

---

# Mise en œuvre d'une méthode de volumes de contrôle à maillages non structurés pour le calcul de modes propres acoustiques

## Calcul de modes propres acoustiques

Olivier Vaillant\* — Christian Prax\* — Hamou Sadat\*\*

(\*) Laboratoire d'Etudes Aérodynamiques, UMR CNRS 6609,

(\*\*) Laboratoire d'Etudes Thermiques, UMR CNRS 6608,  
40 Avenue du Recteur Pineau, F-86022 Poitiers cedex

---

*RÉSUMÉ. Nous présentons une méthode de volumes de contrôle à maillages non structurés (MVCEF) pour le calcul des modes propres acoustiques. Cette méthode est très utilisée pour les problèmes de mécanique des fluides et de thermique. Sa mise en œuvre est explicitée pour un milieu au repos dans le cadre des formulations de Helmholtz et des variables primitives. Les résultats obtenus montrent que cette technique est d'une précision comparable à celle de la méthode aux éléments finis de type Galerkin.*

*ABSTRACT. This paper is devoted to the presentation of a control volume based finite element method (CVFEM). Its implementation is explicitated for both Helmholtz and primitive variable formulations for planar and spatial problems. Application for solving acoustical eigenmode shows that the CVFEM is at least as accurate as the Galerkin FEM.*

*MOTS-CLÉS : volumes de contrôles - éléments finis - acoustique - valeurs propres.*

*KEY WORDS: control volume - finite element - acoustic - eigenvalue.*

---

## Nomenclature

- $c_0$  : vitesse du son de référence à la température  $T_0$   
 $c^*$  : vitesse du son adimensionnée par rapport à  $c_0$   
 $j$  : racine carrée de -1  
 $k$  : nombre d'onde  
 $p_0$  : référence de la fluctuation de pression acoustique  
 $p^*$  : champ de pression adimensionnée par rapport à  $p_0$   
 $T_0$  : température de référence en conditions normales (300K)  
 $u_0$  : amplitude de la vitesse acoustique  
 $L_i$  : longueur caractéristique dans la  $i^{\text{ème}}$  direction  
 $u_i$  :  $i^{\text{ème}}$  composante de la vitesse acoustique  
 $x_i$  :  $i^{\text{ème}}$  direction en coordonnée cartésienne  
 $V_i^e$  : partie du volume de l'élément fini  $e$  participant au volume de contrôle du nœud  $i$

### Lettres grecques

- $\Delta$  : opérateur Laplacien  
 $\vec{\nabla}$  : opérateur gradient  
 $\nabla$  : opérateur divergence  
 $\omega$  : pulsation de l'onde acoustique  
 $\rho_0$  : masse volumique de référence du milieu  
 $\rho$  : masse volumique  
 $\Omega_i^e$  : partie de la surface de l'élément fini  $e$  participant au volume de contrôle du nœud  $i$   
 $\Gamma_i^e$  : contour du volume de contrôle du nœud  $i$  au sein de l'élément fini  $e$   
 $\alpha_j^i$  : coefficient relatif au nœud  $j$  pour l'intégration du Laplacien au nœud  $i$   
 $\beta_j^i$  : coefficient relatif au nœud  $j$  pour l'intégration du terme volumique au nœud  $i$   
 $\sigma_j^i$  : coefficient du nœud  $j$  pour l'intégration de la dérivée selon  $x$  au nœud  $i$   
 $\gamma_j^i$  : coefficient du nœud  $j$  pour l'intégration de la dérivée selon  $y$  au nœud  $i$   
 $\mu_j^i$  : coefficient du nœud  $j$  pour l'intégration de la divergence de la vitesse ( $u$ ) au nœud  $i$   
 $\eta_j^i$  : coefficient du nœud  $j$  pour l'intégration de la divergence de la vitesse ( $v$ ) au nœud  $i$

## 1. Introduction

L'étude du phénomène de résonance dans les cavités est un important sujet de recherche en acoustique. Les applications pratiques sont variées mais concernent le plus souvent des cavités de forme complexe, comme par exemple la recherche des modes naturels d'un habitacle d'automobile. Dans le domaine de l'aéroacoustique, on peut citer les conduits d'échappement ainsi que les veines de climatisation dont les géométries réelles comprennent le plus souvent de nombreuses singularités en chaînes comme des coudes ou des élargissements. Lorsqu'une solution numérique est recherchée et que la géométrie de la cavité est de forme complexe, les méthodes des éléments finis sont généralement utilisées ([AST74], [PET76], [CRA72], [PRI93]). Nous présentons ici la mise en œuvre pour le calcul des modes, d'une méthode de volumes de contrôle construits sur un maillage en éléments finis (MVCEF) qui a fait l'objet de nombreux travaux en mécanique des fluides ([HOO881], [HOO882], [BAL83], [KET89], [BAN89], [KRA92]). Cette méthode qui semble être moins utilisée en acoustique, présente l'avantage de conjuguer des propriétés de conservation locale et globale avec la flexibilité géométrique que confère le maillage non structuré du domaine. Elle permet en outre de s'affranchir des difficultés posées par la présence de singularités aux frontières [SAD97].

Cet article présente l'implémentation de la MVCEF pour le calcul des modes propres acoustiques de cavités dans le cadre des deux formulations de Helmholtz et des variables primitives. Sa mise en œuvre sur des cas idéalisés permet de situer sa précision par rapport à des solutions analytiques. Pour d'autres exemples, des comparaisons sont effectuées avec la méthode des éléments finis de type Galerkin. On étudie notamment l'effet d'un gradient thermique sur les modes acoustiques dans un guide à l'aide des deux méthodes.

## 2. Formulation du problème

Le calcul des modes propres acoustiques peut être effectué dans la formulation de Helmholtz si le fluide compris dans la cavité est au repos. Dans ce cas, la fluctuation de pression acoustique (qui est la seule variable du problème) est solution de l'équation des ondes suivante :

$$\nabla \cdot (c^2 \vec{\nabla}(p)) - \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (1.)$$

En adoptant alors l'hypothèse d'une propagation harmonique de l'onde acoustique, l'équation (1) s'écrit simplement :

$$\nabla \cdot (c^2 \vec{\nabla}(p)) + \omega^2 p = 0 \quad (2.)$$

où  $c$  est la vitesse du son dans le milieu supposé anisotherme.

