.

La condition de stabilité est donnée par :

$$C_{max} \Delta t \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}\right)} \leq 1. \tag{34}$$

Voir [TAF 75] ou [REM 99] pour une preuve de ce résultat.

3. Le schéma hybride

Pour simplifier les notations, nous décrivons le schéma hybride dans le cas monodimensionnel et le lecteur pourra se convaincre que l'extension aux dimensions supérieures est directe, le couplage se faisant sur une grille orthogonale.

Les équations de Maxwell dans le cas 1-D transverse magnétique (avec $\epsilon = 1$ et $\mu = 1$) s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = 0, & x \in]a, b[, t > 0, \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{35}$$

On subdivise $[a : b]$ en $M - 1$ intervalles de longueur fixe Δx et on applique le schéma de Yee sur la partie composée des points $(x = 0, \dots, x = N + \frac{1}{2})$, et le schéma volumes finis sur le reste du segment. Le champ $(\mathbf{E}^n, \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}})$ étant connu, on calcule $(\mathbf{E}^{n+1}, \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}})$ par l'algorithme suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \nu[\mathbf{E}_{j+1}^n - \mathbf{E}_j^n] \quad j = 0, \dots, N-1, \\
 \mathbf{E}_j^{n+1} = \mathbf{E}_j^n - \nu[\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}] \quad j = 0, \dots, N-1, \\
 \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \nu[\mathbf{E}_{N+1}^n - \mathbf{E}_N^n], \\
 \mathbf{E}_N^{n+1} = \mathbf{E}_N^n - \nu[\mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{N-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}], \\
 \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^{n+1} = \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n - \nu[\mathbf{H}_{N+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}], \\
 \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{2}[\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^n - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^n] \quad j = N+2, \dots, M-1, \\
 \mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\nu}{2}[\mathbf{H}_{j+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}] \quad j = N+2, \dots, M-1, \\
 \mathbf{H}_{N+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}_{N+\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{2}[\mathbf{E}_{N+\frac{5}{2}}^n - \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n], \\
 \mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^{n+1} = \mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^n - \frac{\nu}{2}[\mathbf{H}_{N+\frac{5}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}].
 \end{array} \right. \quad [36]$$

Interface

L'algorithme ci-dessus utilise des valeurs non déterminées par les formules de Yee ou des volumes finis, on les calcule ici par des moyennes centrées de façon à assurer la consistance dans tout le domaine.

$$\mathbf{E}_{N+1}^n = \frac{\mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^n + \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n}{2}.$$

Proposition

Avec une condition aux limites de type métal parfait, le schéma hybride [36] est un schéma stable.

Preuve

Nous montrons la stabilité par une estimation de la variation de l'énergie totale discrète sur le domaine de calcul.

On définit l'énergie du schéma hybride par :

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{E}_h^n &= \sum_{j=0}^{j=N-1} (\mathbf{E}_j^n)^2 + \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + (\mathbf{E}_N^n)^2 + \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \\
 &\quad + \sum_{j=N+1}^{j=M-1} (\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 + \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n)^2,
 \end{aligned} \quad [37]$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$2\mathcal{E}_h^n = 2\mathcal{E}_{yee}^n + 2\mathcal{E}_{vf}^n + 2\mathcal{E}_{int}^n,$$

avec :

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{E}_{yee}^n &= \sum_{j=0}^{j=N-1} (\mathbf{E}_j^n)^2 + \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \\
 &\quad + (\mathbf{E}_N^n)^2 + \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}. \\
 2\mathcal{E}_{v_f}^n &= \sum_{j=N+1}^{j=M-1} (\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 + \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \times \mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}. \\
 2\mathcal{E}_{int}^n &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n)^2.
 \end{aligned}$$

Lemme

L'énergie discrète [37] est une forme quadratique définie positive pour $\nu < 1$.

