
Modes élasto-acoustiques d'un système couplé fluide-structure

Mohamed Haddar

IPEIN 8000 Nabeul Tunisie

RÉSUMÉ. Pour l'étude du comportement élasto-acoustique des structures élastiques couplées avec des cavités remplies par des fluides compressibles, un modèle numérique a été développé. Il consiste à calculer les fréquences et les modes couplés d'un système fluide-structure. Dans cet article, nous avons commencé tout d'abord par l'écriture des différentes équations du problème couplé fluide-structure afin de construire sa fonctionnelle globale. Celle-ci couple la formulation variationnelle de la structure en termes de déplacement à celle du fluide en termes de pression. Ensuite, le calcul des fréquences et des modes élasto-acoustiques a été fait en utilisant une méthode modale qui consiste à représenter le mouvement de la structure sur ses modes propres non couplés et à écrire la pression modale dans la cavité en la somme d'une pression modale statique et d'une pression modale dynamique. Enfin, pour illustrer ces phénomènes de couplages, nous présentons deux exemples. Le premier exemple présente le cas d'une plaque élastique couplée avec une cavité remplie dans un premier temps par un fluide léger (air) et dans un deuxième temps par un fluide lourd (eau). Le deuxième exemple consiste à étudier le comportement vibro-acoustique de deux plaques élastiques couplées avec une lame d'air.

ABSTRACT. Numerical model has been developed to study elasto-acoustics behaviour of elastic structure coupled with cavity full by compressible fluid. The so called numerical model is able to calculate coupled frequencies and modes of structure-fluid system. In this paper, global functional has been done according to the formulation of appropriate equations of structure fluid problem. Modal method is employed to calculate elasto-acoustics modes. It represents the movement of the structure by its uncoupled eigenmodes. The modal pressure inside the cavity is considered as the sum of static pressure and dynamical one. In order to clarify these coupled phenomena, two different examples has been studied. The first one is the case of elastic plate coupled with a cavity full of fluid (air or water). The second model is the case of two elastical plates coupled with a cavity full of light fluid (air).

MOTS CLÉS : structure, fluide, modes élasto-acoustiques, élément fini, méthode modale.

KEY WORDS : structure, fluid, elasto-acoustics modes, finite elements, modal method.

1. Introduction

Les travaux de recherche portant sur les développements des modèles numériques, basés sur l'utilisation de la méthode des éléments finis, pour l'étude et l'analyse du comportement vibratoire des structures couplées avec des cavités remplies de fluides compressibles, ont fait l'objet de plusieurs ouvrages et publications ces dernières années. Parmi ces travaux, nous nous sommes attachés particulièrement au calcul des modes élasto-acoustiques dans le but de mieux comprendre le phénomène de couplage entre les modes structuraux et les modes acoustiques. Plusieurs formulations variationnelles pour la modélisation de ce problème ont été proposées dans la littérature. Parmi ces formulations, nous trouvons :

– Formulation variationnelle classique en termes de déplacement W pour la structure et de pression p pour le fluide : l'intérêt de l'utilisation de cette formulation est d'avoir seulement une inconnue par nœud pour le fluide. Elle présente en revanche l'inconvénient de conduire à un système matriciel non symétrique. Le traitement par éléments finis de cette formulation a été fait par [ZIEN 69]. Cette formulation a fait l'objet de nombreuses investigations par [ZIEN 78], [ZIEN 91], [RAM 87], [MUL 81].

– Formulation variationnelle en (W, p, Φ) [MOR 76], [MEI 87] : cette formulation variationnelle repose sur une description du fluide par deux champs scalaires (pression du fluide p et le potentiel de vitesse Φ) et la structure par le champ de déplacement vectoriel W . Cette formulation présente l'intérêt d'avoir un système matriciel, après discrétisation par éléments finis, symétrique mais de grande taille (l'apparition d'un autre variable modal). Elle présente en revanche l'inconvénient d'avoir une valeur propre nulle parasite.

– Formulation variationnelle en (W, γ, p) [OHA 84], [OHA 87] : cette formulation variationnelle repose sur une description de la structure par deux champs vectoriels (le déplacement W et l'accélération γ de la structure : pour un problème harmonique en temps $\gamma = -\omega^2 \cdot W$) et le fluide par un seul champ scalaire (la pression p de la cavité du fluide). L'intérêt de l'utilisation de cette formulation est d'avoir un système matriciel symétrique. En revanche, elle présente l'inconvénient d'avoir un système de grande taille.

