
Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses

Mohamed Tahar Belarbi* — Abdelhamid Charif**

* Institut de Génie Civil
Université de Biskra
B.P 145
07000 Algérie

** Département de Génie Civil
Université de Batna
05000 Algérie

RÉSUMÉ. Afin d'éviter l'utilisation des éléments tridimensionnels (hexaédriques et prismatiques) d'ordre élevé pour l'étude de la flexion des plaques, nous proposons dans cet article le développement d'un nouvel élément hexaédrique simple à huit nœuds et trois degrés de liberté par nœud (U , V et W) basé sur le modèle en déformation. Cet élément est numériquement plus performant que le modèle de déplacement. Sa précision est évaluée à travers une série de cas-tests standards ou non-standards relatifs aux problèmes de plaques minces et épaisses.

ABSTRACT. In order to avoid using three-dimensional elements (hexaedric and prismatic) of higher order for the study of plate bending, a new hexaedric simple element with eight nodes, three degrees of freedom per node (U , V and W) based on the strain model, has been developed. This element is numerically more efficient than the displacement model. Its precision is assessed through a series of test-cases relative to thin and thick plate problems.

MOTS CLÉS : Élément hexaédrique, élasticité tridimensionnelle, modèle en déformation, membrane, flexion des plaques, cisaillement transversal.

KEY WORDS: Hexaedric element, three-dimensional elasticity, strain model, membrane, plate bending, transverse shear.

1. Introduction

De nombreuses études tant théoriques que numériques, ont été consacrées à l'étude de la flexion des plaques. Sans revenir sur les formulations théoriques dites maintenant classiques de Love, Kirchhoff, Reissner, Hencky, Uflyand et Mindlin, nous notons toutefois que d'un point de vue numérique, de nombreux éléments basés sur la théorie de Love-Kirchhoff ont été développés avec éventuellement la prise en compte des effets de membrane. Ces éléments de plaque sont généralement basés sur des hypothèses cinématiques et sont limités aux plaques minces. D'autres éléments basés sur les hypothèses de type Mindlin ont été développés permettant ainsi de traiter les plaques épaisses. Par ailleurs, certains auteurs utilisent des éléments tridimensionnels (avec maintien des constantes tridimensionnelles), citons par exemple la brique à vingt nœuds B20 ([ZIE 77], [GAL 76]) et les briques sans nœuds intermédiaires suivant leurs épaisseur pour le calcul des plaques et coques épaisses. D'après ces auteurs les éléments tridimensionnels fournissent de bons résultats dans ce dernier cas, mais toutefois ceux-ci ne s'approchent pas des solutions connues pour les plaques minces. Ces chercheurs expliquent cela par le fait que le mode de représentation de l'énergie de déformation a une rigidité excessive. D'autres auteurs [ACH 78] ont formulé une série d'éléments tridimensionnels isoparamétriques compatibles à nombre de nœuds et formes variables (B16, B24, P12, P18), sans nœuds intermédiaires suivant l'épaisseur en introduisant une méthode qui est d'ailleurs sous-jacente dans l'élément d'Ahmad [AHM 70]. Cette méthode consiste à modifier les constantes de rigidité de façon à représenter de plus près le comportement réel des plaques et coques, qu'elles soient minces ou épaisses. La modification a pour effet d'assouplir les matrices de rigidité élémentaires. L'inconvénient majeur dans l'utilisation de ces types d'éléments d'ordre supérieur est le coût élevé en raison du grand nombre de points d'intégration numérique nécessaires à l'évaluation exacte des matrices élémentaires. Les calculs deviennent encore plus coûteux lorsque l'on traite des problèmes non linéaires.

Les avantages des éléments finis à modèle en déformation, par rapport aux éléments classiques (modèle en déplacement), ont été illustrés sur plusieurs éléments bi-dimensionnels ([ASH 71], [SAB 83], [SAB 86] et [BEL 98]). Dans cet article un nouvel élément hexaédrique simple à huit nœuds basé sur le modèle en déformation nommé **SBH8** (Strain Based Hexaedrom 8-node) est proposé pour enrichir la bibliothèque des éléments finis existants. Ce dernier est destiné au calcul des plaques minces et épaisses en flexion. Nous avons utilisé l'élément tel qu'il est ou en modifiant la loi de comportement par l'introduction des constantes de contraintes planes et un coefficient correctif du cisaillement transversal noté K.

2. Avantage du modèle en déformation

L'interpolation directe sur les déformations permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs et sur les contraintes et les déplacements (obtenus par

intégration) ; contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ adopté pour les déplacements. Les avantages des éléments à modèle en déformation sont ([BEL 98]) :

- Satisfaction plus facile des deux principaux critères de convergence liés directement aux déformations (mode de déformation constante et mode de corps rigide).

- Découplage plus facile des différentes composantes des déformations (un champ de déplacements découplés engendre des déformations couplées).

- Possibilité d'enrichir le champ des déplacements par des termes d'ordre élevé sans l'introduction de nœuds intermédiaires (permettant ainsi de traiter le fameux problème de verrouillage ("locking")).

3. Formulation variationnelle de l'élément SBH8

3.1 Champ de déplacement

Pour une théorie linéaire où les déformations unitaires sont faibles, il existe six composantes de déformation intervenant en analyse complètement tridimensionnelle :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= U_{,x} & \gamma_{xy} &= U_{,y} + V_{,x} \\ \epsilon_{yy} &= V_{,y} & \gamma_{yz} &= V_{,z} + W_{,y} \\ \epsilon_{zz} &= W_{,z} & \gamma_{xz} &= W_{,x} + U_{,z} \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

U, V et W : sont les déplacements suivant X, Y et Z respectivement.

Les équations [1] doivent représenter la condition du mouvement de corps rigide (MCR). Donc on peut écrire que :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ii} &= 0 \\ \gamma_{ij} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad [2]$$

L'intégration de [2] permet d'obtenir une solution particulière :

$$\left. \begin{aligned} U &= a_1 + a_4 y + a_6 z \\ V &= a_2 - a_4 x - a_5 z \\ W &= a_3 + a_5 y - a_6 x \end{aligned} \right\} \quad [3]$$

Les équations [3] représentent le champ de déplacement correspondant au mouvement du corps rigide (MCR).

