

---

# Développement d'éléments continus de coques axisymétriques et de coudes

**Hervé Le Sourne \* – Christian Wielgosz \*\* – Claude Duforet \***

*\* Direction des Constructions Navales Ingénierie – PAR/SYP/CST - 8 boulevard Victor, F-00303 Paris Armées.*

*\*\* LGCNSN – Ecole Centrale de Nantes – Université de Nantes – 2 chemin de la Houssinière, BP 92208, F-44322 Nantes Cedex 3.  
wielgosz@physique.univ-nantes.fr*

---

*RESUMÉ. Nous présentons dans cet article un nouveau type d'élément, appelé élément continu, basé sur les solutions quasi-exactes des équations du mouvement. Nous développons tout d'abord un élément continu de coque mince axisymétrique puis un élément continu de tuyau cintré, en construisant numériquement leur matrice de raideur dynamique. Les courbes de réponse à une excitation harmonique, après assemblage des éléments continus, sont comparées à des résultats expérimentaux et à des résultats obtenus par éléments finis. Les avantages de la méthode sont présentés en conclusion : rapidité de mise en œuvre de la modélisation qui s'appuie sur une discrétisation réduite à son minimum, réponse directe et précise jusqu'aux fréquences élevées et possibilité d'introduire des caractéristiques mécaniques et d'amortissement structural fonctions de la fréquence.*

*ABSTRACT. In this paper, the continuous element method, based on the « quasi-exact » solution of the dynamic equations, is presented. An axisymmetric continuous shell element and a curved pipe continuous element are developed and their dynamic stiffness matrices are numerically constructed. The dynamic response of several pipelines to harmonic excitation are then computed by assembling the continuous elements; inertance and dynamic flexibility curves are compared with experimental and finite elements curves. The main advantages of the method are finally shown: swiftness of the modelling, direct and accurate response at high frequency domains, possibility to take into account structural damping function of the frequency.*

*MOTS-CLES. Éléments continus – raideur dynamique – coque axisymétrique – coude*

*KEYWORDS. Continuous elements – dynamic stiffness – axisymmetric shell – curved pipe*

---

## 1. Introduction

La méthode des éléments finis s'est imposée comme principale méthode numérique d'analyse des structures. Néanmoins, dans certains cas, la précision des résultats obtenus n'est pas satisfaisante car elle est conditionnée par la finesse du maillage et par les fonctions d'interpolation utilisées. Nous présentons dans cet article, en analyse dynamique, un nouveau type d'élément appelé élément continu, basé sur les solutions quasi-exactes des équations du mouvement en oscillations libres.

Cet élément est en fait la matrice de raideur dynamique d'une sous-structure, matrice dont les coefficients sont fonctions de la fréquence. L'étude de la sous-structure est alors ramenée à l'étude de ses frontières ; pour une poutre ses extrémités, pour une plaque son contour, etc. De tels éléments ont été développés dès les années soixante pour résoudre des problèmes de dynamique linéaire de systèmes composés de poutres. La première appellation caractérisant cette technique est celle de matrice de transfert [PES 63].

Le principe en est de connecter deux extrémités de poutres en reliant, à partir des équations du mouvement, les valeurs des déplacements et efforts généralisés (flèche, rotation, moment de flexion et effort tranchant) d'une des extrémités aux valeurs à l'autre extrémité. La matrice de connexion ainsi établie porte le nom de matrice de transfert et dépend de la fréquence d'excitation de la poutre. Elle permet par de simples multiplications matricielles de relier deux extrémités de poutres même dans le cas où les sections ou encore les propriétés matérielles changent d'un élément à un autre et ceci avec une matrice de taille égale à celle d'un seul élément. Bien entendu cette technique permet d'obtenir la solution exacte du problème en oscillations libres.

Par réorganisation des variables (flèches et rotations aux deux extrémités d'une poutre) on peut en déduire une matrice dite de raideur dynamique de la poutre semblable à une matrice de type éléments finis. On peut alors effectuer l'assemblage classique des éléments et les équations du mouvement s'écrivent sous la forme :

$$\{F(\omega)\} = [D(\omega)]\{U(\omega)\} \quad [1]$$

où  $\{F(\omega)\}$  est le vecteur des forces harmoniques extérieures,  $\{U(\omega)\}$  le vecteur des inconnues nodales et  $[D(\omega)]$  la matrice de raideur dynamique dépendante de la pulsation propre  $\omega$ <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Les notations utilisées dans cet article sont précisées en annexe I.

En fait, on peut résumer la technique en disant que l'on recherche la matrice de raideur dynamique « exacte » de la structure en utilisant comme fonctions d'interpolation les fonctions de Green entre nœuds de l'opérateur des équations du mouvement. On est alors assuré de l'exactitude de la solution du problème, même en oscillations forcées [WIE 82].

La résolution du système [1], fréquence par fréquence, donne les inconnues nodales de déplacement, ce qui permet d'obtenir directement la réponse de la structure à une excitation harmonique donnée. C'est un avantage dans le cas où les caractéristiques de matériaux et d'amortissement varient en fonction de la fréquence. Cette réponse n'est assujettie à aucune discrétisation quelle que soit la gamme de fréquences utilisée, ce qui est particulièrement intéressant en moyennes et hautes fréquences. Elle a par contre le désavantage de ne pas donner directement les modes de vibration car elle conduit à un problème de valeurs propres non classique. On peut cependant accéder aux modes en les recherchant par itérations successives [RIC77], [BAD 97], [LES 97].

La méthode des éléments continus est facile à mettre en œuvre pour les poutres droites. Elle a été utilisée à la DCN pour l'étude de la transmissibilité des assemblages de poutres droites (programme ETAPE) [DUF 85], [LES 96]. Des développements récents concernant des poutres courbes [CAS 97] et des plaques [FLE 97] ont été réalisés.

Dans cet article, nous appliquons dans un premier temps cette méthode à l'analyse de la réponse harmonique d'une coque axisymétrique non amortie. Pour cela, nous développons un élément continu de coque mince axisymétrique en construisant numériquement sa matrice de raideur dynamique. Pour traiter des applications industrielles de type tuyauteries planes, nous développons dans un second temps un élément continu de coude (tuyau cintré). Les courbes de réponses obtenues après assemblage des éléments développés sont comparées à des résultats d'essais et à des résultats obtenus par des calculs en éléments finis.

## 2. Élément continu de coque axisymétrique

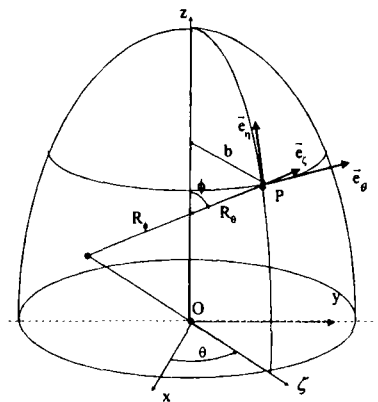
### 2.1. Introduction

Dans ce paragraphe, nous cherchons à déterminer la réponse harmonique d'une coque axisymétrique par une approche « élément continu ». Les équations du mouvement et les lois de comportement d'une coque mince axisymétrique permettent d'établir un système d'équations différentielles du premier ordre reliant les composantes généralisées des déplacements et des efforts le long de la coque après décomposition de celles-ci en séries de Fourier [KAL 64]. Ces composantes sont souvent qualifiées de variables d'état, leur répartition le long de la coque axisymétrique obéit à un système différentiel dont les équations sont plus ou moins couplées selon la complexité de la théorie de coque retenue.

Nous présentons une méthode permettant de développer un élément continu, dit numérique, issu du calcul de la solution « exacte » de ce système différentiel. Le caractère « exact » de la solution du problème de mécanique des milieux continus est indispensable car il s'agit de conserver la notion d'élément continu et les avantages qui y sont associés. L'aspect numérique de la méthode intervient dans le sens où, contrairement aux éléments continus de type poutres droites, aucune expression analytique des fonctions caractéristiques ne sera établie. Le calcul des coefficients de la matrice de raideur dynamique est réalisé par un algorithme sensé produire une valeur « exacte » de ces coefficients à chaque pulsation  $\omega$  de la sollicitation. Le caractère « exact » des coefficients permet alors de qualifier ce type d'élément de continu.