Lorsque le milieu est en mouvement, cette formulation n'est plus suffisante. L'on est alors contraint d'utiliser une linéarisation des équations de Navier-Stokes où l'on fait apparaître les fluctuations de pression et de vitesse acoustiques. Les équations générales de l'acoustique linéaire se simplifient alors dans le cas d'un milieu au repos sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases} \quad (3.)$$

La prise en compte d'un tel système conduit à considérer, pour chacun des points de discrétisation du domaine d'étude, plusieurs degrés de liberté. La propagation acoustique étant supposée harmonique, le système s'écrit dans le corps des complexes :

$$\begin{cases} j\omega u_i + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \\ j\omega p + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \end{cases} \quad (i=1,3) \text{ et } (j=1,3) \quad (4.)$$

$u_i$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  composante de la fluctuation de vitesse acoustique,  $p$  le champ de pression acoustique.  $\bar{\rho}$  représente la masse volumique locale ( $\bar{\rho} \cdot 1/T$ ) et  $\omega$  la fréquence de l'onde acoustique. Dans cet article, la répartition de température sera toujours une donnée du problème.

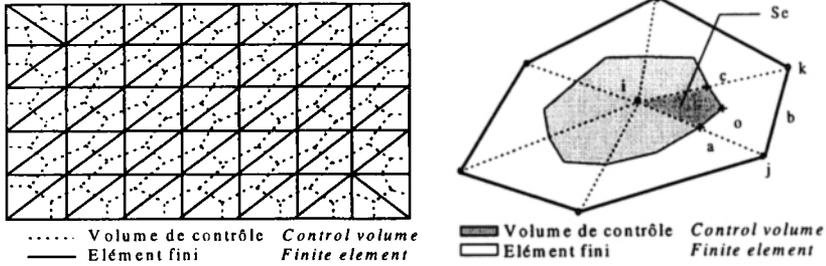
### 3. Méthode des volumes de contrôle à maillages non structurés

Dans ce paragraphe, nous explicitons la méthode pour un problème dans un espace plan et à trois dimensions.

#### 3.1. Discrétisation du domaine d'étude

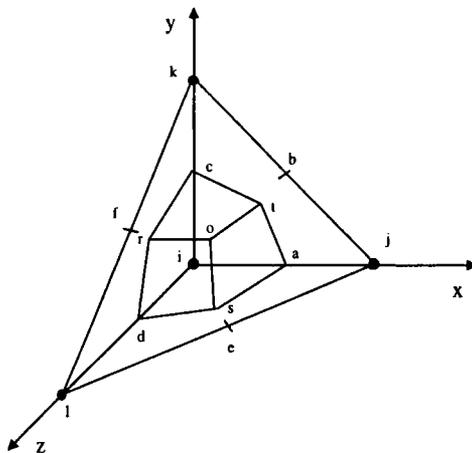
Que ce soit pour des problèmes plans ou tridimensionnels, le domaine est tout d'abord maillé en éléments finis. Les éléments sont alors subdivisés de façon à former, après l'assemblage de tous les éléments, des volumes de contrôles autour de chaque nœud du domaine de calcul.

Pour les problèmes plans, le domaine d'étude est découpé en éléments finis triangulaires à trois nœuds qui sont bien adaptés à la description de frontières complexes (Fig 1a). Les centres des éléments sont joints au milieu des arêtes du triangle pour constituer un volume de contrôle polygonal autour de chaque nœud du maillage élément fini (Fig. 1b).



**Figure 1.** a) Maillage éléments finis b) Construction d'un volume de contrôle

Des éléments tétraédriques à quatre nœuds ont finalement été choisis pour décrire les domaines tridimensionnels. Les nœuds où seront stockées les variables du problème sont là encore situés aux sommets des éléments. Les milieux des arêtes sont reliés au centre de gravité, au niveau de chaque triangle délimitant le tétraèdre. Chaque centre de gravité de ces triangles est lui aussi relié au centre o du tétraèdre (Fig. 2). Après l'assemblage des éléments, des volumes de contrôles polyédriques sont ainsi formés autour de chaque nœud.



**Figure 2.** Élément tétraédrique

### 3.2. Fonctions d'interpolation

L'intégration des équations sur les volumes de contrôle nécessite l'utilisation d'une interpolation de type éléments finis pour les variables dépendantes  $\phi$ . En choisissant une interpolation linéaire, on écrit simplement :

$$\begin{aligned} \text{pour un élément triangulaire(fig.1)} \quad \phi &= [N_i, N_j, N_k] \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \end{bmatrix} \\ \text{pour un élément tétraédrique(fig.2)} \quad \phi &= [N_i, N_j, N_k, N_l] \begin{bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_k \\ \phi_l \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.)$$

La célérité locale du son, la masse volumique, les propriétés thermophysiques sont quant à elles, estimées à partir des valeurs nodales, de façon moyenne au sein de chaque élément fini.

### 3.3. Application à la résolution de l'équation de Helmholtz

L'intégration de l'équation de Helmholtz sur le volume de contrôle centré sur un nœud  $i$  s'écrit sous la forme d'une somme des contributions de chaque élément  $e$ , constituant chacun, une partie du volume considéré :

$$\begin{aligned} \text{(domaine plan)} \quad \sum_e \left( \iint_{\Omega_i^e} \nabla \cdot (c_e^2 \vec{\nabla}(p)) d\Omega + \iint_{\Omega_i^e} \omega^2 \cdot p d\Omega \right) &= 0 \\ \text{(domaine tridimensionnel)} \quad \sum_e \left( \iiint_{V_i^e} \nabla \cdot (c_e^2 \vec{\nabla}(p)) dV + \iiint_{V_i^e} \omega^2 \cdot p dV \right) &= 0 \end{aligned} \quad (6.)$$

où  $\Omega_i^e$  (respectivement  $V_i^e$ ) désigne la portion de volume élémentaire constitutive du volume de contrôle entourant le nœud  $i$ .