– Formulation variationnelle en termes de déplacement pour la structure et en termes de pression moyenne pour la cavité fluide [BOU 93]. L'avantage de ce modèle numérique consiste à assimiler la cavité fluide à une surface et donc à la mailler par des éléments finis bidimensionnels [BOU 93]. En revanche, ce modèle est utilisable seulement aux cavités d'épaisseur faible devant la longueur d'onde acoustique.

Nous proposons ci-dessous un nouveau modèle numérique, basé sur l'utilisation d'une formulation variationnelle en termes de déplacement pour la structure

élastique et en termes de pression pour la cavité remplie de fluide compressible, symétrique et modale.

Nous écrivons dans un premier temps les équations de mouvement de la structure élastique couplée avec la cavité fluide afin d'établir la forme variationnelle associée au système couplé élasto-acoustique. L'utilisation des éléments finis structures pour la discrétisation de la structure et des éléments finis volumiques pour la discrétisation de la cavité fluide conduit à l'écriture de l'équation matricielle gouvernant le mouvement du système élasto-acoustique.

D'autre part, ce modèle utilise une méthode modale qui consiste à représenter le mouvement du système couplé fluide-structure sur les modes propres de la structure et les modes propres acoustiques. Enfin, nous décomposons la pression modale dans la cavité fluide en une pression modale statique et une pression modale dynamique. En fait, nous séparons le premier mode de collage (mode de la cavité fluide à pression constante) des autres modes acoustiques. L'utilisation de la transformation proposée par B. M. Irons [IRO 70] donne un système matriciel symétrique de petite taille facile à mettre en œuvre numérique pour le calcul des modes élasto-acoustiques.

Pour valider ce modèle numérique, nous étudions l'exemple d'une plaque élastique couplée avec une cavité remplie d'eau puis d'air. Les résultats numériques vont être comparés avec une solution analytique que nous avons développée. Enfin, pour illustrer l'importance du phénomène de couplage sur la construction des modes élasto-acoustiques, nous étudions le comportement vibro-acoustique de deux plaques élastiques couplées avec une lame d'air.

2. Mise en équations

Soit un fluide parfait qui occupe un domaine D_f borné, limité par un corps élastique (figure 1). Lors des développements qui suivent, on considère un régime permanent (stationnaire). Les équations sont obtenues par une séparation de variables espace/temps pour un problème aux valeurs propres. Le champ de déplacement de la structure $W(M,t)$ et la pression dans la cavité $p(M,t)$ s'écrivent,

$$W(M,t) = \text{Re} (W(M) e^{-i\omega t}) , \quad p(M,t) = \text{Re} (p(M) e^{-i\omega t}) \quad [1]$$

où, Re désigne la partie réelle d'un nombre complexe. ω est la pulsation.

L'équation du mouvement de la structure s'écrit,

$$\sigma_{ij,j} + \rho_s \omega^2 w_i = 0 \text{ dans } D_s \quad [2]$$

σ est le tenseur des contraintes. ρ_s est la masse volumique de la structure.
La loi de comportement de la structure élastique s'écrit,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} w_{k,l} \tag{3}$$

La pression dans la cavité obéit à l'équation de Helmholtz,

$$(\Delta + k^2) p = 0 \text{ dans } D_f \tag{4}$$

Les deux conditions de couplage au niveau de la surface S sont :

$$\frac{\partial p}{\partial n} - \rho_f \omega^2 w_n = 0 \quad , \quad \sigma_{ij} n_j + p n_i = 0 \tag{5.1, 5.2}$$