**2.2. Géométrie et équations de base**

La position d'un point  $P$  (fig.1) de la surface moyenne de la coque axisymétrique est repérée par ses coordonnées curvilignes  $\eta, \theta, \zeta$ . Le rayon en  $P$  de la surface moyenne est noté  $b$ , la longueur d'une génératrice de la coque  $L$  et son épaisseur  $h$ . Le système local orthonormé en  $P$  ( $\vec{e}_\eta, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\zeta$ ) est représenté sur la figure 1.



**Figure 1.** Coque axisymétrique

Nous nous plaçons dans le cadre de l'étude des coques minces en petits déplacements et nous développons la théorie « classique » de Love-Kirchhoff en considérant que le matériau qui constitue les coques étudiées est élastique, homogène et isotrope. Compte tenu de ces hypothèses, les équations qui gouvernent le mouvement de la surface moyenne d'une coque axisymétrique s'écrivent [LAR91] :

**Equations de déformations :**

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{b} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{u_\eta \cos \phi}{b} + \frac{w \sin \phi}{b} \quad [2.a]$$

$$\beta_\eta = \frac{u_\eta}{R_\phi} - \frac{\partial w}{\partial \eta} \quad [2.e]$$

$$\varepsilon_\eta = \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{w}{R_\phi} \quad [2.b]$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{b} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} - \frac{\beta_\eta \cos \phi}{b} \quad [2.f]$$

$$\gamma_{\eta\theta} = \frac{1}{b} \frac{\partial u_\eta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \eta} + \frac{u_\theta \cos \phi}{b} \quad [2.c]$$

$$\kappa_\eta = \frac{\partial \beta_\eta}{\partial \eta} \quad [2.g]$$

$$\beta_\theta = \frac{u_\theta \sin \phi}{b} - \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad [2.d]$$

$$\tau = \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \eta} + \frac{1}{b} \frac{\partial \beta_\eta}{\partial \theta} + \frac{\beta_\theta \cos \phi}{b} \quad [2.h]$$

**Equations du mouvement :**

$$\frac{1}{b} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_\eta}{\partial \eta} - (T_\eta + T_\theta) \frac{\cos \phi}{b} + \frac{Q_\theta \sin \phi}{b} - \rho h \frac{\partial^2 u_\theta(t)}{\partial t^2} = 0 \quad [3.a]$$

$$\frac{\partial N_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{b} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + (N_\theta - N_\eta) \frac{\cos \phi}{b} + \frac{Q_\eta}{R_\phi} - \rho h \frac{\partial^2 u_\eta(t)}{\partial t^2} = 0 \quad [3.b]$$

$$\frac{1}{b} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_\eta}{\partial \eta} - \frac{N_\theta \sin \phi}{b} - \frac{N_\eta}{R_\phi} - \frac{Q_\eta \cos \phi}{b} - \rho h \frac{\partial^2 w(t)}{\partial t^2} = 0 \quad [3.c]$$

$$\frac{\partial M_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{b} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + (M_\theta - M_\eta) \frac{\cos \phi}{b} - Q_\eta = 0 \quad [3.d]$$

$$\frac{1}{b} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} - (U_\eta + U_\theta) \frac{\cos \phi}{b} - Q_\theta = 0 \quad [3.e]$$

**Equations d'élasticité :**

$$N_z = K[\varepsilon_z + \nu \varepsilon_\theta] \quad [4.a]$$

$$M_z = D[\kappa_z + \nu \kappa_\theta] \quad [4.d]$$

$$N_\theta = K[\nu \varepsilon_z + \varepsilon_\theta] \quad [4.b]$$

$$M_\theta = D[\nu \kappa_z + \kappa_\theta] \quad [4.e]$$

$$T_\theta = T_z = Gh\gamma_{z\theta} \quad [4.c]$$

$$U_\theta = U_z = \frac{Gh^3 \tau}{12} \quad [4.f]$$

$$\text{avec } K = \frac{Eh}{1-\nu^2}$$

$$\text{avec } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Dans le cadre de l'étude de la réponse harmonique d'une telle structure, les inconnues (déplacements et forces généralisés) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} u(\eta, \theta, t) &= u(\eta, \theta) \cos(\omega t) \\ f(\eta, \theta, t) &= f(\eta, \theta) \cos(\omega t) \end{aligned} \tag{5}$$

La coque étant axisymétrique, ces inconnues sont décomposées en séries de Fourier [KAL 64] :

$$\{u(\eta, \theta, \omega)\} = \sum_{m=0}^{M-1} \{u_m(\eta, \omega)\} \begin{Bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{Bmatrix} \quad \{f(\eta, \theta, \omega)\} = \sum_{m=0}^{M-1} \{f_m(\eta, \omega)\} \begin{Bmatrix} \cos(m\theta) \\ \sin(m\theta) \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Nous choisissons comme variables d'état pour le mode  $m$  les coefficients de Fourier des variables qui interviennent dans les conditions aux limites sur le côté d'abscisse  $\eta = Cte$ . Ces coefficients sont regroupés dans le vecteur d'état  $\{y_m(\eta, \omega)\}^T = \{w_m, u_{\eta m}, u_{\theta m}, \beta_{\eta m}, Q_m, N_{\eta m}, T_m, M_{\eta m}\}$

où  $T$  et  $Q$  sont les classiques efforts équivalents de Kirchhoff définis par :

$$\begin{aligned} T &= T_\eta + \frac{U_\eta \sin \phi}{b} \tag{7.a} \\ Q &= Q_\eta + \frac{1}{b} \frac{\partial U_\eta}{\partial \theta} \tag{7.b} \end{aligned}$$

Dans le cas des coques axisymétriques, le découplage des harmoniques de Fourier permet de réduire par élimination le système d'équations [1] à [7] à  $M$  systèmes linéaires différentiels homogènes de la forme [LES 98] :

$$\frac{d\{y_m(\eta, \omega)\}}{d\eta} = [A_m(\eta, \omega)]\{y_m(\eta, \omega)\} \tag{8}$$

où les termes non nuls de la matrice  $[A_m(\eta, \omega)]$  sont donnés en annexe 2.

**2.3. Construction d'une matrice de transfert dynamique**

$\eta$  et  $\eta'$  étant deux abscisses curvilignes quelconques d'une génératrice de la coque étudiée, nous définissons une matrice  $[T_m(\eta \rightarrow \eta', \omega)]$ , dite matrice de transfert dynamique, permettant le calcul du vecteur d'état  $\{y_m(\eta', \omega)\}$  à partir du vecteur d'état  $\{y_m(\eta, \omega)\}$  :

$$\{y_m(\eta', \omega)\} = [T_m(\eta \rightarrow \eta', \omega)]\{y_m(\eta, \omega)\} \tag{9}$$

Nous noterons  $[T_m(\eta, \omega)]$  la matrice telle que :

$$\{y_m(\eta, \omega)\} = [T_m(\eta, \omega)]\{y_m(0, \omega)\} \tag{10}$$

Nous avons immédiatement :  $[T_m(0, \omega)] = [I]$  : matrice identité. La dimension de  $[T_m(\eta, \omega)]$  dépend évidemment de la dimension du vecteur d'état  $\{y_m(\eta, \omega)\}$  liée à la théorie de coque choisie.

La relation [10] utilisée dans [8] conduit à :

$$\frac{d[T_m(\eta, \omega)]\{y_m(0, \omega)\}}{d\eta} = [A_m(\eta, \omega)][T_m(\eta, \omega)]\{y_m(0, \omega)\} \tag{11}$$

ou encore

$$\frac{d[T_m(\eta, \omega)]}{d\eta} = [A_m(\eta, \omega)][T_m(\eta, \omega)] \tag{12}$$

La matrice de transfert dynamique  $[T_m(\eta, \omega)]$  satisfait donc l'équation différentielle linéaire [8] paramétrée par  $\omega$  et définie par la matrice  $[A_m(\eta, \omega)]$ .

Pour déterminer cette matrice de transfert dynamique, nous allons résoudre l'équation [12]. Les conditions aux limites nécessaires à la résolution d'une telle équation s'expriment par :  $[T_m(0, \omega)] = [I]$ . La solution du système [12], équation différentielle du premier ordre, est alors donnée par [FRA 89] :

$$[T_m(\eta, \omega)] = e^{[\bar{A}_m(\eta, \omega)]} \quad \text{avec} \quad [\bar{A}_m(\eta, \omega)] = \int_0^\eta [A_m(x, \theta)] dx \quad [13]$$

où la matrice différentielle  $[\bar{A}_m(\eta, \omega)]$  tient compte des variations de  $[A_m(\eta, \omega)]$  le long de la génératrice de la coque (si  $b$  n'est pas constant, par exemple).

