

---

# Etude d'un modèle macroscopique élastoplastique pour les matériaux multicouches

**Manouchehr Nejad Ensan — Isam Shahrour**

*Laboratoire de Mécanique de Lille (URA 1441)  
Ecole Universitaire d'Ingénieurs de Lille (EUDIL)  
Université des Sciences et Technologies de Lille (USTL)  
F-59655 Villeneuve d'Ascq cedex  
Isam. Shahrour@eudil.fr*

---

*RÉSUMÉ. Dans cet article, on présente une étude numérique d'un modèle macroscopique développé pour les matériaux multicouches ayant un comportement élastoplastique. Dans un premier temps, on décrit ce modèle et son intégration dans un code de calcul par éléments finis. Ensuite, on présente une étude numérique des performances de ce modèle en comparant, sur divers exemples de génie civil, ses résultats à ceux des calculs par éléments finis réalisés par une discrétisation à l'échelle microscopique.*

*ABSTRACT: This paper includes a numerical study of a macroscopic elastoplastic model proposed for layered materials. After a description of both this model and its implementation in a finite element program, we present a study of its performance on modeling civil engineering structures. The latter is carried out by comparing results obtained by the macroscopic model to those obtained by finite element calculation with discretization at the microscopic scale.*

*MOTS-CLES : Elastoplastique, Eléments Finis, Effet de Bord, Homogénéisation, Macroscopique, Matériau, Model, Multicouches, Numérique, Terre Armée, Vérification.*

*KEY WORDS : Border Effect, Elastoplastic, Finite Element, Homogenization, Layered, Macroscopic, Material, Model, Numeric, Reinforced earth, Verification.*

---

## 1. Introduction

Les matériaux multicouches ont un intérêt particulier en génie civil. Ils sont utilisés dans la construction des ouvrages en sols renforcés tels que les murs en terre armée [SCH 69]. Afin de simplifier le calcul de ces ouvrages, des modèles basés sur la théorie de l'homogénéisation ont été développés. Ces modèles sont fondés sur le fait que dans le cas d'un matériau multicouche à structure périodique, les grandeurs microscopiques telles que les tenseurs de contraintes, de déformations totales ou de déformations plastiques sont constantes dans chaque constituant [DUM 82]. Ce résultat a permis de formuler analytiquement des modèles de comportement, même pour les matériaux ayant un comportement élastoplastique. A titre d'exemple, on peut citer le modèle proposé par Elomri et Sidoroff [ELO 91], le modèle présenté par Pruchnicki et Shahrour [PRU 92, PRU 94] et le modèle de Lourenço [LOU 96]. D'autres travaux ont été consacrés aux critères de résistance de ces matériaux ([BUH 85], [BUH 89], [TAL 88]).

L'emploi de ces modèles dans le calcul d'ouvrages requiert, d'une part, leur implantation dans des programmes de calcul et, d'autre part, une étude de leur domaine de validité. Dans cet article, on étudie le modèle proposé par Pruchnicki et Shahrour [PRU 94]. Dans un premier temps, on décrit rapidement ce modèle et son intégration dans un code de calcul par éléments finis, ensuite on présente des tests de vérification de ce modèle sur des exemples types rencontrés en génie civil. Les tests seront réalisés par une confrontation des résultats obtenus avec ce modèle à ceux obtenus par une discrétisation à l'échelle microscopique des ouvrages étudiés.

## 2. Présentation du modèle

Le modèle proposé par Pruchnicki et Shahrour [PRU 92, PRU 94] concerne le comportement d'un matériau multicouche composé de deux constituants qui occupent respectivement les volumes  $Y^1$  et  $Y^2$  avec des proportions volumiques  $W^1$  et  $W^2$  (Figure 1).

Les deux constituants sont supposés obéir à une loi élastoplastique avec une règle d'écoulement non associée. Cette loi est définie pour le matériau  $i$  par le tenseur d'élasticité  $a^i$ , la fonction de charge  $f^i$  et le potentiel de plasticité  $g^i$ .

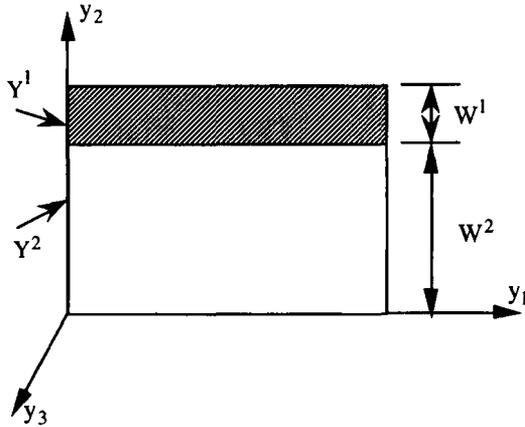


Figure 1. Cellule de base d'un matériau multicouche à deux constituants

Par application de la théorie de l'homogénéisation à ce matériau, on montre que les grandeurs microscopiques telles que les tenseurs de contraintes ( $\sigma$ ), de déformations totales ( $e$ ) et de déformations plastiques ( $e^p$ ) sont constantes dans chaque constituant ([DUM 82], [PRU 92]). En écrivant la continuité du vecteur de contraintes à l'interface ( $\sigma_{2j}^1 = \sigma_{2j}^2, j = 1,3$ ) et la continuité des déformations totales dans le plan de l'interface ( $\epsilon_{\alpha\beta}^1 = \epsilon_{\alpha\beta}^2, \alpha, \beta = 1,3$ ), on peut déterminer la localisation des déformations :

$$e^i = C_E^i : E + \sum_j C_j^i : (e^p)^j \tag{1}$$

L'indice  $i$  désigne le matériau,  $E$  est le tenseur de déformations macroscopiques,  $C_E^i$  représente le tenseur de concentration de déformations dans le domaine élastique ;  $C_j^i$  est un tenseur d'ordre 4 permettant d'obtenir le tenseur de déformations dans le matériau  $i$  résultant de la présence des déformations plastiques dans le matériau  $j$ . Les expressions des tenseurs  $C_E^i$  et  $C_j^i$  sont données en annexe.

