
Écoulement bidimensionnel à surface libre, Approche h-s : Partie I

Khouane Meftah* — Gouri Dhatt* — Jean-Michel Tanguy**

**Université de Technologie de Compiègne,
Département de génie des systèmes mécaniques*

** *Centre d'Études Techniques Maritimes et Fluviales d'Aix-En-Provence*

RÉSUMÉ. *Les travaux qui font l'objet de la présente publication ont consisté à développer un modèle de simulation des écoulements à surface libre applicable en mer, en rivière et en lac sous l'action de sollicitations aussi divers que les crues, les gradients de densité eau salée-eau douce, les sur cotes marines ou les coups de vents. Ce modèle basé sur la méthode des éléments finis repose sur une approche que nous avons dénommée h-s qui privilégie comme cela se passe en nature pour les problèmes que l'on souhaite étudier, la dimension horizontale par rapport à la dimension verticale qui subit un traitement particulier. A noter que la pression peut être hydrostatique ou Non. Cette méthode est basée sur approximation de type éléments finis suivant x et de type analytique (séries) selon z. Le choix de la série et le nombre de ses termes dépendent de la physique du problème et de la précision souhaitée. Nous avons utilisé un élément hybride L3L pour la discrétisation spatiale. Pour la discrétisation temporelle, nous avons utilisé deux schémas. Le premier est celui d'Euler implicite, réputé par sa stabilité et qui convient bien pour la résolution des problèmes stationnaires, le second est explicite de type Lax-Wendroff qui s'adapte mieux pour les problèmes instationnaires.*

ABSTRACT. *The works that are the object of the present paper consist of developing a model to simulate free surface flows applicable at sea, river, and lake, under loads as various as floods, density gradient between salt water – fresh water, marine coast or gales. This model based upon finite element method, implies an approach that we called h-s. This latter privileges, as it occurs in nature for the problems that we wish to study, the horizontal dimension to vertical dimension, which under goes a special treatment. We note that the pressure can be hydrostatic or not. This method is based upon a finite element approximation along with x and upon analytical one along with z. The choice of the series and the number of its terms depend on the physics of the problem and the required accuracy. We have used a hybrid element L3L for the spatial discretization. For the time discretization, we have used two schemes. The first one is that of backward Euler, and the second is explicit of Lax-Wendroff type which can better fit the non stationary problems.*

MOTS CLÉS : *hydrodynamique, surface libre, éléments finis, approche h-s, séries.*

KEY WORD : *hydrodynamic, free surface, finite element, approach h-s, series.*

1. Introduction

La méthode des éléments finis, apparue à la fin des années 50 s'est particulièrement bien illustrée pour la résolution de problèmes de mécanique des structures. Son extension à la mécanique des fluides pour la résolution d'écoulements turbulents a commencé dans les années 70 avec les travaux de Taylor et Hood [TAY 73], Connor et Brebbia [CON 76]. Dans le domaine de la modélisation de la turbulence, citons, parmi d'autres, les travaux de Launder [LAU 84], Bouffes [BOU 94] en 2D, Rodi [LES 79] et Jaeger [JAE 90] en 3D.

Dans le domaine de l'hydraulique à surface libre, il s'est également avéré nécessaire de développer des modèles aux éléments finis pour reproduire les écoulements turbulents mus par la gravité en rivière, forcés par la marée en mer ou leur jonctions en estuaires. A cet égard nous pouvons citer le premier modèle 3D en couches par éléments finis de Wang [WAN 75] sur la base des travaux de Leendertse *et al* [LEE 73] en différences finies. C'est un modèle basé sur l'hypothèse de répartition hydrostatique des pressions ; il est obtenu par une intégration des équations de Navier-Stokes sur plusieurs couches. King *et al.* [KIN 87] ont repris ce modèle mais en utilisant une approximation verticale facilitant alors la mise en œuvre.

En France, nous citons les travaux de Provost et Poncet [PRO 78], ainsi que ceux de Daubert et Cahouet [DAU 84], Hauguel [HAU 86], Hervouet [HER 91] et Péchon au laboratoire National d'Hydraulique (LNH) de EDF. Le groupe UTC/STCPMVN appelé (GHN) a également apporté une contribution dans le domaine de la modélisation en hydraulique à surface libre par éléments finis en 2D et 3D. Cochet [COC 79], Hubert [HUB 84] et Zhang [ZHA 92] ont développé différents éléments pour la modélisation 2D horizontale de Saint-Venant. G. Rouas [ROU 96] a développé un modèle 2DV. Robert [ROB 83], Leclerc [LEC 85], Heniche [HEN 95] et Frenette [FRE 96] ont proposé chacun un modèle 3D à pression hydrostatique. Soulaïmani [SOU 91] pour sa part, a mis en œuvre un modèle 3D général en représentation eulérienne-lagrangienne.

La condition d'existence et d'unicité d'une solution au problème mixte de Stokes a été étudiée par Ladyzhenskaya [LAD 69], Brezzi [BRE 94] et Babuska [BAB 71]. Elle conduit à une condition de consistance entre les espaces de vitesse et de pression ; il s'agit de la condition de L.B.B. Compte tenu des différents travaux, il est établi que l'approximation des vitesses doit être plus riche que celle de la pression. Le non-respect de cette règle engendre une solution numérique polluée par des oscillations non physiques notamment en présence des conditions aux limites sévères [HUG].

De nombreux travaux de recherche ont été menés pour développer des éléments finis en 3D pour les fluides incompressibles. La règle était qu'il fallait prendre soin d'enrichir l'approximation des vitesses par rapport à celle de la pression/hauteur d'eau.

Leclerc a développé le prisme à 15 nœuds (P15) avec une approximation quadratique en vitesse et linéaire en hauteur d'eau. Là également apparaissent des oscillations (cas de l'écoulement dans un coude). Hubert et Jaeger ont développé le cube à 8 nœuds (H8) linéaire en vitesse et constant en pression. Le H8 se comporte suffisamment bien s'il n'est pas trop distordu, d'après Jaeger. Hubert a développé le H8N en ajoutant un degré de liberté supplémentaire (vitesse normale) sur chaque face du cube. Soulaïmani a développé le tétraèdre à 4 nœuds (T4) avec des approximations linéaires en pression et enrichies par une fonction bulle en vitesse. Heniche a développé le prisme à 6 nœuds (P6) linéaire en vitesse et en pression en utilisant une formulation de type Pétrov-Galerkin et moindres carrés.

Si tous les modèles bidimensionnels verticaux ou tridimensionnels donnent des réponses satisfaisantes dans des cas schématiques, ils sont loin d'être robustes, fiables et utilisables dans un contexte opérationnel. Par ailleurs la demande s'oriente vers des modèles assez génériques mais modulables qui puissent traiter à la fois du 1D, du 2D ou du 3D (hydrostatique ou non), des écoulements en mer (courant, houle, estuaire), en rivière (longs linéaires ou localement) ou en lac (courants de densité, recirculations dues au vents).

Dans cette étude, nous avons développé un modèle bidimensionnel vertical non hydrostatique basé sur une approximation de type éléments finis suivant x et de type analytique (séries) selon z , d'où l'appellation *h-s*. Cette approche consiste d'abord à choisir une forme analytique (série) selon z pour la composante horizontale de la vitesse $u(x,z,t)$, puis à en déduire la forme de la composante verticale et celle de la pression. Le choix de la série ainsi que le nombre de ses termes dépendent de la physique du problème et de la précision souhaitée.

2. Généralités

2.1. Système de coordonnées

Considérons deux repères donnés par la figure 1, l'un fixe (X,Y,Z) ayant pour base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'autre mobile (x,y,z) attaché à la terre, et ayant pour base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, ω est la vitesse angulaire de la terre qui a pour valeur $0.7292 \cdot 10^{-4}$ rad/s. Il est courant de choisir :

$$x \equiv \text{Est} \quad y \equiv \text{Nord} \quad z \equiv \text{Zénith}$$

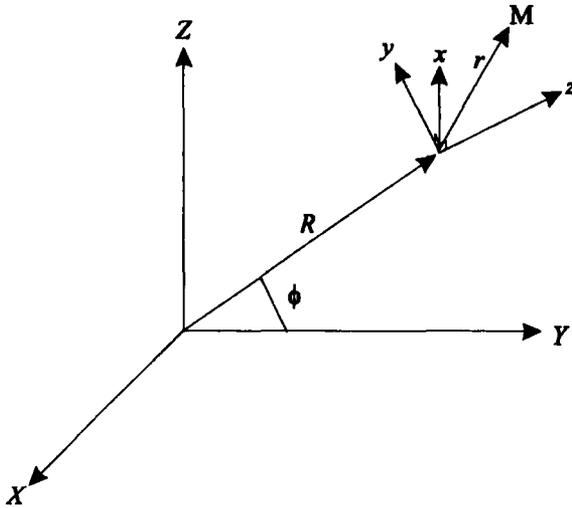


Figure 1. Systèmes de coordonnées

ϕ étant la latitude. En choisissant Z-X et z-y coplanaires (Figure 1), le vecteur de rotation $\vec{\omega}$ de la terre s'exprime dans le repère (x,y,z) comme suit :

$$\vec{\omega} = \omega [\cos(\phi)\vec{j} + \sin(\phi)\vec{k}] \quad [1]$$

Le rayon vecteur d'un point M quelconque dans le repère (x,y,z) s'écrit :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad [2]$$

La vitesse matérielle au point M dans le repère (x,y,z) s'écrit :

$$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad [3]$$

L'accélération matérielle au point M dans le repère (x,y,z) s'exprime par :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{a}_{coriolis} + \vec{g} \quad [4]$$

g est l'accélération de la pesanteur qui a pour valeur 9.81 m/s^2 .

$$\vec{a}_{coriolis} = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v} = 2\omega \sin(\phi)(v\vec{i} - u\vec{j}) \quad [5]$$

2.2. Surface libre

La surface libre (Figure 2) est présentée sous la forme :

$$\Phi = h(x, t) - z_s = 0 \quad [6.a]$$

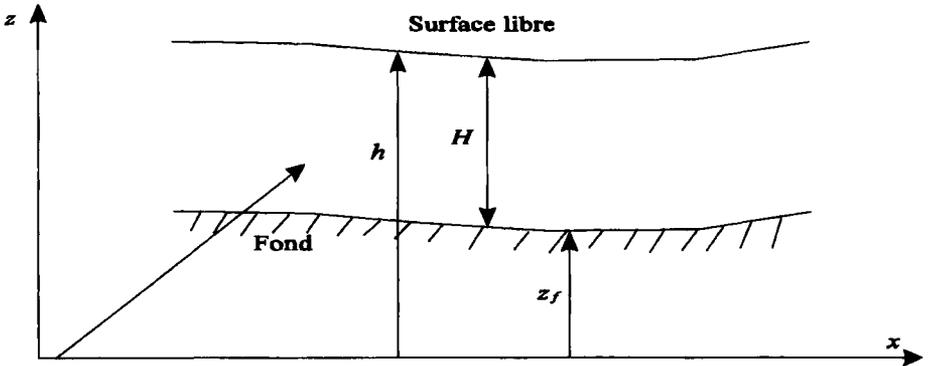


Figure 2. Représentation du fond et de la surface libre

Sous forme différentielle :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} u_s - w_s = 0 \quad [6.b]$$

L'indice 's' est relatif à la surface libre.

2.3. Fond

La surface du fond (Figure 2) s'écrit sous forme différentielle :

$$\frac{\partial z_f}{\partial x} u_f - w_f = 0 \quad [7]$$

3. Écritures fortes

3.1. Lois de Conservation

Les problèmes de fluides incompressibles (ρ constante) sont caractérisés par les relations de la conservation de la masse et celle de la quantité de mouvement.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad [8]$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) = 0 \quad [9.a]$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} - \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) + \rho g = 0 \quad [9.b]$$

3.2. Lois de comportement

3.2.1. Contraintes

Le tenseur des contraintes est de la forme [FRE 96, ROB 83] :

$$\bar{\bar{\tau}} = \rho \begin{bmatrix} 2\nu_{th}u_{,x} & \nu_{tz}(u_{,z} + w_{,x}) \\ \nu_{tz}(u_{,z} + w_{,x}) & 2\nu_{tz}w_{,z} \end{bmatrix} \quad [10]$$

3.2.2. Viscosité

La viscosité horizontale ν_{th} est supposée constante, alors que la viscosité verticale ν_{tz} qui est simulée par le concept de la longueur de mélange [FRE 96, HEN 95, ROB 83], s'exprime par la relation :

$$\nu_{tz} = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \quad [11]$$

l_m est la longueur de mélange verticale. Sa distribution suit une forme parabolique dissymétrique puisque les fluctuations turbulentes sont plus amorties par le fond que par la surface libre. Cette représentation a permis de reproduire correctement les profils de vitesses dans les écoulements à surface libre :

$$l_m = \kappa z \sqrt{1 - \frac{z}{H}} \quad [12]$$

où κ est la constante de Von Karmann et H la profondeur d'eau.

3.3. Nature de la pression

A l'instant t , en un point donné, la pression $p(x,z,t)$ est égale à :

$$p(x, z, t) = p_{atm} + p_{hydrosta} + \rho p'$$

où p_{atm} est la pression atmosphérique, $p_{hydrosta}$ la pression due au poids de la colonne d'eau au niveau z et $\rho p'$ est la pression supplémentaire générée par le mouvement de l'eau.

$$p_{hydrosta}(x, z, t) = \rho g(h(x, t) - z)$$

$$p(x, z, t) = \rho g(h(x, t) - z) + p_{atm} + \rho p'(x, z, t) \quad [13]$$

3.4. Conditions aux limites

Pour un fluide visqueux, les conditions aux limites sont, soit de type vitesse appliquées sur une surface S_1 , soit de type contrainte appliquées sur S_2 (Figure 3.a).

- Conditions sur u (dite condition de Dirichlet)

$$u = u_s \quad \text{sur } S_1 \quad [14]$$

- Condition sur τ_{ij} (dite condition de Cauchy-Neuman)

$$\vec{\tau}_n = \bar{\tau} \vec{n} \quad \text{sur } S_2 \quad [15]$$

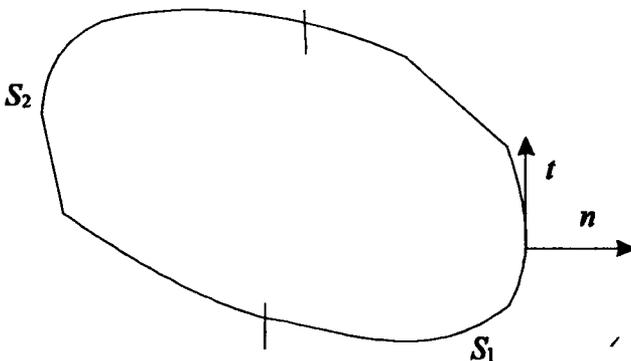


Figure 3.a. Conditions aux limites

En hydraulique, le domaine S est délimité par plusieurs frontières (Figure 3.b).