Le présent élément est un hexaèdre à huit nœuds avec trois degrés de liberté (ddl) par nœud (figure 1). Donc, le champ de déplacement doit contenir vingt quatre constantes indépendantes. Six d'entre elles (a_1, a_2, \dots, a_6) sont déjà utilisées pour représenter le MCR, il en reste donc dix huit (a_7, a_8, \dots, a_{24}) pour représenter de façon approximative la déformation dans l'élément, tout en vérifiant les six équations de compatibilité [4] :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{ij,ij} &= \epsilon_{ii,jj} + \epsilon_{jj,ii} \\ 2\epsilon_{kk,ij} &= (\epsilon_{ki,j} + \epsilon_{kj,i} - \epsilon_{ij,k})_{,k} \end{aligned} \right\} \quad [4]$$

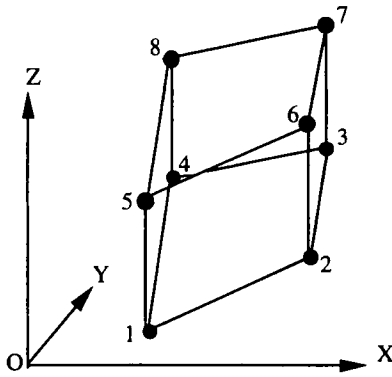


Figure 1. Géométrie de l'élément SBH8

Soit :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{xx} &= a_7 + a_8 y + a_9 z + a_{10} yz \\ \epsilon_{yy} &= a_{11} + a_{12} x + a_{13} z + a_{14} xz \\ \epsilon_{zz} &= a_{15} + a_{16} x + a_{17} y + a_{18} xy \\ \gamma_{yz} &= a_{19} + a_{20} x \\ \gamma_{xz} &= a_{21} + a_{22} y \\ \gamma_{xy} &= a_{23} + a_{24} z \end{aligned} \right\} \quad [5]$$

Comme on peut le constater, le découplage des différentes composantes du vecteur de déformation, peut être facilement assuré, ce qui n'est pas le cas si on adopte le modèle de déplacement.

En substituant [5] dans [1], et après intégration nous obtenons :

$$U = a_7 x + a_8 xy + a_9 xz + a_{10} xyz - 0.5 a_{12} y^2 - 0.5 a_{14} y^2 z - 0.5 a_{16} z^2 - 0.5 a_{18} yz^2 + 0.5 a_{21} z + 0.5 a_{23} y + a_{24} yz$$

$$V = -0.5 a_8 x^2 - 0.5 a_{10} x^2 z + a_{11} y + a_{12} xy + a_{13} yz + a_{14} xyz - 0.5 a_{17} z^2 - 0.5 a_{18} xz^2 + 0.5 a_{19} z + a_{20} xz + 0.5 a_{23} x \quad [6]$$

$$W = -0.5 a_9 x^2 - 0.5 a_{10} x^2 y - 0.5 a_{13} y^2 - 0.5 a_{14} xy^2 + a_{15} z + a_{16} xz + a_{17} yz + a_{18} xyz + 0.5 a_{19} y + 0.5 a_{21} x + a_{22} xy$$

Le champ de déplacement final sera obtenu par superposition de [3] et [6] :

$$U = a_1 + a_4 y + a_6 z + a_7 x + a_8 xy + a_9 xz + a_{10} xyz - 0.5 a_{12} y^2 - 0.5 a_{14} y^2 z - 0.5 a_{16} z^2 - 0.5 a_{18} yz^2 + 0.5 a_{21} z + 0.5 a_{23} y + a_{24} yz$$

$$V = a_2 - a_4 x - a_5 z - 0.5 a_8 x^2 - 0.5 a_{10} x^2 z + a_{11} y + a_{12} xy + a_{13} yz + a_{14} xyz - 0.5 a_{17} z^2 - 0.5 a_{18} xz^2 + 0.5 a_{19} z + a_{20} xz + 0.5 a_{23} x \quad [7]$$

$$W = a_3 + a_5 y - a_6 x - 0.5 a_9 x^2 - 0.5 a_{10} x^2 y - 0.5 a_{13} y^2 - 0.5 a_{14} xy^2 + a_{15} z + a_{16} xz + a_{17} yz + a_{18} xyz + 0.5 a_{19} y + 0.5 a_{21} x + a_{22} xy$$

Nous remarquons ici, que les fonctions de déplacement finales contiennent des termes quadratiques permettant ainsi le changement de courbure.

3.2 Evaluation automatique de la matrice $[K_0]$

L'évaluation de la matrice de rigidité élémentaire se résume à l'évaluation de l'expression suivante :

$$[K_e] = [A^{-1}]^T [K_0] [A^{-1}] \quad [8a]$$

Avec :

$$[K_0] = \iiint_V [B]^T [D][B] dx dy dz \quad [8b]$$

La construction de la matrice $[A]$ est décrite en annexe 1.

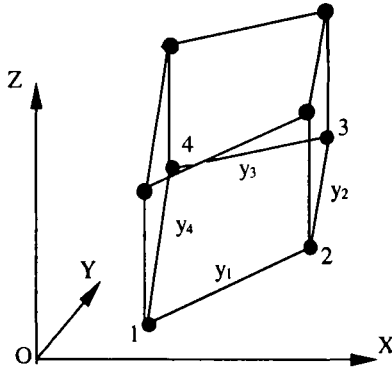
Etant donné que $[A]$ et son inverse peuvent être évaluées numériquement, on réalise alors que l'évaluation de l'intégrale [8b] devient la clé du problème.

Pour certains éléments, une trop grande distorsion peut conduire à des résultats numériques faux en particulier dans le calcul du jacobien. Nous avons formulé pour cela une expression générale, facile à mettre en œuvre sur ordinateur, permettant d'évaluer de façon automatique la matrice $[K_0]$ quel que soit le degré du polynôme [7].

En général, on a à calculer des intégrales triples de la forme :

$$I = [K_0] = \iiint_V C \cdot x^\alpha y^\beta z^\gamma \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{9a}$$

C : constante



La forme générale de l'expression [9a] est (pour z = constante) :

$$I = \sum_{P=1}^3 I_P \tag{9b}$$

$$I_P = \frac{C}{\hat{a} + 1} \cdot \frac{z^{\hat{a}+1}}{\hat{a} + 1} \cdot \sum_{k=1}^{\hat{a}+2} \frac{1}{k + \hat{a}} \cdot C(k) \left(a_n^{k-1} \cdot b_n^{\hat{a}+2-k} - a_m^{k-1} \cdot b_m^{\hat{a}+2-k} \right) \left(x_n^{k+\hat{a}} - x_m^{k+\hat{a}} \right) \tag{9c}$$

La démonstration est donnée en annexe 2.