La relation (1) permet de déterminer les contraintes microscopiques, on obtient :

$$\sigma^i = S_E^i : E - \sum_j S_j^i : (e^p)^j \tag{2a}$$

Les tenseurs  $S_E^i$  et  $S_j^i$  sont donnés par les expressions :

$$S_E^i = a^i : C_E^i \tag{2b}$$

$$S_j^i = a^i : (I\delta_j^i - C_j^i) \tag{2c}$$

$I$  est le tenseur unitaire et  $\delta_j^i$  est le symbole de Kronecker.

Le calcul du tenseur de contraintes macroscopiques à partir de la relation (2a) conduit à l'expression suivante :

$$\Sigma = a^{\text{hom}} : E - \sum_i \sum_j W^i S_j^i : (e^p)^j \quad [3a]$$

$$\text{avec } a^{\text{hom}} = \sum_i W^i S_E^i \quad [3b]$$

$a^{\text{hom}}$  représente le tenseur d'élasticité homogénéisé.

L'expression (3a) permet ainsi d'expliciter la loi de comportement macroscopique sous la forme d'une relation entre le tenseur de contraintes macroscopiques et le tenseur des déformations macroscopiques. On note que cette relation fait intervenir les déformations plastiques dans les deux constituants comme des paramètres d'écroutissage.

### 3. Intégration du modèle dans un programme d'éléments finis

Le modèle présenté ci-dessus a été implanté dans le programme de calcul par éléments finis PECPLAS qui a été développé au Laboratoire de Mécanique de Lille pour la résolution des problèmes de géotechnique [SHA 92]. Ce programme utilise le schéma de Newton – Raphson modifié pour l'intégration des modèles de comportement non associés. L'implantation du modèle macroscopique dans ce programme a nécessité la programmation d'une procédure qui permet de déterminer la réponse du modèle à un incrément de déformations macroscopiques  $\Delta E$ . Cette procédure comporte les étapes suivantes [NEJ 98] :

(i) On commence par déterminer les incréments de contraintes microscopiques dans les deux constituants avec l'hypothèse d'un comportement élastique :

$$\Delta \sigma^i = S_E^i : \Delta E \quad [4]$$

(ii) On évalue les critères de plasticité dans les deux constituants. Si on note une violation de ces critères, on détermine les déformations plastiques d'après la règle de consistance qui s'écrit en élasto-plasticité parfaite sous la forme :

$$\frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : \Delta \sigma^i = 0 \quad [5]$$

En reportant l'expression des contraintes microscopiques (2a) dans la relation (5), on obtient :

$$\frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : (S_E^i : \Delta E - \sum_j S_j^i : (\Delta e^p)^j) = 0 \quad [6]$$

Les déformations plastiques microscopiques peuvent être exprimées en utilisant le potentiel de plasticité ( $g^i$ ) :

$$(\Delta e^p)^i = \Delta \lambda^i \frac{\partial g^i}{\partial \sigma} \quad [7]$$

En reportant l'équation (7) dans la relation (6), on obtient :

$$\sum_j \frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : S_j^i : \frac{\partial g^j}{\partial \sigma^j} \Delta \lambda^j = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : S_E^i : \Delta E \quad [8]$$

qu'on peut écrire sous la forme matricielle :

$$[M][\Delta \lambda] = [m] \quad [9]$$

$$M_{ij} = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : S_j^i : \frac{\partial g^j}{\partial \sigma^j} \quad [10]$$

$$m_i = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} : S_E^i : \Delta E$$

La résolution de l'équation (9) permet de calculer les multiplicateurs de plasticité, ensuite on peut déterminer les incréments de contraintes et de déformations microscopiques plastiques (équation 7) ; les contraintes microscopiques et macroscopiques sont déterminées en utilisant les équations (2a) et (3a). Dans le cas où les contraintes microscopiques violent le critère de plasticité, on procède à un calcul itératif pour ramener l'état de contraintes sur la surface de charge en utilisant un développement de Taylor des fonctions de charge.

#### 4. Etude de la réponse d'une cellule de base à une traction hors-axe

Avant de présenter les tests de la vérification du modèle sur des problèmes aux limites, on propose d'illustrer la réponse d'une cellule de base à un chargement de traction hors-axe (figure 2a). Le comportement du renforcement est décrit par le critère de Tresca. La matrice est supposée obéir au critère de Mohr-Coulomb non associé écrit en déformations planes :

$$\begin{aligned}
 f &= \sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 4\sigma_{12}^2} + \sin \varphi (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - 2C \cos \varphi \\
 g &= \sqrt{(\sigma_{22} - \sigma_{11})^2 + 4\sigma_{12}^2} + \sin \psi (\sigma_{11} + \sigma_{22})
 \end{aligned}
 \quad [11]$$

f et g désignent respectivement la surface de charge et le potentiel de plasticité. C,  $\varphi$  et  $\psi$  désignent respectivement la cohésion, l'angle de frottement et l'angle de dilataance. Les caractéristiques mécaniques et géométriques de la cellule de base sont données dans le tableau 1. Le matériau 1 représente la matrice qui est supposée purement frottante ( $C = 0$ ) ; le matériau 2 désigne le renforcement avec une rigidité et cohésion élevées.

