
Modèle numérique de couplage fluide-structure avec application aux moteurs fusée

Emmanuel Lefrançois* ** — Gouri Dhatt**
Dany Vandromme*

* LMFN CORIA UMR 6614 ** LMR UPRESA 6104

INSA - avenue de l'Université BP 08.
F-76801 St Etienne du Rouvray cedex

lefranco@coria.fr

RÉSUMÉ. Nous présentons ici un modèle numérique de type éléments finis pour des études de couplage fluide-structure. Les géométries sont considérées axisymétriques et pouvant subir des déformations pariétales en grands déplacements. Une discrétisation de type Newmark est employée pour le schéma structure. Le fluide est quant à lui compressible, non visqueux et supposé parfait. Le modèle numérique pour le fluide est basé sur le schéma de Lax-Wendroff avec prise en compte de la dynamique du maillage afin de respecter les conditions cinématiques entre frontières fluide et structure. Une technique de capture de chocs assure la positivité du schéma en tout point du maillage. Après certaines considérations sur le respect d'une loi de consistance géométrique, le couplage est obtenu par l'établissement d'un "dialogue" entre les codes avec l'utilisation des outils du calcul parallèle. Celui-ci permet ainsi une remise à jour régulière des données physiques communes aux deux codes. Deux calculs sont alors conduits sur l'étude des phénomènes de couplage aéroélastique présents au sein d'un moteur fusée.

ABSTRACT. A finite element model is presented for studying fluid-structural interaction phenomena. Domains are assumed axisymmetrical with flexible boundaries that may undergo large displacements. Newmark scheme is used for temporal discretization of structure part. Fluid is supposed compressible, inviscid and perfect. Numerical scheme for fluid is based on a Lax-Wendroff scheme taking into account moving mesh in order to respect parietal compatibilities. A shock capturing technique is added in order to maintain positivity scheme in high gradient zones. After discussing considerations on a Geometrical Conservation Law, coupling is obtained in establishing a "dialogue" between both codes in using parallel tools to update common variables between fluid and structure. Two calculations are conducted on aeroelasticity with application to rocket engines.

MOTS-CLÉS : aéroélasticité, couplage fluide-structure, éléments finis, non-linéarités géométriques, coques, capture de chocs, calcul parallèle, moteurs fusée.

KEY-WORDS : aeroelasticity, fluid-structural interaction, finite elements, geometrical nonlinearities, shells, shock capturing, parallel calculation, rocket engines.

1 Introduction

Depuis quelques années, un significatif effort de recherche est mené pour le développement d'outils numériques de calcul pour l'étude des phénomènes d'interaction *fluide-structure*. Ce domaine se caractérise par tous les phénomènes mettant en jeu une ou plusieurs structures flexibles ou mobiles et un fluide en écoulement. Ces deux physiques interagissent de manière continue mais à des degrés de couplage plus ou moins fort selon la terminologie reprise par Destuynder dans [PDa94] basée sur une *fréquence réduite* et définie comme le rapport des temps caractéristiques fluide et structure. Pour des valeurs de cette fréquence éloignées de l'unité, l'une des deux physiques a un temps caractéristique bien plus faible et permet une simplification du problème. L'aéroélasticité quasi-statique et l'acoustique correspondent à ce type d'approche. Cependant, pour des valeurs proches de l'unité, il s'agit d'une interaction forte entre les deux domaines, conduisant généralement à la recherche de résonances entre le fluide et la structure.

Développées à l'origine pour des problèmes de sûreté dans les enceintes nucléaires [JDH82], ces études du couplage se sont rapidement étendues aux domaines de l'aéronautique comme en témoignent les références [GB93] [Bat89] [Far96] [Löh88] (*flutter*, lâcher de missiles ...), de l'astronautique [CNE96] [Lef98] [Pek93] (moteur VULCAIN) et du développement d'algorithmes de couplage [TM96] [Pip95]. La voile, l'architecture, la médecine et bien d'autres domaines encore témoignent aussi d'un intérêt grandissant pour ce type d'études.