3.3 Caractéristiques mécaniques du matériau

En élasticité tridimensionnelle, la matrice reliant les contraintes aux déformations s'écrit pour les plaques homogènes et isotropes :

3.3.1 Matrice avec constantes tridimensionnelles (non modifié)

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & G & 0 & 0 \\ \text{Symétrique} & & & & G & 0 \\ & & & & & G \end{bmatrix} \tag{10a}$$

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)} ; G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \tag{10b}$$

3.3.2 Matrice sans constantes tridimensionnelles (modifié)

La matrice [10] est modifiée (matériau fictif) en introduisant les constantes de contraintes planes et un coefficient correctif de cisaillement transversal noté K, proposé par divers auteurs ([REI 45], [MIN 51] et [MIN 66]).

soit :

$$K = \pi^2/12 \quad \text{en théorie de Uflyand-Hencky-Mindlin}$$

$$K = 5/6 \quad \text{en théorie de Reissner}$$

d'où :

$$[D] = D_1 \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_3 & 0 & 0 \\ \text{Symétrique} & & & & KD_3 & 0 \\ & & & & & KD_3 \end{bmatrix} \quad [11a]$$

$$D_1 = \frac{E}{(1-\nu^2)} ; D_2 = \frac{(1-\nu)^2}{(1-2\nu)} ; D_3 = \frac{(1-\nu)}{2} \quad [11b]$$

3.4 Objectifs

Notre objectif consiste à étudier les plaques minces et épaisses par un élément fini tridimensionnel simple modifié (SBH8).

L'étude a porté sur trois points :

- Le premier, le plus fondamental, avait pour objet de montrer l'effet des constantes de contraintes planes numériquement.
- Le deuxième, de montrer l'efficacité du coefficient correctif de cisaillement K.
- Le troisième point consistait à comparer le présent élément SBH8 modifié avec B8 (modifié lui aussi), avec la solution donnée par des méthodes analytiques [TIM 59] et avec d'autres résultats numériques issus de la littérature ([POZ 64], [SMI 68], [PRY 70], [DES 74], [KAN 82], [WIL 86] et [DER 90]).

Le champ de déplacement de l'élément hexaédrique classique (basé sur le modèle en déplacement) contient le même nombre de coefficients que SBH8, il sera désigné par B8, avec :

$$\left. \begin{aligned} U &= a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \zeta + a_5 \xi\eta + a_6 \eta\zeta + a_7 \xi\zeta + a_8 \xi\eta\zeta \\ V &= a_9 + a_{10} \xi + a_{11} \eta + a_{12} \zeta + a_{13} \xi\eta + a_{14} \eta\zeta + a_{15} \xi\zeta + a_{16} \xi\eta\zeta \\ W &= a_{17} + a_{18} \xi + a_{19} \eta + a_{20} \zeta + a_{21} \xi\eta + a_{22} \eta\zeta + a_{23} \xi\zeta + a_{24} \xi\eta\zeta \end{aligned} \right\} \quad [12]$$

Cet élément (B8) appartenant à la même classe fera l'objet d'une étude comparative par la suite.

3.5 Caractéristiques de l'élément SBH8

L'utilisation de plus en plus croissante des structures ayant un rapport important entre les rigidités de flexion et de cisaillement a incité les chercheurs à formuler et valider un élément qui serait fiable pour tous les types de plaques, minces ou épaisses. **SBH8** possède les caractéristiques suivantes :

- Description correcte des modes de corps rigide,
- Inclusion des modes de déformation constante,
- Satisfaction du patch test d'ordre supérieur ([BAT 90], [TAY 86]),
- Evaluation simple et efficace de la matrice de rigidité (sans intégration numérique),
- Convergence monotone vers la solution analytique en raffinant le maillage,
- Convergence vers la solution des plaques minces si l'effet de cisaillement transversal est faible.

4. Performance et précision du présent élément SBH8

La précision du présent élément **SBH8** est évaluée à travers une série de tests standards limités à des applications simples mais suffisantes pour montrer l'intérêt du modèle en déformation. La particularité de ces exemples réside généralement, d'une part, dans leurs simplicités géométriques, et d'autre part, dans leurs comportements très variés vis-à-vis du phénomène de blocage en cisaillement transversal (CT). Ces deux aspects font de ces exemples des moyens idéaux pour la validation de nouveaux modèles d'éléments finis.

4.1 Console sous charge concentrée

Nous traitons l'exemple de la figure 2. Il s'agit d'évaluer le déplacement vertical W_{max} à l'extrémité libre de la console afin de voir l'influence du cisaillement transversal introduit discrètement sur le comportement de la structure.

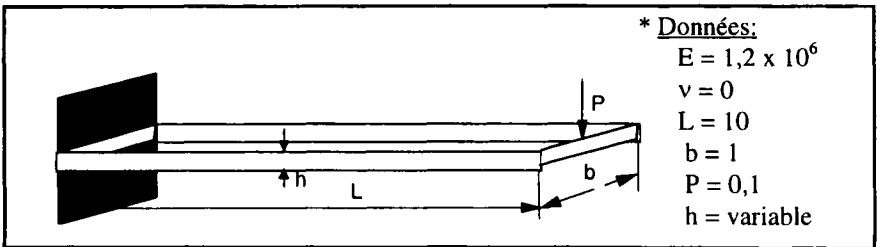


Figure 2. Console sous charge concentrée. Données

Ce problème a été traité par Guenfoud [GUE 93] afin de tester la performance de l'élément DSTM.

où :

DSTM : Discrete Shear Triangle in Marguerre theory (6 ddl/noeud).

DSTM = CST + Curvature + DST + Drilling rotation.

DST: élément de plaque triangulaire avec respect des équations de plaque épaisse sous forme discrète développé par Batoz et Lardeur [BAT 89].

DKTM : Discrete Kirchhoff Triangle in Marguerre theory.

ANST6 : élément triangulaire quadratique à six nœuds basé sur l'approche proposée par Park et sur l'hypothèse cinématique de Hencky-Mindlin.