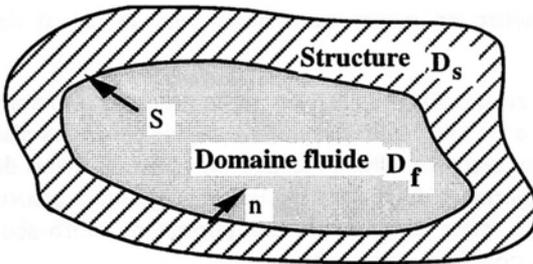


Figure 1. Solide élastique couplé avec une cavité fluide

3. Formulation variationnelle du problème élasto-acoustique

En tenant compte de la condition aux limites [5.1], l'équation variationnelle de la structure en termes de déplacement [MOR 92], [LES 88], s'écrit :

$$\int_{D_s} (C_{ijkl} w_{k,l} v_{i,j} - \rho_s \omega^2 (W,V)) dD_s = \int_S p v_n dS \tag{6}$$

quel que soit V cinématiquement admissible

L'équation variationnelle du fluide [LES88], en utilisant la condition [5.2], s'écrit :

$$\frac{1}{\rho_f \omega^2} \int_{D_f} ((\text{grad } p, \text{grad } p') - k^2 p p') dD_f = \int_S p' w_n dS \tag{7}$$

quel que soit p' statiquement admissible

La formulation variationnelle du système couplé est la somme des deux équations variationnelles [6] et [7]. Elle se compose d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme linéaire. La solution (W, p) rend donc stationnaire la fonctionnelle F(W, p) du problème couplé,

$$F(W,p) = \frac{1}{2} \left\{ \int_{D_s} (C_{ijkl} w_{k,l} w_{i,j} - \rho_s \omega^2 (W,W)) dD_s + \frac{1}{\rho_f \omega^2} \int_{D_f} ((\text{grad } p, \text{grad } p) - k^2 p p) dD_f \right\} - \frac{1}{2} \int_S p w_n dS \quad [8]$$

La solution (W, p) est donnée par l'équation variationnelle, $\delta F(W,p) = 0$ [9]

4. Discrétisation par éléments finis

La discrétisation de la fonctionnelle [9] du problème couplé par éléments finis de la structure et éléments finis volumiques du fluide [BOU 93] conduit au système algébrique suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} & -\mathbf{C} \\ -\mathbf{C}^t & \frac{\mathbf{H}}{\rho_f \omega^2} - \frac{\mathbf{Q}}{\rho_f c^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad [10]$$

K et **M** sont les matrices de rigidité et de masse de la structure. **H** et **Q** sont les matrices du fluide. **C** est la matrice de couplage. **W** est le vecteur de déplacement nodal de la structure. **P** est le vecteur de la pression nodale dans la cavité.

La projection de ce système matriciel [10] sur les deux bases modales de la structure et du fluide non couplés conduit à :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_r - \omega^2 \mathbf{M}_r & -\mathbf{C}_r \\ -\mathbf{C}_r^t & \frac{\mathbf{H}_r}{\rho_f \omega^2} - \frac{\mathbf{Q}_r}{\rho_f c^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad [11]$$

où, δ le vecteur des composantes modales du déplacement : $\mathbf{W} = \mathbf{W} \delta$ [12.1]

et ψ le vecteur des composantes modales de la pression : $\mathbf{P} = \mathbf{P} \psi$ [12.2]

W et **P** sont respectivement les bases modales propres de la structure et de la cavité.

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{W}^t \mathbf{K} \mathbf{W}, \mathbf{M}_r = \mathbf{W}^t \mathbf{M} \mathbf{W}, \mathbf{C}_r = \mathbf{W}^t \mathbf{C} \mathbf{P}, \mathbf{H}_r = \mathbf{P}^t \mathbf{H} \mathbf{P}, \mathbf{Q}_r = \mathbf{P}^t \mathbf{Q} \mathbf{P}$$

Les matrices modales K_r et M_r sont diagonales de dimension $(m \times m)$, m est le nombre de modes propres de la structure. Les matrices modales H_r et Q_r sont diagonales de dimension $(n \times n)$, n est le nombre de modes de la cavité fluide. La matrice modale C_r est pleine de dimension $(m \times n)$.

5. Calcul des modes élasto-acoustiques

Le premier terme de la matrice modale H_r correspond à un mode fluide de la cavité à pression constante. Nous isolons l'équation correspondant à ce mode fluide.