Preuve

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{E}_h^n &= \sum_{j=0}^{j=N-1} (\mathbf{E}_j^n)^2 + \left(\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{2}(\mathbf{E}_{j+1}^n - \mathbf{E}_j^n) \right)^2 - \frac{\nu^2}{4}(\mathbf{E}_{j+1}^n - \mathbf{E}_j^n)^2 \\
 &+ \sum_{j=N+1}^{j=M-1} (\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 + \left(\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{4}(\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^n - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^n) \right)^2 - \frac{\nu^2}{16}(\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^n - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^n)^2 \\
 &+ (\mathbf{E}_N^n)^2 + \left(\mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{2} \left(\frac{\mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^n + \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n}{2} - \mathbf{E}_N^n \right) \right)^2 \\
 &\quad - \frac{\nu^2}{4} \left(\frac{\mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^n + \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n}{2} - \mathbf{E}_N^n \right)^2 + \frac{1}{2}(\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n)^2.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $(a - b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ on déduit :

$$\begin{aligned}
 2\mathcal{E}_h^n &\geq \sum_{j=0}^{j=N-1} \left(\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{2}(\mathbf{E}_{j+1}^n - \mathbf{E}_j^n) \right)^2 + (1 - \nu^2)(\mathbf{E}_j^n)^2 \\
 &+ \sum_{j=N+1}^{j=M-1} \left(\mathbf{H}_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{4}(\mathbf{E}_{j+\frac{3}{2}}^n - \mathbf{E}_{j-\frac{1}{2}}^n) \right)^2 + \sum_{j=N+2}^{j=M-1} \left(1 - \frac{\nu^2}{4} \right) (\mathbf{E}_{j+\frac{1}{2}}^n)^2 \\
 &+ \left(\mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu}{2} \left(\frac{\mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^n + \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n}{2} - \mathbf{E}_N^n \right) \right)^2 \\
 &+ (1 - \nu^2)(\mathbf{E}_N^n)^2 + \left(1 - \frac{3}{8}\nu^2 \right) (\mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^n)^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{4}\nu^2 \right) (\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n)^2.
 \end{aligned}$$

On montre facilement que pour $\nu < 1$, on a :

$$\mathcal{E}_h^n = 0 \implies {}^t(\mathbf{E}_h^n, \mathbf{H}_h^{n+\frac{1}{2}}) = 0.$$

La variation de l'énergie est donnée par :

$$\begin{aligned}
 2\Delta\mathcal{E}_h &= 2\mathcal{E}_h^{n+1} - 2\mathcal{E}_h^n. \\
 2\Delta\mathcal{E}_h &= 2\Delta\mathcal{E}_{yee} + 2\Delta\mathcal{E}_{v_f} + 2\Delta\mathcal{E}_{int}.
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 2\Delta\mathcal{E}_{yee} &= 2\mathcal{E}_{yee}^{n+1} - 2\mathcal{E}_{yee}^n \\
 2\Delta\mathcal{E}_{Yee} &= -\frac{\nu}{2}\mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^{n+1} + \mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^n) - \frac{\nu}{2}\mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^{n+1} + \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n). \\
 2\Delta\mathcal{E}_{vff} &= 2\mathcal{E}_{vff}^{n+1} - 2\mathcal{E}_{vff}^n \\
 2\Delta\mathcal{E}_{vff} &= \frac{\nu}{2}\mathbf{H}_{N+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^{n+1} + \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n) \\
 &\quad + \frac{\nu}{2}\mathbf{H}_{N+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^{n+1} + \mathbf{E}_{N+\frac{3}{2}}^n). \\
 2\Delta\mathcal{E}_{int} &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^{n+1})^2 - (\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n)^2 \right] \\
 2\Delta\mathcal{E}_{int} &= -\frac{\nu}{2}(\mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^{n+1} + \mathbf{E}_{N+\frac{1}{2}}^n)(\mathbf{H}_{N+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}_{N+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}).
 \end{aligned}$$

Ainsi, la variation de l'énergie discrète vérifie :

$$2\Delta\mathcal{E}_h = 0.$$

Comme l'énergie est une forme quadratique définie positive et que sa variation est nulle, nous déduisons que cette énergie est bornée à chaque pas de temps, et par conséquent, tous les champs électromagnétiques le sont. Ceci implique la stabilité du schéma. Nous constatons également d'après cette étude que le schéma hybride ainsi construit n'est pas diffusif.