La solution théorique de la flèche à l'extrémité libre de la console est donnée par :

$$W = \frac{4PL^3}{Eb^3} \left[1 + \frac{1}{2K} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \right]$$

$$\text{Si } h/L \ll 1 \Rightarrow W = \frac{4P}{Eb} \left(\frac{L}{h} \right)^3$$

L/h	W_{max}						
	1	2	3	4	5	10	100
DKTM [GEN 93]	$3,1 \cdot 10^{-7}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$	$8,4 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$3,9 \cdot 10^{-5}$	-	0,31327
DSTM [GEN 93]	$5,1 \cdot 10^{-7}$	$2,9 \cdot 10^{-6}$	$9,0 \cdot 10^{-6}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$4,0 \cdot 10^{-5}$	-	0,31329
ANST6 [GEN 93]	$5,3 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-6}$	$9,6 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$4,2 \cdot 10^{-5}$	-	-
B8 modifié	$5,3 \cdot 10^{-7}$	$3,0 \cdot 10^{-6}$	$9,2 \cdot 10^{-6}$	$2,1 \cdot 10^{-5}$	$3,9 \cdot 10^{-5}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	0,00781
SBH8 modifié	$5,3 \cdot 10^{-7}$	$3,1 \cdot 10^{-6}$	$9,6 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$4,3 \cdot 10^{-5}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$	0,33254
Solution exacte	$5,3 \cdot 10^{-7}$	$3,1 \cdot 10^{-6}$	$9,6 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	$4,3 \cdot 10^{-5}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$	0,3333

Tableau 1. Influence de l'élancement L/h sur la flèche maximale W_{max} ($K=5/6$).

Les résultats du tableau 1 montrent clairement les avantages que présente le modèle en déformation par rapport au modèle déplacement. En effet une modélisation de cette poutre avec dix éléments (SBH8) donne quasiment la solution analytique.

Nous pouvons conclure que :

- L'élément **SBH8** modifié converge vers la solution analytique plus rapidement que les éléments B8, DSTM et DKTM.
- L'élément **SBH8** modifié se comporte bien, que ce soit en plaques minces ou épaisses (aucun phénomène de blocage en CT).
- L'élément B8 standard modifié est très pauvre dans le cas des plaques minces (blocage très sévère en CT).
- L'élément DKTM a une insuffisance dans le cas des plaques épaisses (effet de CT négligeable).

4.2 Flexion d'une plaque carrée à deux bords encastrés et les deux autres libres

Considérons une plaque carrée (figure 3) de côté L , homogène d'épaisseur h , possédant deux bords encastrés et deux bords libres. La plaque est soumise à deux types de sollicitations :

- Charge Uniforme (C.U)
- Charge Concentrée au Coin Libre (C.C.C.L)

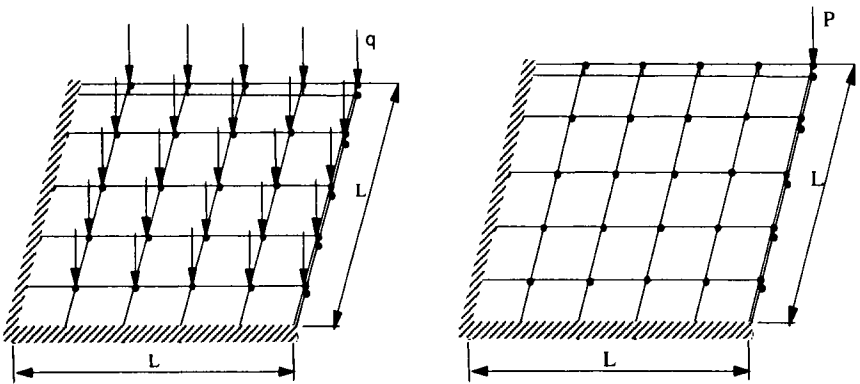


Figure 3. Plaque carrée à deux bords encastrés et les deux autres libres.

Maillage	Nombre de ddl actifs	Flèche maximale			
		B8		Présent élément SBH8	
		non modifié	modifié ($K=\pi^2/12$)	non modifié	modifié ($K=\pi^2/12$)
2x2	24	4,3795	5,2893	20,803	24,515
4x4	96	16,752	19,772	95,792	99,631
6x6	216	32,212	37,027	118,13	119,52
8x8	384	47,385	53,187	123,66	124,37
9x9	486	54,334	60,358	124,83	125,41
Solution de réf. [POZ 64]		125,52			

Tableau 2. Plaque carrée à deux bords encastés et les deux autres libres.
 Convergence de la flèche maximale (C.C.C.L ; $L = 10$; $h = 0,4$; $P = 10$; $\nu = 0$; $E = 3600$)

Maillage	Nombre de ddl actifs	Flèche maximale x 10			
		B8		Présent élément SBH8	
		non modifié	modifié ($K=\pi^2/12$)	non modifié	Modifié ($K=\pi^2/12$)
2x2	24	0,2131	0,2508	1,0330	1,2148
4x4	96	2,0237	2,2550	4,2170	4,3017
6x6	216	2,8672	3,0864	4,4639	4,5103
8x8	384	3,3853	3,5692	4,4979	4,5375
9x9	486	3,5843	3,7523	4,5286	4,5676
Solution de réf. [POZ 64]		4,3404			

Tableau 3. Plaque carrée à deux bords encastés et les deux autres libres.
 Convergence de la flèche maximale (C.U ; $L = 1$; $h = 0,1$; $q = 1$; $\nu = 0$; $E = 1000$)

Maillage	Nombre de ddl actifs	Flèche maximale			
		B8		Présent élément SBH8	
		non modifié	modifié ($K=\pi^2/12$)	non modifié	modifié ($K=\pi^2/12$)
2x2	24	0,7946	0,963	3,1446	3,775
4x4	96	2,5686	3,074	13,239	14,850
6x6	216	4,9760	5,854	16,080	17,858
8x8	384	6,7909	7,920	16,598	18,489
9x9	486	7,7396	8,979	16,784	18,571
Sol. De réf. [DER 90] maillage 30 x 30		18,64			

Tableau 4. Plaque carrée à deux bords encastés et les deux autres libres.
 Convergence de la flèche maximale (C.U ; $L = 10$; $h = 0,4$; $q = 0,9$; $\nu = 0,3$; $E = 3600$).

Maillage	Nombre de ddl actifs	Flèche maximale			
		B8		Présent élément SBH8	
		non modifié	modifié ($K=\pi^2/12$)	non modifié	modifié ($K=\pi^2/12$)
2x2	24	5,6330	6,8250	25,219	30,293
4x4	96	21,034	25,098	103,06	114,65
6x6	216	39,248	46,060	122,32	134,21
8x8	384	56,057	64,878	126,55	138,54
9x9	486	63,417	72,975	127,42	139,44
Sol. de réf. [DER 90] maillage 30 x 30		139,07			

Tableau 5. *Plaque carrée à deux bords encastés et les deux autres libres. Convergence de la flèche maximale (C.C.C.L ; $L = 10$; $h = 0,4$; $P = 100$; $\nu = 0,3$; $E = 3600$)*

En conclusion, la performance de SBH8 modifié se confirme. Les résultats correspondants (voir tableaux 2, 4 et 5) sont comparables aux solutions de référence. Par contre, pour l'élément B8 standard, la précision est toujours largement insuffisante, il est très sensible au phénomène de blocage en cisaillement transversal.