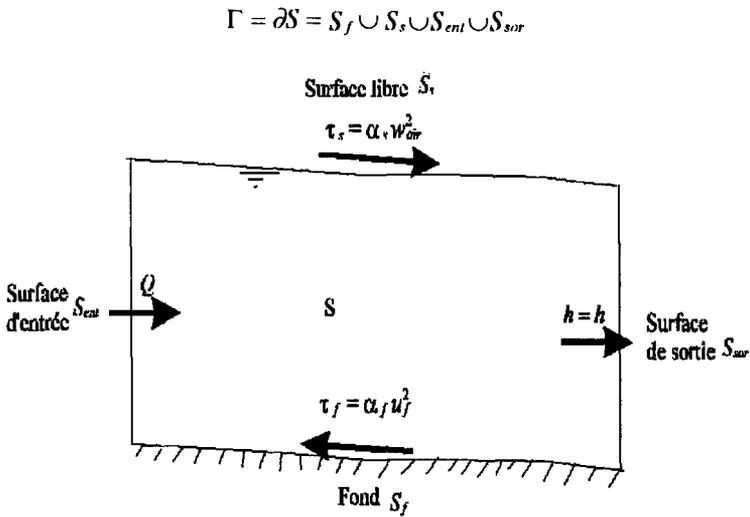


Figure 3.b. Frontières du domaine

3.4.1. Surface libre

a. Condition cinématique

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \tag{16}$$

$$q = \int_{z_f}^h u dz$$

b. Condition mécanique

A la surface libre, la pression est égale à la pression atmosphérique.

$$p = p_{atm} \Rightarrow p' = 0 \tag{17}$$

La surface libre peut être aussi sollicitée par le vent dont la force a pour expression [HEN 95, LEC 85] :

$$\tau_{xx} = -c_{10} \rho_a W_{10}^2 \tag{18}$$

c_{10} : coefficient de frottement correspondant à une vitesse du vent mesurée à 10 m au-dessus de la surface du plan d'eau.

ρ_a : masse spécifique de l'air.

w_{10} : composante de la vitesse du vent à 10 m.

3.4.2. Fond

Au fond, nous utilisons d'une part la condition d'imperméabilité selon \bar{n}

$$u_n = 0 \quad [19.a]$$

D'autre part, la contrainte de frottement au fond peut être exprimée par :

$$\tau_{fs} = -\rho\beta|u_f|u_f \quad [19.b]$$

β peut être exprimé par l'une des trois expressions :

$$\beta = \frac{g}{C_f^2} \quad [20.a]$$

$$\beta = \frac{n^2 g}{H^{1/3}} \quad [20.b]$$

$$\beta = \frac{1}{\left[\frac{1}{k} \text{Log} \left(30 \frac{z_{\min}}{k_s} \right) \right]^2} \quad [20.c]$$

z_{\min}, k_s, κ sont respectivement la cote du fond, la rugosité du fond et la constante de Karmann. C_f, n sont respectivement les coefficients de frottement de type Chezy et Manning.

4. Écritures faibles

Dans cette approche, nous allons affaiblir juste l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon x et celle de la cinématique de la surface libre. L'équation de conservation de la quantité de mouvement selon z et celle de la masse sont utilisées au sens fort. La forme variationnelle associée aux équations [9.a] et [16] s'écrit :

$$W = W_{NS} + W_h \quad [21.a]$$

$$\begin{aligned}
 W_{NS} = \int_S \left[\delta u \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial \delta u}{\partial x} p + v_{th} \frac{\partial \delta u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + v_{tz} \frac{\partial \delta u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right] dS \\
 - \int_{S_f} \delta u_f \frac{\tau_{fx}}{\rho} dx - \int_{S_s} \delta u_s \frac{\tau_{sx}}{\rho} dx = 0 \tag{21.b}
 \end{aligned}$$

$$W_h = \int_L (\delta h h_{,t} - \delta h_{,x} q) dx + \delta h q \Big|_0^L \tag{22}$$

5. Traitement de la surface libre

La difficulté de la modélisation des écoulements à surface libre réside dans le fait que cette dernière constitue à la fois une frontière du domaine et une inconnue du problème. Pour aborder cette question, nous distinguons plusieurs approches.

5.1. Approche lagrangienne

Dans cette approche, les nœuds sont attachés au fluide. Chaque élément est lié avec la position d'un élément du fluide à chaque instant. Démarrant d'un maillage initial, les nœuds se déplacent dans le temps en gardant les connectivités initiales. Lorsque le maillage devient trop distordu, un remaillage est nécessaire. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de déterminer avec précision la position de la frontière mobile dans le cas de petits déplacements. Par contre, dans le cas de grandes déformations de la frontière mobile, le maillage devient très distordu. L'ajustement du maillage au voisinage de cette frontière est très complexe, ce qui peut être une cause d'instabilités numériques.

5.2. Approche eulérienne

Dans cette approche, le maillage est fixe dans tout le domaine et les éléments peuvent être entièrement ou partiellement occupés par le fluide ou complètement secs. L'avantage est que le calcul donne une bonne précision même dans le cas où la frontière mobile subirait des grandes déformations. La difficulté réside dans le développement d'une technique pour obtenir la frontière non stationnaire qui évite la violation de la continuité et de la conservation de la quantité de mouvement.

5.2. Approche Lagrangienne-eulérienne

De manière à éviter les phénomènes de distorsion, Daubert et Cahouet [DAU 84] et Soulaïmani [SOU 91] utilisent la méthode eulérienne-lagrangienne où le domaine de calcul, obtenu au moyen d'une transformation géométrique du maillage, reste fixe. Cette méthode est très précise dans le suivi de la surface libre

et autorise de fortes cambrures. De plus, elle conserve son aspect eulérien dans le calcul des champs de vitesses et de pression. Contrairement à la méthode à maillage fixe, cette méthode, d'une part, n'est pas en mesure de simuler les écoulements à surfaces libres multiples, d'autre part, elle est difficile à mettre en œuvre pour les terrains complexes.

5.4. Notre approche *h-s* [MEF 98]

Pour remédier au problème de distorsion qui peut être la principale cause d'instabilité, et compte tenu du fait que pour les écoulements fluviaux et maritimes, la dimension horizontale est très dominante par rapport à la dimension verticale, nous avons développé une approche qui consiste à donner un traitement particulier aux variables selon z . Notre approche est basée sur une approximation de type éléments finis suivant x et de type analytique (séries) selon z , d'où le nom *h-s*.

Cette approche consiste d'abord à choisir une forme analytique (série) selon z pour la composante horizontale de la vitesse $u(x,z,t)$. Le choix de la série ainsi que le nombre de ses termes dépendent de la physique du problème et de la précision souhaitée. Cette série peut être de nature polynomiale, logarithmique, hyperbolique, trigonométrique ou autre.

Étant donné la forme de la vitesse horizontale, nous en déduisons les expressions analytiques de la composante verticale de la vitesse $w(x,z,t)$ et celle de la pression $p'(x,z,t)$ en utilisant respectivement l'équation de continuité et celle de la conservation de la quantité de mouvement selon z . Pour transformer le modèle, initialement dépendant de x,z , en un modèle dépendant de x uniquement, nous effectuons une intégration explicite des équations de Navier Stokes sur la verticale. Nous résolvons le modèle unidimensionnel obtenu par la méthode des éléments finis, puis nous restituons la forme générale des vitesses selon z au moyen de la forme analytique initialement choisie. Les avantages de cette approche sont les suivants :

a- Maillage 1D

Cette approche est capable de mieux capter la variation selon z , car nous pouvons introduire directement les lois qui correspondent à la physique du problème. Elle permet un meilleur traitement de la surface libre. En effet, dans cette approche, le maillage est unidimensionnel, chaque verticale contenant n nœuds est remplacée par un seul nœud très enrichi en degrés de liberté que nous avons surnommé super nœud (Figure 4).

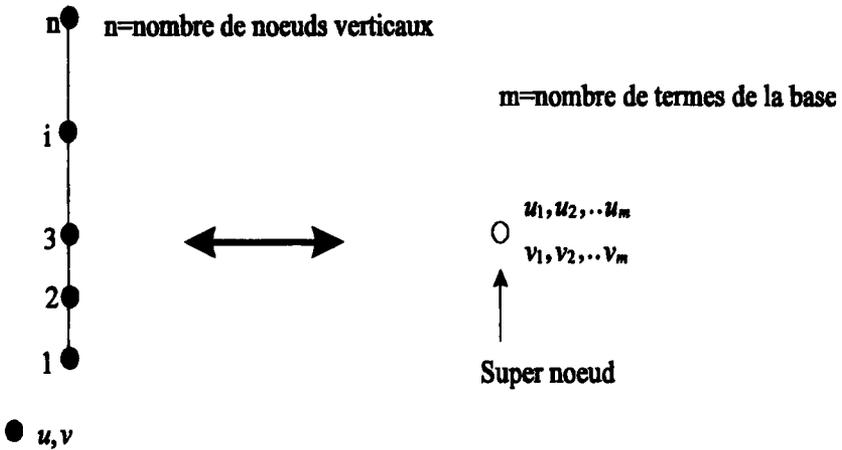


Figure 4. *Maillage unidimensionnel*

Par conséquent, la variation de la surface libre est représentée uniquement par l'actualisation de la hauteur totale de l'écoulement H se trouvant dans les coefficients qui résultent de l'intégration explicite des équations de Navier Stokes sur la verticale (Equations [33]). Le fait d'éliminer le maillage vertical, principale cause d'instabilité, revient à donner au modèle plus de stabilité, d'efficacité et de robustesse.

b- Orthogonalité

Bien que l'orthogonalité de la série selon z ne soit pas une condition nécessaire, elle permet :

- de simplifier le calcul de la matrice masse.
- un meilleur conditionnement de la matrice tangente.
- de faciliter l'introduction des conditions aux limites [MEF 98].

c- Modèles dégradés

Il est très intéressant de noter que dans le cas particulier où nous choisissons une approximation constante selon z (vitesse moyennée), nous retrouvons le modèle de Serre-Boussinesq [DUF 97], si en plus, nous supposons un profil hydrostatique de la pression, notre modèle se réduit alors à celui de Saint Venant [ZHA 92].

5.4.1. Notation

Afin de réduire la lourdeur des expressions, nous adopterons la notation d'Einstein.

5.4.2. Traitement selon z

Pour bien situer notre démarche, nous présentons d'abord le traitement des termes selon la verticale. Notre objectif consiste à transformer le modèle en (x, z) en un modèle en x seulement.

a- Expression de la composante horizontale de la vitesse

Nous proposons la forme suivante pour la composante horizontale de la vitesse :

$$u(x, z, t) = \phi_i(z) u_i(x, t) \quad i = 1, m \quad [23]$$

- $\phi_i(z)$ représente le terme de la base, son choix dépend de la physique du problème. Elle peut être de nature polynomiale, logarithmique, hyperbolique, trigonométrique ou autre.
- m est le nombre des termes de la base, il permet de représenter la variation selon z avec la précision souhaitée.

b- Expression de la composante verticale de la vitesse

La composante verticale $w(x, z, t)$ s'obtient en intégrant l'équation de continuité du fond à une cote z :

$$\int_{z_f}^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0$$

$$w(x, z, t) = w_f(x, t) + \Psi_i(z) w_i(x, t)$$

D'après [7] :

$$w_f = \frac{\partial z_f}{\partial x} u_f = \frac{\partial z_f}{\partial x} \phi_i(z_f) u_i$$

d'où

$$w(x, z, t) = \frac{\partial z_f}{\partial x} \phi_i(z_f) u_i(x, t) + \Psi_i(z) w_i(x, t) \quad [24]$$

$$w_i(z) = -\frac{\partial u_i}{\partial x} \tag{25}$$

$$\Psi_i(z) = \int_z^h \phi_i(z) dz \tag{26}$$

c- Expression de la pression non hydrostatique

Considérons l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon z , en négligeant les contraintes visqueuses, cette dernière se réduit à :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \tag{27}$$

En tenant compte de la relation [13], l'équation précédente devient :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} = 0 \tag{28}$$

En remplaçant u et w par les expressions [23], [24] et en intégrant l'équation précédente de z à h , nous obtenons :

$$p'(x, z, t) = \left(-\theta_i(z) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x} + (h-z) \frac{\partial z_f}{\partial x} \phi_i(z_f) \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) \tag{29}$$

$$+ s_{ij}(z) \left(u_i \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) + g_i(z) \phi_i(z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x} \left(u_i \frac{\partial u_j}{\partial x} - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)$$

avec

$$\theta_i(z) = \int_z^h \Psi_i(z) dz, \quad g_i(z) = -\Psi_i(z) + \int_z^h \phi_i(z) dz, \quad s_{ij}(z) = \int_z^h \phi_i(z) \Psi_j(z) dz \tag{30}$$

5.4.3. Intégration explicite sur la verticale

Nous choisissons la fonction de pondération δu de la même forme que u .

$$\delta u(x, z) = \phi_i(z) \delta u_i(x) \quad i = 1, m \tag{31}$$

Remplaçons dans l'équation [21.b], $\delta u, u, w, p'$ respectivement par les expressions [31], [23], [24], [29], et intégrons du fond à la surface libre. Après avoir divisé le tout par H , nous obtenons :

a- Termes de domaine

$$W_{NSD} = \int_L \left\{ \begin{aligned} & \delta u_i \left(a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + b_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x} u_j + c_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x} u_j + d_{ijk} \frac{\partial z_f}{\partial x} u_j u_k + g \sigma_i \frac{\partial h}{\partial x} + e_{ij} u_j \right) \\ & + g_{ij} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) - \frac{\partial \delta u_i}{\partial x} \left(p_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right) + x_{ij} \frac{\partial z_f}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial t} \right) \\ & - \frac{\partial \delta u_i}{\partial x} \left(q_{ijk} \left(\frac{\partial w_k}{\partial x} u_j + \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial x} \right) + \frac{\partial z_f}{\partial x} r_{ijk} \left(u_j \frac{\partial u_k}{\partial x} - u_k \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \right) \end{aligned} \right\} dx \quad [32]$$

$$a_{ij} = \frac{1}{H} \int_{z_f}^h \phi_i(z) \phi_j(z) dz, \quad b_{ijk} = \frac{1}{H} \int_{z_f}^h \phi_i(z) \phi_j(z) \phi_k(z) dz \quad [33.a]$$

$$c_{ijk} = \frac{1}{H} \int_{z_f}^h \phi_i(z) \frac{\partial \phi_j(z)}{\partial z} \Psi_k(z) dz, \quad d_{ijk} = \frac{1}{H} \phi_k(z_f) \int_{z_f}^h \phi_i(z) \frac{\partial \phi_j(z)}{\partial z} dz \quad [33.b]$$

$$e_{ij} = \frac{1}{H} \int_{z_f}^h v_{iz} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} dz, \quad p_{ij} = -\frac{1}{H} \int_{z_f}^h \phi_i(z) \theta_j(z) dz \quad [33.c]$$

$$r_{ijk} = \frac{\phi_k(z_f)}{H} \int_{z_f}^h \phi_i(z) g_j(z) dz, \quad x_{ij} = \frac{1}{H} \phi_j(z_f) \int_{z_f}^h \phi_i(z) (h-z) dz \quad [33.d]$$

$$q_{ijk} = \frac{1}{H} \int_{z_f}^h \phi_i(z) s_{ij}(z) dz, \quad \sigma_i = \frac{1}{H} \int_{z_f}^h \phi_i(z) dz \quad [33.e]$$

b- Termes de contour

$$\frac{-1}{\rho H} \int_{s_f} \delta u_f \tau_{fs} dS = \int_L \delta u_i f_{ijk} u_j |u_k| dx \quad [34.a]$$

$$\frac{-1}{\rho H} \int_{s_s} \delta u_s \tau_{ss} dS = \int_L \delta u_i \alpha_i dx \quad [34.b]$$

$$f_{ijk} = \frac{\beta}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_f}{\partial x} \right)^2} \phi_i(z_f) \phi_j(z_f) |\phi_k(z_f)| \quad [35.a]$$

$$\alpha_i = \frac{c_{10} \rho_a w_{10}^2}{\rho H} \phi_i(h) \quad [35.b]$$

6. Choix des éléments

L'élément utilisé dans cette étude est l'élément L3L (Figure 5) composé de 2 sous éléments L2 à 2 nœuds où l'approximation de la vitesse est linéaire dans

chaque sous élément L2, et l'approximation du niveau d'eau est linéaire dans l'élément principal L3L.