Le théorème de Gauss-Ostrogradsky permet de remplacer l'intégrale de la divergence sur une surface (respectivement sur un volume) par l'intégration du gradient de pression sur un contour (respectivement sur une surface). Les équations (6) deviennent :

$$\begin{aligned}
 (\text{domaine plan}) \quad & \sum_e \int_{\Gamma_i^e} c_e^2 \vec{\nabla}(p) \cdot \vec{n} d\Gamma + \omega^2 \cdot \sum_e \iint_{\Omega_i^e} p d\Omega = 0 \\
 (\text{domaine tridimensionnel}) \quad & \sum_e \iiint_{\Omega_i^e} c_e^2 \vec{\nabla}(p) \cdot \vec{n} d\Omega + \omega^2 \cdot \sum_e \iiint_{\mathcal{V}_i^e} p dV = 0
 \end{aligned} \tag{7.}$$

où  $\vec{n}$  est la normale sortante du volume délimité par le contour  $\Gamma_i^e$  (respectivement la surface  $\Omega_i^e$ ).

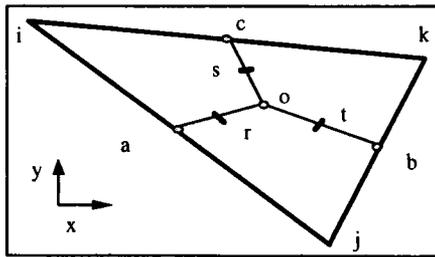
### 3.3.1. Calcul des intégrales

#### 3.3.1.1 Calcul de l'intégrale de contour (flux du gradient de la pression)

##### a) Domaine plan

En considérant la figure 3, l'intégration du flux du gradient de la pression sur la partie de contour du volume  $i$ , à l'intérieur d'un élément fini triangulaire  $e$ , se décompose en intégrant sur les segments  $[ao]$  et  $[oc]$  :

$$\int_{\Gamma_i^e} c_e^2 \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} d\Gamma = \int_a^o c_e^2 \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_o^c c_e^2 \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} d\Gamma \tag{8.}$$



**Figure 3.** Intégration de Simpson sur un élément triangulaire

En utilisant les interpolations données par la relation (5), on a alors :

$$\int_{\Gamma_i^e} c_e^2 \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} d\Gamma = c_e^2 \left( \int_{\Gamma_i^e} [\vec{\nabla} N_i, \vec{\nabla} N_j, \vec{\nabla} N_k] \cdot \vec{n} d\Gamma \right) \{p\}^e \tag{9.}$$

Après intégration, on obtient :

$$\int_{\Gamma_i^e} c_e^2 \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} d\Gamma = c_e^2 [\alpha_i^i, \alpha_j^i, \alpha_k^i] \cdot \{p\}^e \tag{10.}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \alpha_i^i = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \left(\frac{y_k - y_j}{2}\right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \left(\frac{x_j - x_k}{2}\right) \\ \alpha_j^i = \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot \left(\frac{y_k - y_j}{2}\right) + \frac{\partial N_j}{\partial y} \cdot \left(\frac{x_j - x_k}{2}\right) \\ \alpha_k^i = \frac{\partial N_k}{\partial x} \cdot \left(\frac{y_k - y_j}{2}\right) + \frac{\partial N_k}{\partial y} \cdot \left(\frac{x_j - x_k}{2}\right) \end{cases} \tag{11.}$$

Des expressions identiques sont obtenues par permutation circulaire pour les volumes définis autour des nœuds j et k :

$$\int_{\Gamma_j^e} c_e^2 \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} d\Gamma = c_e^2 [\alpha_i^j, \alpha_j^j, \alpha_k^j] \cdot \{p\}^e \tag{12.}$$

$$\int_{\Gamma_k^e} c_e^2 \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} d\Gamma = c_e^2 [\alpha_i^k, \alpha_j^k, \alpha_k^k] \cdot \{p\}^e \tag{13.}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \alpha_i^j = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \left(\frac{y_i - y_k}{2}\right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \left(\frac{x_k - x_i}{2}\right) \\ \alpha_i^k = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \left(\frac{y_j - y_i}{2}\right) + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \left(\frac{x_i - x_j}{2}\right) \end{cases} \tag{14.}$$

**b) Extension aux problèmes à trois dimensions**

Pour un domaine tridimensionnel, l'équation (7) est intégrée sur le contour  $\Omega_i^e$  (délimitant le volume de contrôle i) qui se compose des surfaces  $S_{otcr}, S_{osat}, S_{ords}$  construites dans le tétraèdre e considéré (Fig. 2).

La variation linéaire du champ de pression au sein de l'élément permet de modifier l'intégration du produit scalaire en intégrant non plus sur  $\Omega_i^e$ , mais sur une seule surface triangulaire  $S_{acd}$ . Le calcul de l'intégrale s'en trouve simplifié.

$$\iint_{\Omega_i^e} c_e^2 \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} d\Omega = c_e^2 \left( \iint_{S_{acd}} [\vec{\nabla} N_i, \vec{\nabla} N_j, \vec{\nabla} N_k, \vec{\nabla} N_l] \cdot \vec{n} dS \right) \{p\}^e \tag{15.}$$

On aboutit alors à :

$$\iint_{\Omega_i^e} c_e^2 \vec{\nabla} p \cdot \vec{n} d\Omega = c_e^2 [\alpha_i^i, \alpha_j^i, \alpha_k^i, \alpha_l^i] \cdot \{p\}^e \tag{16.}$$

$$\text{avec : } \begin{cases} \alpha_i^i = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot ((y_c - y_a)(z_d - z_a) + (z_c - z_a)(y_d - y_a)) \\ + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot ((z_c - z_a)(x_d - x_a) + (x_c - x_a)(z_d - z_a)) \\ + \frac{\partial N_i}{\partial z} \cdot ((x_c - x_a)(y_d - y_a) + (y_c - y_a)(x_d - x_a)) \end{cases} \quad (17.)$$

Les coefficients correspondant aux nœuds j, k et l sont obtenus de la même façon.

### 3.3.1.2. Détermination de l'intégrale volumique de pression

#### a) Domaine plan

Pour chaque élément triangulaire participant au volume de contrôle autour du nœud i, l'intégration volumique du terme de pression s'effectue en décomposant la surface contributive  $\Omega_i^e$  ([iaoc]) en deux triangles de surfaces respectives  $S_1$  ( $= \Omega_i^e / 4$ ), de sommets [iac] et  $S_2$  ( $= \Omega_i^e / 12$ ), de sommets [aoc] (fig. 3).