4.3 Plaque carrée en flexion avec diverses conditions

Nous adoptons les notations suivantes pour simplifications :

- PSA_CU : Plaque Simplement Appuyée sous Charge Uniforme
- PSA_CCC : Plaque Simplement Appuyée sous Charge Concentrée au Centre
- PE_CU : Plaque Encastée sous Charge Uniforme
- PE_CCC : Plaque Encastée sous Charge Concentrée au Centre

Il est inutile de préciser les unités à cause des rapports adimensionnels.

Pour le coefficient correctif au cisaillement nous avons pris $K = \pi^2/12$ (coefficient de Mindlin).

On représente le maillage le plus fin du quart de la plaque (figure 4).

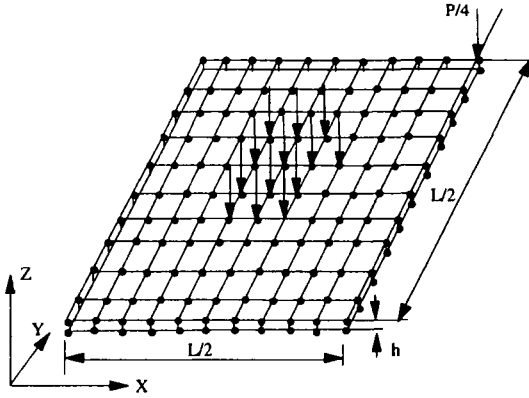


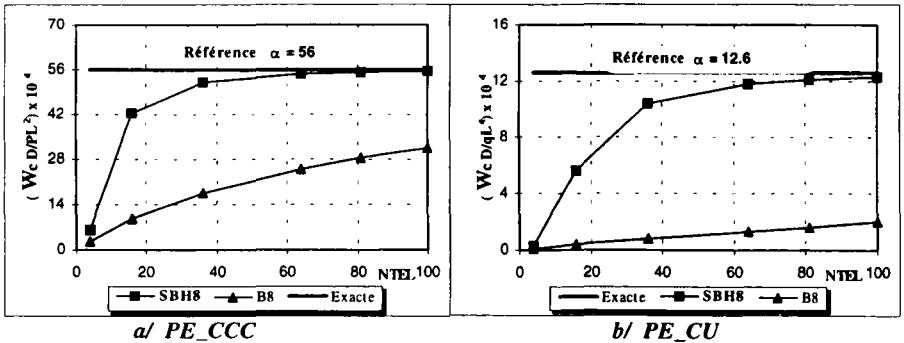
Figure 4. Maillage du quart de la plaque.

Les résultats de la flèche adimensionnelle obtenue au centre pour divers schémas de maillage sont donnés sous forme de graphes.

4.3.1 Plaque mince ($L/h = 100$)

Pour différents maillages du quart de la plaque, la convergence de la flèche adimensionnelle maximale obtenue au centre est tracée sous forme de graphes (figure 5).

Les résultats sont comparés à la solution analytique donnée par Timoshenko [TIM 59].



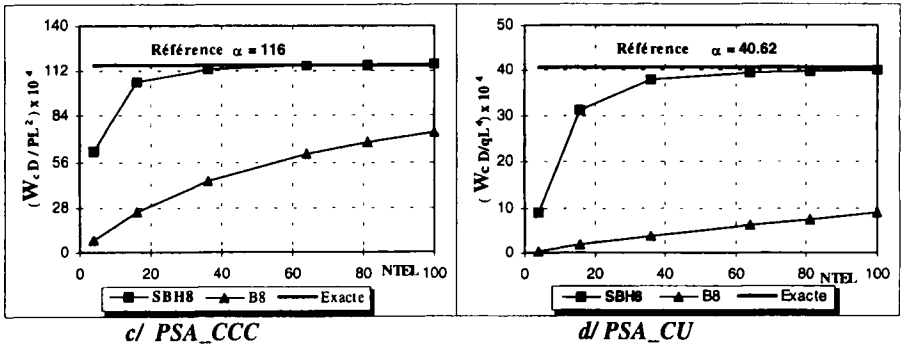


Figure 5. Plaque mince isotrope. Convergence de la flèche au centre sous diverses conditions ($K = \pi^2/12$).

En théorie de Love-Kirchhoff, le rapport entre l'élément non modifié et l'élément modifié fait apparaître une différence de $(\nu/(1-\nu))^2$ soit 18,37 %. Sur la figure 5, cette différence est maintenue pour tous les cas, soit 18,36 %.

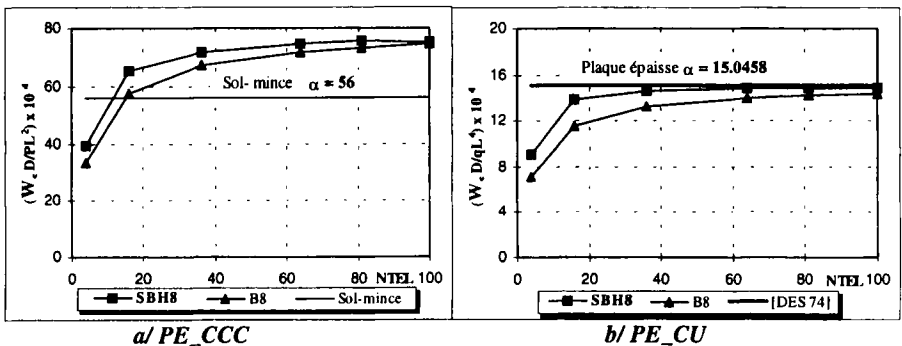
Ces résultats illustrent la stabilité, l'efficacité et la bonne performance de l'élément SBH8 modifié, tandis que l'élément B8 classique (modifié) donne de très mauvais résultats (blocage très sévère en cisaillement transversal).

4.3.2 Plaque épaisse ($L/h = 10$)

Les mêmes tests ont été effectués pour les plaques épaisses, d'élancement 10.

La convergence de la flèche adimensionnelle maximale est montrée sur les figures 6a à 6d.

Pour le cas PE_CCC nous n'avons pas trouvé dans la littérature de solution (numérique ni analytique) car la flèche sous la charge est théoriquement infinie.