Matériau	(1) matrice	(2) renforcement
EY (MPa)	150	10 500
v	0,3	0,22
W	0,992	0,008
C (MPa)	0,0	6,0
$\varphi$ (°)	30,0	0,0
$\psi$ (°)	15,0	0,0

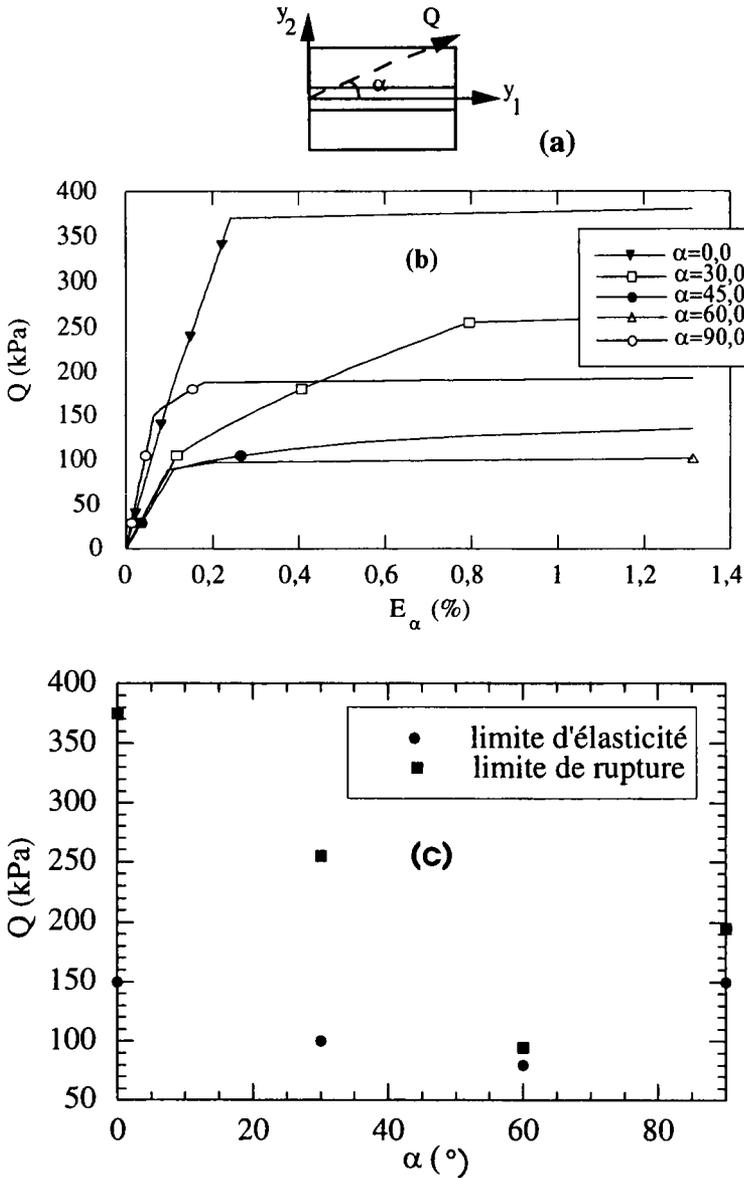
**Tableau 1.** Caractéristiques mécaniques et géométriques retenues pour étudier la réponse d'une cellule de base à une traction hors-axe

La réponse de la cellule a été déterminée pour différentes directions de chargement en partant d'un confinement initial isotrope (-0,05 MPa). Les résultats obtenus sont présentés à travers l'évolution de la contrainte de traction macroscopique (Q) en fonction de la déformation macroscopique  $E_\alpha$  calculée dans la direction de chargement. La figure 2b illustre les résultats obtenus. On remarque que la réponse de la cellule de base comporte trois phases :

- La première correspond au domaine élastique ; elle est caractérisée par une forte anisotropie.
- La seconde phase correspond à la plastification de l'un des deux matériaux qui se traduit par une diminution de la rigidité de la cellule.
- La troisième phase correspond au seuil de résistance macroscopique de la cellule qui résulte de la plastification des deux matériaux.

La figure 2c illustre les courbes de variation des limites d'élasticité et de rupture avec la direction du chargement. On observe une forte anisotropie de ces courbes. La résistance maximale est obtenue dans la direction de la stratification ( $\alpha = 0$ ) alors que la résistance minimale est obtenue dans la direction  $\alpha = 60^\circ$ . Dans la première direction, les limites d'élasticité et de rupture sont respectivement de 150 et 380 kPa

alors que dans la seconde direction, elles sont respectivement égales à 80 kPa et 100 kPa.



**Figure 2.** Réponse d'une cellule de base à une traction hors-axe  
 (a) Illustration du chemin du chargement  
 (b) Evolution de la contrainte macroscopique de traction  
 (c) Limites d'élasticité et de rupture

## 5. Vérification du modèle – influence du rapport d'échelle

### 5.1. Présentation des exemples de vérification

Dans cette section on propose de vérifier le modèle macroscopique sur des problèmes-types rencontrés en génie civil avec des ouvrages en Terre Armée. Les problèmes traités concernent un massif constitué d'un matériau multicouche (Figure 3) soumis à trois cas de chargement : compression simple, poids propre et pression uniforme sur une partie de la surface. La modélisation est effectuée en déformations planes. Le comportement des matériaux du massif est décrit par un modèle élastique – parfaitement plastique utilisant le critère de Mohr-Coulomb non associé. Les propriétés mécaniques retenues sont données dans le tableau 1. Les tests de vérification ont été effectués par confrontation des calculs effectués avec le modèle macroscopique à ceux réalisés sur les structures hétérogènes, en faisant une discrétisation à l'échelle microscopique. Ils ont été réalisés pour différentes valeurs du rapport d'échelle  $\varepsilon = \Delta H/H$  ( $\Delta H$  et  $H$  désignent respectivement l'épaisseur de la cellule de base et la hauteur du massif).