Figure 5. Élément L3L

7. Schéma de discrétisation temporelle

Pour pouvoir résoudre notre système d'équations, il nous faut une méthode d'approximation des dérivées temporelles qui soit simple, performante et qui ne dégrade pas l'approximation spatiale. Nous avons opté pour deux types de schémas, le premier est celui d'Euler implicite pour obtenir rapidement la solution stationnaire. Pour les problèmes transitoires nous avons opté pour un schéma explicite de type Lax-Wendroff.

7.1. Schéma d'Euler implicite

La dérivée temporelle est approximée par :

$$\dot{U} = \frac{U_{t+\Delta t} - U_t}{\Delta t} \Big|_{t+\Delta t} \tag{36}$$

La forme variationnelle mixte W, après discrétisation spatiale et introduction des conditions aux limites, se présente sous la forme matricielle :

$$W = \langle \delta U \rangle \left\{ [M] \{ \dot{U} \} + [K(U)] \{ U \} - \{ F \} \right\} = 0 \tag{37}$$

$[M]$: La matrice masse

$[K(U)]$: La matrice de rigidité

$\{F\}$: Le vecteur des sollicitations

$\{U\}$: Le vecteur global des degrés de liberté u, h

$\langle \delta U \rangle$: Le vecteur global des degrés de liberté virtuels $\delta u, \delta h$

La matrice masse $[M]$ est donnée par la relation [53].

En injectant la relation [36] dans [37], nous obtenons le système algébrique [38] non linéaire que nous résolvons par la méthode de Newton-Raphson.

$$[M]\{U_{t+\Delta t}\} - \{U_t\} + \Delta t [K(U_{t+\Delta t})]\{U_{t+\Delta t}\} - \{F\} = 0 \quad [38]$$

Methode de Newton-Raphson

Le système à résoudre est donné par :

$$[K_T]\{\Delta U^i\} = \{R_{nl}\} \quad [39]$$

$$[K_T] = [M] + \Delta t [K(U_{t+\Delta t}^{i-1})] \quad [40]$$

$$\{R_{nl}\} = \Delta t \left(\{F_{t+\Delta t}\} - [K(U_{t+\Delta t}^{i-1})]\{U_{t+\Delta t}^{i-1}\} \right) - [M]\{U_{t+\Delta t}^{i-1}\} - \{U_t\} \quad [41]$$

La matrice tangente $[K_T]$ est obtenue par discrétisation de ΔW [37]. La solution est calculée par des accroissements successifs :

$$\{U_{t+\Delta t}^i\} = \{U_{t+\Delta t}^{i-1}\} + \{\Delta U^i\} \quad [42]$$

La convergence de la méthode est quadratique. La solution est atteinte lorsque la norme $\{\Delta U^i\}$ est inférieure ou égale à la précision souhaitée.

Le schéma implicite d'Euler est réputé stable mais souffre d'un handicap sérieux pour les problèmes instationnaires à savoir :

- La diffusion importante de la solution pour les grands pas de temps.
- Le coût élevé du calcul, du stockage et de la décomposition de la matrice tangente.

7.2. Schéma de Lax-Wendroff

Soient les équations de Navier-Stokes intégrées sur la verticale et écrites sous forme conservative :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(U + \frac{\partial F}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (q^c + q^d + G) + f = 0 \quad [43]$$

Ces équations peuvent être déduites des relations [32] et [16].

$$U = \begin{Bmatrix} a_{ij} u_j \\ h \end{Bmatrix}, \quad F = \begin{Bmatrix} p_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + x_{ij} \frac{\partial z_j}{\partial x} u_j \\ 0 \end{Bmatrix} \quad [44]$$

$$G = \left\{ \begin{array}{l} q_{ijk} \left(\frac{\partial w_k}{\partial x} u_j + \frac{\partial u_j}{\partial x} \frac{\partial u_k}{\partial x} \right) + r_{ijk} \frac{\partial z_f}{\partial x} \left(u_j \frac{\partial u_k}{\partial x} - u_k \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) \\ 0 \end{array} \right\} \quad [45]$$

$$q^c = \left\{ \begin{array}{l} b_{ijk} u_j u_k + \sigma_i gh \\ H\bar{u} \end{array} \right\}, \quad q^d = \left\{ \begin{array}{l} -g_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \\ 0 \end{array} \right\} \quad [46]$$

$$f = \left\{ \begin{array}{l} c_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x} u_j + d_{ijk} u_j \frac{\partial z_f}{\partial x} u_k + e_{ij} u_j \\ 0 \end{array} \right\} \quad [47]$$

La discrétisation temporelle se fait de la manière suivante :

$$U^{n+1} + \frac{\partial F^{n+1}}{\partial x} = U^n + \frac{\partial F^n}{\partial x} - \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \left((q^c)^{n+\frac{1}{2}} + (q^d + G)^n \right) - \Delta t f^n \quad [48]$$

L'écriture faible associée à la relation [48] s'écrit après intégration par parties :

$$W = \int_L \left\{ (\delta U \Delta U - \nabla \delta U \Delta F) + \Delta t \delta U f^n - \Delta t \nabla \delta U \left((q^c)^{n+\frac{1}{2}} + (q^d + G)^n \right) \right\} dx + \Delta t \left[\delta U \left((q^c)^{n+\frac{1}{2}} + (q^d + G)^n \right) \right]_0^L = 0 \quad [49]$$

$$(q^c)^{n+\frac{1}{2}} = \left\{ \begin{array}{l} b_{ijk} u_j u_k + \sigma_i gh \\ H\bar{u} \end{array} \right\}^{n+\frac{1}{2}} \quad [50]$$

La valeur de $U^{n+\frac{1}{2}}$ est obtenue sur chaque point de l'élément ou sur chaque point d'intégration numérique.

$$U^{n+\frac{1}{2}} = U^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} (q^c)^n \quad [51]$$

La discrétisation par éléments finis conduit au système algébrique :

$$[M]\{\Delta U\} = \{R\} \quad [52]$$

$$[M] = \sum_{\text{éléments } L3L} [m_e] \quad [53]$$

$$\{R\} = \{R^L\} + \{R^c\} \quad [54]$$

$$\{R^L\} = \sum_{\text{éléments } L3L} \{r^e\} \quad [55]$$

$[m_e]$ est la matrice masse élémentaire associée à la forme faible :

$$W_m^e = \int_{L^e} (\delta U \Delta U - \nabla \delta U \Delta F) dx \quad [56]$$

$\{r^e\}$ est le résidu élémentaire de domaine associé à la forme faible :

$$W_f^e = -\Delta t \int_{L^e} \left\{ \delta U f^n - \nabla \delta U \left((q^e)^{n+\frac{1}{2}} + (q^d + G)^n \right) \right\} dx \quad [57]$$

$\{r^c\}$ est le résidu de contour associé à la forme faible :

$$W^c = -\Delta t \left[\delta U \left((q^c)^{n+\frac{1}{2}} + (q^d + G)^n \right) \right]_0^L \quad [58]$$

L'expression de $U^{n+\frac{1}{2}}$ est donnée par la relation [51]. La valeur de U^n est calculée sur le nœud, par contre la quantité $\partial(q^e)^n / \partial x$ est calculée sur l'élément adjacent. La résolution du système algébrique [52] s'effectue par la méthode itérative de Jacobi.

Algorithme pour le schéma de Lax-Wendroff

Boucle sur les pas de temps

Boucle sur les éléments

- Calculer la matrice élémentaire $[m_e]$ associée à la forme W_m^e (relation [56])
- Calculer $U^{n+\frac{1}{2}}$ (relation [51])
- Calculer $(q^c)^{n+\frac{1}{2}}$ (relation [50])
- Calculer le résidu élémentaire $\{r^e\}$ associé à la forme W_f^e (relation [57])
- Assembler la matrice masse et le résidu.

Fin de la boucle sur les éléments

- Identifier l'élément touchant la frontière.
- Extraire la quantité $\partial(q^c)^n / \partial x$.

- Calculer le résidu $\{R^c\}$ associé à la forme faible W^c (relation [58])
- Assemblage du résidu
- Résolution itérative du système algébrique $[M]\{\Delta U\} = \{R\}$
- Application des conditions aux limites
- Mise à jour de la solution $\{U^{n+1}\} = \{U^n\} + \{\Delta U\}$

Fin de la boucle sur les éléments

8. Organigramme de l'approche h-s

- Choisir une forme analytique(séries) selon z pour la composante horizontale de la vitesse (équation [23]).
- En déduire l'expression de la composante verticale de la vitesse (équation [24]).
- En déduire l'expression de la partie non hydrostatique de la pression (équation [29]).
- Intégrer explicitement les équations de Navier-Stokes sur la verticale.
- Résoudre le modèle en x obtenu par la méthode des éléments finis.
- Restituer le profil de la vitesse selon z .

9. Tests de validation

Concernant la validation du modèle, nous avons classé les tests choisis en deux catégories :

Première catégorie

Dans cette classe, l'écoulement est stationnaire, la pression est hydrostatique et le fluide est visqueux. Nous présentons trois cas tests.

Le premier test consiste à reproduire le profil logarithmique exact d'un écoulement uniforme dans un canal en proposant deux remèdes pour corriger le décalage du profil numérique de la vitesse par rapport au profil exact. Les conditions aux limites de type Dirichlet (h imposée) assurent une surface libre linéaire suivant x et parallèle au fond, en conséquence la vitesse u est constante suivant x .

Dans le deuxième cas test nous récupérons le profil logarithmique de la vitesse établi dans l'exemple précédent et nous choisissons nos conditions aux limites de

telle sorte que la vitesse u et la hauteur totale du canal H ne soient plus uniformes suivant x mais suivant un profil que nous avons pu établir analytiquement.

Le troisième exemple sert à vérifier l'aptitude du modèle à reproduire une structure verticale de circulation créée par le vent. Nous choisissons la contrainte du vent de telle manière que le débit soit nul (recirculation complète). Le canal est considéré comme infiniment long.

Deuxième catégorie

Cette catégorie d'exemples est consacrée à l'étude de la houle, le fluide est supposé parfait et la pression est naturellement non hydrostatique. Dans cette catégorie nous présentons deux cas tests.

Le premier est consacré à l'étude de la propagation d'une onde solitaire. C'est un cas test de houle fortement non linéaire. La vitesse u est constante suivant z , w est linéaire et la pression p' est quadratique. La solution analytique est donnée par l'équation de Serre. Nous avons traité trois cas :

- Propagation d'une onde solitaire dans un canal ouvert (sortie libre)
- Propagation d'une onde solitaire dans un canal fermé (réflexion totale).
- Propagation d'une onde solitaire à travers une marche (réflexion+transmission).

Le second est consacré à l'étude de la houle courte progressive, l'amplitude de l'onde est suffisamment faible par rapport à la hauteur moyenne du canal pour qu'elle soit représentée par la solution linéaire de Stokes.

9.1. Canal de Chezy, Ajustement de la loi de paroi

Description du cas test

Objectif du cas test

L'un des problèmes connu pour la modélisation par éléments finis du profil logarithmique de vitesse est la difficulté de capter correctement les forts gradients du profil vertical de la vitesse à proximité du fond. Cette faiblesse, pourtant localisée uniquement près du fond, occasionne un décalage du reste du profil, plus ou moins important selon le raffinement du maillage près du fond. Afin de contourner cette difficulté nous proposons deux solutions :

- Utiliser une base polynomiale d'ordre 4 avec correction de la cote du fond. La cote du fond ne sera plus z_{\min} mais une valeur z_{corr} dont nous calculons l'expression.

– Utiliser une base mixte en injectant une fonction logarithmique qui n'est autre que la solution exacte du canal correspondant à l'hypothèse de la couche limite.

Description du cas test

La géométrie est donnée par la figure 6. Longueur du canal $L = 10\text{ m}$, Hauteur du canal $H = 0.5\text{ m}$, Pente du fond $J_f = 10^{-4}$

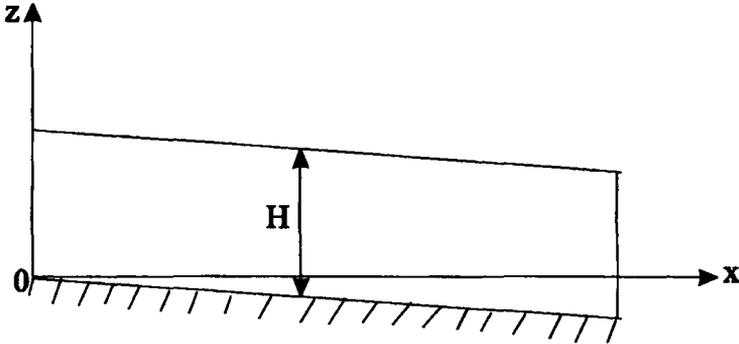


Figure 6. Géométrie du canal

Équation /Solution

En régime rugueux, la solution exacte est donnée par [FRE 96] :

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \text{Log} \left(30 \frac{z}{c_{ts} k_s} \right) \tag{59}$$

u_* est la vitesse de cisaillement.

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_f}{\rho}} = \sqrt{gH J_f} \tag{60}$$

κ est le coefficient de Von Karmann ($\kappa = 0.4$), k_s est le coefficient de rugosité du fond, et c_{ts} est un coefficient numérique d'ajustement.