Sur  $S_1$ , compte tenu de l'interpolation linéaire de la pression et des relations intégrales sur un triangle, on obtient l'expression suivante :

$$\iint_{S_1} p \cdot dS = (A_i p_i + A_a p_a + A_c p_c) \cdot S_1 \quad (18.)$$

Une forme identique est obtenue pour l'intégrale sur la surface  $S_2$ .

Une fois  $p_a$ ,  $p_o$  et  $p_c$  exprimés en fonction des valeurs aux nœuds, on obtient une écriture sous forme algébrique :

$$\iint_{\Omega_i^e} p \cdot d\Omega = [\beta_i^i, \beta_j^i, \beta_k^i] \cdot \{p\}^e \quad (19.)$$

$$\text{où : } \beta_i^i = 22 \cdot \frac{\Omega_i^e}{108} \text{ et } \beta_j^i = \beta_k^i = 7 \cdot \frac{\Omega_i^e}{108}$$

avec des relations équivalentes pour les nœuds j et k :

$$\iint_{\Omega_j^e} p \cdot d\Omega = [\beta_i^j, \beta_j^j, \beta_k^j] \cdot \{p\}^e \quad (20.)$$

$$\iint_{\Omega_k^e} p \cdot d\Omega = [\beta_i^k, \beta_j^k, \beta_k^k] \cdot \{p\}^e \quad (21.)$$

où  $\beta_i^j = \beta_k^j = \beta_i^k = \beta_j^k = 7 \cdot \frac{\Omega_i^e}{108}$  et  $\beta_j^j = \beta_k^k = 22 \cdot \frac{\Omega_i^e}{108}$

**b) Espace tridimensionnel**

Les différents volumes utiles pour le calcul de l'intégrale sur un tétraèdre e sont :

$$V_e = \mathcal{G}_{iacd} + \mathcal{G}_{acdo} + \mathcal{G}_{atco} + \mathcal{G}_{crot} + \mathcal{G}_{dsor} = \frac{\mathcal{G}_e}{4} \tag{22.}$$

on montre que l'expression algébrique s'écrit ici :

$$\iiint_{V_i^e} p dV = \frac{V_i^e}{576} \cdot [\beta_i^i, \beta_j^i, \beta_k^i, \beta_l^i] \cdot \{p\}^e \tag{23.}$$

avec :  $\beta_i^i = 75 \cdot \frac{V_i^e}{576}$  et  $\beta_j^j = \beta_k^k = \beta_l^l = 23 \cdot \frac{V_i^e}{576}$

*3.3.2. Assemblage des équations algébriques sous forme matricielle*

La technique d'assemblage utilisée est classique. Au niveau de chaque élément fini géométrique, on construit (à partir des expressions (10-19) ou (16-23) ) deux matrices élémentaires [a]et[b] de dimension (3x3) ou (4x4) (selon que le problème est bidimensionnel ou tridimensionnel) :

$$[a] \cdot \{p\}^e + \left(\frac{\omega}{c_e}\right)^2 \cdot [b] \cdot \{p\}^e = 0 \tag{24.}$$

qui permettent après assemblage d'aboutir au système global :

$$[A] \cdot \{p\} + \left(\frac{\omega}{c_e}\right)^2 \cdot [B] \cdot \{p\} = 0 \tag{25.}$$

*3.3.3. Conditions aux limites*

Les conditions aux limites de Dirichlet sont introduites dans le système par utilisation de la technique de terme unité sur la diagonale. Les conditions de Neumann homogènes (qui correspondent à une paroi rigide) sont ici aussi prises en compte de façon naturelle par l'écriture du bilan pour un volume de contrôle situé en paroi.

### 3.4. Application à la résolution de l'équation aux variables primaires UVP

L'intégration des équations s'effectue comme précédemment, en faisant la somme des contributions des éléments finis au volume de contrôle autour d'un nœud choisi.

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_e \left( \iint_{\Omega_i^e} j\omega u_i d\Omega + \iint_{\Omega_i^e} \frac{1}{\bar{\rho}_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} d\Omega \right) = 0 \\ \sum_e \left( \iint_{\Omega_i^e} j\omega p d\Omega + \iint_{\Omega_i^e} \nabla(\vec{V}) d\Omega \right) = 0 \end{array} \right. \quad (26.)$$

Pour un problème en trois dimensions, on doit considérer des intégrales de volume dans l'équation (26). L'intégration de la divergence de la vitesse est là aussi réalisée en utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradsky, qui nous ramène à une intégrale de contour sur le flux de vitesse traversant la paroi du volume :

$$\iint_{\Omega_i^e} \nabla(\vec{V}) d\Omega = \int_{\Gamma_i^e} \vec{V} \cdot \vec{n} d\Gamma \quad (27.)$$

Les termes issus de la dérivée temporelle et de l'approximation harmonique ( $j\omega$ ) sont intégrés selon le même principe que pour l'équation d'Helmoltz (éq. 19 à 21). L'intégration des autres termes de l'équation (26), dont le détail du calcul est présenté en annexe, conduit finalement après sommation de toutes les contributions des éléments finis du domaine, à une écriture globale du système de la forme :

$$[\mathbf{A}].\delta + j(\omega).[\mathbf{B}].\delta = 0 \quad (28.)$$

Les conditions aux limites du type Dirichlet sont ensuite introduites de la même façon que pour l'équation d'Helmoltz (paragraphe 3.3.3.). Les conditions de paroi rigide, ( $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ ), sont naturellement prises en compte dans l'équation de pression par le biais de l'intégration du flux de vitesse acoustique (éq.27) sur un contour qui reste ouvert pour un volume de contrôle en frontière.

## 4. Exemples numériques

On présente dans ce paragraphe quelques exemples de cavités pour lesquelles nous avons résolu le problème aux valeurs propres à l'aide d'un algorithme du type QZ ([STE72], [WIL79]).

**4.1. Mise sous forme adimensionnelle dans le cas d'une cavité parallélépipédique**

Pour une cavité parallélépipédique de dimension  $L_x D_x H$  on a défini les grandeurs sans dimensions, repérées avec le symbole \*, par :

$$\begin{aligned} x_i^* &= x_i / L_i && \text{( avec : } L_1=L, L_2=D, L_3=H \text{)} \\ p^* &= p / (u_0 \cdot c_0 \rho_0) \\ c^* &= c / c_0 && u_i^* = u_i \cdot L_i / (u_0 \cdot L_i) \end{aligned}$$

où  $c$  représente la célérité du son ( $c^2=T$ ),  $p$  le champ de pression acoustique et  $kD=2\pi D/\lambda$  la fréquence adimensionnelle de l'onde ( $\lambda$  étant la longueur d'onde).