### 5.2. Présentation des résultats

#### 5.2.1. Massif soumis à une compression simple

Le premier exemple concerne l'application d'une compression simple sur le massif tout en gardant libre la frontière latérale. Les tests ont été effectués pour deux rapports d'échelle  $\varepsilon = 0,125$  (massif constitué de 8 couches) et  $\varepsilon = 0,25$  (massif constitué de 4 couches). Compte tenu de la nature du chargement, le calcul avec le modèle homogénéisé a été effectué avec un seul élément. Les calculs avec les modèles hétérogènes (discrétisation à l'échelle microscopique) ont été réalisés en utilisant un maillage composé de 160 éléments Q8 (quadrilatère à huit nœuds) pour le rapport d'échelle  $\varepsilon = 0,25$  et un maillage de 320 éléments Q8 pour le rapport d'échelle  $\varepsilon = 0,125$  (figure 4). La discrétisation dans la direction verticale permet de reproduire les couches composant le massif du sol.

Les figures 5a-b montrent l'évolution des composantes verticale et latérale du déplacement du point situé à l'extrémité de la surface du massif (A). Ces figures montrent un très bon accord au niveau du déplacement vertical entre les deux modélisations et ceci pour les deux rapports d'échelle. Pour le déplacement latéral, on note un bon accord dans la phase élastique ; dans la phase plastique, on observe un écart qui s'amplifie avec le rapport d'échelle et le niveau de chargement.

Dans le tableau 2 on donne les valeurs numériques du déplacement latéral pour différents niveaux de chargement. On note que pour le rapport d'échelle  $\varepsilon = 0,25$ , l'écart entre les deux modélisations passe de 20% à 35% quand le niveau de

chargement passe de 260 kPa (phase élastique) à 500 kPa (proche de la charge limite), alors que pour  $\varepsilon = 0,125$ , ce rapport est de l'ordre de 8% pour  $q = 500$  kPa. Par ailleurs, on note un bon accord entre les deux modèles au niveau de la valeur de la charge limite.

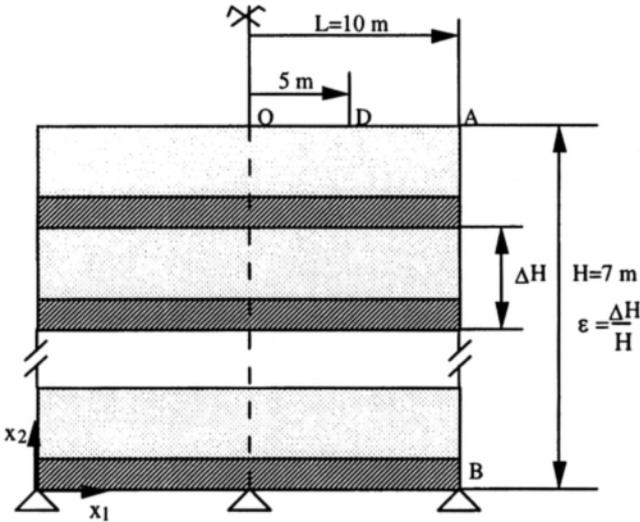


Figure 3. Massif choisi pour la vérification du modèle macroscopique

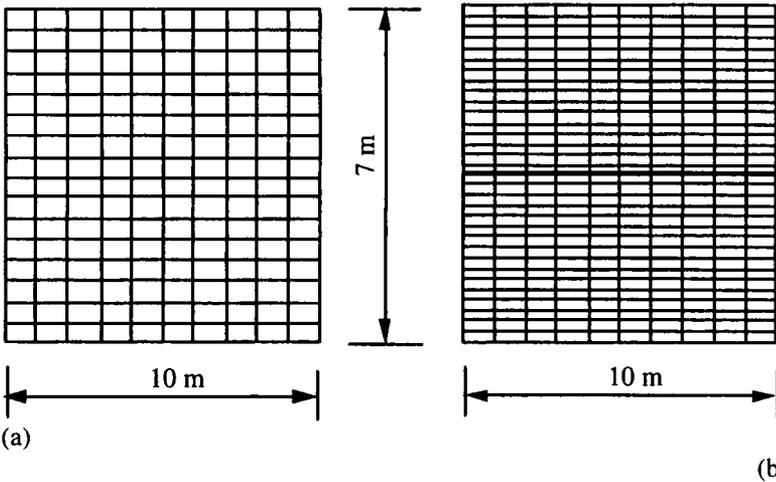
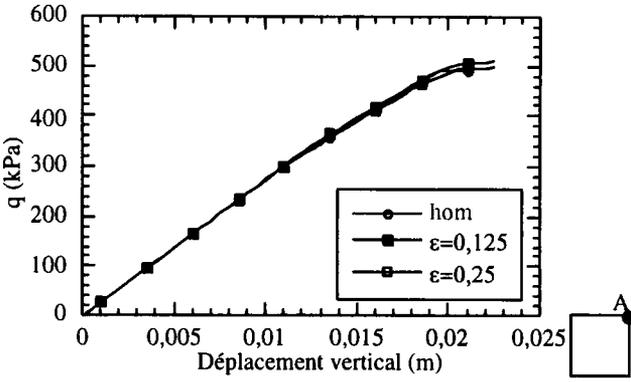