Données Physiques

Conditions aux limites

Nous imposons en amont et en aval la cote de la surface libre.

$$h_{amont} = 0.500\text{m}, \quad h_{aval} = 0.499\text{m}$$

Conditions initiales

$$u = 0 \text{ m/s}, h = 0.5 \text{ m}$$

Paramètres physiques

Viscosité horizontale	$\nu_{tx} = 0$
Viscosité verticale	ν_{tz} de type longueur de mélange
Autres paramètres	$z_f = z_{\min} = k_s = 0.01H, c_{ks} = 10$

Maillage

Type d'éléments	: Élément L3L
Nombre de nœuds	: 101
Nombre d'éléments	: 50

REMARQUE.— Il est possible de reproduire la solution en utilisant un seul élément, mais nous tenons à vérifier la robustesse du schéma.

Données numériques

Écoulement stationnaire	: Euler implicite
Nombre d'itérations	: 8
Critère de convergence	: $(\Delta U / U) < 10^{-6}$, U étant la norme du vecteur solution de composante (u, h) .

Choix d'approximation de la vitesse*a- Approximation polynomiale sans correction de la cote du fond*

Nous allons traiter ce cas en utilisant une base polynomiale orthogonale cubique :

$$u(x, z) = u_1(x) + \phi_2(z)u_2(x) + \phi_3(z)u_3(x) + \phi_4(z)u_4(x)$$

$$\phi_2(z) = \sqrt{3}\xi, \quad \phi_3(z) = \frac{\sqrt{5}}{2}[3\xi^2 - 1], \quad \phi_4(z) = \frac{\sqrt{7}}{2}[5\xi^3 - 3\xi], \quad \xi = \frac{2}{H}(z - z_f) - 1$$

Le fond est placé à une cote $z = z_{\min}$, et la contrainte au fond est exprimée par :

$$\tau_f = \rho u_s^2 = \rho u_f^2 / \left(\frac{1}{\kappa} \text{Log} \left(30 \frac{z_{\min}}{c_{ks} k_s} \right) \right)^2 \quad [61]$$

La figure 7 permet de comparer la solution analytique avec notre solution numérique notée (Zmin 1) et la solution donnée par R. Frenette [FRE 96] utilisant 3 couches équidistantes dans la verticale notée (Zmin 2). Les profils numériques de vitesses correspondants illustrent bien un décalage avec le profil exact. A titre de comparaison, si le profil analytique correspond à 100 % d'un débit recherché, le profil obtenu avec Zmin2 correspond à 65.77 %, et le profil avec Zmin1 correspond à 77 %.

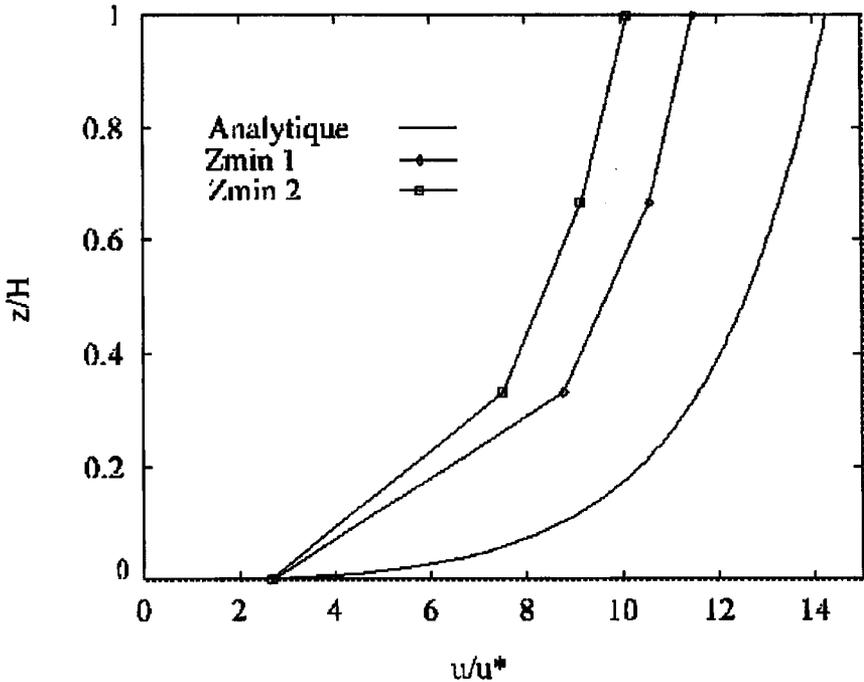


Figure 7. Profils logarithmiques de vitesses obtenus avec une approximation cubique sans correction de la cote du fond

b- Approximation polynomiale avec ajustement de la loi de paroi : choix de z_{corr}

Sachant que l'erreur de décalage se produit principalement près du fond, nous proposons simplement de modifier la loi de frottement par l'utilisation d'une cote de correction z_{corr} au lieu de z_{min} , la loi au fond devient alors :

$$\tau_f = \rho u^2 = \rho u_f^2 \left(\frac{1}{\kappa} \text{Log} \left(30 \frac{z_{corr}}{c_{ks} k_s} \right) \right)^2 \quad [62]$$

Pour calculer z_{corr} , considérons une base polynomiale orthogonale cubique, la vitesse s'écrit :

$$u = \phi_i(z) u_i$$

les composantes u_i [MEF 98] s'écrivent :

$$u_i = \frac{1}{H} \int_{z_f}^H \phi_i(z) u(z) dz$$

connaissant l'expression analytique de la vitesse [59], la relation précédente devient alors :

$$u_i = \frac{u_*}{\kappa H} \int_{z_f}^H \phi_i(z) \text{Log} \left(30 \frac{z}{c_{ks} k_s} \right) dz$$

la vitesse au fond s'exprime d'une part, d'après la relation [23] :

$$u_f = \phi_i(z_f) u_i$$

$$u_f = \frac{\phi_i(z_f) u_*}{\kappa H} \int_{z_f}^H \phi_i(z) \text{Log} \left(30 \frac{z}{c_{ks} k_s} \right) dz$$

Elle s'exprime d'autre part, d'après la relation [59] en plaçant le fond à z_{corr} par :

$$u_f = \frac{u_*}{\kappa} \text{Log} \left(30 \frac{z_{corr}}{c_{ks} k_s} \right)$$

En identifiant les deux expressions de la vitesse au fond, nous en déduisons :

$$z_{corr} = \frac{c_{ks} k_s}{30} \exp \left[\frac{\phi_i(z_f)}{H} \int_0^H \phi_i(z) \text{Log} \left(30 \frac{z}{c_{ks} k_s} \right) dz \right] \quad [63]$$

La figure 8 permet de comparer la solution exacte avec la solution numérique basée sur une approximation polynomiale et une modification de la loi de frottement. Nous remarquons que la valeur proposée de z_{corr} donne une très bonne approximation du profil logarithmique de vitesse.

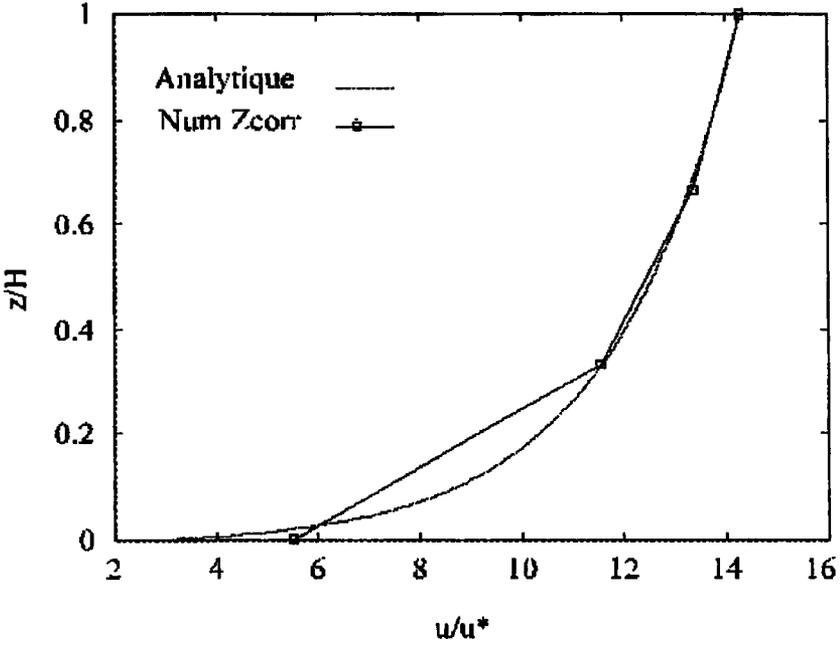


Figure 8. Profil logarithmique de la vitesse obtenu avec une approximation cubique et une correction de la cote du fond

c- Approximation mixte

Bien que la valeur suggérée de z_{corr} donne une très bonne approximation de la vitesse, elle correspond malheureusement au cas unidimensionnel pour lequel l'expression exacte de la vitesse est connue. Dans le contexte tridimensionnel, l'expression de la vitesse est une inconnue et par conséquent la valeur proposée de z_{corr} n'est pas justifiée. Sachant que la vitesse au fond est toujours de nature logarithmique, nous introduisons dans notre approximation de la vitesse une fonction de même nature, soit :

$$u(x, z) = \phi_1(z)u_1(x) + \phi_2(z)u_2(x) + \phi_3(z)u_3(x) + \phi_4(z)u_4(x)$$

ϕ_2, ϕ_3, ϕ_4 sont des polynômes respectivement linéaire, quadratique et cubique. ϕ_1 est une fonction logarithmique que nous allons déterminer, et u_1 est la vitesse moyenne. D'après la relation [59] :

$$u_1 = \bar{u} = \frac{u^*}{\kappa} \text{Log} \left(11 \frac{H}{c_{kr}k_s} \right)$$

L'expression [59] s'écrit en fonction de la vitesse moyenne :

$$u = \phi_1(z) u_1$$

avec

$$\phi_1(z) = \text{Log} \left(30 \frac{z}{c_{k_s} k_s} \right) / \text{Log} \left(11 \frac{H}{c_{k_s} k_s} \right) \quad [64]$$

La figure 9 permet de comparer la solution exacte avec la solution numérique basée sur une approximation mixte (logarithmique+polynomiale). Nous remarquons que les deux courbes coïncident parfaitement. La partie polynomiale n'a donc pas perturbé la solution, les composantes u_2, u_3, u_4 sont pratiquement nulles.

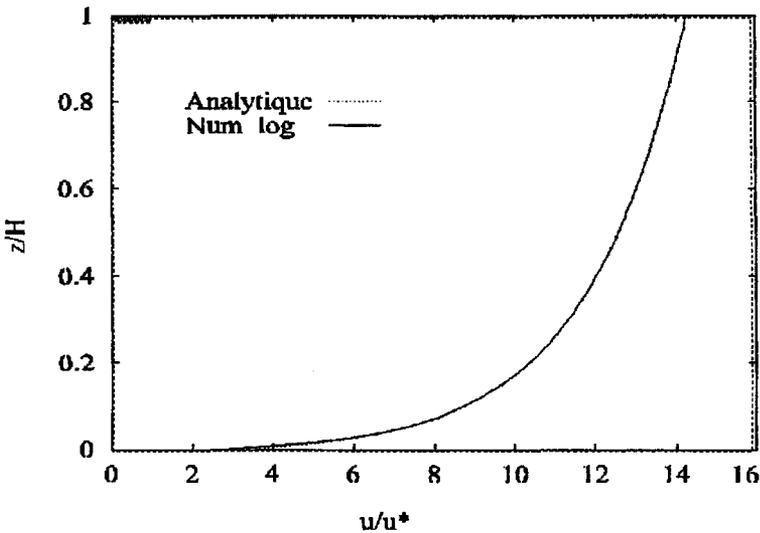


Figure 9. Profil logarithmique de la vitesse obtenu avec une approximation mixte

9.2. Courbe de remous de type fluvial

Description du cas test

Objectif du cas test

Dans l'exemple précédent, nous avons maintenu grâce aux conditions aux limites la surface libre parallèle au fond, et par conséquent la vitesse longitudinale $u(x,z)$ et la hauteur du canal H étaient uniformes suivant x . Dans ce cas nous appliquons un débit q en amont et une cote aval h , supérieure à la hauteur normale, le fond et la surface libre ne sont plus parallèles, il en résulte que la vitesse $u(x,z)$ et la hauteur H ne sont plus uniformes suivant x .

Description du cas test

La géométrie est donnée par la figure 10. Longueur du canal $L=2000$ m, Pente du fond $J_f = 10^{-3}$

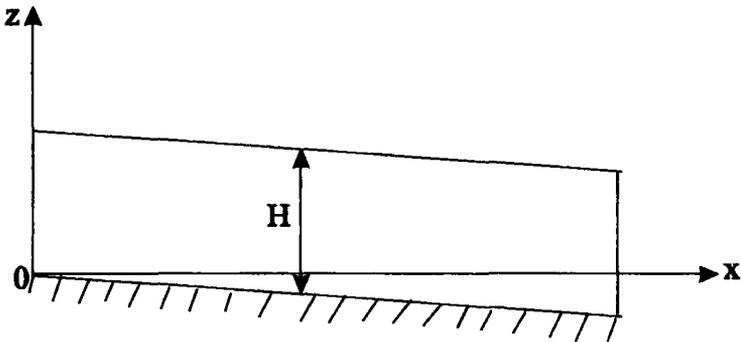


Figure 10. Géométrie du canal

Équation/Solution

Lois de Conservation

En négligeant les forces de viscosité suivant x , les lois de conservation et les conditions aux limites s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + g \frac{dh}{dx} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, \quad z_f < z < h \\ \frac{dq}{dx} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, \quad z = h \\ \tau_{xz} = \tau_f = -\rho g \frac{u_f^2}{C_f^2} \quad 0 \leq x \leq L, \quad z = z_f \\ q = \bar{q} \quad x = 0 \\ h = \bar{h} \quad x = L \end{array} \right.$$

Choix de la vitesse $u(x, z)$.