Une base théorique commune à ces travaux peut être trouvée aux références [BA75] [Fun58] [Dow75] considérées comme des ouvrages de référence en la matière.

Le but est ici de proposer un modèle de couplage fluide-structure avec application à un propulseur de moteur fusée. En effet, lors des phases d'allumage et d'extinction des moteurs, des pics de charges latérales (efforts asymétriques exercés par le fluide en écoulement sur la tuyère flexible du moteur) sont décelés avec, pour principal risque, celui d'une déformation irréversible du moteur. Les conséquences peuvent aller d'une diminution du rendement du moteur à une destruction complète dans le pire des cas. Ces phénomènes ont commencé à être observés dans les années soixante sur le moteur J2S [Sch73] [Sch84] puis sur les moteurs des générations suivantes tels le SSME ou le VULCAIN [Wor95]. Ce phénomène extrêmement complexe fait intervenir entre autres les problèmes de décollement de jet (tuyère sur-détendue au sol) [Had97], les effets de compressibilité, la turbulence, une chimie complexe et un comportement dynamique de la structure.

Le couplage au sein d'un propulseur a déjà fait l'objet d'un travail [Pek93] où Pekkari propose une méthode de calcul basée sur une analyse modale permettant de déterminer l'existence ou non de modes propres instables susceptibles de mener la tuyère à un comportement de type flambement. Il constitue pour certains [Act98] plutôt un outil pour l'ingénieur qu'un moyen d'étudier le couplage dans sa globalité. Ce problème de flambement est cependant extrêmement important puisqu'il fut déjà observé lors des expériences de Tuovila en 1968 sur des tuyères flexibles, l'auteur recherchant au préalable des instabilités de type dynamique et non statique [TL68].

Ce travail n'a cependant pas la prétention de fournir un outil de calcul incluant tous les effets physiques précédemment cités. Cela représenterait, d'une part, un travail colossal actuellement hors de portée des machines actuelles et ne serait pas, d'autre part, la meilleure voie pour affiner les connaissances sur les effets du couplage, connaissances actuellement quasi inexistantes. Cette étude sera essentiellement orientée vers l'étude de la réponse dynamique d'une tuyère flexible sollicitée par le champ de pression interne au moteur résultant de la détente des gaz. Il s'agit ici d'insister sur l'aspect multi-disciplinaire du problème.

Il s'agit donc de coupler de manière numérique deux codes de calcul adaptés en conséquence, approche différente de celle qui consiste à réduire la globalité du problème en un seul modèle mathématique. Chacun des deux domaines ayant ses propres caractéristiques et donc ses propres techniques de résolution, il s'en suit alors qu'un calcul de couplage instationnaire peut s'effectuer "simplement" par l'établissement d'un dialogue entre les deux codes numériques afin de permettre une remise à jour régulière des données et variables de calcul qui leur sont communes.

L'approche proposée est la suivante :

- une *Formulation Lagrangienne Totale (FLT)* est employée pour déterminer les déformations en grands déplacements d'une structure élastique. La structure considérée dans cette étude est de type coque de révolution et les effets dynamiques sont pris en compte.

- le fluide est supposé compressible et non visqueux et l'écoulement axisymétrique. Le code de calcul est basé sur un schéma de Lax-Wendroff avec une technique de capture de chocs dite de *Flux Corrected Transport* afin de maintenir la positivité du schéma dans les zones à forts gradients (ondes de chocs). Afin d'assurer une condition de compatibilité cinématique entre les domaines fluide et structure et ainsi adapter le domaine fluide aux déformations globales qui en résultent, une technique de maillage mobile est considérée. Une loi de *consistance géométrique* est appliquée à la dynamique du maillage afin d'assurer une indépendance des grandeurs du fluide à l'égard de la mobilité du maillage.

- afin de préserver l'aspect modulaire de chacun des codes, le couplage est obtenu par l'établissement d'un *dialogue* avec l'utilisation des outils offerts par les techniques de calcul parallèle PVM (*Parallel Virtual Machine*). Les données échangées au cours du calcul sont le profil de pression pariétale du fluide vers la structure et la remise à jour complète des parois déformables de la structure vers le fluide.