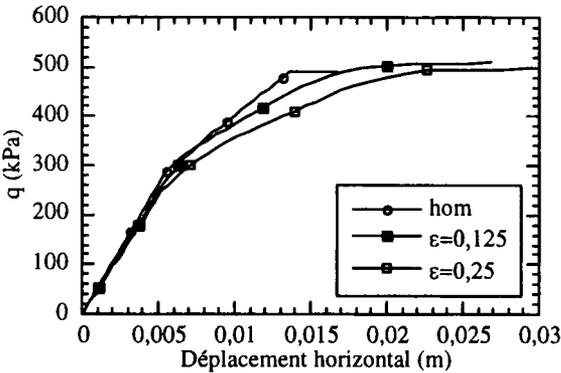
Figure 4. Maillages de la structure hétérogène

(a) Massif avec  $e = 0,25$  (160 éléments Q8)

(b) Massif avec  $e = 0,125$  (320 éléments Q8)



(a)



(b)

**Figure 5.** Vérification du modèle sur un massif soumis à une compression simple  
 (a) Déplacement vertical au point A  
 (b) Déplacement horizontal au point A

Modèle	q = 260 kPa	q = 400 kPa	q = 500 kPa
hétérogène ( ε = 0,25)	5,998	13,136	17,826
hétérogène ( ε = 0,125)	5,205	10,592	14,496
Homogène	5,050	9,952	13,551

**Tableau 2 :** Vérification du modèle sur un massif soumis à une compression simple  
 Déplacement latéral à l'extrémité de la surface du massif (en mm)

La confrontation des résultats des deux calculs révèle un écart qui s'amplifie avec la plasticité. Afin d'étudier l'origine de cet écart, on propose d'analyser la distribution des contraintes microscopiques dans le massif, et plus particulièrement au voisinage du bord libre (effet de bord). Les figures 6a-c donnent l'évolution des composantes du tenseur de contraintes le long de l'axe M-M' ( $x_2 = 6,8$  m) dans le massif ayant un rapport d'échelle  $\varepsilon = 0,125$ . On note que :

(i) La condition d'uniformité de contraintes microscopiques dans les deux constituants est vérifiée loin du bord libre, en particulier dans le domaine élastique ( $q = 260$  kPa). Au voisinage du bord libre, le tenseur de contraintes microscopiques présente des fortes fluctuations dont l'amplitude croît avec l'approche de la surface libre et le niveau du chargement (plasticité). A titre d'exemple, dans la phase élastique, la contrainte  $\sigma_{11}$  dans le matériau 1 varie entre  $-0,32q$  et  $-0,2q$  alors que dans la phase plastique ( $q = 510$  kPa) elle fluctue entre  $-0,75q$  et  $-0,2q$ . De même pour la contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}$ , nulle dans le calcul avec le modèle homogénéisé, elle varie entre  $-0,09q$  et  $0,05q$  dans la phase élastique et entre  $-0,13q$  et  $0,06q$  dans la phase plastique ( $q = 510$  kPa). Ces résultats montrent la présence d'un effet de bord qui se traduit par une forte fluctuation des contraintes microscopiques au voisinage du bord libre, en particulier dans la phase plastique. Ceci peut expliquer l'origine de l'écart obtenu entre les deux modélisations.

### 5.2.2. Massif soumis à son poids propre

Dans cet exemple, on considère un massif soumis à son poids propre avec des conditions de surface libre sur le bord latéral et sur la surface supérieure. Le chargement a été appliqué par une augmentation du poids volumique à partir d'une valeur initiale  $\gamma = 0$  jusqu'à  $\gamma = 20$  kN/m<sup>3</sup>. Les tests de vérification ont été effectués avec trois rapports d'échelle  $\varepsilon = (0,0625, 0,125, 0,25)$ . Les maillages utilisés dans les calculs hétérogènes pour les rapports d'échelle  $\varepsilon = (0,125, 0,25)$  sont identiques à ceux utilisés dans l'exemple précédent. Pour le rapport d'échelle  $\varepsilon = 0,0625$ , nous avons utilisé un maillage composé de 640 éléments Q8. Le maillage utilisé avec le modèle macroscopique est uniforme dans les deux directions. Il comporte 100 éléments Q8.

Les résultats obtenus sont donnés dans les figures 7a-b qui illustrent l'évolution des composantes du déplacement au point A (situé à l'extrémité de la surface du massif). La comparaison des résultats obtenus avec les deux modélisations et pour les différents rapports d'échelle montre que :

(i) Pour le rapport d'échelle  $\varepsilon = 0,0625$ , on obtient un bon accord entre les deux modélisations tout au long du chargement.

(ii) Pour les rapports d'échelle  $\varepsilon = (0,125, 0,25)$ , on obtient un bon accord en début de chargement (jusqu'à  $\gamma H = 25$  kPa), mais on observe par la suite un écart entre les deux modélisations qui augmente avec le rapport d'échelle et le chargement.