Les matrices fluide et de couplage s'écrivent alors comme suit :

$$H_r = \begin{bmatrix} 0 & \\ & h_r \end{bmatrix}, Q_r = \begin{bmatrix} q_0 & \\ & q_r \end{bmatrix}, C_r = [\{c_0\}, \{c_r\}]$$

Le vecteur modal de la pression dans la cavité fluide s'écrit :

$$\psi = \begin{Bmatrix} \psi_0 \\ \psi_r \end{Bmatrix} \tag{13}$$

Pour mettre le système algébrique [11] sous forme d'un problème aux valeurs propres, on utilise une transformation proposée par B. M. Irons [IRO 70] :

$$\psi_r = \rho_f \omega^2 h_r^{-1} \left(c_r^t \delta + \frac{1}{\rho_f c^2} q_r \psi_r \right) \tag{14}$$

Dans le cas où les vecteurs propres de la structure sont normés par rapport à la matrice masse structure M et ceux de la cavité fluide par rapport à la matrice du fluide Q , et en considérant le changement de variable ci-dessous [15], on obtient le système final [16] :

$$\psi_r = \sqrt{\rho_f c^4} h_r^{1/2} \varphi \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega_s^2 & -c_0 & 0 \\ -c_0^t & \frac{-1}{\rho_f c^2} & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_f^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \psi_0 \\ \varphi \end{Bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} I + \rho_f c^2 c_r \Omega_f^{-2} c_r^t & 0 & \sqrt{\rho_f c^2 c_r \Omega_f^{-1}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{\rho_f c^2 \Omega_f^{-1}} c_r^t & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ \psi_0 \\ \varphi \end{Bmatrix}$$

Ω_s correspond à une matrice diagonale qui contient les pulsations propres de la structure, Ω_f contient les $(m-1)$ pulsations propres de la cavité fluide, m est le nombre de modes fluide, c la vitesse du son dans la cavité fluide, I la matrice d'identité.

L'avantage de cette transformation est d'avoir un système matriciel symétrique. La détermination des fréquences et des modes vibro-acoustiques d'une structure couplée avec une cavité fluide se fait par la résolution de ce système modal.

6. Modes élasto-acoustiques d'une plaque élastique couplée avec une cavité

Cet exemple consiste à étudier le cas d'une plaque élastique simplement appuyée couplée avec une cavité cubique remplie de fluide. Cet exemple offre l'avantage de pouvoir valider nos résultats numériques par un calcul analytique. Ce dernier consiste à calculer analytiquement les deux bases modales de la plaque élastique et de la cavité et les termes de la matrice de couplage fluide-structure. La figure 2 présente les caractéristiques géométriques et physiques du système couplé considéré. La figure 3 présente le maillage élément fini utilisé pour l'étude de cet exemple. Pour la discrétisation de la plaque, nous avons utilisé un élément fini de plaque DKQ [BAT 90]. Un élément fini volumique [DHA 84] à huit nœuds et à un degré de liberté par nœud (pression dans la cavité fluide) a été utilisé pour la discrétisation de la cavité fluide.

Le tableau 1 présente les cinq premières valeurs des fréquences propres de la plaque et celles de la cavité utilisées dans le calcul des modes élasto-acoustiques. Les valeurs des fréquences propres numériques, comparées avec la solution analytique développée, de la plaque élastique couplée avec la cavité fluide sont présentées dans les tableaux 2 et 3.