Une première partie est dédiée au développement du modèle numérique de calcul des déformations en grands déplacements pour des domaines axisymétriques. En deuxième partie, le modèle fluide axisymétrique est présenté autour d'une dynamique de maillage suivie des conditions de respect d'une loi de consistance géométrique. Puis, le couplage est alors abordé en troisième partie avant de présenter en quatrième partie les calculs d'aéroélasticité appliqués aux moteurs fusée.

2 Modèle de structure

Dans cette section, nous développons le modèle de structure avec, tout d'abord l'obtention de l'écriture faible du problème, puis du modèle discret et enfin la description de l'élément de coque utilisé. Une nomenclature est fournie en fin d'article.

2.1 Forme variationnelle

Le principe des puissances virtuelles appliqué au principe fondamental de la dynamique s'écrit sous la forme :

$$W = \int_{V(t)} \delta \bar{u} \rho \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} dV + \int_{V(t)} \bar{\nabla} \delta \bar{u} : \sigma dV - \int_{V(t)} \delta \bar{u} \bar{f}_v dV - \int_{S(t)} \delta \bar{u} \bar{f}_s dS = 0,$$

avec σ le tenseur des contraintes réelles de Cauchy, \bar{f}_s, \bar{f}_v les sollicitations extérieures, respectivement surfaciques et volumiques, $\delta \bar{u}$ une fonction test et \bar{u} le champ des déplacements.

Dans le cas où l'hypothèse des petites perturbations n'est plus vérifiable (*i.e.* géométries initiale et déformée éloignées) les domaines d'intégration $V(t)$ et $S(t)$ sont alors les inconnues du problème. Exprimée sur un domaine connu V° et S° par le biais d'une Formulation Lagrangienne Totale [DF95a], la précédente forme s'écrit alors :

$$W = \int_{V^\circ} \delta \bar{u} \rho_o \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} dV^\circ + \int_{V^\circ} \delta \mathcal{E}_{gl} : S dV^\circ - \int_{V^\circ} \delta \bar{u} \bar{f}_{v_o} dV^\circ - \int_{S^\circ} \delta \bar{u} \bar{f}_{s_o} dS^\circ = 0, \quad [1]$$

où :

- ρ_o : masse volumique sur la configuration C° associée à V° et S° ,
- $\delta \bar{u}$: déplacement virtuel ou fonction test de type Galerkin,
- $\delta \mathcal{E}_{gl}$: variation du tenseur des déformations de Green-Lagrange,
- $\bar{f}_{s_o}, \bar{f}_{v_o}$: sollicitations externes sur C° ,
- S : tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff (2^{nd} e espèce).

Le tenseur \mathcal{E}_{gl} est déterminé de manière générale d'après :

$$\mathcal{E}_{gl} = \frac{1}{2} (F^T F - I), \quad \text{où } \mathcal{F} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{x}^\circ}, \quad [2]$$

avec \mathcal{F} est le tenseur gradient des transformations et I le tenseur unité.

Les tenseurs des contraintes S et des déformations \mathcal{E}_{gl} sont reliés par une loi de comportement linéaire :

$$S = H \mathcal{E}_{gl},$$

avec H la matrice des propriétés physiques.

L'expression [1] est non linéaire et pour la résoudre, nous utiliserons la méthode de linéarisation de Newton-Raphson qui nécessite le calcul de la forme incrémentale ΔW . Celle-ci est donnée en prenant la première variation de la forme variationnelle [1] :

$$\Delta W = \int_{V^o} \delta \bar{u} \rho_o \frac{d^2 \Delta \bar{u}}{dt^2} dV^o + \int_{V^o} (\delta(\Delta \mathcal{E}_{gl}) : \mathcal{S} + \delta \mathcal{E}_{gl} : \Delta \mathcal{S}) dV^o. \quad [3]$$

2.2 Modèle discret

Après l'étape de discrétisation spatiale sur un type d'élément choisi, nous obtenons finalement le système d'équations non linéaire suivant :

$$[M] \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} + \{f_{int}(u, t)\} - \{f_{ext}\} = 0, \quad [4]$$

obtenu après assemblage sur l'ensemble des éléments constituant le maillage. Apparaissent les termes suivants :

- $[M]$: matrice masse globale,
- $\{u\}$: vecteur des déplacements nodaux,
- $\{f_{int}(u, t)\}$: efforts internes non linéaires (équivalent à $[K(u, t)]\{u\}$),
- $\{f_{ext}\}$: forces externes représentant l'interaction avec le fluide.