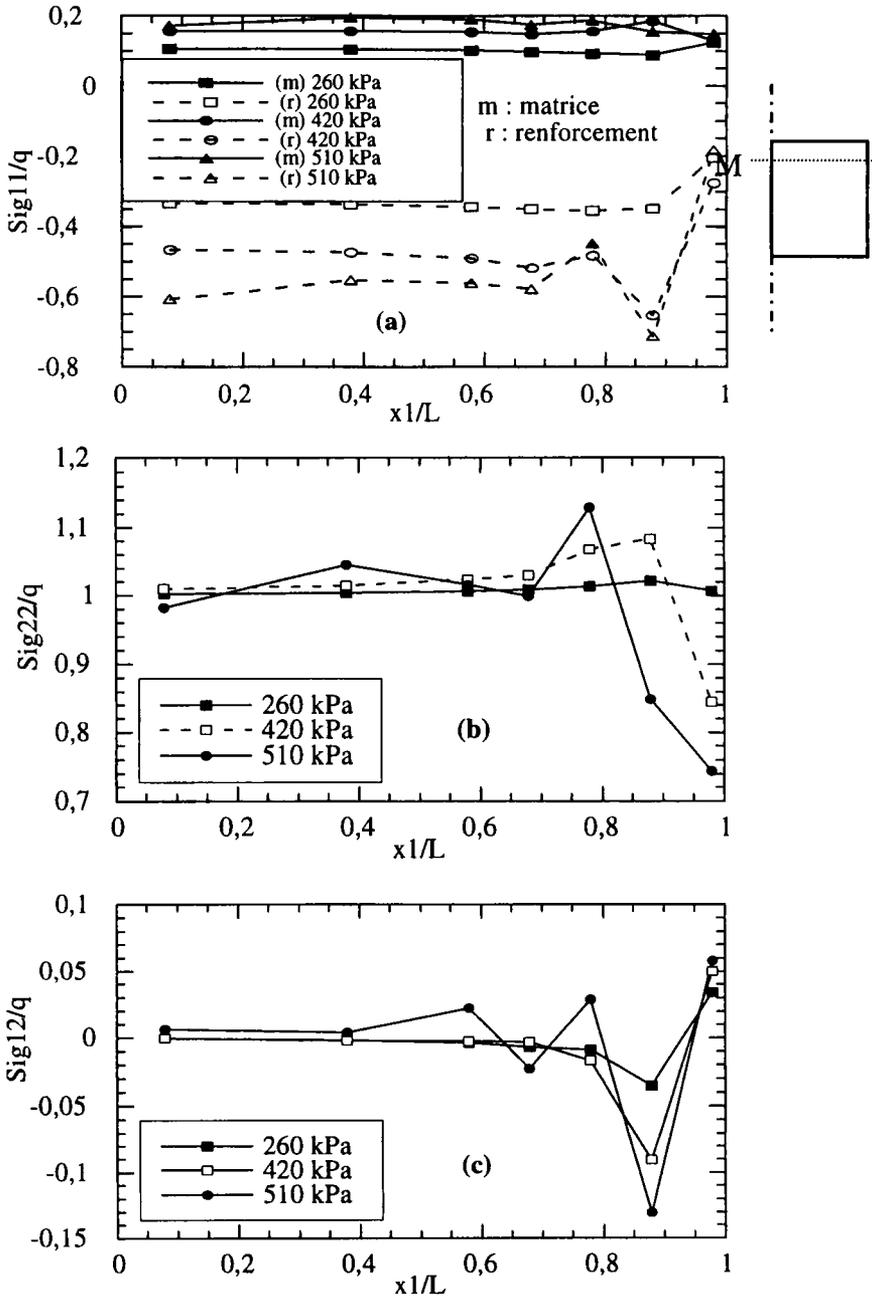
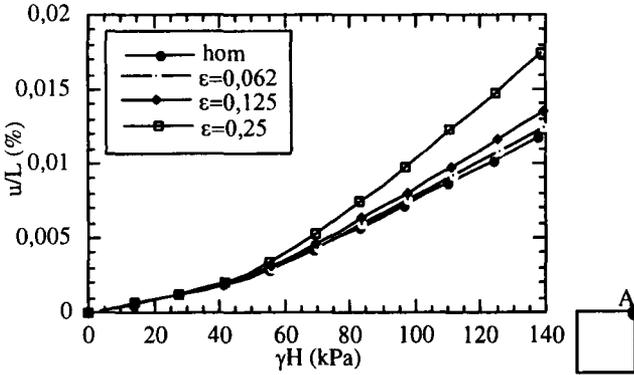
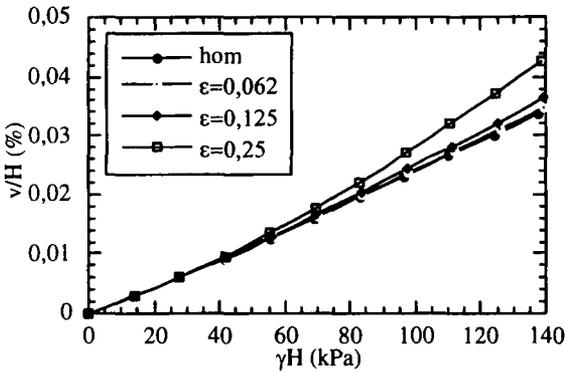


Figure 6. Effet de bord dans l'essai de compression - Evolution des contraintes microscopiques le long de l'axe  $M-M'$  ( $x2=6,8$ ) (a)  $\sigma_{11}$  (b)  $\sigma_{22}$  (c)  $\sigma_{12}$