4. Expériences numériques

4.1. Schéma volumes finis

Nous proposons ici de simuler le champ diffracté par un NACA0012 revêtu d'une couche de diélectrique par le schéma volumes finis. Le maillage utilisé correspond à 15 points par longueur d'onde. L'objet est illuminé par une onde plane sur la partie droite. La couche de diélectrique a une épaisseur $\delta = 0.1\lambda$ (dont les indices $\varepsilon = 4$ et $\mu=1$). La figure (4) représente les isovaleurs du champ diffracté et nous pouvons constater qu'aucune oscillation parasite n'apparaît à l'interface des deux milieux.

4.2. Schéma hybride

Nous proposons un résultat numérique donné par le schéma hybride dans le cas 2-D avec un maillage structuré. Nous proposons de suivre l'évolution d'un mode de résonance dans une cavité métallique dont le côté est égal à 1 mètre. Cette expérience académique nous permet de valider notre schéma. Nous donnons ici l'évolution en temps du champ H_z comparée à la solution exacte (figure 5), et nous pouvons constater que le résultat numérique obtenu est de bonne qualité.

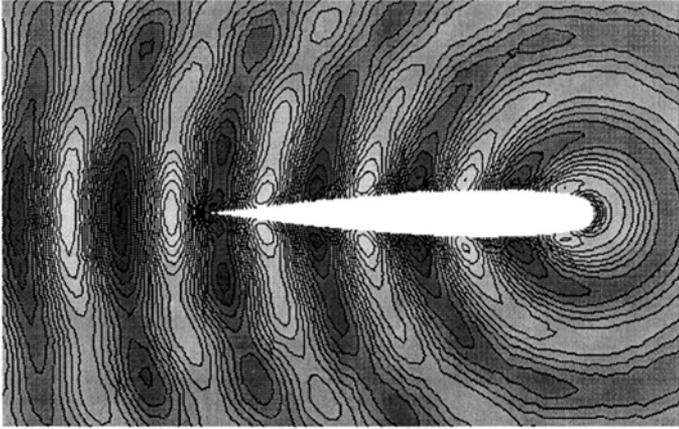


Figure 4. *Le champ électrique diffracté*

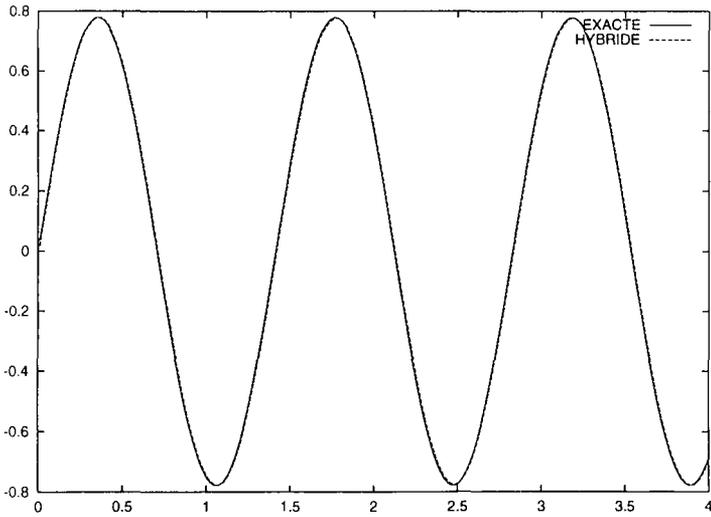


Figure 5. *Evolution en temps du champ Hz*

Bibliographie

- [AKU 86] ASANO K, KOYOSHI et UKAI S., On the Vlasov-Poisson limit of the Vlasov-Maxwell equation. Pattern and waves. Qualitative analysis of nonlinear differential equations, *Stud. Math. Appl.* 18, 369-383.
- [ADS 96] ASSOUS F., DEGOND P. et SEGRÉ J., Numerical approximation of the Maxwell equations in inhomogeneous media by a P^1 conforming finite element method. *J. Comput. Phys.* 128, no. 2, 363-380.
- [BEZ 93] BEZARD M., Boundary value problems for the Vlasov-Maxwell system. Semin. Equ. Deriv. Partielles, Ec. Polytech., Cent. Math., Palaiseau Semin. 1992-1993, Exp. No.4, 17 p.
- [BON 97] BONNET F., FEZOU L., Méthode PML en volumes finis pour la résolution des équations de Maxwell en maillage hybride 2-D. Rapport de recherche Cermics no 97-92, 1997.
- [BPO 97] BONNET F. et POUPAUD F., Bérenger absorbing boundary condition with time finite-volume scheme for triangular meshes. *Appl. Numer. Math.* 25, No.4, 333-354.
- [BOP 97] BOSTAN M. et POUPAUD F., Solutions périodique au système de Vlasov Poisson avec conditions aux limites. *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I* 325 1333-1336.
- [BOS 99] BOSTAN M., Etude numérique et théorique du système de Vlasov Maxwell. Thèse en mathématiques appliquées, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, janvier 1999.