Différentes méthodes de calcul de cette expression sont envisageables ; l'une d'entre elles consiste à utiliser les valeurs propres et les vecteurs propres de  $[\bar{A}_m(\eta, \omega)]$ . Si  $[\bar{A}_m(\eta, \omega)]$  possède 8 valeurs propres  $\lambda_i(\eta, \omega)$  distinctes,  $[\bar{A}_m(\eta, \omega)]$  est diagonalisable et il existe 8 vecteurs propres, vecteurs colonnes d'une matrice  $[Q(\eta, \omega)]$  tels que :

$$[T_m(\eta, \omega)] = e^{[\bar{A}_m(\eta, \omega)]} = [Q(\eta, \omega)] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(\eta, \omega)} & & & 0 \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & e^{\lambda_8(\eta, \omega)} \end{bmatrix} [Q(\eta, \omega)]^{-1} \quad [14]$$

Remarquons que même lorsque la matrice  $[\bar{A}_m(\eta, \omega)]$  est réelle, les valeurs propres sont à rechercher dans  $C$ . Dans ce cas, les valeurs propres complexes sont deux à deux conjuguées. Le calcul de la matrice de transfert dynamique  $[T_m(\eta, \omega)]$  se ramène donc à la recherche dans  $C$  des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice différentielle  $[\bar{A}_m(\omega)]$ . C'est cette recherche qui est réalisée de façon numérique, l'excellente précision des valeurs obtenues par un algorithme QR et une itération inverse permettent la construction d'une matrice de transfert dynamique « exacte ».

Pour calculer la matrice de raideur dynamique, il sera utile de définir une matrice de transfert particulière dénommée par la suite  $[T_m(\omega)]$ . Cette matrice est fonction de la pulsation  $\omega$  et est définie par :

$$[T_m(\omega)] = [T_m(0 \rightarrow L, \omega)] = [T_m(L, \omega)] \quad \text{et par} \quad \{y_m(L, \omega)\} = [T_m(\omega)]\{y_m(0, \omega)\} \quad [15]$$

$L$  désignant, rappelons le, la longueur d'une génératrice de la coque axisymétrique.



L'expression [14] s'écrit alors :

$$[T_m(\omega)] = e^{[\bar{A}_m(\omega)]} = [Q(\omega)] \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(\omega)} & & & 0 \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n(\omega)} \end{bmatrix} [Q(\omega)]^{-1}$$

avec 
$$[\bar{A}_m(\omega)] = \int_0^L [A_m(\eta, \theta)] d\eta \tag{16}$$

**2.4. Construction de la matrice de raideur dynamique**

Le passage de la matrice de transfert en  $L$  à la matrice de raideur dynamique est d'un point de vue théorique relativement simple. Il s'agit d'une part d'écrire les relations liant torseurs des efforts internes aux extrémités  $\{F_m(0), F_m(L)\}$  et torseurs des efforts extérieurs en ces mêmes extrémités notés  $\{F_{m\ ext}(0), F_{m\ ext}(L)\}$ . D'autre part, il suffit de décomposer la matrice de transfert en 4 blocs ainsi que les vecteurs d'état en  $\eta = 0$  et  $\eta = L$ .

Si l'on retient comme définition des efforts internes, l'action de la partie à parcourir sur la partie parcourue, nous avons :

$$\{F_m(0)\} = \{-F_{m\ ext}(0)\} \quad \text{et} \quad \{F_m(L)\} = \{F_{m\ ext}(L)\} \tag{17}$$

$[T_m(\omega)]$  est décomposée en 4 blocs :

$$[T_m(\omega)] = \begin{bmatrix} T_{11}(\omega) & T_{12}(\omega) \\ T_{21}(\omega) & T_{22}(\omega) \end{bmatrix} \tag{18}$$

Si nous posons  $\{U_m\}^T = \{w_m, u_{\eta m}, u_{\theta m}, \beta_{\eta m}\}$  et  $\{F_m\}^T = \{Q_m, N_{\eta m}, T_m, M_{\eta m}\}$ , les vecteurs d'états associés aux deux extrémités de la coque s'écrivent :

$$\{y_m(0, \omega)\} = \begin{Bmatrix} U_m(0) \\ F_m(0) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{y_m(L, \omega)\} = \begin{Bmatrix} U_m(L) \\ F_m(L) \end{Bmatrix} \tag{19}$$

et l'équation [15] devient :

$$\begin{Bmatrix} U_m(L) \\ F_{m\text{ext}}(L) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11}(\omega) & T_{12}(\omega) \\ T_{21}(\omega) & T_{22}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m(0) \\ -F_{m\text{ext}}(0) \end{Bmatrix} \quad [20]$$

La matrice de raideur dynamique  $[D_m(\omega)]$  est alors obtenue par manipulation matricielle, dans le cas où  $[T_{12}(\omega)]$  est inversible :

$$[D_m(\omega)] = \begin{bmatrix} T_{12}^{-1}(\omega)T_{11}(\omega) & -T_{12}^{-1}(\omega) \\ T_{21}(\omega) - T_{22}(\omega)T_{12}^{-1}(\omega)T_{11}(\omega) & T_{22}(\omega)T_{12}^{-1}(\omega) \end{bmatrix} \quad [21]$$

La symétrie de la matrice de raideur dynamique [PAS 89] permet d'obtenir une expression plus simple du point de vue de sa mise en œuvre numérique ; on a :

$$[D_m(\omega)] = \begin{bmatrix} T_{12}^{-1}(\omega)T_{11}(\omega) & -T_{12}^{-1}(\omega) \\ -T_{12}^{-1}(\omega) & T_{22}(\omega)T_{12}^{-1}(\omega) \end{bmatrix} \quad [22]$$

Nous avons obtenu la **matrice de raideur dynamique** qui caractérise un **élément continu de coque axisymétrique**. L'assemblage de différents éléments (cylindres, troncs de cônes, etc.) se traduit numériquement par un assemblage classique (de type éléments finis) des matrices de raideur dynamique correspondantes. La matrice globale ainsi obtenue est ensuite utilisée dans la résolution harmonique par harmonique du système [1] ; les solutions générales en déplacements sont alors recomposées à partir des équations [6].

## 2.5. Validation de l'élément développé

### 2.5.1. Etude d'un cylindre de 6 m de long

Le premier exemple d'application concerne l'étude dynamique d'une tuyauterie vapeur constituée d'un tube en acier de 6m de long (fig.2). La tuyauterie est suspendue « basse fréquence » par des élingues tubulaires en Nylon positionnées aux extrémités. Ceci est équivalent, pour le calcul, à des conditions de déplacement libre – libre. L'extrémité du tube est soumise à une force harmonique radiale afin d'exciter les modes de flexion et d'ovalisation du tube.

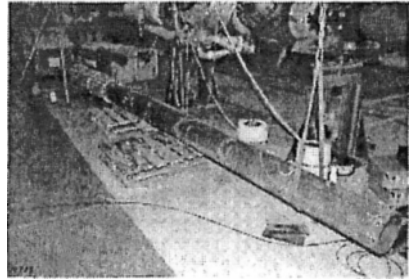


Figure 2. Tuyauterie vapeur

Dans le tableau 1, les valeurs des fréquences aux pics de résonance obtenues lors d'un essai expérimental sont comparées aux valeurs obtenues par élément continu, par éléments finis de coques axisymétriques et par éléments finis de coques minces classiques. La forme des modes est entièrement décrite par le nombre d'ondes axiales  $N_{oa}$  et le nombre d'ondes circonférentielles  $N_{oc}$ .