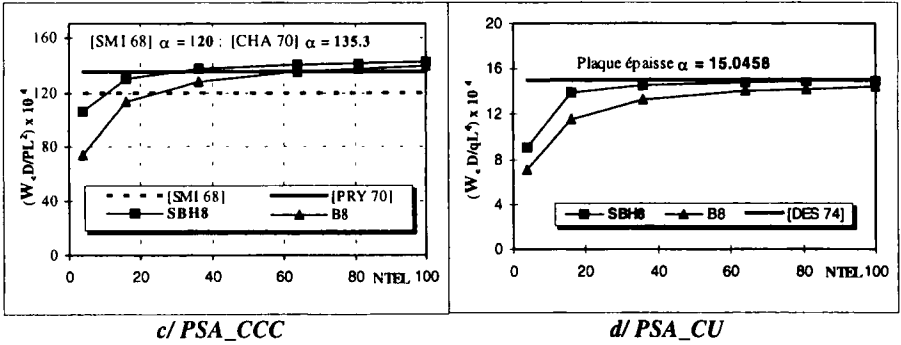


Figure 6. *Plaque épaisse isotrope. Convergence de la flèche au centre sous diverses conditions ($K = \pi^2/12$).*

Les essais numériques effectués montrent que le rapport entre l'élément non modifié et l'élément modifié fait apparaître une différence pratiquement de l'ordre $(\nu/(1-\nu))^2$; c'est-à-dire que l'effet de cisaillement transversal ne modifie pas beaucoup cette valeur.

A travers ces résultats, on constate que le présent élément **SBH8** a l'avantage d'étudier le problème de flexion des plaques de manière économique. Il met en évidence l'effet des constantes de contraintes planes, et l'effet du cisaillement transversal.

5. Effet du cisaillement transversal sur la flèche

Nous avons étudié l'effet du cisaillement transversal sur la flèche, pour différentes valeurs de l'élançement.

5.1 Présentation des résultats

L'effet du cisaillement transversal est vérifié à travers une série de tests qui consistent à évaluer l'influence de l'élançement L/h (longueur/épaisseur) d'une plaque carrée sur la flèche au centre W_c . Les figures 5 et 6 visualisent cet effet.

a/ **PE_CU** plaque mince : ($W_{ref} = 1,26 \cdot 10^{-3} qL^4/D$)

L/h	5	10	20	40	50	100
W_c/W_{ref}	1,72	1,18	1,3	0,98	0,988	0,972

b/ **PSA_CU** plaque mince : ($W_{ref} = 4,062 \cdot 10^{-3} qL^4/D$)

L/h	5	10	20	40	50	100
W_c/W_{ref}	1,3079	1,122	1,037	1,005	0,9998	0,9886

c/ **PE_CCC** plaque mince : ($W_{ref} = 5,6 \cdot 10^{-3} PL^2/D$)

L/h	5	10	20	40	50	100
W_c/W_{ref}	2,234	1,362	1,070	0,994	0,983	0,955

d/ **PSA_CCC** plaque mince : ($W_{ref} = 11,6 \cdot 10^{-3} PL^2/D$)

L/h	5	10	20	40	50	100
W_c/W_{ref}	1,688	1,226	1,05	1,004	0,9966	0,981

Tableau 6. Effet du cisaillement transversal sur la flèche maximale ($K = \pi^2/12$).

On peut confirmer (voir tableau 6b) le résultat de Zienkiewicz [ZIE 77] qui montre sur un exemple assez bien adapté aux méthodes des éléments finis (plaque carrée, PSA_CU, L/h = 10), que les résultats obtenus pour les plaques épaisses, et ceux calculés analytiquement en théorie de Love-Kirchhoff sont dans le rapport de 1,13.

5.2 Effet de l'élançement sur la flèche

Acharhabi [ACH 78] a étudié ce problème pour les plaques. Il a utilisé pour cette étude l'élément prisme quadratique P12 modifié avec différents schémas d'intégration numérique réduite (3 points de Hammer suivant les directions longitudinales et 2 points de Gauss dans l'épaisseur).

De façon similaire, nous avons étudié l'effet de l'élançement sur la flèche pour une plaque prise sous diverses conditions (de chargements et de conditions aux limites) en gardant l'élément cubique simple (SBH8).

Nos observations sont en accord avec celles de Acharhabi ([ACH 78] et [ACH 90]) : l'introduction de la constante correctrice du CT assouplit l'élément SBH8. En faisant varier l'élançement, nous observons nettement l'effet du CT sur la flèche.

Les figures (7a à 7d) confirment cet effet.

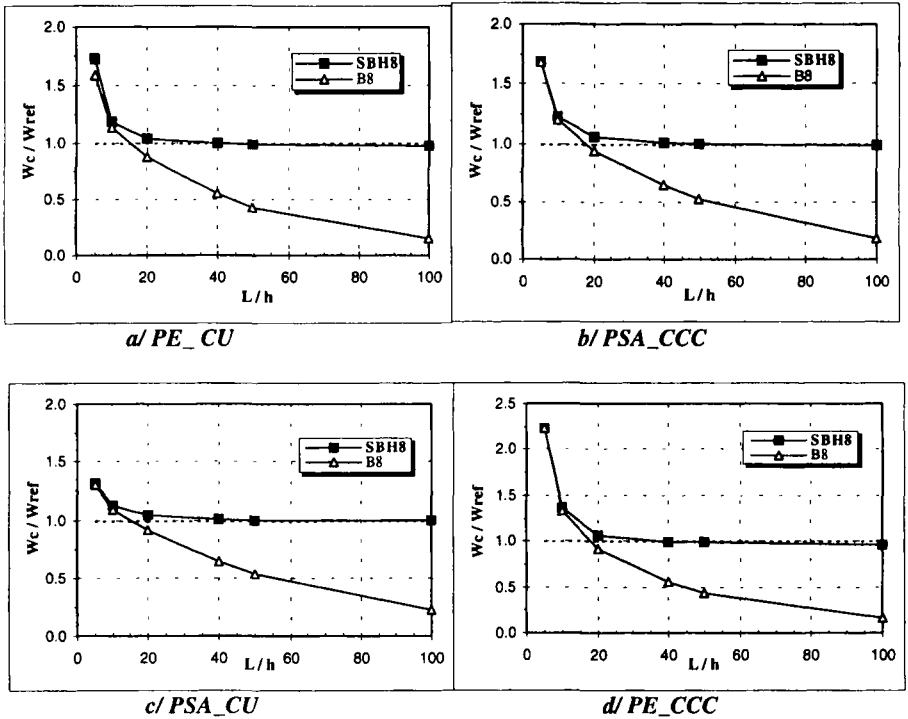


Figure 7. Plaque carrée isotrope. Flèche au centre en fonction de L/h ($\nu = 0,3$; $K = \pi^2/12$).