L'équation de Helmholtz adimensionnelle s'écrit alors :

$$\nabla \cdot (c^* \cdot \vec{\nabla}(p^*)) + (kD)^2 p^* = 0 \tag{29.}$$

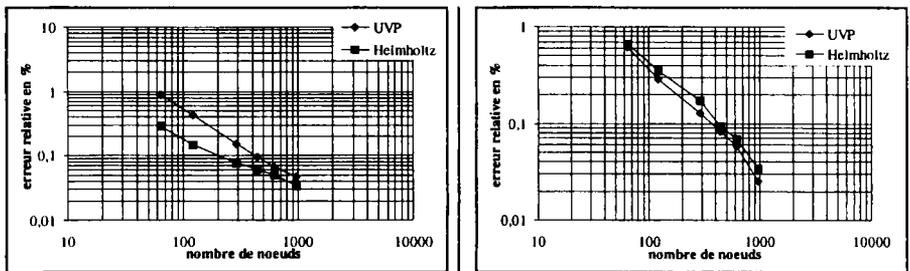
Le système d'équations aux variables primitives adimensionnelle est donné par :

$$\begin{cases} jkD \cdot u_i^* + \frac{1}{\rho^*} \frac{L_1^2}{L_i^2} \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} = 0 \\ jkD \cdot p^* + \nabla \cdot (\vec{V}^*) = 0 \end{cases} \tag{30.}$$

**4.2. Application à des domaines plans**

**4.2.1. Cavité semi ouverte**

On s'intéresse dans un premier temps au cas d'une cavité carrée, de dimension unitaire, ouverte aux deux extrémités (pour  $x=0$  et  $x=1$ ). Les maillages utilisés sont des grilles à pas réguliers.



**Figure 4. Erreurs sur les modes (1.0) et (0.1) en fonction du nombre de nœuds**

L'évolution de l'erreur commise sur les modes (1,0) et (0,1) en fonction du nombre total de nœuds utilisés pour mailler la cavité est présentée sur la figure 4. On observe une bonne convergence spatiale des résultats. On constate toutefois que la formulation de Helmholtz donne une meilleure précision que celle aux variables primitives.

#### 4.2.2. Comparaison avec la méthode aux éléments finis de type Galerkin

Un calcul de modes acoustiques est effectué sur une cavité rectangulaire, de dimension (1 x 0,3), maillée uniformément (30 nœuds dans le sens longitudinal et 8 nœuds dans le sens transversal). Le canal est ouvert en ses deux extrémités.

Le tableau 1, présente les erreurs commises par la MVCEF ainsi que par la MEF pour les dix premiers modes dans les mêmes conditions de calcul. La MVCEF conduit à des résultats légèrement plus précis que ceux fournis par la MEF. Ce résultat coïncide avec les observations de Ramadhyani et al. [RAM80] au sujet de la solution de l'équation de Poisson.

Modes	Analytique	MVCEF	erreur %	EF	erreur %
1	3,1416	3,1426	0,0335	3,1431	0,0480
2	6,2832	6,2900	0,1083	6,2954	0,1940
3	9,4248	9,4474	0,2396	9,4658	0,4350
4	10,9331	10,9988	0,6009	11,0429	1,0040
5	12,2123	12,3261	0,9319	12,3836	1,4030
6	12,5664	12,6189	0,4180	12,6625	0,7650
7	14,0886	14,2740	1,3159	14,3562	1,9000
8	15,7080	15,8064	0,6265	15,8902	1,1600
9	16,3577	16,6363	1,7031	16,7594	2,4560
10	18,8496	18,9933	0,7625	19,1282	1,4780

**Tableau 1.** Erreur sur les dix premiers modes de la cavité ouverte

#### 4.2.3. Cas d'un canal avec gradient thermique

Pour le même canal, on calcule cette fois les modes acoustiques en considérant la présence d'un gradient thermique linéaire dans le sens transversal. L'inhomogénéité du champ de température se traduit par une inhomogénéité de la vitesse du son dans le domaine, ce qui entraîne une distorsion de la distribution spatiale du champ de pression.

Un premier calcul est effectué pour un champ de température homogène dont la valeur correspond à la température moyenne du gradient thermique considéré par la suite. Les résultats peuvent alors être confrontés à la solution analytique et confirment un bon comportement de la MVCEF.

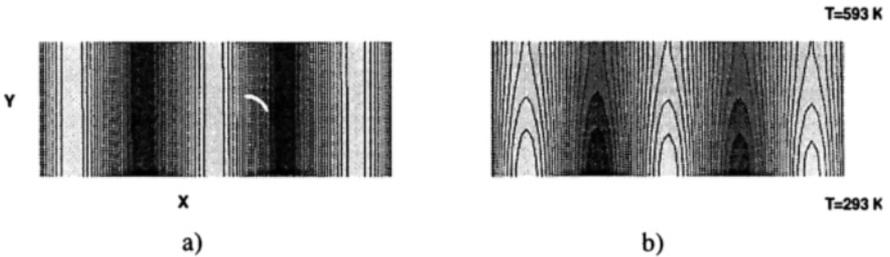
Les modes obtenus en présence du gradient thermique sont présentés dans les deux dernières colonnes du tableau 2. Les valeurs issues des deux méthodes sont assez proches.

Modes	Solution analytique	MVCEF (Tmoy)	Erreur (%)	MEF (Tmoy)	Erreur (%)	MVCEF	MEF
(1,0)	3,8629	3,8637	0,0207	3,8648	0,0492	3,8576	3,8583
(2,0)	7,7259	7,7343	0,1087	7,7409	0,1941	7,6822	7,6889
(3,0)	11,5888	11,6166	0,2399	11,6393	0,4358	11,4437	11,4671
(1,1)	13,4434	13,5245	0,6033	13,5784	1,1797	13,3850	13,4396
(2,1)	15,0164	15,1561	0,9303	15,227	1,4025	15,0156	15,0850

**Tableau 2.** Evolution des modes en présence d'un gradient thermique

L'augmentation des valeurs propres avec la température moyenne est bien constatée (en confrontant les tableaux 1 et 2).