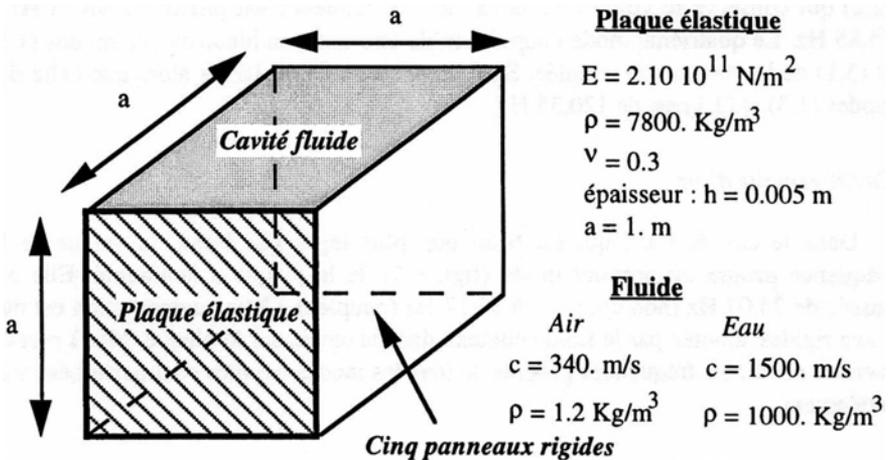


Figure 2 . Plaque élastique couplée avec une cavité fluide cubique

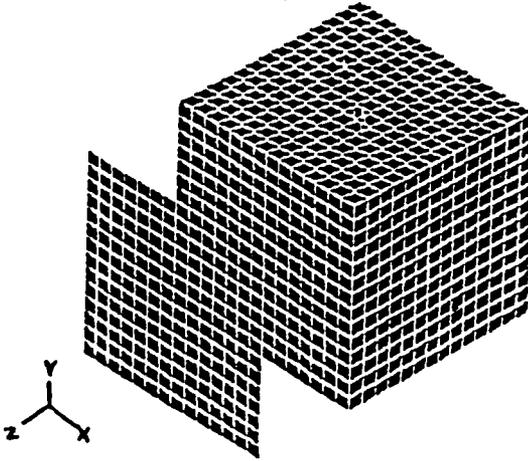


Figure 3. *Modèle élément fini (nombre de nœuds structure = 225, nombre de nœuds fluide = 3375)*

Analyse des résultats

Cavité remplie d'eau :

La figure 4 montre le premier et le troisième mode de la plaque en présence de la cavité fluide. Le premier mode couplé correspond au mode (2, 1) de la plaque qui conserve le volume du fluide dans la cavité. Sous l'effet de la masse ajoutée par l'eau, la fréquence du mode (2,1) est passée de 60,18 Hz à 27,45 Hz. La description du troisième mode couplé est analogue à celle du premier. La plaque décrit le mode (2,2) qui conserve le volume de la cavité. Sa fréquence est passée de 96,28 Hz à 55,85 Hz. Le quatrième mode couplé semble être une combinaison des modes (1,3) et (3,1) de la plaque non couplée. Sa fréquence est de 69,16 Hz alors que celle des modes (1,3) et (3,1) est de 120,35 Hz.

Cavité remplie d'air :

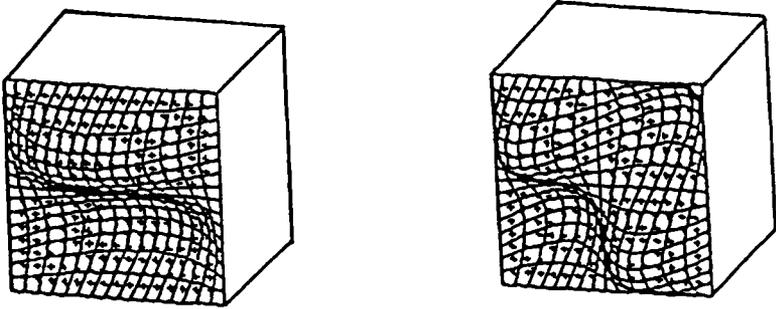
Dans le cas de l'air, qui est beaucoup plus léger que l'eau, la valeur de la fréquence propre du premier mode (figure 5) de la plaque a augmenté. Elle est passée de 24,07 Hz (non couplée) à 25,17 Hz (couplée). Cette augmentation est due à une rigidité ajoutée par le fluide contenu dans la cavité sur la plaque. Mis à part ce premier mode, les fréquences propres de tous les modes couplés sont perturbées très faiblement.

Numéro du mode	Plaque non couplée		Cavité fluide (Eau)		Cavité fluide (Air)	
	(m,n)	Fréquences propres (Hz)	mode (m,n,l)	Fréquences propres (Hz)	mode (m,n,l)	Fréquences propres (Hz)
1	(1, 1)	24,07	(0, 0, 0)	000,00	(0, 0, 0)	000,00
2	(1, 2)	60,18	(0, 0, 1)	750,00	(0, 0, 1)	170,00
3	(2, 1)	60,18	(0, 1, 0)	750,00	(0, 1, 0)	170,00
4	(2, 2)	96,28	(1, 0, 0)	750,00	(1, 0, 0)	170,00
5	(1, 3)	120,35	(0, 1, 1)	1060,70	(0, 1, 1)	240,42