Les résultats sont surprenants, l'élément **SBH8** est libre de tout verrouillage (voir figure 7). De plus, la solution de Kirchhoff est atteinte pour un élongement $L/h = 50$ dans tous les cas. Elle demeure stable pour $L/h = 100$, ce qui est un indice de sa robustesse.

Ces mêmes figures illustrent en revanche le problème du blocage en CT pour l'élément **B8** standard modifié. Pour la plaque épaisse ($L/h \leq 10$) les résultats sont logiques, la solution étant influencée par le CT. Ceux-ci deviennent de plus en plus rigides (overstiff) pour L/h grand (>20).

L'ensemble des résultats reportés dans le tableau 6 et la figure 7 confirme la supériorité de l'élément **SBH8** modifié par rapport à l'élément **B8** standard (modifié ou non). En effet cette supériorité est vérifiée pour tous les cas.

6. Conclusion

Plusieurs problèmes de flexion des poutres sont traités comme des problèmes de contraintes planes utilisant les éléments quadrilatéraux à quatre nœuds ([KIK 86],

[SAB 86] et [BEL 90]). Cette méthode peut être étendue même aux problèmes de flexion des plaques, qu'elles soient minces ou épaisses. Si les problèmes de flexion des plaques sont résolus en utilisant les éléments solides à trois dimensions, et plus particulièrement l'élément cubique simple **SBH8**, l'analyse par éléments finis sera très simplifiée car l'introduction des éléments spéciaux tels que les plaques et les coques ne sera pas nécessaire.

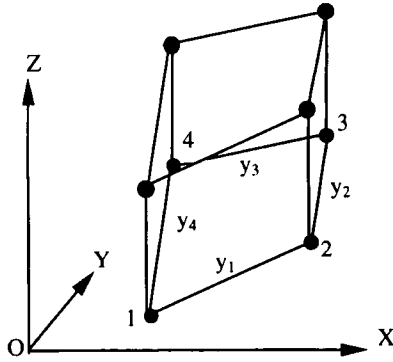
D'autre part, cette étude montre qu'il est indispensable de modifier la loi de comportement des éléments tridimensionnels pour le calcul des poutres et plaques en flexion. L'amélioration principale provient de l'utilisation des constantes de contraintes planes, l'utilisation d'un coefficient correctif de cisaillement transversal donne une amélioration supplémentaire. Enfin, cet élément (**SBH8**) présente l'avantage de pouvoir prendre en compte facilement des variations d'épaisseur de plaque (ou poutre). Il serait intéressant d'étudier le comportement de cet élément dans le domaine non linéaire.

Finalement, la robustesse du présent élément a été démontrée, la flexion des plaques peut très bien être simulée par un élément hexaédrique simple (**SBH8**) d'élasticité basé sur le modèle en déformation. Maintenant, peut-on généraliser cette idée aux coques minces et épaisses ? Une investigation est en cours sur cet aspect.

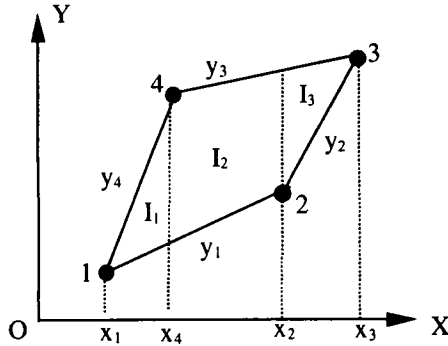
7. Bibliographie

- [ACH 90] ACHARHABI A., « Calcul des plaques minces et épaisses à l'aide des éléments finis tridimensionnels », *Annales de l'ITBTP* N° 486, septembre 1990.
- [ACH 78] ACHARHABI A., Le calcul des plaques épaisses par des éléments finis tridimensionnels à nombre de nœuds et forme variable, Thèse de Doctorat 3^e cycle, Université de Technologie de Compiègne, juin 1978.
- [AHM 70] AHMAD S., IRONS B.M., ZIENKIEWICZ O.C., « Analysis of thick and thin shell structures by curved elements », *IJNME*, Vol. 2, p. 419-451, 1970.
- [ASH 71] ASHWELL D.G., SABIR A.B., ROBERTS T.M., « Further studies in the application of curved finite elements to circular arches », *Int. J. Mech. Sci.* Vol. 13, p. 507-517, 1971.
- [BAT 90] BATOZ J.L., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis*, Editions Hermès, Paris, 1990.
- [BAT 89] BATOZ J.L., LARDEUR P., « A discrete shear triangular nine dof element for the analysis of thick to very thin plates », *IJNME*, Vol. 28, p. 533-560, 1989.
- [BEL 98] BELARBI M.T., CHARIF A., « Nouvel élément secteur basé sur le modèle de déformation avec rotation dans le plan », *Revue Européenne des Eléments Finis*, Vol. 7, N° 4, p. 439-458, juin 1998.
- [BEL 97] BELARBI M.T., CHARIF A., « Analyse des plaques relativement épaisses à l'aide d'un élément cubique simple basé sur le modèle de déformation », *Premier Congrès Arabe de la Mécanique, Damas (Syrie)* 1-3 juin, Vol. 2, p. 25-30, 1997.