Le mode (1,0) est représenté sur la figure 5.a) pour un milieu isotherme, et sur la figure 5.b) pour un milieu avec un gradient de température transversal. Par rapport au cas d'un milieu homogène, nous observons, les fortes modifications attendues de l'allure du champ de pression. Un décalage marqué des nœuds de pression vers la région des températures les plus froides est bien visible.



**Figure 5.** Mode en absence a) et en présence b) de gradient linéaire de température

4.2.4. Cas d'une cavité annulaire cylindrique

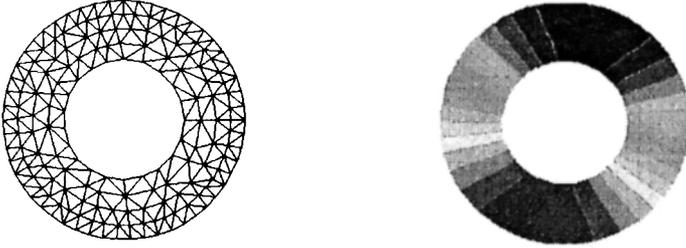
Dans le cas d'un espace annulaire cylindrique à parois rigides, on peut trouver dans la littérature les solutions tabulées des valeurs propres [BRI62]. Elles correspondent aux racines de l'équation :

$$J'_n(X).Y'_n(\beta X) - J'_n(\beta X).Y'_n(X) = 0 \tag{31.}$$

$J'_n$  et  $Y'_n$  sont les dérivées des fonctions de Bessel et de Neumann d'ordre n.

$\beta$  est le rapport entre le rayon du cylindre intérieur b, et le rayon du cylindre extérieur a et  $X=k.b=2\Pi b/\lambda$

Les calculs numériques sont effectués pour deux maillages déstructurés dans le cas d'un espace annulaire dont le rapport de rayon  $\beta=2$ . Le premier de ces deux maillages est composé de 182 nœuds (figure 6.a), alors que le second en compte 584. Le mode correspondant à la plus petite valeur propre est présenté sur la figure 6b.



**Figure 6 a) Maillage lâche b) mode correspondant à la première valeur propre**

Les résultats sont en parfait accord avec les modes théoriques (tableaux 3 et 4) et on retrouve toujours une bonne convergence spatiale. On observe toutefois une dégradation plus rapide de la précision des résultats sur les modes élevés pour la formulation u, v, p.

		Helmholtz		
analytique	182 noeuds	erreur (%)	584 noeuds	erreur (%)
0,6773	0,6840	0,9830	0,6769	0,0712
1,3406	1,3536	0,9692	1,3436	0,2221
1,9789	1,9999	1,0615	1,9831	0,2132
2,5876	2,6230	1,3668	2,5953	0,2988
3,1694	3,1910	0,6799	3,1849	0,4877

**Tableau 3. espace annulaire : formulation de Helmholtz**

		u,v,p		
analytique	182 noeuds	erreur (%)	584 noeuds	erreur (%)
0,6773	0,6793	0,2913	0,6777	0,0466
1,3406	1,3385	0,1568	1,3397	0,0701
1,9789	1,9607	0,9201	1,9738	0,2571
2,5876	2,5435	1,7037	2,5737	0,5381
3,1694	3,0820	2,7599	3,1391	0,9580

**Tableau 4. espace annulaire : formulation uvp**

### 4.3. Application à une cavité tridimensionnelle

La mise en œuvre de la MVCEF sur un cas tridimensionnel a été réalisée pour une cavité cubique de dimension unitaire. Un maillage uniforme ( $11*11*11$ ) du domaine est opéré à l'aide d'éléments finis tétraédriques.

Le calcul a été effectué à partir de la formulation de Helmholtz. Une cavité ouverte aux deux extrémités et une cavité semi-ouverte sont étudiées et les résultats sont présentés dans le tableau 5. Le mode (1,0) de la cavité ouverte est représenté en coupe sur la figure 7. Les résultats regroupés dans le tableau 5 peuvent être confrontés à ceux obtenus pour le problème bidimensionnel équivalent (tableau 6) à partir d'un maillage comparable (le pas d'espace est équivalent). On constate que les précisions des calculs tridimensionnels et bidimensionnels sont sensiblement du même ordre pour les trois premières valeurs propres, et que la précision des modes suivants décroît légèrement pour le premier.

Mode	Cavité 3D Semi- ouverte			Cavité 3D Ouverte		
	analytique	( $11*11*11$ )	erreur (%)	analytique	( $11*11*11$ )	erreur (%)
1	1,5708	1,5728	0,1280	3,1416	3,1579	0,5202
2	3,5124	3,5334	0,5988	4,4429	4,4916	1,0956
3	3,5124	3,5342	0,6207	4,4429	4,4961	1,1973
4	4,7124	4,7646	1,1076	5,4414	5,5419	1,8470
5	4,7124	4,7745	1,3181	6,2832	6,4148	2,0948
6	5,6636	5,7581	1,6688	7,0248	7,1833	2,2563
7	5,6636	5,7660	1,8077	7,0248	7,2029	2,5348

Tableau 5. Erreurs relatives pour deux cavités cubiques maillées ( $11*11*11$ )

Cavité 2D semi ouverte			ouverte		
analytique	( $11*11$ )	erreur (%)	analytique	( $11*11$ )	erreur (%)
1,5708	1,5712	0,0229	3,1416	3,1487	0,2257
3,5124	3,5275	0,4302	4,4429	4,4811	0,8603
4,7124	4,7357	0,4947	6,2832	6,3388	0,8854
5,6636	5,7349	1,2584	7,0248	7,1082	1,1869

Tableau 6. Erreurs relatives pour deux cavités carrées maillées ( $11*11$ )

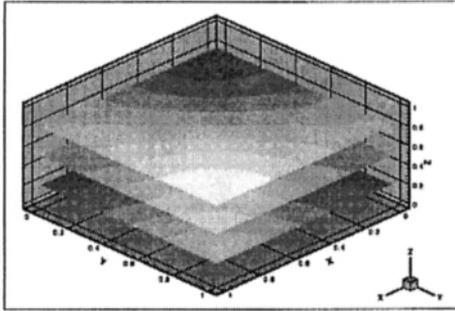


Figure 7 . Coupe du mode (1,0) en  $z=0,2$  ;  $z=0,5$  ;  $z=0,8$

## 5. Conclusion

On a montré ici que la méthode des volumes de contrôles à maillage non structurés permet de résoudre les problèmes aux valeurs propres avec une bonne précision.