Tableau 1 . Fréquences propres de la plaque et de la cavité

Cavité remplie d'eau			
Numéro du mode	Fréquences propres analytiques (Hz)	Fréquences propres numériques (Hz)	Erreur %
1	26,99	27,45	1,7
2	26,99	27,45	1,7
3	54,57	55,85	2,3
4	66,98	69,16	3,3
5	74,82	76,95	2,9

Tableau 2 . Fréquences propres de la plaque

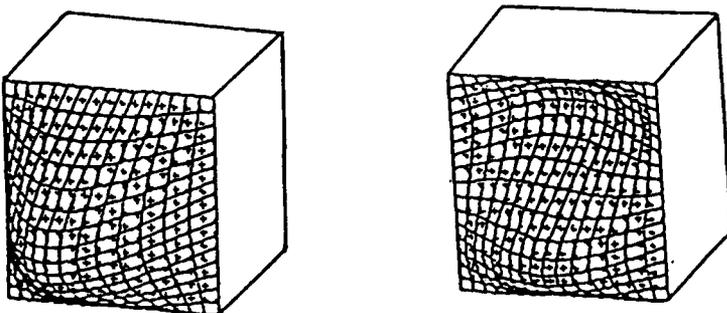


Premier mode vibro-acoustique (27.4Hz) Troisième mode vibro-acoustique (55.8Hz)

Figure 4 . Déformées de la plaque en présence de la cavité fluide (eau)

<i>Cavité remplie d'air</i>			
Numéro du mode	Fréquences propres analytiques (Hz)	Fréquences propres numériques (Hz)	Erreur %
1			
2	25,18	25,17	0,04
3	60,00	60,00	0,00
4	60,00	60,00	0,00
5	96,10	96,11	0,01
	120,18	120,19	0,01

Tableau 3. Fréquences propres de la plaque



Premier mode vibro-acoustique (25.17Hz) Deuxième mode vibro-acoustique (60.Hz)

Figure 5. Déformées de la plaque en présence de la cavité fluide (air)

7. Modes élasto-acoustiques de deux plaques couplées avec une lame fluide

Le système présenté dans la figure 6 correspond à deux plaques rectangulaires identiques, encastrées et couplées avec une cavité fluide. Les bords du domaine fluide sont rigides. Les caractéristiques géométrique et matérielle de ce système sont présentées dans la figure 6.

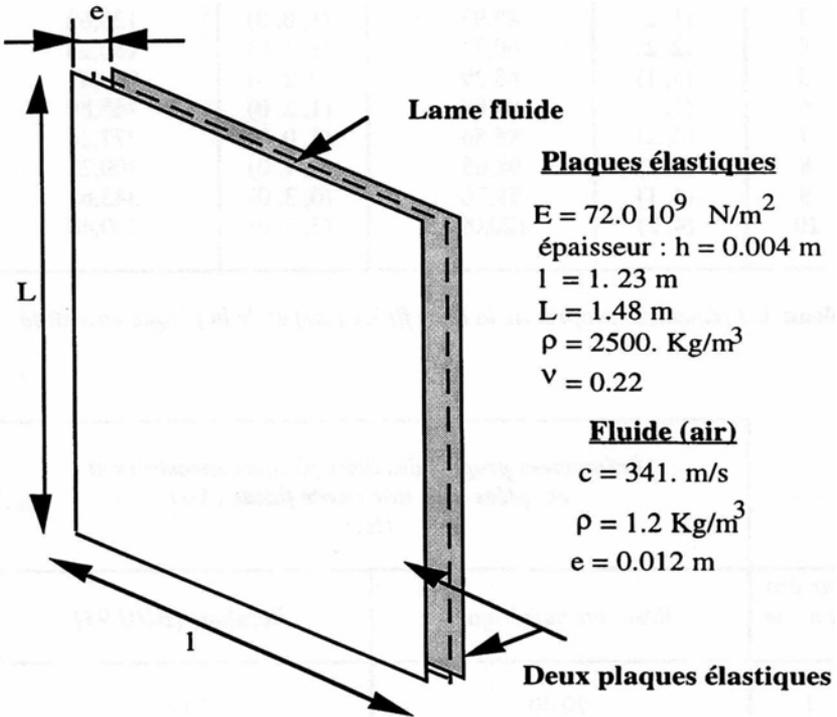


Figure 6. Deux plaques élastiques couplées avec une lame d'air

Un élément fini volumique [DHA 84] à huit nœuds et à un degré de liberté par nœud (pression dans la cavité fluide) a été utilisé pour la discrétisation de la cavité fluide. Pour les deux plaques, nous avons utilisé l'élément fini de plaque DKQ [BAT 90]. Le tableau 4 présente les dix premières valeurs des fréquences propres de la cavité fluide et de la plaque encastrée, utilisées pour le calcul des modes élasto-acoustiques. Le tableau 5 présente les valeurs des fréquences vibro-acoustiques du système couplé. Ces résultats ont été comparés avec ceux trouvés par [BOU 93].