N° de fréquence	$N_{oa} / N_{oc}$	Essai (hz)	1 élément continu (hz)	400 E.F. axis. (hz)	8000 E.F. coques (hz)
7	1 / 0	41.8	<b>42.1</b>	41.9	42.0
9	2 / 0	113.1	<b>113.4</b>	113.3	113.5
11	3 / 0	215.9	<b>216.1</b>	216.4	216.5
15	4 / 0	344.8	<b>344.5</b>	346.0	344.5
17	5 / 0	495.8	<b>494.9</b>	497.5	497.5
19	1 / 2	659	<b>620.1</b>	621.6	625.5
21	2 / 2	662	<b>622.2</b>	623.5	626.5
23	3 / 2	668	<b>626.3</b>	627.2	630.0
25	4 / 2	671	<b>633.9</b>	633.5	636.0
27	5 / 2	685	<b>646.4</b>	644.9	646.0
29	6 / 0	692	<b>661.0</b>	666.5	666.0
31	1 / 3	706	<b>665.7</b>	663.3	663.5
33	2 / 3	712	<b>693.6</b>	690.6	689.0
35	3 / 3	741	<b>731.6</b>	728.4	725.5

$L = 5,97\text{m}$ ,  $b = 0.116\text{m}$ ,  $h = 12.5\text{mm}$ ,  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$

Tableau 1. Modes de flexion et d'ovalisation de la tuyauterie

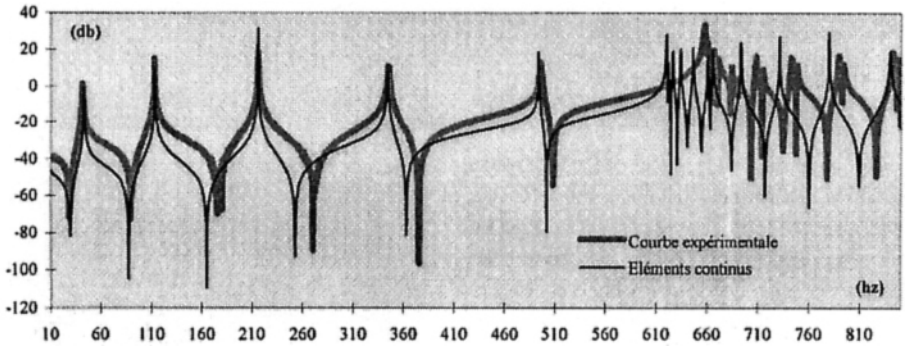


Figure 3a. Réponses harmoniques  $\gamma/F$  du cylindre : éléments continus – essai

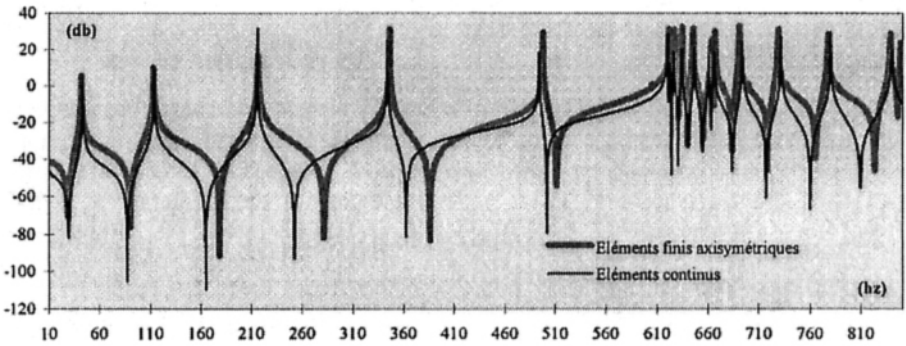


Figure 3b. Réponses harmoniques  $\gamma/F$ : éléments continus – éléments finis

Sur la figure 3a où sont comparées les courbes d'inertance expérimentale et élément continu, nous notons une bonne concordance sur les cinq premiers modes de flexion. Ensuite, les écarts relatifs aux modes d'ovalisation (6%) sont sans doute dus au fait que le tube testé n'est pas parfaitement circulaire sur toute sa longueur. Par contre, nous remarquons sur la figure 3b que l'écart par rapport aux éléments finis de coques axisymétriques est inférieur à 1%.

### 2.5.2. Etude d'un assemblage cône - cylindre

Considérons maintenant l'assemblage libre – libre d'un élément cylindrique et d'un élément tronconique dont les caractéristiques sont les suivantes :

Cylindre	Cône	Matériau
$L = 0.1m$	$H = 0.1m$	$E = 2.1 \times 10^{11} N/m^2$
$b = 0.4m$	$b = 0.4m$	$\nu = 0.3$
$h = 2mm$	$h = 2mm, \phi = 60^\circ$	$\rho = 7800 kg/m^3$

L'extrémité libre de la partie cylindrique est soumise à une force harmonique radiale (fig.4) afin d'exciter les modes d'ovalisation de la structure. Après assemblage des matrices de raideur dynamique du cylindre et du tronc de cône, le déplacement radial au point d'excitation, calculé fréquence à fréquence, permet de construire la courbe de flexibilité du système.

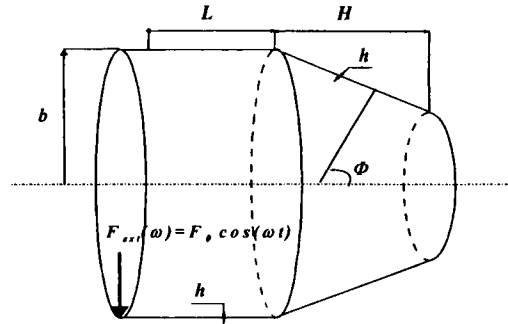


Figure 4. Assemblage cône - cylindre

Le tableau 2 présente une comparaison des valeurs des fréquences aux pics de résonance obtenues d'une part par les 2 éléments continus assemblés et d'autre part par un calcul modal éléments finis. Tous les modes associés sont des modes d'ovalisation. Les courbes de flexibilité associées sont présentées sur la figure 5.

N° de fréquence	400 E.F. axis (hz)	2 éléments continus (hz)	N° de fréquence	400 E.F. axis (hz)	2 éléments continus (hz)
1	18.5	19.0	15	159.0	158.5
3	27.5	29.0	17	179.0	180.5
5	50.5	51.0	19	210.0	206.0
7	69.0	73.0	21	228.0	229.5
9	90.0	91.0	23	271.0	269.5
11	113.5	115.0	25	281.0	282.0
13	133.5	134.5	27	340.0	339.5

Tableau 2. Comparaison E.C. – E.F. des valeurs des fréquences propres

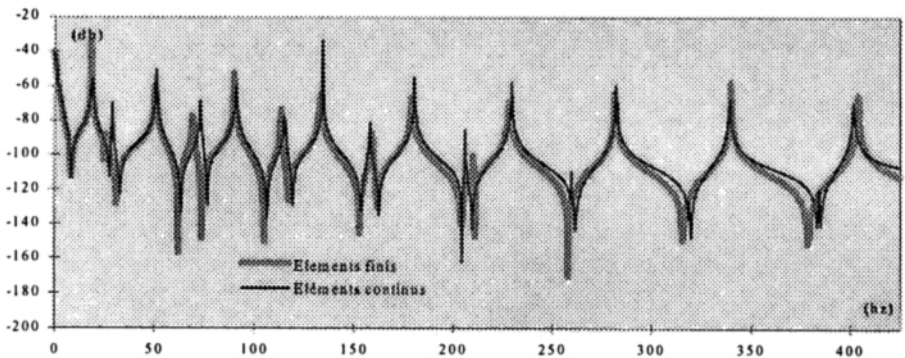


Figure 5. Courbes de flexibilité  $\psi_F$  de l'assemblage cône – cylindre

### 3. Elément continu de coude (tuyau cintré)

#### 3.1. Géométrie et équations de base

Pour traiter des applications industrielles de type tuyauteries planes, nous développons dans un second temps un élément continu de coque mince tridimensionnel de type coude (tuyau cintré).

Nous appelons coude ou tuyau cintré une surface engendrée par une section droite circulaire dont le centre se déplace suivant un cercle plan (C) (fig.6). Nous nous plaçons encore dans le cadre de l'étude des coques minces en petits déplacements et nous développons la théorie de Love-Kirchhoff. Le matériau qui constitue le coude est élastique, homogène et isotrope.