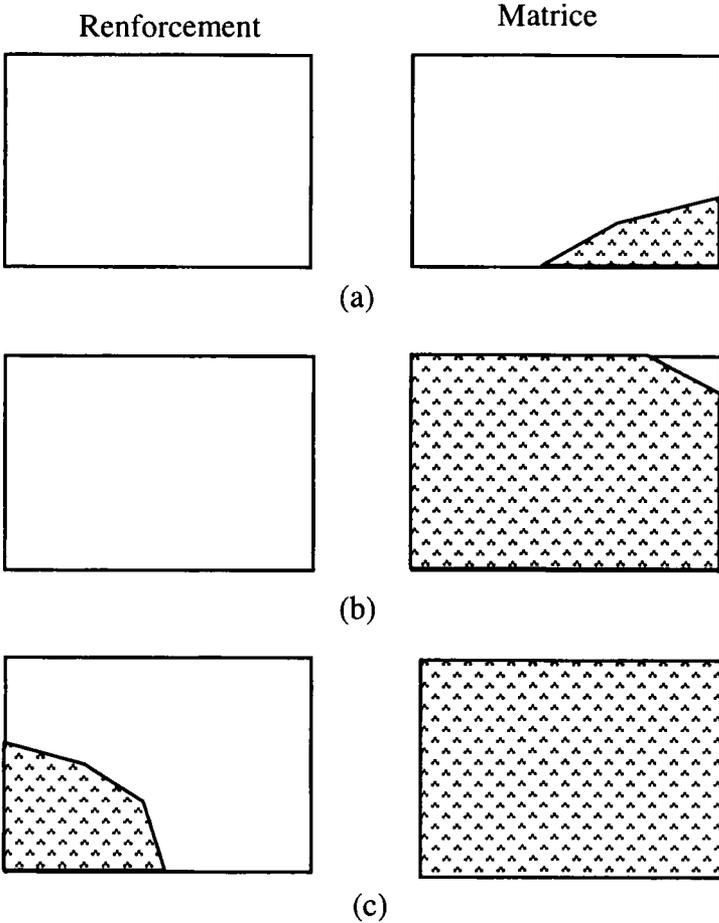
(a)



(b)

**Figure 7.** Vérification du modèle sur un massif soumis à son poids propre  
 (a) Déplacement horizontal au point A  
 (b) Déplacement vertical au point A

La figure 8 illustre l'évolution au cours du chargement de la plasticité dans le massif ayant un rapport d'échelle  $\epsilon = 0,0625$ . On note que la plasticité dans le matériau frottant débute dans le coin inférieur du massif et s'étend rapidement pour couvrir l'ensemble de ce matériau pour un niveau de chargement ( $\gamma H = 112$  kPa). En ce qui concerne le matériau de renforcement, on note que la plasticité débute au centre de la partie inférieure du massif à partir d'un niveau de chargement supérieur à 70kPa, ensuite elle s'étend dans le massif ; pour un chargement  $\gamma H = 112$  kPa, la plasticité est observée dans 25% du matériau de renforcement.



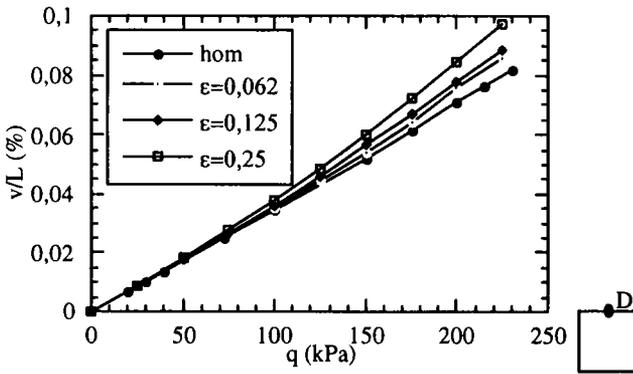
**Figure 8.** Développement de la plasticité dans le massif soumis à son poids propre  
20% de chargement ( $\gamma H = 28 \text{ kPa}$ )  
50% de chargement ( $\gamma H = 70 \text{ kPa}$ )  
80% de chargement ( $\gamma H = 112 \text{ kPa}$ )

### 5.2.3. Massif soumis à un chargement surfacique sur une partie de la surface

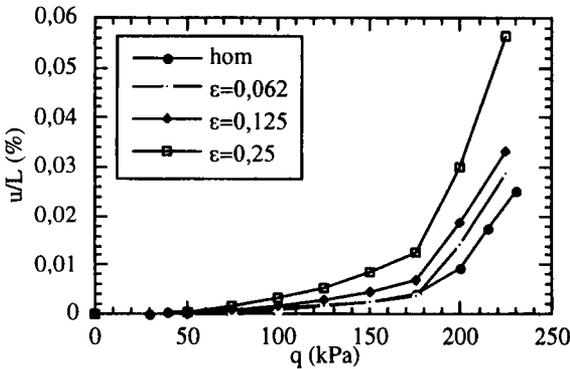
Dans cet exemple on considère le chargement d'un massif, soumis initialement à son poids propre (résultats du calcul précédent), par une force surfacique appliquée sur la moitié de sa surface (partie OD, figure 3).

Les tests de vérification ont été effectués avec trois rapports d'échelle  $\varepsilon = (0,0625, 0,125, 0,25)$ . Les maillages utilisés dans ces calculs sont identiques à ceux présentés dans l'exemple précédent.