	<i>Plaque non couplée</i>		<i>Cavité fluide (Air)</i>	
<i>Numéro du mode</i>	<i>(m,n)</i>	<i>Fréquences propres (Hz)</i>	<i>(m,n,l)</i>	<i>Fréquences propres (Hz)</i>
1	(1, 1)	20,43	(0, 0, 0)	000,00
2	(2, 1)	36,81	(0, 1, 0)	115,20
3	(1, 2)	45,93	(1, 0, 0)	138,62
4	(2, 2)	60,73	(1, 1, 0)	180,24
5	(3, 1)	63,29	(0, 2, 0)	230,41
6	(1, 3)	84,89	(1, 2, 0)	268,89
7	(3, 2)	85,56	(2, 0, 0)	277,24
8	(2, 3)	98,65	(2, 1, 0)	300,22
9	(4, 1)	99,36	(0, 3, 0)	345,61
10	(4, 2)	120,09	(2, 2, 0)	360,48

Tableau 4. *Fréquences propres de la lame fluide (air) et de la plaque encastrée*

<i>Fréquences propres des deux plaques encastrées et couplées avec une cavité fluide (Air) (Hz)</i>		
<i>Numéro du mode</i>	<i>Résultats numériques</i>	<i>Résultats [BOU 93]</i>
1	20,40	20,43
2	20,76	20,78
3	28,77	28,68
4	36,69	36,81
5	44,74	44,86
6	44,90	45,32
7	45,92	45,93
8	60,40	60,73
9	63,06	63,29
10	65,29	66,27

Tableau 5. *Fréquences propres des deux plaques encastrées couplées avec la cavité fluide (air)*

Analyse des résultats

Nous constatons d'une part que les fréquences propres des plaques sèches (tableau 4) se trouvent parmi les fréquences vibro-acoustiques du système couplé, les plaques ont les mêmes déformées que lorsqu'elles sont seules, elles vibrent en phase. D'autre part, les fréquences acoustiques de la cavité ne réapparaissent pas parmi les fréquences vibro-acoustiques. Nous constatons aussi que la pression dans la cavité fluide est non nulle lorsque les deux plaques sont en opposition de phase. Dans ce cas, les déformées modales des plaques sont différentes de celles des plaques sèches, le couplage entre ces deux plaques et la cavité fluide est important.

8. Conclusion

Nous avons présenté un modèle numérique pour le calcul des modes élasto-acoustiques d'une structure élastique couplée avec une cavité remplie par un fluide compressible. Ce modèle est basé sur l'utilisation, d'une part, d'une formulation variationnelle mixte en termes de déplacement pour la structure et en termes de pression pour la cavité fluide. D'autre part, ce modèle consiste à séparer le premier mode acoustique (mode de la cavité à pression constante) des autres modes. L'utilisation d'une représentation modale (les deux bases modales de la structure et de la cavité acoustique) pour l'écriture de l'équation modale du mouvement du système couplé fluide-structure et l'application de la transformation proposée par B. M. Irons, ont conduit à l'établissement d'un système modal symétrique de petite taille pour le calcul des modes élasto-acoustiques.

Dans ce travail, nous avons étudié l'exemple d'une plaque élastique couplée avec une cavité parallélépipédique. Nous avons mis en évidence l'effet de la nature du fluide sur le comportement modal de la structure. Un fluide léger perturbe faiblement les caractéristiques vibratoires de la structure. Son effet essentiel se traduit par une rigidité ajoutée pour le premier mode de la plaque. Un fluide lourd perturbe fortement les caractéristiques modales de la structure. Son effet inertiel est très important. Sa présence peut faire apparaître des modes qui sont des combinaisons des modes non couplés. A la fin de cet article, nous avons analysé le comportement vibro-acoustique de deux plaques élastiques identiques couplées avec une lame d'air. Les résultats numériques obtenus ont montré l'effet important du couplage de la lame d'air sur les modes vibratoires des deux plaques.