Cette méthode (initialement développée pour résoudre des équations de transport diffusion) semble donc bien indiquée pour traiter les problèmes de calcul de propagation acoustique. Les premiers résultats sont encourageants et permettent d'envisager l'application de la méthode à l'étude de la propagation acoustique en présence d'un écoulement.

## 6. Bibliographie

- [AST 79] ASTLEY R.J. and EVERSMAN W., « A finite element of the eigenvalue problem in lined ducts with flow ». *J. Sound. Vib.*, vol. 65(1), 1979, p. 61-74.
- [BAL 83] B.R.BALIGA, S.V.PATANKAR, « A Control Volume Finite-Element Method for Two-Dimensional Fluid Flow and Heat Transfer », *Num. Heat Transf.*, Vol. 6, p. 245-261, 1983.
- [BAN 89] J. BANASZEK, « Comparison of Control Volume and Galerkin Finite Element Methods for Diffusion-Type Problems », *Num. Heat Transf.*, Part B, vol. 16, p. 59-78, 1989.
- [BRI 62] J.F.BRIDGE and S.W. ANGRIST, « An extended table of roots of  $J'_n(X).Y'_n(\beta X) - J'_n(\beta X).Y'_n(X) = 0$  », *Math.Comput.* 16, p.198-204, 1962

- [CRA 72] A. CRAGGS, « The use of simple three-dimensional finite elements for determining the natural modes and frequencies of complex shaped enclosures », *J. So. And Vib.*, 23, p. 331-339, 1972.
- [DHA 84 ] G.DHATT, G.TOUZOT, « Une présentation de la méthode des éléments finis », Maloine. 1984.
- [HOO 881] N. A. HOOKEY, B. R. BALIGA AND C. PRAKASH, « Evaluation and Enhancements of Some Control-Volume Finite-Element Methods-Part 1. Convection-Diffusion Problems » , *Num Heat Transf*, vol. 14, p. 255-272,1988.
- [HOO 882 ] N. A. HOOKEY AND B. R. BALIGA: « Evaluation and Enhancements of Some Control-Volume Finite-Element Methods-Part 2. Incompressible Fluid Flow Problems » , *Num. Heat Transf.*, vol. 14, p. 273-293, 1988.
- [KET 89] C. F. KETTLEBOROUGH, S. R. HUSSAIN AND C. PRAKASH, « Solution of Fluid Flow Problems with the Vorticity-Streamfunction Formulation and the Control Volume-Based Finite-Element Method », *Num. Heat Transf.*, Part B, vol. 16, p. 31-58, 1989.
- [KRA 92] M. S. KRAKOV, « Control Volume Finite-Element Method for Navier-Stokes Equations in Vortex-Streamfunction Formulation », *Num. Heat Transf.*, Part B, vol. 21, p. 125-145, 1992.
- [PET 76] M. PETYT, J. LEA AND G. H. KOOPMANN, « A finite element method for determining the acoustic modes of irregular shaped cavities », *J. So. and Vib.*, 45, p. 495-502, 1976.
- [PRI 93] J.P.PRIOU, E.REDON, Y.GERVAIS, and J.L.PEUBE, « Calcul des modes acoustiques en milieu inhomogène par la méthode des éléments finis » *Proc.Inst of Acoustics (UK) 1993*, vol.15 (3), p. 909-916.
- [RAM 80] S. RAMADHYANI AND S. V. PATANKAR, « Solution of the Poisson equation : compariason of the Galerkin and control-volume methods », *Int. J. for Num. Meth. in Engineering*, vol 15, p. 1395-1418, 1980.
- [SAD 97] H. SADAT, P.SALAGNAC, « Calcul des flux en parois présentant des singularités », *Int. Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 40 n°18, p. 4255-4262, 1997.
- [STE 72] G. W. STEWART, « On the sensitivity of the eigenvalue problem », *SIAM J. Num. Anal.*, 9(4):669-686, 1972.
- [WHI 79] J. H. WILKINSON, « Kronecker's canonical form and the QZ algorithm », *Lin. Alg. Appl.*, 28:285-303, 1979.

## Annexe : détail des intégrations dans la formulation uvp

### A1 : Intégration des dérivées de la pression

Les intégrales sur les dérivées de la pression selon la  $n^{\text{ème}}$  direction s'écrivent :

$$\iint_{\Omega_i^e} \frac{1}{\bar{\rho}_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_n} d\Omega = \frac{1}{\bar{\rho}_e} \iint_{\Omega_i^e} \left[ \frac{\partial N_i}{\partial x_n}, \frac{\partial N_j}{\partial x_n}, \frac{\partial N_k}{\partial x_n} \right] \cdot \{p\}^e d\Omega \quad (32.)$$

L'interpolation linéaire de la pression conduit à des valeurs constantes de la dérivée sur chaque élément. Les intégrales s'écrivent alors sous la forme algébrique suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iint_{\Omega_i^e} \frac{1}{\bar{\rho}_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega = c_e^2 \cdot [\sigma_i^i, \sigma_j^i, \sigma_k^i] \cdot \{p\}^e \\ \iint_{\Omega_i^e} \frac{1}{\bar{\rho}_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} d\Omega = c_e^2 \cdot [\gamma_i^i, \gamma_j^i, \gamma_k^i] \cdot \{p\}^e \end{array} \right. \quad (33.)$$

$$\text{où } \sigma_i^i = \frac{\Omega_i^e}{3} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} \text{ et } \gamma_i^i = \frac{\Omega_i^e}{3} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y}$$

### A2 : Intégration de la divergence de la vitesse

La détermination de l'intégrale de la divergence du vecteur vitesse acoustique passe par une intégrale de contour sur le segment [aoc] (Fig 3) :

$$\iint_{\Omega_i^e} \nabla(\vec{V}) d\Omega = \int_a^o (u.n_x + v.n_y) d\Gamma + \int_o^c (u.n_x + v.n_y) d\Gamma \quad (34.)$$

Cette intégrale est calculée à l'aide de la méthode de Simpson à l'ordre deux :

$$\int_a^o (u.n_x + v.n_y) d\Gamma = \frac{x_a - x_o}{6} [v_o + 4v_r + v_a] + \frac{y_o - y_a}{6} [u_o + 4u_r + u_a] \quad (35.)$$