Nous avons vu dans l'exemple précédent que le profil de vitesse $u(x, z)$ dans un canal est de type logarithmique suivant z , nous écrivons en fonction de la vitesse moyenne \bar{u} :

$$u = \phi(z)\bar{u}$$

$\phi(z)$ est donnée par la relation [64] :

$$\phi(z) = \text{Log} \left(30 \frac{z}{c_{ts} k_s} \right) / \text{Log} \left(11 \frac{H}{c_{ts} k_s} \right)$$

L'intégration du système précédent du fond à la surface libre donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{dh}{dx} + \beta \frac{\bar{u}^2}{H} - \frac{\tau_{fx}}{\rho H} = 0 \quad 0 \leq x \leq L, \quad z_f < z < h \\ H \bar{u} = \bar{q} \quad 0 \leq x \leq L, \quad z = h \\ h = \bar{h} \quad x = L \end{array} \right.$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{H} \int_0^H \left[\phi^3 - \phi \frac{d\phi}{dz} \int_0^z \phi dz \right] dz \quad [65]$$

$$\alpha = 0.96555$$

$$\beta = \frac{J_f \phi(z_{\min})}{H} \int_0^H \phi \frac{d\phi}{dz} dz + \frac{1}{H} \int_0^H v_{tz} \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 dz \quad [66]$$

$$\beta = 2.85 \cdot 10^{-3}$$

Lois de comportement

$$\tau_f = -\frac{\rho g}{C_f^2} u_f^2 = -\frac{\rho g}{C_f^2} \phi^2(z_{\min}) \bar{u}^2 = -\frac{\rho g}{C^2} \bar{u}^2$$

$$C = \frac{C_f}{\phi(z_{\min})} = C_f \text{Log} \left(11 \frac{H}{c_{ts} k_s} \right) / \text{Log} \left(30 \frac{z_{\min}}{c_{ts} k_s} \right) \quad [67]$$

Ainsi, nous avons établi une relation entre le coefficient de Chezy global C et le coefficient local de frottement au fond C_f . Le système d'équations devient alors :

$$\begin{cases} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g \frac{dh}{dx} + \frac{g' \bar{u}^2}{H(C')^2} = 0 & 0 \leq x \leq L, \quad z_f < z < h \\ H\bar{u} = \bar{q} & 0 \leq x \leq L, \quad z = h \\ h = \bar{h} & x = L \end{cases}$$

Ainsi le problème est équivalent à supposer la vitesse constante sur la verticale, mais en utilisant une pesanteur g' et un coefficient de Chezy C' qui s'écrivent en fonction de g et C comme suit :

$$g' = \frac{g}{\alpha} \quad [68]$$

$$C' = C \sqrt{\frac{g}{g + \beta C^2}} \quad [69]$$

En utilisant la conservation du débit, nous obtenons :

$$\begin{cases} \left(H^3 - \frac{\bar{q}^3}{g'} \right) \frac{dH}{dx} - H^3 J_f + \frac{\bar{q}^2}{(C')^2} = 0 \\ \bar{u} = \frac{\bar{q}}{H} \\ H(L) = \bar{H} \end{cases}$$

H est la hauteur du canal :

$$H = h - z_{\min}$$

La solution du système précédent est :

$$J_f(x-L) = F(H) - F(\bar{H})$$

$$F(H) = H + (a^3 - b^3) \left[\gamma \text{Log}(H-a) - \frac{\gamma}{2} \text{Log}(H^2 + aH + a^2) - \frac{1}{a^2 \sqrt{3}} \text{arctg} \left(\frac{2H+a}{a\sqrt{3}} \right) \right]$$

$$a^3 = \frac{\bar{q}^2}{(C')^2 J_f}, \quad b^3 = \frac{\bar{q}^3}{g'}, \quad \gamma = \frac{1}{3a^2}$$

Données Physiques

Conditions aux limites

Nœud amont	: Débit imposé	$\bar{q} = 1$
Nœud aval	: Hauteur imposée	$\bar{H} = 1.4$

Conditions initiales

$$u = 0, h = 1$$

Paramètres physiques

Viscosité horizontale	: $\nu_{ix} = 0$
Viscosité verticale	: ν_{iz} de type longueur de mélange
Autres paramètres	: $z_{\min} = k_s = 0.01H, c_{ks} = 1, C = 40 m^{0.5} / s$
Nous en déduisons donc	: $g' = 10.16 m / s^2, C' = 33 m^{0.5} / s$

Maillage

Type d'éléments	: Élément L3L.
Nombre de nœuds	: 199
Nombre d'éléments	: 99

Données numériques

Écoulement stationnaire	
Nombre d'itérations	: 8
Critère de convergence	: $(\Delta U / U) < 10^{-6}$, U étant la norme du vecteur solution de composante (u, h) .

Résultats et commentaires

Sur les figures (11.a)-(11.d), nous avons comparé nos résultats numériques aux valeurs exactes, nous remarquons que les courbes sont confondues.

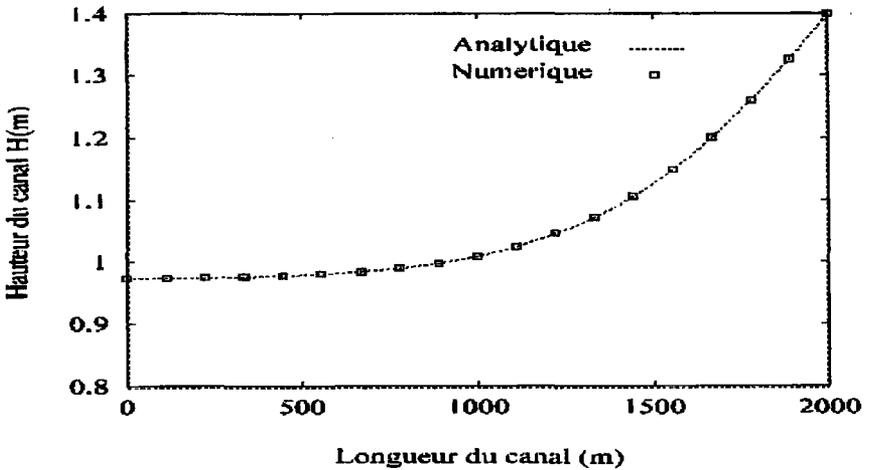


Figure 11.a. Courbe de remous : Variation de la hauteur d'eau le long du canal

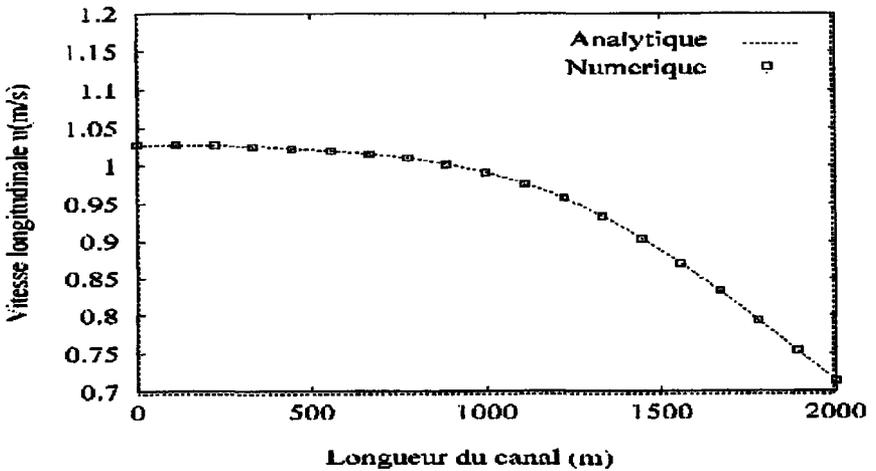


Figure 11.b. Courbe de remous : Variation de la vitesse longitudinale le long du canal

*

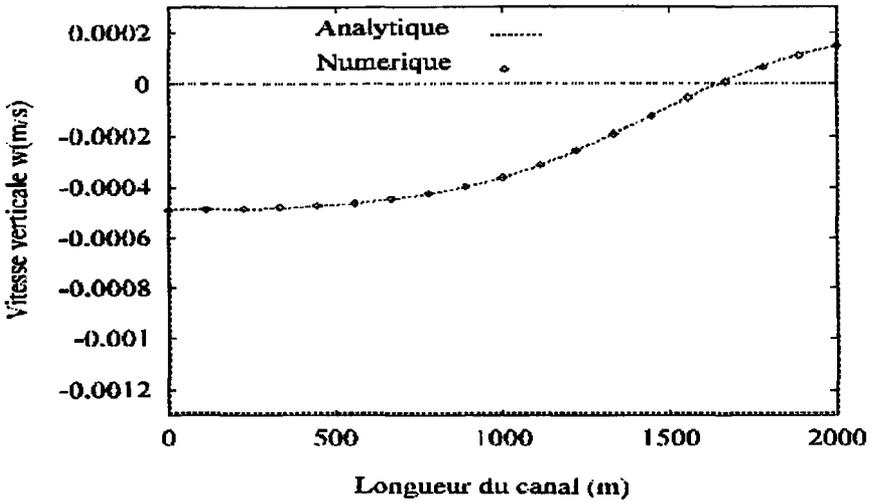


Figure 11.c. Courbe de remous : Variation de la vitesse verticale le long du canal

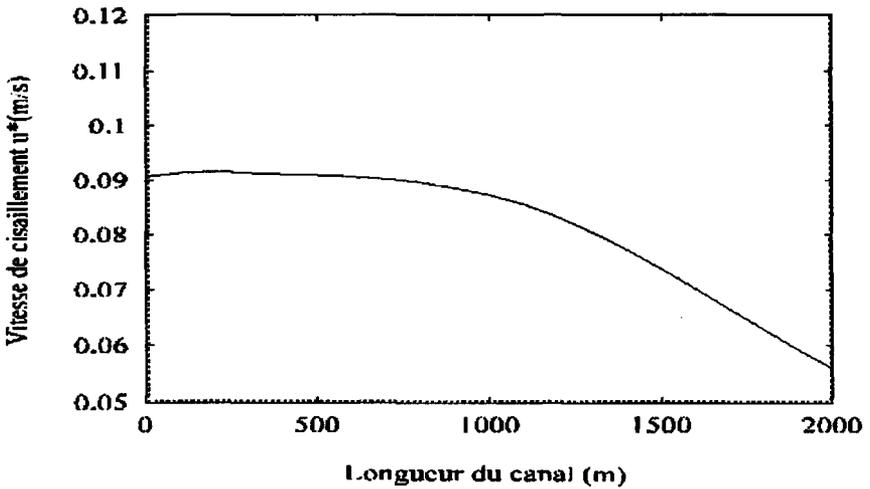


Figure 11.d. Courbe de remous : Variation de la vitesse de cisaillement le long du canal

9.3. Écoulement sollicité par le vent

Description du cas test

Objectif du cas test

Nous avons développé cet exemple pour vérifier l'aptitude du modèle à reproduire une structure verticale de circulation sollicitée par le vent. Le canal est considéré comme infiniment long.

Description du cas test

C'est la sollicitation du vent qui induit le mouvement. A cette sollicitation, correspond un profil d'écoulement variant dans la partie supérieure. En pratique la viscosité turbulente est variable selon z , mais pour le cas présent, nous avons fait usage d'une viscosité constante afin d'obtenir une solution analytique plus aisément.

Longueur du canal $L = 10$ m, Hauteur du canal $H = 0.5$ m, Pente du fond $J_f = -S = 10^{-3}$

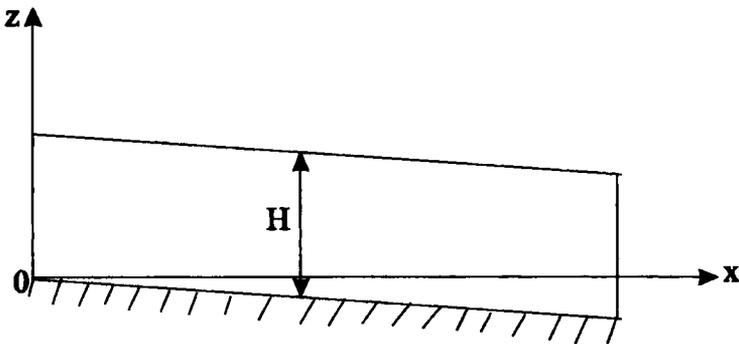


Figure 12. Géométrie du canal

Équation/Solution

En supposant, que la contrainte normale τ_{xx} et la vitesse u varient peu selon x , i. e. :

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} = 0, \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent :

$$\begin{cases} g \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\rho \partial z} = 0 & z_f < z < h \\ \tau_f = -\rho g \frac{u_f^2}{C_f^2} & z = z_f \\ \frac{\tau_s}{\rho} = \bar{\tau}_s & z = h \end{cases}$$

La résolution du système ci-dessus conduit à :

$$u(z) = \frac{gS}{2\nu_x} z^2 + \frac{1}{\nu_x} (\bar{\tau}_s - gSH)z + \frac{C_f}{\sqrt{g}} \sqrt{\bar{\tau}_s - gSH}$$

Calculons le débit :

$$q = \int_{z_f}^h u(z) dz = \frac{H^2 \bar{\tau}_s^2}{4\nu_x^2} - \left(\frac{gSH^3}{3\nu_x^2} - \frac{C_f^2}{g} \right) \bar{\tau}_s + \frac{g^2 H^2}{9\nu_x^2} S^2 + HS C_f^2$$

Nous choisissons la contrainte du vent de telle sorte que le débit soit nul (recirculation complète). Nous obtenons ainsi une relation entre la pente de la surface libre S et la contrainte du vent $\bar{\tau}_s$:

$$\frac{H^2 \bar{\tau}_s^2}{4\nu_x^2} - \left(\frac{gSH^3}{3\nu_x^2} - \frac{C_f^2}{g} \right) \bar{\tau}_s + \frac{g^2 H^2}{9\nu_x^2} S^2 + HS C_f^2 = 0$$

Nous choisissons arbitrairement :

$$\nu_x = 0.0001 \text{ m}^2 / \text{s}, \quad C_f = 20 \text{ m}^{0.5} / \text{s}$$

Ce qui donne :

$$\bar{\tau}_s = -3.566 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 / \text{s}^2$$

Données Physiques

Conditions aux limites

Nous imposons en amont et en aval la cote de la surface libre.

$$h_{\text{amont}} = 0.5 \text{ m}, \quad h_{\text{aval}} = 0.499 \text{ m}$$

Conditions initiales

$$h(x, t_0) = 0.5 \text{ m}, \quad u(x, t_0) = 0 \text{ m} / \text{s}$$

Données Numériques

- Écoulement stationnaire : Euler implicite
- Nombre d'itérations : 4
- Critère de convergence : $(\Delta U / U) < 10^{-6}$, U étant la norme du vecteur solution de composante (u, h) .

REMARQUE.— Il est possible de reproduire la solution en utilisant un seul élément, mais nous tenons à vérifier la robustesse du schéma.

Choix d'approximation de la vitesse

Nous choisissons une base polynomiale cubique :

$$u(x, z) = u_1(x) + \phi_2(z)u_2(x) + \phi_3(z)u_3(x) + \phi_4(z)u_4(x)$$

$$\phi_2(z) = \sqrt{3}\xi, \quad \phi_3(z) = \frac{\sqrt{5}}{2}[3\xi^2 - 1], \quad \phi_4(z) = \frac{\sqrt{7}}{2}[5\xi^3 - 3\xi], \quad \xi = \frac{2}{H}(z - z_f) - 1$$

Sur le tableau ci-dessous, sont reportés les résultats numériques donnés par notre modèle. Nous remarquons que, d'une part, la composante moyenne de la vitesse u_1 est de l'ordre de $10^{-10} m/s$, nous retrouvons bien un débit pratiquement nul, d'autre part, la composante cubique u_4 est de l'ordre de 10^{-8} , ce qui confirme la forme quadratique de la vitesse.

$u_1 = 10^{-10} m/s$	$u_2 = -0.1607 m/s$	$u_3 = -0.0914 m/s$	$u_4 = -10^{-8} m/s$
----------------------	---------------------	---------------------	----------------------

Sur la figure 13, nous avons comparé les profils numérique et analytique de la vitesse. Nous constatons que les résultats obtenus par notre modèle sont excellents, les deux courbes coïncident parfaitement.