9. Bibliographie

- [BAT 76] BATHE K. J. , WILSON E. L., *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice-Hall, Inc. , Englewood cliffs, N. J., 1976.
- [BAT 90] BATHOZ J. L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis, poutres et plaques*, Hermes, 1990.
- [MOR 92], MORAND H. J. P., OHAYON R., *Interactions fluides-structures*, Masson, Paris 1992.
- [MOR 76] MORAND H. J. P. and OHAYON R., « Investigation of variational formulations for the elasto-acoustic problem », Proc. of the Int. Symp. on FEM Meth. in flow problems, Rappallo, Italy, 1976.
- [BOU 93] BOUHIOUI H., « Etude vibro-acoustique d'un montage en double paroi de verre », Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne, octobre 1993.
- [DHA 84] DHATT G., TOUZOT G., « Une présentation de la méthode des éléments finis », collection Université de Compiègne, 1984.
- [GAG 91] GAGLIARDINI L., « Simulation numérique de la transmission acoustique par les parois simples et multiples », Thèse de doctorat, INSA de Lyon, avril 1991.
- [GIB 88] GIBERT R. J., « Vibrations des structures - Interactions avec les fluides - Sources d'excitation aléatoires », collection de la direction des études et recherches d'EDF, n°69, Eyrolles, France 1988.
- [HAM 78] HAMDI M. A., OUSSET Y. and VERCHERY G., « A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems », *Int. J. Num. Meth. Eng.* 13 (1), 1978.
- [GUY 81] GUY R. W., « The transmission of airborne sound through a finite panel, air gap, panel and cavity configuration - a steady state analysis », *Acustica*, vol. 49, p. 323-333, 1981.
- [HAD 91] HADDAR M., « Modélisation numérique d'un système mécanique couplé (fluide-structure) en présence du phénomène de choc », Thèse de doctorat, UTC, novembre 1991.
- [ZIE 69] ZIENKIEWICZ O. C. and NEWTON R. E., « Coupled vibrations of a structure submerged in a compressible fluid », *Int. Symp. Finite Element Techn. Stuttgart*, 1969.
- [ZIE 77] ZIENKIEWICZ O. C., *The finite element method*, 3^d ed. Mc. HILL, London 1977.
- [ZIE 78] ZIENKIEWICZ O. C. and BETTES P., « Fluid-structure interaction and wave forces. An introduction to numerical treatment », *Int. J. Num. Meth. Eng.* 13(1),1-17, 1978.
- [ZIE 91] ZIENKIEWICZ O. C. and TAYLOR R. L., *The finite Element Method*, Fourth Edition, Mc Graw-Hill, Vol. 2, 1991.
- [LES 88] LESUEUR C. , *Rayonnement acoustique des structures*, Eyrolles, 1988.
- [OHA84] OHAYON R., « Transient and modal analysis of bounded medium fluid-structures problems », *Proc. Int. Conf. on Num. Meth. for transient and coupled problems*, R. W. Lewis, P. Bettess, E. Hinton, Pineridge Press, 1984.

- [OHA 87] OHAYON R., « Fluid-structure modal analysis. New symmetric continuum-based formulations. Finite element application », *Proc. Int. Conf. NUMETA 87*, G. N. Pande, J. Middleton, Martinus Nijhoff Publ., 1987.
- [MEI 87] OHAYON R., MEIDINGER N. and BERGER H., « Symmetric variational formulations for the vibration of damped structural-acoustic systems, Aerospace applications », *Proc. AIAA/ASME 28th Structures, Structural Dynamics Conf.*, 1987.
- [IRO70] IRONS B. M., « Role of part inversion in fluide-structure problems with mixed variables », *AIAA Journal*, 7, 568, 1970.
- [MUL81] MÜLLER W. C., « Simplified analysis of linear fluid-structure interaction », *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 17, 113-121, 1981.
- [RAM 87] RAMAKRISHNAN J. V. and KOVAL L. R., « A finite element model for sound transmission through laminated composites plates », *J. Sound Vib.* 112(3), 433-446, 1987.