En tenant compte de l'interpolation linéaire des vitesses, on a :

$$\int_a^o (u.n_x + v.n_y) d\Gamma = \frac{x_a - x_o}{12} [5v_i + 5v_j + 2v_k] + \frac{y_o - y_a}{12} [5u_i + 5u_j + 2u_k] \quad (36.)$$

On en déduit facilement l'expression de l'intégrale sur le contour [aoc] de l'élément fini e considéré :

$$\int_{\Gamma_i^e} (u.n_x + v.n_y) d\Gamma = [\mu_i^i \mu_j^i \mu_k^i] \cdot \{u\}^e + [\eta_i^i \eta_j^i \eta_k^i] \cdot \{v\}^e \tag{37.}$$

avec

$$\begin{cases} \mu_i^i = \frac{5}{12}(y_c - y_a) ; \mu_j^i = \frac{1}{12}(y_c + 4y_o - 5y_a) ; \mu_k^i = \frac{1}{12}(5y_c - 4y_o - y_a) \\ \eta_i^i = \frac{5}{12}(x_a - x_c) ; \eta_j^i = \frac{1}{12}(5x_a - 4x_o - x_c) ; \eta_k^i = \frac{1}{12}(x_a + 4x_o - 5x_c) \end{cases} \tag{38.}$$

**A3 : Extension aux problèmes à trois dimensions**

Pour un milieu isentropique, le problème possède quatre degrés de liberté par nœud : u, v, w et p. En considérant le système sous sa forme la plus simple, on a :

$$\begin{cases} \sum_e \left( j\omega \cdot \iiint_{V_i^e} u dV + \iiint_{V_i^e} \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} dV \right) = 0 \\ \sum_e \left( j\omega \cdot \iiint_{V_i^e} v dV + \iiint_{V_i^e} \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} dV \right) = 0 \\ \sum_e \left( j\omega \cdot \iiint_{V_i^e} w dV + \iiint_{V_i^e} \frac{1}{\rho_e} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} dV \right) = 0 \\ \sum_e \left( j\omega \cdot \iiint_{V_i^e} p dV + \iiint_{V_i^e} \nabla(\vec{V}) dV \right) = 0 \end{cases} \tag{39.}$$

Les termes provenant de l'approximation harmonique, sont traités de la même façon que dans la formulation de Helmholtz pour le terme volumique de pression (équation (23)).

Les coefficients de l'interpolation linéaire qui correspondent aux différentes dérivées permettent de calculer l'intégration des termes des dérivées de la pression par une simple multiplication avec la partie du volume considéré (c.f. équation (32)).

L'intégration de la divergence de la vitesse est réalisée en utilisant la méthode de Simpson à l'ordre deux.

**A4 : Ecriture matricielle élémentaire**

La contribution d'un élément fini e (de sommets i, j, k), au système d'équations (26) pour le volume de contrôle i s'écrit sous la forme linéaire :

$$\begin{bmatrix} 00 \frac{\sigma_i^i}{\bar{\rho}_e} & 00 \frac{\sigma_j^i}{\bar{\rho}_e} & 00 \frac{\sigma_k^i}{\bar{\rho}_e} \\ 00 \frac{\gamma_i^i}{\bar{\rho}_e} & 00 \frac{\gamma_j^i}{\bar{\rho}_e} & 00 \frac{\gamma_k^i}{\bar{\rho}_e} \\ \mu_i^i \eta_i^i 0 & \mu_j^i \eta_j^i 0 & \mu_k^i \eta_k^i 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \beta_i^i 00 & \beta_j^i 00 & \beta_k^i 00 \\ 0 \beta_i^i 0 & 0 \beta_j^i 0 & 0 \beta_k^i 0 \\ 00 \beta_i^i & 00 \beta_j^i & 00 \beta_k^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \end{Bmatrix} \quad (40.)$$

avec  $\delta_i = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ p_i \end{Bmatrix}$  le vecteur des variables définies sur le nœud i.

et de façon analogue pour la contribution d'un élément tétraédrique à l'un de ses sommets:

$$\begin{bmatrix} 000 \frac{\sigma_i^i}{\bar{\rho}_e} & 000 \frac{\sigma_j^i}{\bar{\rho}_e} & 000 \frac{\sigma_k^i}{\bar{\rho}_e} & 000 \frac{\sigma_l^i}{\bar{\rho}_e} \\ 000 \frac{\gamma_i^i}{\bar{\rho}_e} & 000 \frac{\gamma_j^i}{\bar{\rho}_e} & 000 \frac{\gamma_k^i}{\bar{\rho}_e} & 000 \frac{\gamma_l^i}{\bar{\rho}_e} \\ 000 \frac{\xi_i^i}{\bar{\rho}_e} & 000 \frac{\xi_j^i}{\bar{\rho}_e} & 000 \frac{\xi_k^i}{\bar{\rho}_e} & 000 \frac{\xi_l^i}{\bar{\rho}_e} \\ \mu_i^i \eta_i^i \kappa_i^i 0 & \mu_j^i \eta_j^i \kappa_j^i 0 & \mu_k^i \eta_k^i \kappa_k^i 0 & \mu_l^i \eta_l^i \kappa_l^i 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \\ \delta_l \end{Bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \beta_i^i 000 & \beta_j^i 000 & \beta_k^i 000 & \beta_l^i 000 \\ 0 \beta_i^i 00 & 0 \beta_j^i 00 & 0 \beta_k^i 00 & 0 \beta_l^i 00 \\ 00 \beta_i^i 0 & 00 \beta_j^i 0 & 00 \beta_k^i 0 & 00 \beta_l^i 0 \\ 000 \beta_i^i & 000 \beta_j^i & 000 \beta_k^i & 000 \beta_l^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_k \\ \delta_l \end{Bmatrix} \quad (41.)$$

Les coefficients  $\beta$  sont issus de l'intégration volumique des différentes variables et les coefficients  $\sigma$  (respectivement  $\gamma$  et  $\xi$ ) de l'intégration de la dérivée de la pression par rapport à x (respectivement y et z). Les coefficients  $\mu$ ,  $\eta$  et  $\kappa$  correspondent quant à eux, à l'intégration de la divergence de la vitesse.