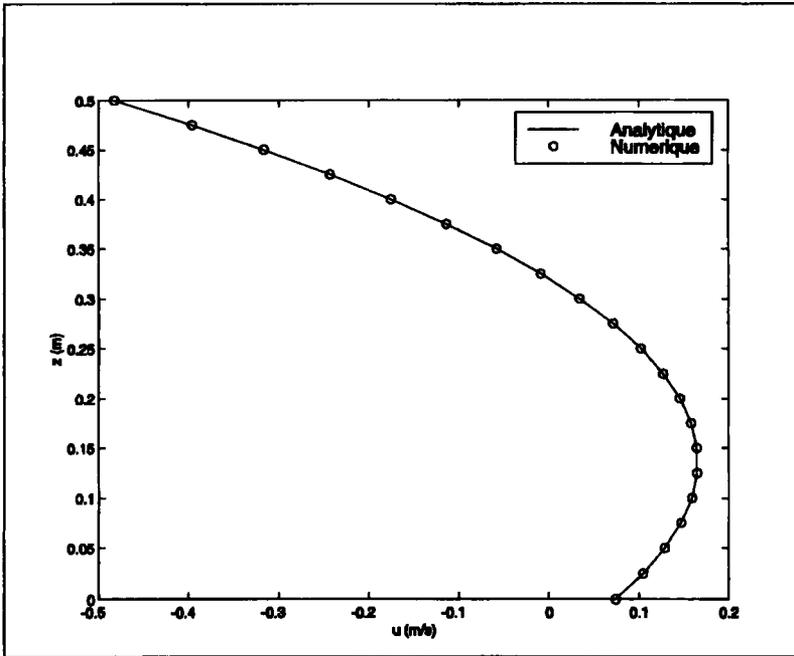


Figure 13. Profil vertical de la vitesse dû à la sollicitation du vent.
Cas d'une recirculation complète

9.4. Propagation d'une onde solitaire

Objectif du cas test

Pour tester l'aptitude du modèle à représenter des houles longues, non linéaires, nous nous sommes fixés comme objectif de calculer la propagation d'un soliton. Ce cas limite de la théorie des ondes cnoïdales traduit, comme son nom l'indique, l'évolution d'une vague unique, qui se propage sans déformation tant que la profondeur reste constante. Notons que dans ce cas le fluide est supposé parfait. La solution analytique est donnée par l'équation de Serre. Nous avons traité trois cas :

- Propagation d'une onde solitaire dans un canal ouvert à fond plat (sortie libre)
- Propagation d'une onde solitaire dans un canal fermé (réflexion totale).
- Propagation d'une onde solitaire à travers une marche (réflexion + transmission).

9.4.1 Canal ouvert à fond plat

Description du cas test

La géométrie est donnée par la figure 14.

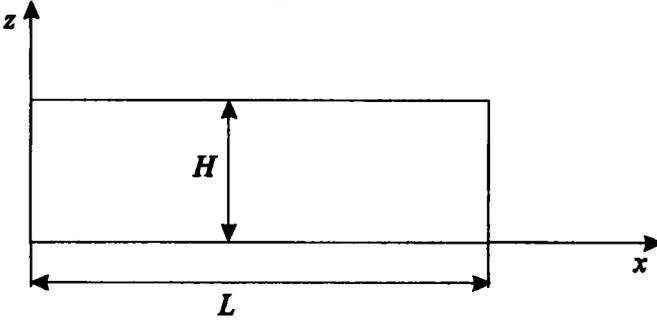


Figure 14. Géométrie du canal

- Hauteur moyenne du canal : H=0.4m
- Longueur du canal : L=23m
- Amplitude d'onde : A=0.05m

Équation/Solution

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent pour un fluide parfait :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial H\bar{u}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Les expressions analytiques de h , u sont données pour l'équation de Serre dans le cas d'un fond plat par :

$$h_{exact}(x, t) = H + A \sec h^2(\gamma(x - ct)) \tag{70}$$

$$u_{exact}(x, t) = c \frac{h_{exact}(x, t) - H}{h_{exact}(x, t)} \tag{71}$$

$$w_{exact} = -\frac{\partial u}{\partial x}(z - z_f)$$

La célérité c est donnée par :

$$c = \sqrt{g(H + A)} = 2.11 \text{ m / s} \quad [72]$$

Quant à la longueur d'onde γ , elle est égale à :

$$\gamma = \frac{1}{2H} \sqrt{\frac{3A}{H + A}} = 0.72 \text{ m}^{-1} \quad [73]$$

La composante horizontale de la vitesse u ne dépend pas de z , la composante w varie linéairement entre le fond et la surface libre et p' est quadratique.

Données Physiques

Conditions aux limites

Nous imposons en amont la composante horizontale de la vitesse $u(x, t)$

$$u_{amont} = u_{exact}(0, t)$$

Nous imposons en aval la cote de la surface libre :

$$h_{aval} = h_{exact}(L, t)$$

u_{exact} et h_{exact} sont donnés respectivement par les relations [70] et [71].

Conditions initiales

Nous choisissons comme conditions initiales :

$$h(x, t_0) = 0, u(x, t_0) = u_{exact}(x, t_0), t_0 = -2$$

Maillage

Type d'éléments	: Élément L3L
Nombre de nœuds	: 101
Nombre d'éléments	: 50

Données Numériques

Schéma Numérique utilisé	: Lax-Wendroff
Écoulement non stationnaire	: $\Delta t = 0.01$
Temps total	: $t = 17s$

Choix d'approximation de la vitesse

Nous choisissons une base polynomiale cubique :

$$u(x, z) = u_1(x) + \phi_2(z)u_2(x) + \phi_3(z)u_3(x) + \phi_4(z)u_4(x)$$

$$\phi_2(z) = \sqrt{3}\xi, \quad \phi_3(z) = \frac{\sqrt{5}}{2}[3\xi^2 - 1], \quad \phi_4(z) = \frac{\sqrt{7}}{2}[5\xi^3 - 3\xi], \quad \xi = \frac{2}{H}(z - z_f) - 1$$

Nous en déduisons en moyen des relations [24] et [29], les expressions de w et p' :

$$w(x, z, t) = -\frac{\partial u_i}{\partial x} \Psi_i(z)$$

$$p'(x, z, t) = -\theta_i(z) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x} + s_{ij}(z) \left(u_i \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right)$$

Les fonctions $\Psi_i(z), \theta_i(z), s_{ij}(z)$ sont données par les relations [26] et [30].

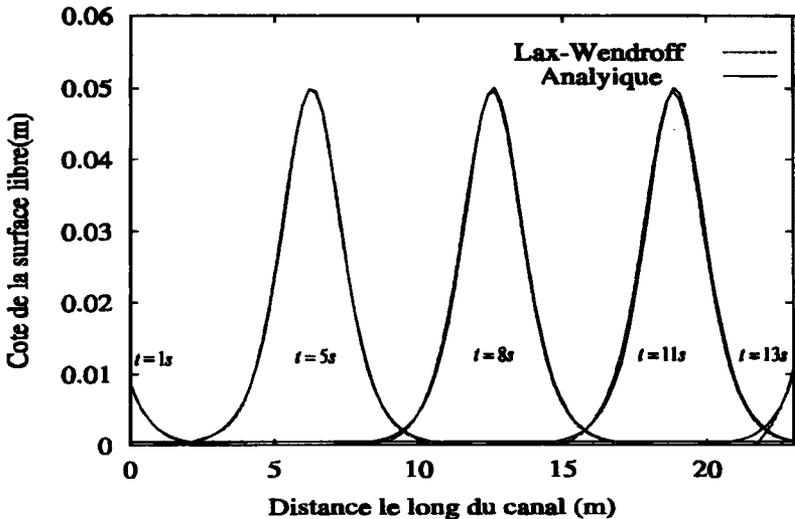


Figure 15. Propagation d'une onde solitaire dans un canal ouvert à fond plat. Évolution de la cote de la surface libre au cours du temps

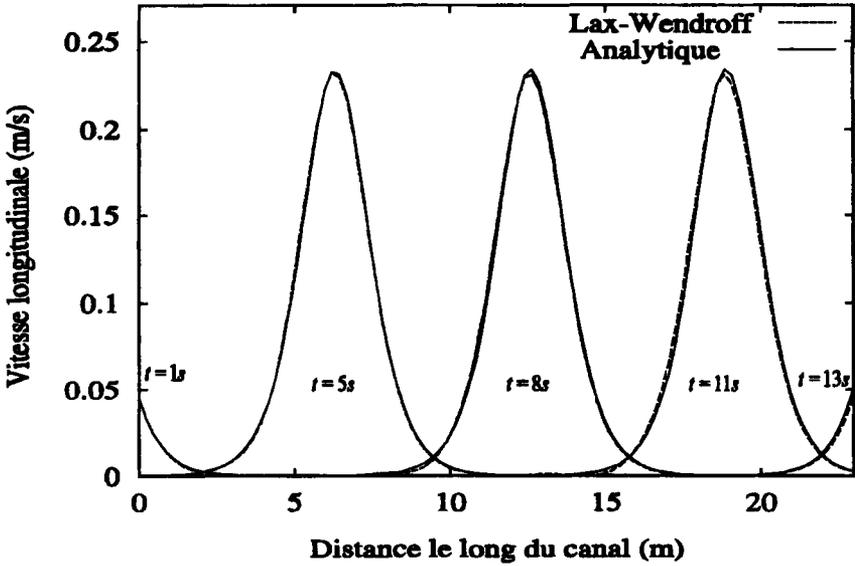


Figure 16. Propagation d'une onde solitaire dans un canal ouvert à fond plat. Evolution de la vitesse de propagation au cours du temps

Résultats et commentaires

La propagation d'une onde solitaire est un cas test de houle fortement non linéaire où la pression est naturellement non hydrostatique. Le schéma implicite d'Euler est diffusif et par conséquent, il ne s'adapte pas à ce genre de problèmes. Cependant les résultats obtenus par le schéma explicite de Lax-Wendroff (figures 15 et 16) sont spectaculaires, le schéma reproduit quasiment la solution exacte avec une diffusion inférieure à 1 % et une dispersion nulle. L'onde calculée se propage en restant en phase avec l'onde analytique et conserve son amplitude. En outre les conditions aux limites permettent à l'onde de bien sortir du canal.

9.4.2 Canal fermé à fond plat

Description du cas test

Nous reprenons le cas précédent en fermant les deux cotés (amont et aval) du canal après avoir injecté un soliton à l'intérieur. Tous les paramètres (hauteur moyenne H , amplitude A , célérité c , longueur d'onde γ) sont identiques au cas précédent, nous changeons juste les conditions aux limites ainsi que les conditions initiales.

Hauteur moyenne : $H=0.4\text{m}$
 Amplitude : $A=0.05\text{m}$
 Célérité : $c=2.11\text{ m/s}$
 Longueur d'onde : $\gamma=0.21\text{ m}^{-1}$

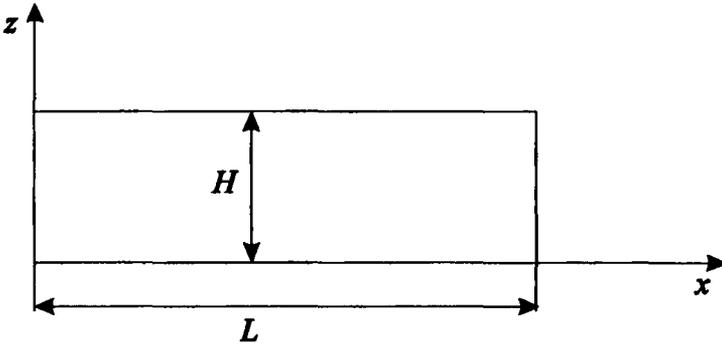


Figure 17. Géométrie du canal

Conditions aux limites

Nous imposons en amont et en aval une vitesse nulle :

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

Conditions initiales

$$h(x, t_0) = h_{exact}(x, t_0), u(x, t_0) = u_{exact}(x, t_0), t_0 = 8$$

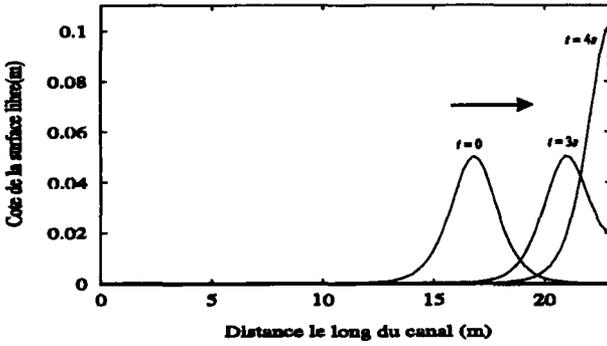
Les fonctions h_{exact}, u_{exact} sont données par les relations [70] et [71].

Données Numériques

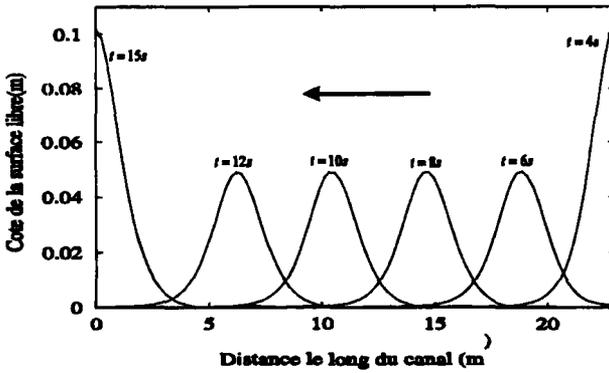
Schéma Numérique utilisé : Lax-Wendroff
 Écoulement non stationnaire : $\Delta t = 0.01$
 Temps total : $t=23\text{s}$

Résultats et commentaires

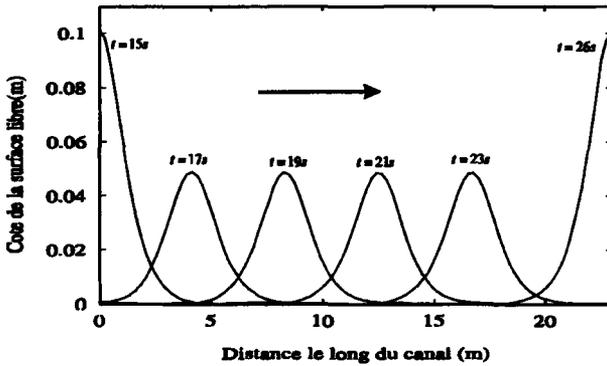
Les figures (18), (a), (b), (c), (d) et (19), (a), (b), (c), (d) montrent la propagation de l'onde faisant plusieurs allers et retours, nous constatons que l'onde se conserve pratiquement, la diffusion est inférieure à 2 %, quant à la dispersion, elle est quasiment nulle.