Les résultats obtenus sont donnés dans les figures 9a-b qui illustrent l'évolution du déplacement au point situé à l'extrémité du chargement (point D). Pour le rapport d'échelle élevé ( $\epsilon = 0,25$ ), on obtient un bon accord entre les deux modélisations au début du chargement ( $q = 50\text{kPa}$ ), mais ensuite on observe un écart entre les deux modélisations qui croît sensiblement avec le chargement : l'écart sur le déplacement latéral atteint 200 % à la fin du chargement. Pour le faible rapport d'échelle ( $\epsilon = 0,0625$ ), on remarque un bon accord entre les deux modélisations jusqu'à un niveau élevé de chargement ( $q = 180\text{kPa}$ ), ensuite on obtient un écart entre les deux modélisations qui atteint 30 % à la fin du chargement. En ce qui concerne le déplacement vertical (prépondérant), on note un bon accord entre les deux modélisations en particulier pour le massif ayant une faible valeur du rapport d'échelle. En effet, pour le rapport d'échelle  $e = 0,0625$  l'écart entre les deux modélisations reste inférieur à 10 %.



(a)



(b)

**Figure 9.** Vérification du modèle sur un massif soumis à un chargement surfacique sur une partie de la surface supérieure

Déplacement vertical au point D

Déplacement latéral au point D

## 6. Conclusion

Dans cet article nous avons présenté l'implantation dans un code de calcul par éléments finis d'un modèle macroscopique élaboré pour la description du comportement des matériaux multicouches ayant un comportement élastoplastique.

Le code a été ensuite utilisé pour la vérification de ce modèle par une confrontation, sur divers exemples de génie civil, de ses résultats à ceux des calculs par éléments finis réalisés avec une discrétisation à l'échelle microscopique des structures hétérogènes. Ces tests ont été effectués pour différentes valeurs du rapport d'échelle. Ils ont montré que la précision du modèle macroscopique dépend du rapport d'échelle, de l'homogénéité de chargement, de la présence des bords libres, et des déformations plastiques.

Pour des problèmes classiques de génie civil tels que ceux d'un massif en Terre Armée soumis à son poids propre où à un chargement surfacique, le modèle macroscopique donne de bons résultats pour un massif ayant un rapport d'échelle allant jusqu'à  $\varepsilon = 0,125$  (constitué de 8 couches).

## 7. Bibliographie

- [BUH 85] DE BUHAN P., « Critère de rupture macroscopique d'un matériau renforcé par armatures », *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, t. 301, Série II, p. 557-560, 1985.
- [BUH 89] DE BUHAN P., MANGIACACCHI R., NOVA R., PELLEGRINI G. & SALENÇON J., « Yield design of reinforced earth walls by a homogenization method », *Géotechnique*, 39, No. 2, p. 189-201, 1989.
- [DUM 82] DUMONTET H., « Homogénéisation d'un matériau à structure périodique stratifié, de comportement élastique linéaire et non linéaire et viscoélastique », *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, t. 295, Série II, p. 633-636, 1982.
- [ELO 91] ELOMRI A., SIDOROFF F., « Homogenization of a two-phase elastic-plastic layered composite », *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, t. 312, Série II, p. 425-430, 1991.
- [LOU 96] LOUREÇO P.B., A matrix formulation for the elastoplastic homogenization of layered materials' *Mechanics of cohesive-frictional materials*, Vol. 1, p. 273-294, 1996.
- [NEJ 98] NEJAD ENSAN M., « Homogénéisation des matériaux multicouches : prise en compte de la plasticité et des conditions d'interface », Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1998.
- [PRU 92] PRUCHNICKI E., SHAHROUR I., « Loi d'évolution homogénéisée du matériau multicouche à constituants élastoplastiques parfaits », *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, t. 315, Série II, p. 137-142, 1992.

- [PRU 94] PRUCHNICKI E. & SHAHROUR I., « A Macroscopic elastoplastic constitutive law for multilayered media: Application to reinforced earth material », *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol 18, p. 507-518, 1994.
- [SCH 69] SCHLOSSER, F., VIDAL H., La terre armée, *Bulletin de Liaison*, Laboratoire de Ponts et Chaussées, No 41, 1969.
- [SHA 92] SHAHROUR I. PECPLAS: « A finite element software for the resolution of earthwork problems » Actes du *Colloque International « Géotechnique & Informatique »*, Edition Presse ENPC, Paris, p. 327-334, septembre 1992.
- [TAL 88] TALIERCIO A., SACCHI LANDRIANI G., « A failure condition for layered rock », *Int. J. Rock Mech. Min Sci. & Geomech.* Vol 25, No 5, p. 299-305, 1988.

Annexe 1 : Expressions des tenseurs utilisés dans le modèle (équation 1)

$$C_E^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta^i \frac{\Lambda}{\Delta} - \alpha^i & \frac{\beta^i}{\Delta} & \beta^i \frac{\Lambda}{\Delta} - \alpha^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Gamma G^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\Gamma G^i} \end{bmatrix}$$

$$C_j^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha^i \delta_j^i - \beta^i \frac{W_j^{\alpha j}}{\Delta} & \delta_j^i - \frac{W_j^{\beta i}}{\Delta} & \alpha^i \delta_j^i - \beta^i \frac{W_j^{\alpha j}}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_j^i - \frac{W_j}{\Gamma G^i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i - \frac{W_j}{\Gamma G^i} \end{bmatrix}$$

$$\alpha^i = \frac{\nu^i}{1 - \nu^i} \quad \beta^i = \frac{(1 + \nu^i)(1 - 2\nu^i)}{(1 - \nu^i)EY^i}$$

$$\Lambda = \sum_i W^i \alpha^i \quad \Delta = \sum_i W^i \beta^i \quad \Gamma = \sum_i \frac{W^i}{G^i}$$

$EY^i$ ,  $\nu^i$  et  $G^i$  désignent respectivement le module de Young, le coefficient de Poisson et le module de cisaillement du matériau  $i$ .