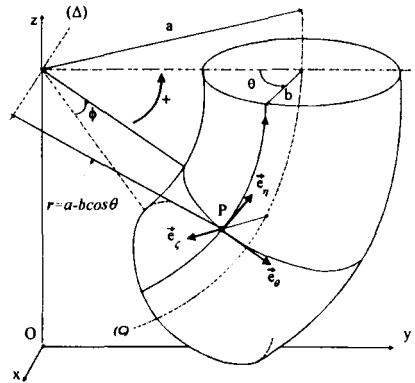


Figure 6. Coude

Ceci étant, les relations d'élasticité restent identiques aux équations [4] et les équations qui gouvernent le comportement dynamique de la surface moyenne du coude s'écrivent [KAL 73] :

Equations de déformations :

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{b} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{w}{b} \quad [23.a]$$

$$\beta_\eta = -\frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{u_\eta \cos \theta}{r} \quad [23.e]$$

$$\epsilon_\eta = \frac{\partial u_\eta}{\partial \eta} + \frac{u_\theta \sin \theta}{r} - \frac{w \cos \theta}{r} \quad [23.b]$$

$$\kappa_\theta = \frac{1}{b} \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} \quad [23.f]$$

$$\gamma_{\eta\theta} = \frac{1}{b} \frac{\partial u_\eta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial \eta} - \frac{u_\eta \sin \theta}{r} \quad [23.c]$$

$$\kappa_\eta = \frac{\partial \beta_\eta}{\partial \eta} + \frac{\beta_\theta \sin \theta}{r} \quad [23.g]$$

$$\beta_\theta = \frac{u_\theta}{b} - \frac{1}{b} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad [23.d]$$

$$\tau = \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \eta} + \frac{1}{b} \frac{\partial \beta_\eta}{\partial \theta} - \frac{\beta_\eta \sin \theta}{r} \quad [23.h]$$

**Equations du mouvement :**

$$\frac{1}{b} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial T_\eta}{\partial \eta} + \frac{N_\theta \sin \theta}{r} - \frac{N_\eta \sin \theta}{r} + \frac{Q_\theta}{b} - \rho h \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} = 0 \quad [24.a]$$

$$\frac{\partial N_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{b} \frac{\partial T_\theta}{\partial \theta} + \frac{2 T_\eta \sin \theta}{r} - \frac{Q_\eta \cos \theta}{r} - \rho h \frac{\partial^2 u_\eta}{\partial t^2} = 0 \quad [24.b]$$

$$\frac{1}{b} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial Q_\eta}{\partial \eta} - \frac{N_\theta}{b} + \frac{N_\eta \cos \theta}{r} + \frac{Q_\theta \sin \theta}{r} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad [24.c]$$

$$\frac{1}{b} \frac{\partial U_\eta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_\eta}{\partial \eta} + \frac{2 U_\eta \sin \theta}{r} - Q_\eta = 0 \quad [24.d]$$

$$\frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} + \frac{1}{b} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{M_\theta \sin \theta}{r} - \frac{M_\eta \sin \theta}{r} - Q_\theta = 0 \quad [24.e]$$

Une fois les variables d'espace et de temps séparées (Eqs. [5]), les équations de comportement du coude [23], [24] et [4] se réduisent à un système d'équations différentielles de la forme [LES 98] :

$$\frac{d\{y(\eta, \theta, \omega)\}}{d\eta} = [A(\theta, \omega)]\{y(\eta, \theta, \omega)\} \quad [25]$$

où les termes non nuls de la matrice  $[A(\theta, \omega)]$  sont donnés en annexe 3.

Dans le vecteur d'état  $\{y(\eta, \theta, \omega)\}$  sont regroupées les 8 variables qui interviennent dans les conditions aux limites sur le côté d'abscisse  $\eta = Cte$  :

$$\{y(\eta, \theta, \omega)\}^T = \{w, u_\eta, u_\theta, \beta_\eta, Q, N_\eta, T, M_\eta\} \quad [26]$$

avec  $T = T_\eta + \frac{U_\eta}{b}$  [27.a]

et  $Q = Q_\eta + \frac{1}{b} \frac{\partial U_\eta}{\partial \theta}$  [27.b]

La technique développée pour le coude diffère un peu de celle utilisée pour l'élément axisymétrique dans la mesure où cette fois-ci, il n'est plus possible de séparer les harmoniques de Fourier et de résoudre le système [25] harmonique par harmonique.

3.2. Construction de la matrice de raideur dynamique

Si l'on considère un ensemble de  $M$  points pivots répartis sur chaque frontière du coude (fig.7), la décomposition en séries de Fourier des variables d'état associées aux  $M$  points (Eqs [6]) s'écrit sous la forme matricielle suivante :

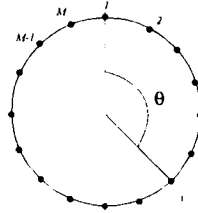


Figure 7. Discrétisation des frontières

$$\{Y(\eta, \theta, \omega)\} = [S(\theta)]\{\tilde{\alpha}(\eta, \omega)\} \tag{28}$$

où le vecteur  $\{Y\}$ , de taille  $8 \times M$ , contient les efforts et les déplacements associés aux  $M$  points pivots et où le vecteur  $\{\tilde{\alpha}\}$  contient l'ensemble des coefficients de Fourier pour les  $M$  harmoniques considérées. D'autre part, le système différentiel [25] s'écrit pour l'ensemble des points pivots :

$$\frac{d\{Y(\eta, \theta, \omega)\}}{d\eta} = [A(\theta, \omega)]\{Y(\eta, \theta, \omega)\} \tag{29}$$

L'introduction de l'expression [28] dans le système [29] conduit, après intégration en  $\theta$  des variables d'état, au système suivant :

$$\frac{d\{\tilde{\alpha}(\eta, \omega)\}}{d\eta} = [\tilde{A}(\omega)]\{\tilde{\alpha}(\eta, \omega)\} \quad \text{avec} \quad [\tilde{A}] = [S]^{-1}[A][S] \tag{30}$$

système qui nous permet de construire la matrice de transfert  $[T(\omega)]$  comme précédemment, c'est-à-dire après calcul des valeurs et vecteurs propres de  $[\tilde{A}(\omega)]$  :

$$[T(\omega)] = e^{[\tilde{A}(\omega)]} \tag{31}$$

puis la matrice de raideur dynamique  $[D(\omega)]$  à l'aide de l'expression [22], matrice qui caractérise l'élément continu de coude.



### 3.3. Validation de l'élément développé

#### 3.3.1. Etude d'un coude à 45°

Nous considérons dans cet exemple un élément de coude dont les caractéristiques géométriques sont les suivantes:  $\phi = 45^\circ$ ,  $b = 0.3\text{m}$ ,  $h = 3\text{mm}$ ,  $a = 1\text{m}$ . Les caractéristiques de l'acier qui le constitue sont les suivantes :  $E = 2.07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ ,  $\nu = 0.3$  et  $\rho = 7770 \text{ kg/m}^3$ . Ce coude, dont les deux extrémités sont libres, est soumis à une force harmonique radiale.

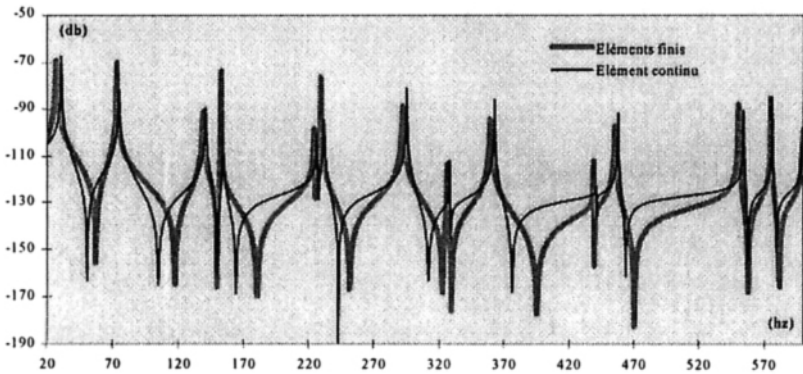


Figure 8a. Flexibilité radiale du coude à 45° en basses fréquences.

Sur le graphique présenté en figure 8a sont comparées les courbes de flexibilité radiale obtenues en basses fréquences par l'élément continu de coude et par un modèle constitué de 16000 éléments finis de coques minces. Le nombre d'harmoniques prises en compte dans ce calcul est  $M = 20$ .