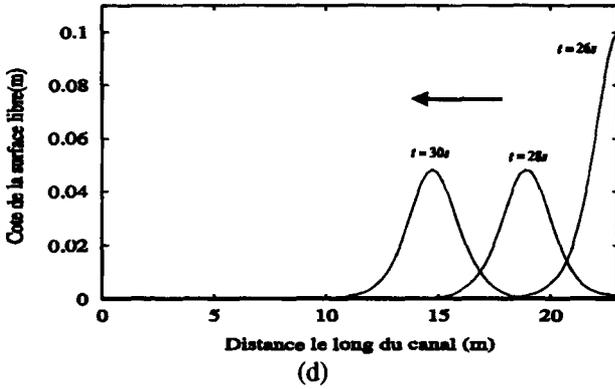
(a)



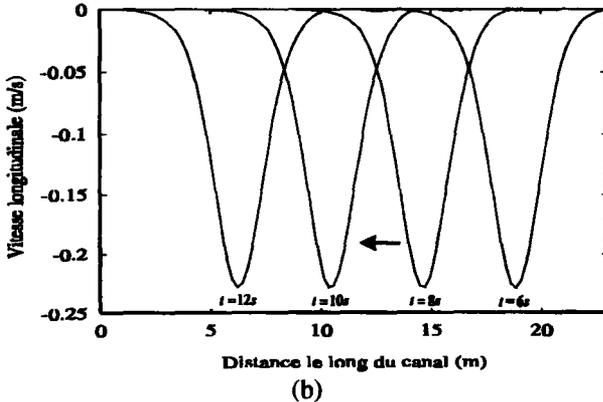
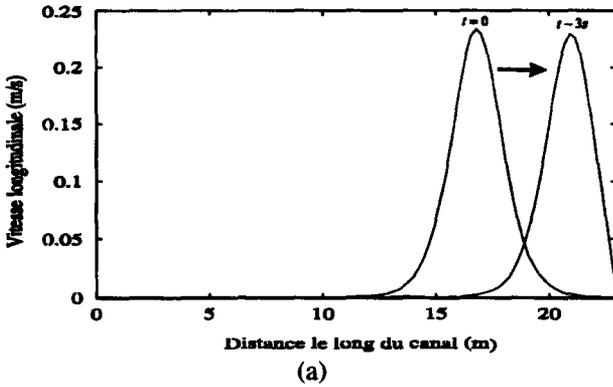
(b)

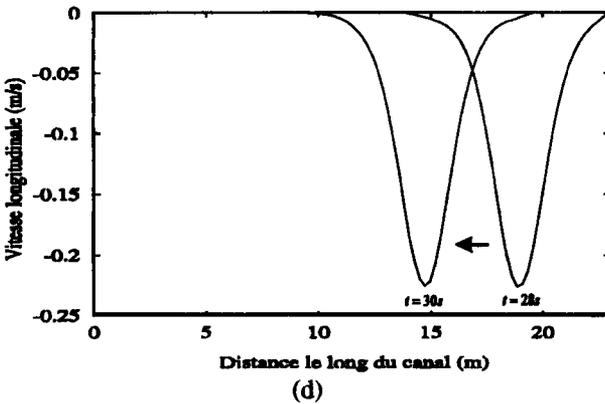
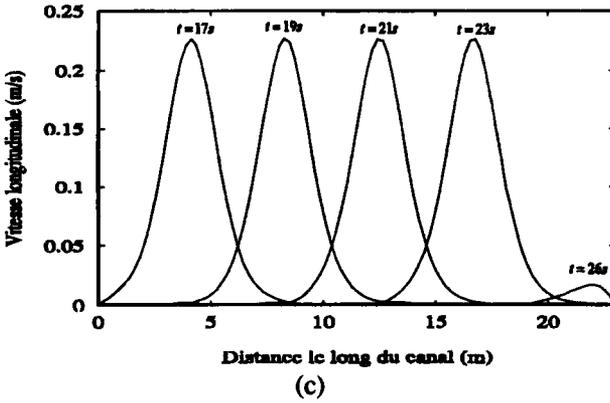


(c)



Figures 18. Propagation d'une onde solitaire dans un canal fermé à fond plat. Évolution de la cote de la surface libre au cours du temps





Figures 19. Propagation d'une onde solitaire dans un canal fermé à fond plat. Évolution de la vitesse au cours du temps

9.4.3 Canal ouvert à fond variable (cas d'une marche)

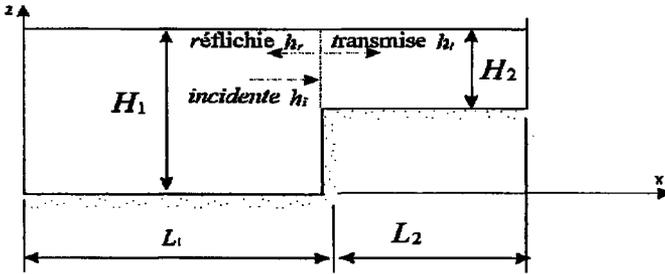


Figure 20. Géométrie du canal

$$L_1 = 12m, L_2 = 11m, H_1 = 0.4m, H_2 = 0.2m, A = 0.025m$$

Nous allons étudier dans ce cas l'effet d'une discontinuité sur la propagation d'une onde solitaire. L'onde incidente se décompose en une partie transmise et une autre réfléchie (figure 20).

Les coefficients de réflexion et de transmission k_r, k_t valent [MEF 98] :

$$\begin{cases} k_t = 1.156 \\ k_r = 0.156 \end{cases}$$

Conditions aux limites

Nous appliquons les conditions aux limites de sortie libre :

$$\begin{cases} u_{amont} = c_r (h_{amont} - H_1) / h_{amont} \\ u_{aval} = c_t (h_{aval} - H_2) / h_{aval} \end{cases}$$

Les célérités c_r et c_t ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} c_r &= \sqrt{g(H_1 + k_r A)} = 1.99m / s \\ c_t &= \sqrt{g(H_2 + k_t A)} = 1.50m / s \end{aligned}$$

Conditions initiales

$$\begin{cases} h(x,0) = h_{exact}(x,t_0) \\ u(x,0) = u_{exact}(x,t_0) \\ t_0 = 3.5 \end{cases}$$

Les fonctions h_{exact} et u_{exact} sont données par les relations [70] et [71].

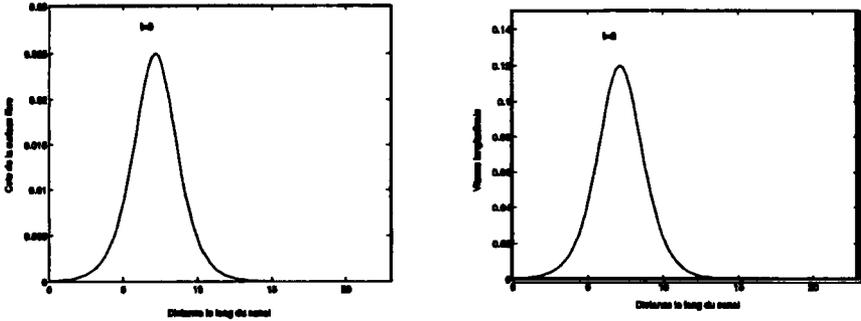


Figure 21. Conditions initiales

Choix de l'approximation selon z

Le choix de l'approximation de u , w , p' est identique à celui de l'exemple 9.4.1.

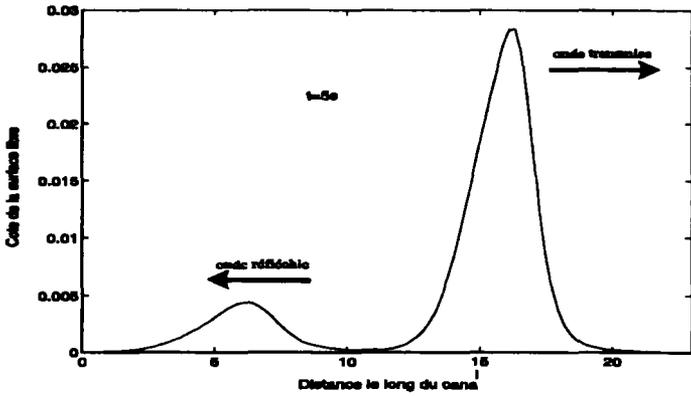
Données numériques

Schéma Numérique utilisé	: Lax-Wendroff
Écoulement non stationnaire	: $\Delta t = 0.01$

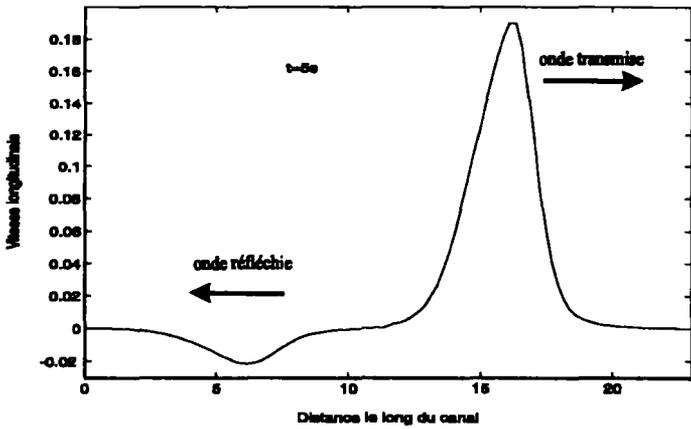
Résultats

Les figures 22 (a), (b) montrent bien que l'onde se décompose en une onde réfléchie et une autre transmise avec des coefficients de réflexion et de transmission qui ont pour valeur :

$$\begin{cases} k_t = 1.151 \\ k_r = 0.154 \end{cases}$$



(a)



(b)

Figure 22. Propagation d'une onde solitaire à travers une marche. Création d'une onde réfléchie et une autre transmise

Notre modèle retrouve bien les valeurs de coefficients de réflexion et de transmission avec une erreur inférieure à 1 %.

9.5. Propagation d'une houle courte

Description du cas test

Objectif du cas test

Cet exemple a pour but de tester l'aptitude du modèle à représenter des houles courtes progressives. La houle que nous avons choisie est d'amplitude suffisamment faible pour qu'elle soit bien représentée par la solution linéaire de Stokes au premier ordre. Le profil exact de la vitesse selon z est du type hyperbolique. Ce cas test va donc nous permettre de tester d'autres types de bases d'approximation autre que la base polynomiale et la base mixte.

Notons que dans ce cas test, les contraintes visqueuses sont nulles, le fluide est supposé parfait.

Description du cas test

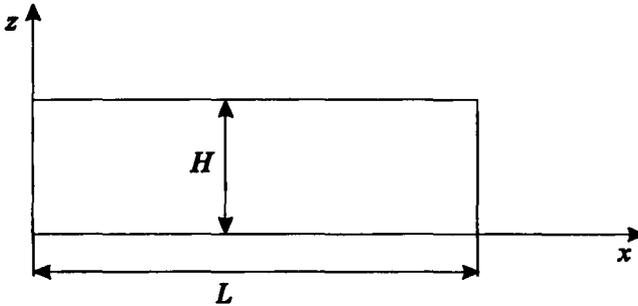


Figure 23. Géométrie du canal

Hauteur moyenne du canal	: $H=15\text{m}$
Longueur du canal	: $L=100\text{m}$
Période	: $T=4\text{s}$
Longueur d'onde	: $\lambda = 25\text{m}$
Amplitude d'onde	: $A=0.25\text{m}$

Équation/solution

Lois de conservation

Les équations de Navier-Stokes s'écrivent pour ce cas :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial H u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

La houle que nous avons choisie est d'amplitude suffisamment faible pour qu'elle soit bien représentée par la solution linéaire de Stokes au premier ordre :

$$\begin{aligned} h &= H - A \sin(kx - ct) \\ u &= -\frac{A\omega}{sh(kH)} ch(kz) \sin(kx - ct) \\ w &= \frac{A\omega}{sh(kH)} sh(kz) \cos(kx - ct) \\ k &= \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

La période T et la longueur d'onde λ, sont liées par la relation d'Airy :

$$\omega^2 = gk \operatorname{th}(kh)$$

Données Physiques

Conditions aux limites

Nous imposons en amont et en aval la composante horizontale de la vitesse $u(x,t)$, ceci se traduit par l'imposition des composantes :

$$\begin{aligned} u_1(0,t) = u_2(0,t) &= -\frac{A\omega}{2sh(kH)} \sin(-ct) \\ u_1(L,t) = u_2(L,t) &= -\frac{A\omega}{2sh(kH)} \sin(kL - ct) \end{aligned}$$

Conditions initiales

Nous choisissons comme condition initiale, la solution exacte prise à $t=0$.

Maillage

Type d'éléments	: Élément L3L
Nombre de nœuds	: 101
Nombre d'éléments	: 50

Données Numériques

Schéma Numérique utilisé	: Implicite
Écoulement non stationnaire	: $\Delta t = 0.01$
Temps total	: $t=4s$

Choix de la base d'approximation selon z

Nous choisissons la vitesse u de la façon suivante :

$$u(x, z, t) = \phi_1(z)u_1(x, t) + \phi_2(z)u_2(x, t)$$

avec

$$\phi_1(z) = e^{kz} \quad \phi_2(z) = e^{-kz}$$

Nous en déduisons en moyenne des relations (24) et (29), les expressions de w et p' .

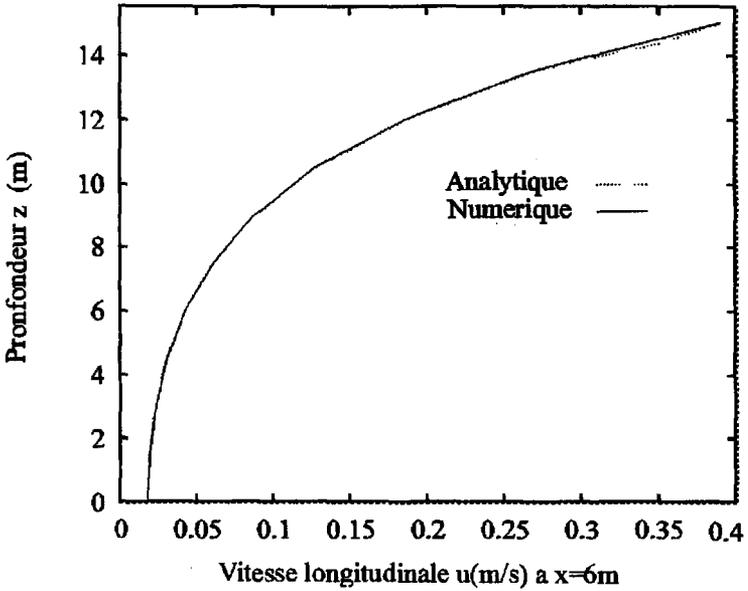
$$w(x, z, t) = -\frac{\partial u_i}{\partial x} \Psi_i(z)$$

$$p'(x, z, t) = -\theta_i(z) \frac{\partial^2 u_i}{\partial t \partial x}$$

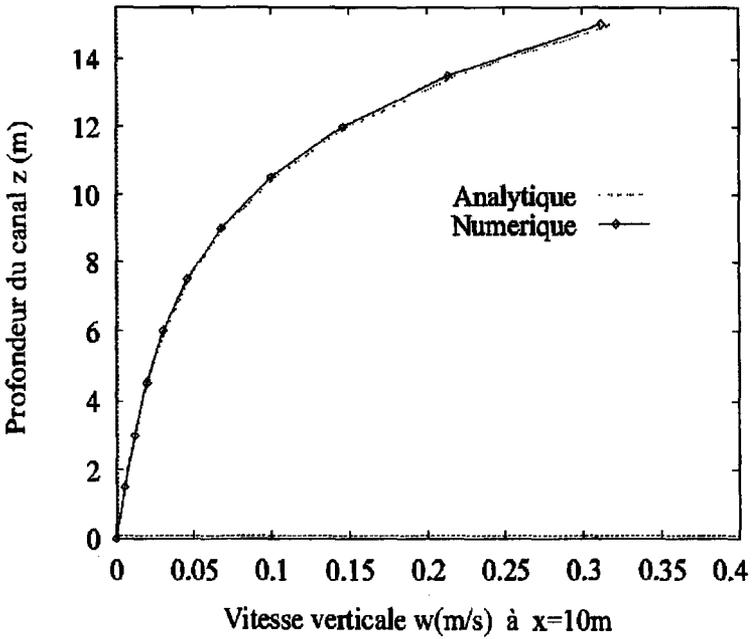
Les fonctions $\Psi_i(z)$, $\theta_i(z)$ sont données par les relations [26] et [30].