- [DEG 86] DEGOND P., Local existence of solutions of the Vlasov-Maxwell equations and convergence to the Vlasov-Poisson equations for infinite light velocity. *Math. Methods Appl.*, Sci. 8, 533-558.
- [DEP 95] DEPEYRE S., Stability analysis for finite volume schemes on rectangular and triangular meshes applied to the two-dimensional Maxwell system. Rapport de recherche Cermics no 95-40, 1995.
- [DIL 89] DIPERNA R.J. et LIONS P.L., Global weak solution of Vlasov-Maxwell systems, *Commun. on Pure and Appl. Math.* XVII., 729-757.
- [GUO 93] GUO Y., Global weak solutions of the Vlasov-Maxwell system with boundary conditions. *Commun. Math. Phys.*, 154, No.2, 245-263.
- [HOL 83] HOLLAND R., Finite-difference solutions of Maxwell's equation in generalizd non-orthogonal coordinates, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, vol.NS-30, pp. 4589-4591, 1983.
- [IPC 95] ISSAUTIER D., POUPAUD F., CIONI J.P. et FEZOU L., A 2-D Vlasov-Maxwell solver on unstructured meshes. Cohen, Gary (ed.), Mathematical and numerical aspects of wave propagation. *Proceedings of the third international conference, Mandelieu-La Napoule, France*, April 24-28, 1995.
- [PIE 98] Progress in Electromagnetics research Symposiun. *Proceedings* 13 - 17 july, *Cité des Congrès Nantes, France*.
- [POU 92] POUPAUD F., Boundary value problems for the stationary Vlasov-Maxwell system. *Forum Math.* 4, No.5, 499-527.
- [REM 98] REMAKI M., FEZOU L. et POUPAUD F., Un nouveau schéma de type volumes finis appliqué aux équations de Maxwell en milieu hétérogène. Rapport de recherche INRIA no 3351, janvier 1998.

- [REM 99] REMAKI M., A New Finite Volume Scheme for Solving Maxwell System, rapport de recherche INRIA no 3725, juillet 1999.
- [SCH 86] SCHAEFFER J., The classical limit of the relativistic Vlasov-Maxwell system. *Commun. Math. Phys.* 104, 403-421.
- [TAF 75] TAFLOVE A. et BRODWIN M. E., *Numerical Solution of Steady-State Electromagnetic Scattering problems Using the Time-Dependent maxwell's equations*, *IEEE Trans. Antenna Propagat*, vol.MTT-23, no. 8, pp. 623-630, August 1975.
- [YEE 66] YEE K. S., *Numerical solution of initial boundary value problem in isotropic media*, *IEEE Trans. Antenna Propagat*, vol.AP-14, no. 3, pp. 302-307, May 1966.
- [YEE 87] YEE K. S., Numerical solution to Maxwell's equations with non-orthogonal grids, Lawrence Livermore National Laboratory Tech. Report. UCRL-93268, Apr. 1987.
- [YEE 94] YEE K. S. et CHEN J. S., The Finite-Difference Time-Domain (FDTD) and The Finite-Volume Time-Domain (FVTD) Methods in Solving Maxwell's Equations , *IEEE-Trans. Antenna Propagat*, vol. 45, no. 3, pp. 354-363, March 1997.