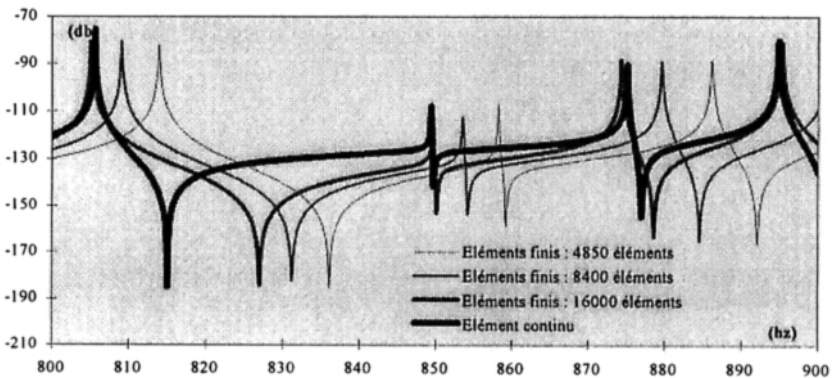


Figure 8b. Flexibilité radiale du coude à 45° : étude de convergence en moyennes fréquences

Sur la figure 8b, différents modèles éléments finis associés à des maillages plus ou moins fins sont comparés en moyennes fréquences à la solution obtenue par élément continu. Nous remarquons la lente convergence des courbes obtenues par éléments finis vers la courbe obtenue par élément continu. Sachant qu'il faut modéliser ce coude à  $45^\circ$  avec au moins 16000 éléments finis de coques minces pour obtenir une précision égale à celle obtenue par un seul élément continu, on imagine le nombre d'éléments finis qu'il faudrait pour étudier une tuyauterie complète avec la même précision !

### 3.3.2. Etude d'un assemblage coude - cylindre

L'assemblage étudié est constitué d'un élément de coude et d'un élément cylindrique. L'extrémité de l'élément cylindrique est excitée par une force harmonique radiale. Les caractéristiques de l'assemblage, dont les deux extrémités sont libres, sont les suivantes :

Cylindre	Coude	Matériau
$L = 0.2\text{m}$	$a = 1\text{m}$	$E = 2.07 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
$b = 0.4\text{m}$	$b = 0.4\text{m}$	$\nu = 0.3$
$h = 2\text{mm}$	$h = 2\text{mm}, \phi = 11,5^\circ$	$\rho = 7770 \text{ kg/m}^3$

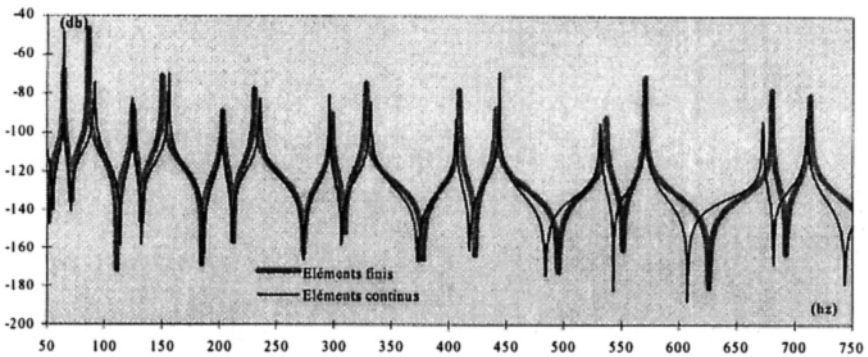


Figure 9. Courbes de flexibilité E.F. - E.C. de l'assemblage coude - cylindre

Sur la figure 9 sont comparées les courbes de réponse radiale obtenues par éléments continus ( $M = 20$ ) et par un modèle composé de 8000 éléments finis de coques minces. Les courbes concordent bien dans toute la plage de fréquences étudiées.

#### 4. Conclusion

Nous avons présenté dans cet article, en analyse dynamique, un nouveau type d'élément appelé élément continu, basé sur les solutions quasi-exactes des équations du mouvement. Cet élément est en fait la matrice de raideur dynamique d'une sous-structure, matrice dont les coefficients sont fonctions de la fréquence. Nous avons appliqué cette méthode à l'analyse de la réponse harmonique d'une structure coque axisymétrique non amortie. Pour cela, nous avons développé un élément continu de coque mince axisymétrique en construisant numériquement sa matrice de raideur dynamique. Les courbes de réponse obtenues par une résolution directe fréquence à fréquence ont été comparées à des résultats obtenus par éléments finis. Nous montrons que la méthode permet de s'affranchir des problèmes de finesse de maillage. Son domaine d'application peut alors être étendu aux fréquences élevées. L'assemblage de plusieurs éléments (cylindres, troncs de cônes) a été validé par comparaison à des résultats expérimentaux et éléments finis.

Pour traiter des applications industrielles de type tuyauteries planes, nous avons développé un deuxième élément continu de coque mince de type coude (tuyau cintré). Les courbes de réponse obtenues par éléments continus et par éléments finis concordent bien. En moyennes fréquences, nous mettons même en évidence, pour des densités de maillage élevées, la convergence des résultats éléments finis vers la solution élément continu. L'assemblage d'éléments cylindriques et coudés, également validé par comparaison à des résultats éléments finis, permet d'envisager l'étude d'une tuyauterie complète (sans bride ni piquage).

Plus généralement, nous avons montré que ces éléments continus de coque constituent une méthode efficace pour la prévision du comportement dynamique de structures axisymétriques et de tuyauteries planes. L'intérêt de son utilisation réside dans les points suivants :

- une discrétisation réduite à son minimum,
- des comparaisons calculs/mesures facilitées par l'obtention directe de courbes de réponse et par une approche calcul très similaire à l'approche mesure,
- la possibilité d'introduire dans le calcul des caractéristiques matériau et d'amortissement fonctions de la fréquence,
- un domaine d'application étendu aux fréquences élevées,
- une précision des résultats quasi-parfaite,
- des temps de calculs réduits.

Les perspectives d'amélioration de ces travaux concernent :

- la prise en compte du cisaillement dans l'épaisseur de la coque afin d'analyser des modèles orthotropes,
- l'adaptation de l'algorithme de Williams et Wittricks [WIL 70] pour calculer directement les modes propres de la structure,
- l'étude de la prise en compte dans le modèle d'un fluide interne ou externe.

## 5. Bibliographie

- [BAD 97] BADRAOUI H., DHATT G., HENCHI K., SELIGMANN D., « Calcul exact des valeurs et vecteurs propres en utilisant l'approche des matrices de rigidité exactes », *Actes du 3<sup>e</sup> colloque national en calcul des structures*, vol. 1, pp. 93-100, Giens 1997.
- [CAS 97] CASIMIR J.B., « Eléments continus de type poutre (étude statique et dynamique d'assemblages de poutres planes ou gauches) », Thèse de doctorat du Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris, 1997.
- [DUF 85] DUFORET C. « Etude dynamique d'assemblages de poutres en moyennes et hautes fréquences », *Acte du 3<sup>e</sup> colloque tendances actuelles en calcul de structures*, pp. 229-246, Bastia 1985.
- [FRA 89] FRANCI M. « Impedance Approach and Periodic Structures », *ESTEC Workshop Proceedings on Modal Representation of Flexible Structures by Continuum Method*, pp. 285-296, Noordwijk, 1989.
- [FLE 97] FLEURET J.S., « Méthode des éléments continus appliquée à la dynamique des plaques », Thèse de doctorat du Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris, 1997.
- [KAL 64] KALNINS A., « Analysis of shells of revolution subjected to symmetrical and non symmetrical loads », *Journal of Applied Mechanics*, pp. 467-476, 1964.
- [KAL 73] KALNINS A., « Stress Analysis of curved tubes », *Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Conference on Pressure Vessels Technology*, San Antonio 1973.
- [LAR 91] LAROZE S., « Mécanique des structures : solides élastiques, plaques et coques (tome 1) - 2<sup>e</sup> édition », *Editions Masson*, 1991.
- [LES 96] LE SOURNE H., DUFORET C., CASIMIR J.B., WINH T., WIELGOSZ C., « Continuous element based computer code and its applications », *ESA International Workshop on Advanced Mathematical Methods in Dynamics of Flexible Bodies*, ESTEC, pp. 259-271, Noordwijk 1996.
- [LES 97] LE SOURNE H., DUFORET C., WIELGOSZ C., « Développement de l'analyse modale et de l'analyse aux chocs dans un logiciel de calcul de structures utilisant une méthode d'éléments continus », *Actes du 3<sup>e</sup> colloque national en calcul des structures*, pp. 533-538, Giens 1997.
- [LES 98] LE SOURNE H., « Développement d'éléments continus de coques axisymétriques et de coudes », Thèse de doctorat de l'Université de Nantes - Ecole Centrale de Nantes, 1998.
- [RIC 77] RICHARD T.H., LEUNG Y.T., « An accurate method in structural vibration », *Journal of Sound and Vibration*, vol. 55 n°3, 1977.
- [PAS 89] PASCAL M., « An Accurate Method of Dynamic Substructuring Using Component Modes », *ESTEC Workshop Proceedings on Modal Representation of Flexible Structures by Continuum Method*, pp. 235-260, Noordwijk 1989.