Résultats et commentaires

Sur les figures 24 (a) (b) (c) (d), nous avons montré la variation des profils des vitesses en fonction de z ainsi que l'évolution de la surface libre en fonction de l'espace et du temps. Nous remarquons que les résultats obtenus par notre modèle sont pratiquement confondus avec la solution analytique, ce qui prouve que les vagues calculées se propagent avec la bonne célérité et la bonne amplitude sur toute la longueur du canal, et que les conditions aux limites suffisent à entretenir la solution sans apporter de perturbations dans l'écoulement.



(a)



(b)

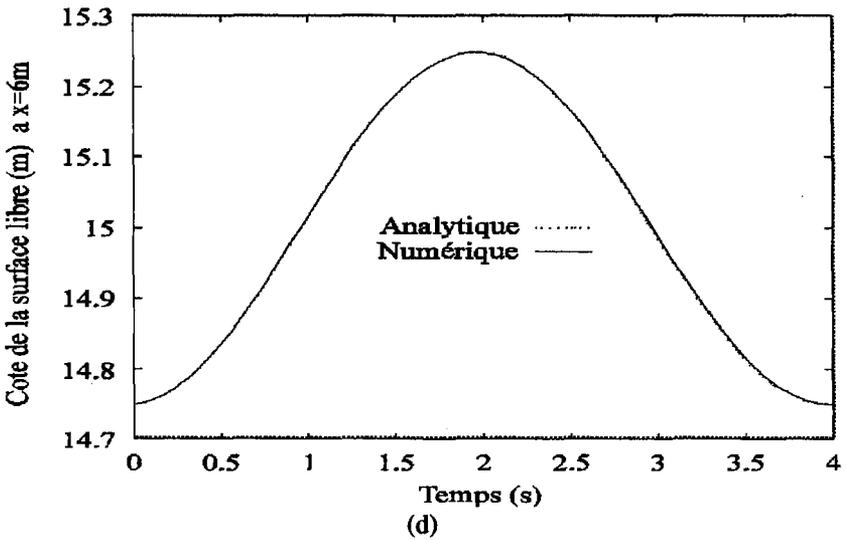
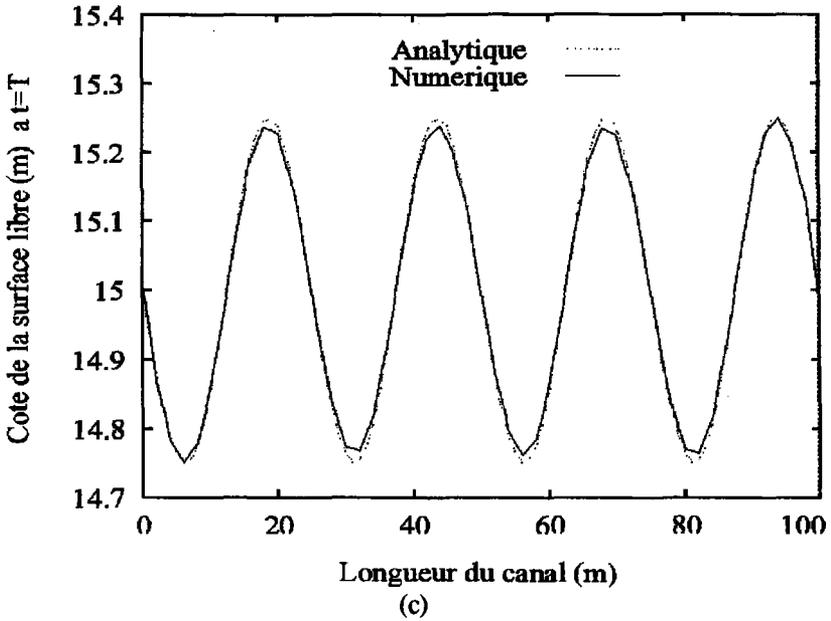


Figure 16. Propagation d'une onde solitaire dans un canal ouvert à fond plat. Évolution de la vitesse de propagation au cours du temps

10. Conclusion

Dans cette étude, nous avons développé un modèle bidimensionnel vertical basé sur une approximation de type éléments finis suivant x et de type analytique (séries) selon z . Cette approche consiste d'abord à choisir une forme analytique (série) selon z pour la composante horizontale de la vitesse $u(x,z,t)$, puis à en déduire la forme de la composante verticale $w(x,z,t)$ et celle de la pression $p'(x,z,t)$. Le choix de la série ainsi que le nombre de ses termes dépendent de la physique du problème et de la précision souhaitée. Une intégration explicite de la forme faible sur la verticale permet de transformer le modèle dépendant initialement de (x,z) en un modèle dépendant de x seulement. Cette approche donne un meilleur traitement de la surface libre car elle permet d'introduire directement des fonctions qui correspondent à la physique du problème. En outre, le maillage est unidimensionnel, ce qui rend le modèle plus stable et plus robuste. Après cette série d'exemples, nous pouvons tirer les conclusions suivantes.

Pour les écoulements permanents, le schéma implicite autorise l'usage d'un pas de temps très élevé (résolution stationnaire) et donne de très bons résultats. Le modèle semble stable et précis, ne dépassant pas 10 itérations pour atteindre une précision sur le résidu de l'ordre de 10^{-6} .

Pour les écoulements non stationnaires, malgré son aspect diffusif, le schéma implicite reste bon à condition de prendre des pas de temps très petits (houle de Stokes). le schéma de Lax-Wendroff s'est montré conservateur et précis (onde solitaire).

Le modèle à pression non hydrostatique semble bien fonctionner, il permet de représenter une large variété de houles, depuis les houles très courtes en profondeur relativement grande, dont les profils de vitesses ont nettement une forme hyperbolique, jusqu'aux houles très longues en profondeur faible pour lesquelles la répartition des vitesses est uniforme sur la verticale.

11. Références

- [BAB 71] BABUSKA L., « Error bound for finite element method », *Num. Math.*, vol.16, 1971.
- [BAT 90] BATOZ J.L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*, vol 1, Hermès, Paris, 1990.
- [BOU 94] BOUTTES F., Simulation d'écoulements à surface libre avec turbulence, Thèse de doctorat, Div Modèles Numériques en Mécanique, Université de Technologie de Compiègne, France, 1994.

- [BRE 74] BREZZI F., « On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrange multipliers », *R.A.I.R.O., Série Rouge*, R2, 129-151, 1974.
- [COC 79] COCHET J.F., Modélisation d'écoulements stationnaires et non stationnaires par éléments finis, Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1979.
- [COM 82] COMOLET R., *Mécanique expérimentale des fluides. Dynamique des fluides réels*, tome II, 3^{ème} édition, Masson 1982.
- [CON] CONNOR J.J., BREBBIA C.A., *Finite element technique for fluid flows*, Neunes-Butterworks, London, U.K., 1976.
- [DAU 84] DAUBERT O., CAHOUE J., Approche numérique de la houle par les équations de Navier-Stokes, Annales des ponts et chaussées, Laboratoire National d'Hydraulique, France, parties 1 et 2, 1984.
- [DAU 67] DAUBERT A., GRAFFE J., « Quelques aspects des écoulements presque horizontaux à deux dimensions en plan et non permanents application aux estuaires », *La houille blanche*, 847-859, 1967.
- [DHA 92] DHATT G., Finite element modeling of fluids, Div. Modèles Numériques en Mécanique, Université de Technologie de Compiègne, France, mars 1992.
- [DHA 91a] DHATT G., TANGUY J.M., Eléments finis en mécanique des fluides, support de cours Université de Technologie de Compiègne, 1991.
- [DHA 91b] DHATT G., TANGUY J.M., Hydraulique Numérique, 1 et 2 parties, support de cours d'éléments finis en hydraulique, Div. Modèles Numériques en Mécanique, Université de Technologie de Compiègne, France, 1991.
- [DHA 84] DHATT G., TOUZOT G., *Une présentation de la méthode des éléments finis*, Maloine S. A. Editeur, 1984.
- [DUF 97] DUFRESNE M., Modélisation de la houle par éléments finis, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, France, 1997.
- [FRE 96] FRENETTE R., Modélisation tridimensionnelle par les éléments finis du transport des sédiments dans les cours d'eau, Thèse de doctorat, Université de Laval, Québec, juin 1996.
- [HAD 95] HADJI S., Méthodes de résolution pour les fluides incompressibles, thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, France, 1995.
- [HAU 86] HAUGUEL A., « Méthodes et outils numériques en mécanique des fluides », *la houille blanche*, n°3, 193-200, 1986.
- [HEN 91] HENICHE M., Simulation de la propagation d'une onde de marée dans un canal avec frontières ouvertes, rapport de stage de D.E.A., Div. Modèles Numériques en mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, France, 1991.

- [HEN 93] HENICHE M., DHATT G., Simulation d'écoulements à surface libre par un super élément fini tridimensionnel, *proceeding du 4^e Colloque Maghrébin sur les Modèles Numériques de l'Ingénieur*, Alger, Algérie, 662-666, novembre 1993.
- [HEN 93] HENICHE M., Modélisation tridimensionnelle par éléments finis d'écoulement à surface libre, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, France, 1992.
- [HER 91] HERVOUET J.M, PÉCHON P., « Modélisation numériques des écoulements à surface libre, l'état de l'art au laboratoire national d'Hydraulique (LNH) », *La houille blanche*, n°2, 93-106, 1991.
- [HUB 84] HUBERT G., Modélisation d'écoulements de fluides incompressibles par la méthode des éléments finis, Thèse de doctorat, Div Modèles Numériques en Mécanique, Université de Technologie de Compiègne, France, 1984.
- [HUG] HUGHES T.J.R., *Finite element methods for fluids*, Division of Applied Mechanics, Stanford University, CA 94305-4040, U.S.A.
- [JAE 90] JAEGER M, Simulation numérique d'écoulements turbulents incompressibles et isothermes de fluides newtoniens par éléments finis tridimensionnels, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, France, 1990.
- [KIN 78] KING L.P., NORTON W.R., Recent application of RMA's finite element models for two dimensional hydrodynamics and water quality, *Proc. of the 2nd Int. Conf. on Finite Element in Water Resources*, Pentch Press, 1978.
- [LAD 69] LADYZHENSKAYA O.A., *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York, U.S.A, 1969.
- [LAU 84] LAUNDER B.E., REYNOLDS W.C., RODI W., *Modèles de turbulence et leurs applications*, Collection du centre de Recherches et d'essais de Chatou, Eyrolles, n°56, tome 2, 1984.
- [LAX 67] LAX P.D., WENDROFF B., Systems of conservation laws, *Comm. Pure and Applied Mathematics*, 13:217, 1967.
- [LEC 4] LECLERC M, Modélisation tridimensionnelle des écoulements à surface libre par éléments finis : application aux lacs, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, France, 1985.
- [LEE 73] LEENDERTSE J.J., LIU S.K., A three dimensional model for estuaries and coastal seas Volume 1 : Principals of computation, Rand, Santa Monica, California, U.S.A, R-1417-OWRR, 1973.
- [LES 79] LESCHZINER M.A., RODI W., Calculation of strongly curved open channel flow, *journal of hydraulics division*, 1297-1314, October 1979.
- [MEF 96] MEFTAH K., DHATT G., « Résolution de l'équation de transport stationnaire par la méthode de distribution de fluctuation », *Congrès Maghrébin*, Gardaia, mars 1996.
- [MEF 98] MEFTAH K., Modélisation tridimensionnelle de l'hydrodynamique et du transport par suspension, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, France, 1998.

- [PRO 78] LE PROVOST C., PONCET A., Finite element method for spectral modelling of tides, *I.J.N.M.F.*, vol. 12, 853-871, 1978.
- [RAJ 83] RAJARATNAM N., NWACHUKW B.A., Flow near groin-like structures, *Journal of Hydraulic Engineering*, vol. 19, n°3, 463-480, March, 1983.
- [ROB 83] ROBERT J.L., Modélisation tridimensionnelle des écoulements à surface libre permanents et non permanents par la méthode des éléments finis, Thèse de Ph.D, Dept Génie Civil, Univ. de Laval, Québec, 1983.
- [ROU 96] ROUAS G., Etude et modélisation par élément finis des procédés hydro-sédimentaires estuariens, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, France, 1996.
- [SOU 91] SOULAÏMANI A., FORTIN M., DHATT G., EOUELLET Y., Finite element simulation of two and three dimensional free surface flows, *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.86; num.3, April 1991.
- [TAN 91] TANGUY J.M., Modélisation du transport solide par les courants à l'aide de la méthode des éléments finis, Thèse de Ph. D., Dept. Génie Civil, Université Laval, Québec, Canada, février 1991.
- [TAN 97].TANGUY J.M., ZHANG B., MEFTAH K, SIMONE L., Dye tracing in the Seine river and its numerical simulation, *Water for a changing global community, 27th Congress of the International Association for Hydraulic Research*, 1997.
- [TAY 73] TAYLOR C., HOOD P., A numerical solution of the Navier-Stokes equations using the finite element method, *Computers and Fluids*, vol.1 1-28, 1973.
- [WAN 75] WANG H.P., Multi-level finite hydrodynamic model of Black Island Sound, *Finite Element in Water Resources*, 469-493, 1975.
- [ZHA 92] ZHANG B., Modélisation d'écoulement à surface libre avec fronts mobile par éléments finis, Thèse de doctorat, Div. Modèles Numériques en Mécaniques, Université de Technologie de Compiègne, France, 1992.