- [BEL 90] BELARBI M.T., Développement d'algorithmes et éléments dans la méthode des éléments finis, thèse de Magister, Université de Annaba (Algérie), juillet 1990.
- [DER 90] DEROSA M.A., FRANCIOSI C., « Plate bending analysis by the cell method: numerical comparisons with Finite Element Methods », *Computers and Structures*, Vol. 37, N° 5, p. 731-735, 1990.
- [DES 74] DESHMUKH R. S., ARCHER R.R., « Numerical solution of moderately thick plates », *Journal of the Engineering Mechanics Division*, EM5, p. 903-917, October 1974.
- [DJO 90] DJOUDI M.S., « Strain based Finite Elements for linear and geometrically non-linear analysis of structures », PhD thesis University of Wales College of Cardiff (G.B), June 1990.
- [GAL 76] GALLAGHER R.H., *Introduction aux éléments finis*, Edition pluralis, 1976.
- [GUE 93] GUENFOUD M., « Présentation de l'élément DSTM pour le calcul linéaire des coques d'épaisseur quelconque », *Annales de l'ITBTP* N° 512, Mars-Avril, p. 25-52, 1993.
- [KAN 82] KANT T., OWEN D.R.J., ZIENKIEWICZ O.C., « A refined higher order C^0 plate bending element », *Computers and Structures*, Vol. 15, n° 2, p 177-183, 1982.
- [KIK 86] KIKUCHI N., *Finite Element Methods in mechanics*, Cambridge University Press, 1986.
- [MIN 51] MINDLIN R.D., « Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates », *JAM*, Vol. 18, p. 31-38, 1951.
- [MIN 66] MINDLIN R.D., SCHACKNOW A., DERESIEWICZ H., « Flexural vibrations of rectangular plates », *JAM*, Vol. 23, N° 78, p. 431-436, 1966.
- [POZ 64] POZZATI P., « Contribution to the rectangular plate bending analysis, Costruzioni in Cemento Armato », *Politecnico di Milano* (Italien), p. 133-159, 1964.
- [PRY 70] PRYOR C.W., BARKER J.R.M., FREDERICK D., « Finite Element Bending Analysis of Reissner plates », *Journal of the Engineering Mechanics Division*, EM6, p. 967-987, décembre 1970.
- [REI 45] REISSNER E., « The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plates », *JAM*, Vol. 12, p. 169-177, 1945.
- [SAB 86] SABIR A.B., SALHI H.Y., « A strain based finite element for general plane elasticity in polar coordinates », *Res. Mechanica* 19, p. 1-16, 1986.
- [SAB 83] SABIR A.B., « A new class of Finite Elements for plane elasticity problems », *CAFEM 7th*, *Int. Conf. Struct. Mech. in Reactor Technology*, Chicago, 1983.
- [SMI 68] SMITH M. IAN, « A Finite Element Analysis for Moderately thick rectangular plates in bending », *IJMS*, Vol. 10, p. 563-570, 1968.
- [TAY 86] TAYLOR R.L., SIMO J.C., ZIENKIEWICZ O.C., CHAN A.C.H., « The patch test : A Condition for Assessing Finite Element Convergence », *IJNME*, Vol. 22, p. 39-62, 1986.



Idem que l'élément quadrilatéral avec :



$$I = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I = \iiint_V x^\alpha y^\beta z^\gamma dx dy dz = \frac{1}{\gamma + 1} z^{\gamma+1} \iint_S x^\alpha y^\beta dx dy$$

$$I_1 = \int_{x_1 y_1}^{x_4 y_4} x^\alpha y^\beta dx dy$$

$$I_2 = \int_{x_4 y_1}^{x_4 y_3} x^\alpha y^\beta dx dy$$

$$I_3 = \int_{x_2 y_2}^{x_4 y_3} x^\alpha y^\beta dx dy$$

Ce qui revient à calculer des intégrales doubles de la forme suivante :

$$I = \iint_S C \cdot x^\alpha y^\beta dx \cdot dy$$

C : constante

y : droite d'équation ax + b

$$y^2 = (ax + b)^2 = 1a^2x^2 + 2abx + 1b^2 \tag{1}$$

$$y^3 = (ax + b)(ax + b)^2 = 1a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + 1b^3 \tag{2}$$

On aboutit à une forme générale de y^β :

$$y^\beta = \sum_{k=1}^{\beta+1} C(k) a^{\beta+1-k} \cdot b^{k-1} \cdot x^{\beta+1-k} = \sum_{k=1}^{\beta+1} C(k) a^{k-1} \cdot b^{\beta+1-k} \cdot x^{k-1}$$

C(k) : Coefficients fonction de β (voir tableau ci dessous), soit par exemple :

si $\beta = 2$ on aura 3 coefficients (voir (1)).

si $\beta = 3$ on aura 4 coefficients (voir (2)).

$$\int y^\beta dy = \frac{1}{\beta+1} y^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} (ax + b)^{\beta+1} = \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{\beta+2} C(k) a^{k-1} \cdot b^{\beta+2-k} \cdot x^{k-1}$$

$$\text{Donc } \int_{y_i}^{y_j} y^\beta dy = \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{\beta+2} C(k) (a_j^{k-1} \cdot b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1} \cdot b_i^{\beta+2-k}) x^{k-1}$$

$$\iint x^\alpha y^\beta dx \cdot dy = \int_m^n \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{\beta+2} C(k) (a_j^{k-1} \cdot b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1} \cdot b_i^{\beta+2-k}) x^{k+\alpha-1} \cdot dx$$

$$\iint x^\alpha y^\beta dx \cdot dy = \frac{1}{\beta+1} \sum_{k=1}^{\beta+2} \frac{1}{k+\alpha} C(k) (a_j^{k-1} \cdot b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1} \cdot b_i^{\beta+2-k}) (x_n^{k+\alpha} - x_m^{k+\alpha})$$

Pour notre cas (voir figure 12) :

$$I = \sum_{P=1}^3 I_P$$

L'expression générale de I_P pour un quadrilatéral est :

$$I_P = \frac{C}{\beta+1} \sum_{k=1}^{\beta+2} \frac{1}{k+\alpha} \cdot C(k) (a_j^{k-1} \cdot b_j^{\beta+2-k} - a_i^{k-1} \cdot b_i^{\beta+2-k}) (x_n^{k+\alpha} - x_m^{k+\alpha})$$

Soit donc l'expression générale de I_p pour un hexaèdre ($z = \text{constante}$) (relation [9c], §3) :

$$I_p = \frac{C}{\beta + 1} \cdot \frac{z^{\gamma+1}}{\gamma + 1} \cdot \sum_{k=1}^{\beta+2} \frac{1}{k + \alpha} \cdot C(k) \left(a_n^{k-1} \cdot b_n^{\beta+2-k} - a_m^{k-1} \cdot b_m^{\beta+2-k} \right) \left(x_n^{k+\alpha} - x_m^{k+\alpha} \right)$$

Coefficient $C(k)$:

	$C(k)_{k=1,6}$					
	C(1)	C(2)	C(3)	C(4)	C(5)	C(6)
$\beta = 0$	1	-	-	-	-	-
$\beta = 1$	1	1				
$\beta = 2$	1	2	1	-	-	-
$\beta = 3$	1	3	3	1	-	-
$\beta = 4$	1	4	6	4	1	-
$\beta = 5$	1	5	10	10	5	1

$$\begin{aligned}
 a_1 &= (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1) & ; & & b_1 &= (x_2 y_1 - x_1 y_2)/(x_2 - x_1) \\
 a_2 &= (y_3 - y_2)/(x_3 - x_2) & ; & & b_2 &= (x_3 y_2 - x_2 y_3)/(x_3 - x_2) \\
 a_3 &= (y_4 - y_3)/(x_4 - x_3) & ; & & b_3 &= (x_4 y_3 - x_3 y_4)/(x_4 - x_3) \\
 a_4 &= (y_1 - y_4)/(x_1 - x_4) & ; & & b_4 &= (x_1 y_4 - x_4 y_1)/(x_1 - x_4)
 \end{aligned}$$