- [PES 63] PESTEL E.C. LECKIE F.A. « Matrix methods in elastodynamics », *Mc Graw Hill Book Co. Inc New York*, pp. 138-152, 1963.
- [WIE 82] WIELGOSZ C., « Informations exactes données par des méthodes d'éléments finis en mécanique », *Journal de mécanique théorique et appliquée*, vol.1 n°2, pp. 323-329, 1982.
- [WIL 70] WILLIAMS F.W., WITTRICK W.H., « An automatic computational procedure for calculating natural frequencies of skeletal structures », *Int. J. Mech. Science, Pergamon Press*, vol.12, pp. 781-791, 1970.

**Annexe 1 : Notations**

$S$	: surface moyenne de la coque	$N_\eta, N_\theta$	: efforts axial et tangentiel
$P$	: un point quelconque de $S$	$T_\eta, T_\theta$	: efforts de cisaillement
$\eta, \theta, \zeta$	: coordonnées curvilignes	$Q_\eta, Q_\theta$	: efforts tranchants
$u_\eta, u_\theta, w$	: déplacements de P	$M_\eta, M_\theta$	: moments de flexion
$\beta_\eta, \beta_\theta$	: rotations de la normale à $S$	$U_\eta, U_\theta$	: moments de torsion
$a$	: rayon de cintrage du coude	$T, Q$	: efforts de Kirchhoff
$h$	: épaisseur de la coque	$m$	: n° d'harmonique de Fourier
$b$	: rayon moyen de la coque	$M$	: nombre d'harmoniques considérées
$L$	: longueur d'une génératrice	$\omega$	: pulsation
$R_\phi, R_\theta$	: rayons de courbure	$\gamma$	: accélération radiale
$\phi$	: angle décrit par la normale à la surface moyenne et l'axe de révolution pour une coque axisymétrique ou angle d'ouverture pour un coude	$\{y(\omega)\}$	: vecteur d'état
$E$	: module d'Young	$[A(\omega)]$	: opérateur différentiel
$\nu$	: coefficient de Poisson	$\lambda_i$	: valeurs propres de $[A(\omega)]$
$\rho$	: masse volumique	$[Q(\omega)]$	: matrice modale de $[A(\omega)]$
$\sigma_\eta, \sigma_\theta, \tau_{\eta\theta}$	: contraintes	$[S(\theta)]$	: fonctions de forme
$\varepsilon_\eta, \varepsilon_\theta, \gamma_{\eta\theta}$	: déformations de membranes	$[T(\omega)]$	: matrice de transfert
$\kappa_\eta, \kappa_\theta, \tau$	: déformations flexionnelles	$[D(\omega)]$	: matrice de raideur dynamique

**Annexe 2.** Coefficients non nuls de l'opérateur différentiel  $[A_m(\eta, \omega)]$  pour une coque axisymétrique

Remarque : la partie haute les signes  $\pm$  et  $\mp$  rencontrés ci-dessous s'applique lors d'un calcul symétrique, la partie basse lors d'un calcul antisymétrique.

**Lignes 1 et 2**

$$a_{12} = \frac{1}{R_\phi}, \quad a_{14} = -1, \quad a_{21} = -L_3, \quad a_{22} = \frac{\nu}{b} \cos \phi, \quad a_{23} = \mp \frac{\nu m}{b}, \quad a_{26} = \frac{1}{K}$$

$$a_{31} = \mp L_4 \frac{D}{K} \frac{m}{b^3} \sin 2\phi$$

**Ligne 3**

$$a_{32} = \pm \left( \frac{m}{b} - L_2 L_4 \frac{D}{K} \frac{m}{b^2} \sin \phi \right) u_{\eta m}, \quad a_{33} = L_1 L_4 \frac{D}{K} \frac{\sin 2\phi}{2b^2} - \frac{\cos \phi}{b}$$

$$a_{34} = \pm 2L_4 \frac{D}{K} \frac{m}{b^2} \sin \phi, \quad a_{37} = \frac{2}{K(1-\nu)} \left( 1 - L_4 \frac{D}{K} \frac{\sin^2 \phi}{b^2} \right)$$

**Ligne 4**

$$a_{41} = -\frac{\nu m^2}{b^2}, \quad a_{43} = \mp \frac{\nu m}{b^2} \sin \phi, \quad a_{44} = \frac{\nu}{b} \cos \phi, \quad a_{48} = \frac{1}{D}$$

**Ligne 5**

$$a_{51} = D \frac{1-\nu^2}{b^4} m^4 + 2L_4 D \frac{1-\nu}{b^4} \cos^2 \phi m^2 + K \frac{1-\nu^2}{b^2} \sin^2 \phi - \rho h \omega^2$$

$$a_{52} = L_2 L_4 D \frac{1-\nu}{b^3} m^2 \cos \phi - K \frac{1-\nu^2}{2b^2} \sin 2\phi$$

$$a_{53} = \pm \left[ \left( K + \frac{Dm^2}{b^2} \right) \frac{1-\nu^2}{b^2} \sin \phi m - L_1 L_4 D \frac{1-\nu}{b^3} \cos^2 \phi m \right]$$

$$a_{54} = -D \frac{1-\nu}{b^3} m^2 \cos \phi (1 + \nu + 2L_4)$$

$$a_{55} = \frac{\cos \phi}{b}, \quad a_{56} = L_3, \quad a_{57} = \pm L_4 \frac{D}{K} \frac{m}{b^3} \sin 2\phi, \quad a_{58} = \frac{\nu m^2}{b^2}$$

**Ligne 6**

$$a_{61} = -K \frac{1-\nu^2}{2b^2} \sin 2\phi + L_2 L_4 D \frac{1-\nu}{b^3} \cos \phi m^2$$

$$\begin{aligned}
 a_{62} &= K \frac{1-\nu^2}{b^2} \cos^2 \phi + L_2^2 L_4 D \frac{1-\nu}{2b^2} m^2 - \rho h \omega^2 \\
 a_{63} &= \mp \left[ L_1 L_2 L_4 D \frac{1-\nu}{2b^2} m \cos \phi + K \frac{1-\nu^2}{b^2} m \cos \phi \right], \quad a_{64} = - \left[ L_2 L_4 D \frac{1-\nu}{b^2} m^2 \right] \\
 a_{65} &= - \frac{1}{R_\phi}, \quad a_{66} = \frac{1-\nu}{b} \cos \phi, \quad a_{67} = \pm \left[ L_2 L_4 \frac{D \sin \phi}{K} m - \frac{m}{b} \right]
 \end{aligned}$$

**Ligne 7**

$$\begin{aligned}
 a_{71} &= \left( K + \frac{Dm^2}{b^2} \right) \frac{1-\nu^2}{b^2} \sin \phi m - L_1 L_4 D \frac{1-\nu}{b^3} \cos^2 \phi m \\
 a_{72} &= \mp \left[ L_1 L_2 L_4 D \frac{1-\nu}{2b^2} \cos \phi m + K \frac{1-\nu^2}{b^2} \cos \phi m \right] \\
 a_{73} &= L_1^2 L_4 D \frac{1-\nu}{2b^2} \cos^2 \phi + \left( K + \frac{D \sin^2 \phi}{b^2} \right) \frac{1-\nu^2}{b^2} m^2 - \rho h \omega^2 \\
 a_{74} &= \pm \left[ L_1 L_4 D \frac{1-\nu}{b^2} \cos \phi m - D \frac{1-\nu^2}{2b^3} \sin 2\phi m \right], \quad a_{76} = \frac{\nu m}{b} \\
 a_{77} &= \frac{2 \cos \phi}{b} - L_1 L_4 \frac{D \sin 2\phi}{K} \frac{1}{2b^2}, \quad a_{78} = \pm \frac{\nu m}{b^2} \sin \phi
 \end{aligned}$$

**Ligne 8**

$$\begin{aligned}
 a_{81} &= -D \frac{1-\nu}{b^3} \cos \phi m^2 (1 + \nu + 2L_4), \quad a_{82} = - \left[ L_2 L_4 D \frac{1-\nu}{b^2} m^2 \right] \\
 a_{83} &= \pm \left[ D \frac{1-\nu^2}{2b^3} \sin 2\phi m - L_1 L_4 D \frac{1-\nu}{b^2} \cos \phi m \right] \\
 a_{84} &= D \frac{1-\nu^2}{b^2} \cos^2 \phi + 2L_4 D \frac{1-\nu}{b^2} m^2, \quad a_{85} = 1, \quad a_{87} = \mp 2L_4 \frac{D}{K} \frac{m}{b^2} \sin \phi \\
 a_{88} &= \frac{1-\nu}{b} \cos \phi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{avec} \quad L_1 &= L_1(\phi) = \frac{1}{R_\phi} - \frac{\sin \phi}{b} \\
 L_3 &= L_3(\phi) = \frac{1}{R_\phi} + \frac{\nu \sin \phi}{b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_2 &= L_2(\phi) = \frac{1}{R_\phi} + \frac{\sin \phi}{b} \\
 L_4 &= L_4(\phi) = \frac{1}{1 + \frac{D \sin^2 \phi}{K} \frac{1}{b^2}}
 \end{aligned}$$

**Annexe 3. Coefficients non nuls de l'opérateur différentiel  $[A(\omega, \theta)]$  pour le coude**

Dans l'expression de la matrice  $[A(\omega, \theta)]$  présentée en dernière page de cette annexe, nous avons noté  $a_{ij}^{(k)}$  les coefficients multiplicateurs des dérivées  $k^{\text{ième}}$  en  $\theta$  des variables fondamentales ; les expressions analytiques de ces coefficients sont données ci-dessous.

**Ligne 1**

$$a_{12} = -\frac{\cos \theta}{r}, \quad a_{14} = -1$$

**Ligne 2**

$$a_{21} = -\frac{\nu}{b} + \frac{\cos \theta}{r}, \quad a_{23} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad a'_{23} = -\frac{\nu}{b}, \quad a_{26} = \frac{1}{K}$$

**Ligne 3**

$$a_{32} = \left( \frac{\sin \theta}{r} + \frac{L_4}{b} \frac{D}{K} \frac{\sin(2\theta)}{2r^2} \right), \quad a'_{32} = -\left( \frac{1}{b} + \frac{L_1 L_4}{b^2} \frac{D}{K} \right), \quad a_{34} = \frac{L_4}{b} \frac{D}{K} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$a'_{34} = -2 \frac{L_4}{b^2} \frac{D}{K}, \quad a_{37} = \frac{2}{K(1-\nu)} \left( 1 - L_4 \frac{1}{b^2} \frac{D}{K} \right)$$

**Ligne 4**

$$a'_{41} = \frac{1}{b} \frac{\sin \theta}{r}, \quad a''_{41} = \frac{\nu}{b^2}, \quad a_{43} = -\frac{1}{b} \frac{\sin \theta}{r}, \quad a'_{43} = -\frac{\nu}{b^2}, \quad a_{48} = \frac{1}{D}$$

**Ligne 5**

$$a_{51} = K \frac{1-\nu^2}{b^2} - \rho h \omega^2, \quad a''_{51} = D \frac{1-\nu^2}{b^3} \frac{\cos \theta}{r}, \quad a'''_{51} = 2D \frac{1-\nu^2}{b^3} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$a_{51}^{(4)} = D \frac{1-\nu^2}{b^4}, \quad a'_{53} = K \frac{1-\nu^2}{b^2} - D \frac{1-\nu^2}{b^3} \frac{\cos \theta}{r}, \quad a''_{53} = -2D \frac{1-\nu^2}{b^3} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$a_{53}''' = -D \frac{1-\nu^2}{b^4}, \quad a_{56} = \frac{\nu}{b} - \frac{\cos \theta}{r}, \quad a_{58} = \frac{1-\nu}{b} \frac{\cos \theta}{r}, \quad a'_{58} = \frac{1-2\nu}{b} \frac{\sin \theta}{r}$$

$$a''_{58} = -\frac{\nu}{b^2}$$

**Ligne 6**

$$a_{62} = \frac{1}{4} \frac{L_0 L_1 L_2}{b} - \frac{1}{2} \frac{L_0}{b} \frac{\sin \theta}{r} \frac{\sin(2\theta)}{r^2} - \rho h \omega^2, \quad a'_{62} = \frac{1}{2} \frac{L_0 L_1 L_3}{b^2} + \frac{1}{4} \frac{L_0 L_1}{b} \frac{\sin(2\theta)}{r^2}$$



$$\begin{aligned}
 a''_{62} &= \frac{1}{2} \frac{L_0 L_1}{b^3} - \frac{1}{2} \frac{L_0 L_1 \cos \theta}{b^2 r}, & a_{64} &= \frac{1}{2} \frac{L_0 L_1 L_5}{b} - \frac{L_0}{b} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \\
 a'_{64} &= \frac{1}{2} \frac{L_0 L_1 \sin \theta}{b r} + 2 \frac{L_0 \sin \theta}{b r}, & a''_{64} &= -\frac{L_0 L_1}{b^2}, & a_{65} &= \frac{\cos \theta}{r} \\
 a_{67} &= 2 \frac{L_4 \sin \theta D}{b^2 r K} - 2 \frac{\sin \theta}{r}, & a'_{67} &= -\left( \frac{1}{b} + \frac{L_1 L_4 D}{b^2 K} \right)
 \end{aligned}$$

**Ligne 7**

$$\begin{aligned}
 a_{71} &= -K \frac{1-\nu^2}{b^2} \frac{\sin \theta}{r}, & a'_{71} &= -K \frac{1-\nu^2}{b^2}, & a''_{71} &= D \frac{1-\nu^2}{b^3} \frac{\sin \theta}{r}, & a''_{71} &= D \frac{1-\nu^2}{b^4} \\
 a_{73} &= -\rho h \omega^2, & a'_{73} &= -\left( K + \frac{D}{b^2} \right) \frac{1}{b} (1-\nu^2) \frac{\sin \theta}{r}, & a''_{73} &= -\left( K + \frac{D}{b^2} \right) \frac{1}{b^2} (1-\nu^2) \\
 a_{76} &= (1-\nu) \frac{\sin \theta}{r}, & a'_{76} &= -\frac{\nu}{b}, & a_{78} &= \frac{1-\nu}{b} \frac{\sin \theta}{r}, & a'_{78} &= -\frac{\nu}{b^2}
 \end{aligned}$$

**Ligne 8**

$$\begin{aligned}
 a_{82} &= \frac{1}{2} \frac{L_0 L_2}{b} + L_0 \frac{\sin \theta \sin(2\theta)}{r r^2}, & a'_{82} &= \frac{L_0 L_3}{b^2} + \frac{1}{2} \frac{L_0 \sin(2\theta)}{b} - \frac{L_0 L_1 \sin \theta}{b r} \\
 a''_{82} &= \frac{L_0}{b^3} - \frac{L_0 \cos \theta}{b^2 r}, & a_{84} &= \frac{L_0 L_5}{b} + L_0 \frac{\sin^2 \theta}{r^2}, & a'_{84} &= \frac{L_0 \sin \theta}{b r} - 2 \frac{L_0 \sin \theta}{b r} \\
 a''_{84} &= -2 \frac{L_0}{b^2}, & a_{85} &= 1, & a_{87} &= -2 \frac{L_4 \sin \theta D}{b r K}, & a'_{87} &= -2 \frac{L_4 D}{b^2 K}
 \end{aligned}$$

avec comme variables intermédiaires :

$$\begin{aligned}
 L_1 &= L_1(\theta) = \frac{\cos \theta}{r} - \frac{1}{b}, & L_2 &= L_2(\theta) = 2 \frac{\cos(2\theta)}{r^2} - 2b \frac{\sin \theta \sin(2\theta)}{r r^2} \\
 L_3 &= L_3(\theta) = -\frac{\sin \theta}{r} \left( 1 + b \frac{\cos \theta}{r} \right), & L_5 &= L_5(\theta) = \frac{\cos \theta}{r} - b \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \\
 L_4 &= \frac{1}{1 + \frac{D}{K} \frac{1}{b^2}} \text{ et } L_0 = L_4 D (1-\nu)
 \end{aligned}$$