Un schéma de Newmark est ensuite utilisé pour la discrétisation du terme temporel et une technique itérative de Newton-Raphson [DF95c] est employée pour la résolution du système [4] à chaque pas de calcul. Celle-ci implique le calcul et l'assemblage d'une matrice tangente $[K_T]$.

A chaque pas de calcul, la géométrie est remise à jour, les contraintes et déformations étant à chaque fois calculées d'après un Formalisme Lagrangien Total, c'est-à-dire par rapport à la géométrie initiale. Les différentes configurations rencontrées en cours de calcul sont représentées figure 1.

C^o , C^p et C^{p+1} sont respectivement les configurations initiale, et relatives aux instants p et $p + 1$. La configuration C^{i+1} est intermédiaire à C^p et C^{p+1} et traduit un état relatif à une solution non encore convergée.

La formulation FLT a été retenue car elle est la seule à permettre un retour de la géométrie sur sa configuration initiale en cas d'annulation des sollicitations extérieures, ce qui n'est pas le cas pour une Formulation Lagrangienne Actualisée (FLA).

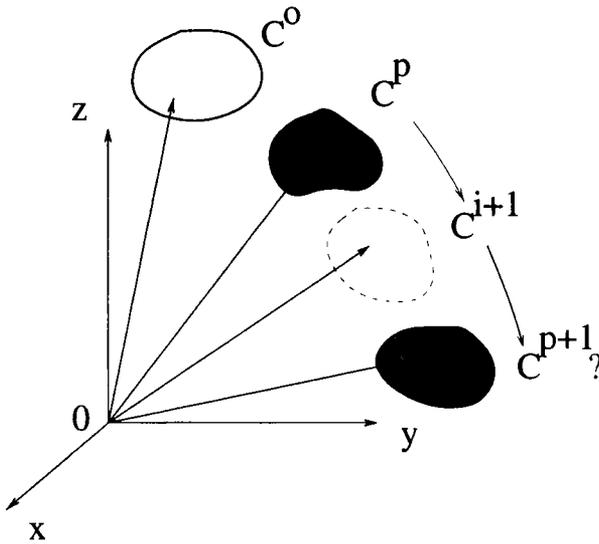


Figure 1 – Configurations de calcul

2.3 Description d'une coque de révolution

Cette section est dédiée au développement d'un élément de coque axisymétrique épaisse. La version en déformations linéaires peut être trouvée dans [BD90b]. Une généralisation aux coques quelconques est présentée dans [DF95b].

Nous présentons tout d'abord le choix d'une cinématique permettant de calculer le tenseur des déformations. Puis nous développons la forme variationnelle ainsi que sa forme incrémentale que nous discrétisons ensuite par le choix d'un élément fini. Nous terminons enfin par le développement des différents vecteurs et matrices qui en résultent.

2.3.1 Cinématique en grands déplacements

Une coque de révolution est représentée figure 2.

La position d'un point q quelconque de la coque est définie d'après trois coordonnées paramétriques ξ , θ et z , ξ étant reliée à la courbe méridienne génératrice de la coque de révolution, θ à la rotation autour de \vec{e}_z et z est la coordonnée locale selon l'épaisseur le long de la normale \vec{n} .

Nous appellerons *surface moyenne*, l'ensemble des points de la géométrie définis par $z = 0$. Nous pouvons alors déterminer la position d'un point quelconque q , \vec{x}_q , par rapport à sa projection sur la surface moyenne désignée par le point p localisé en \vec{x}_p ($z = 0$). Ceci est résumé sur la figure 3.

Le passage de la configuration initiale C^o (coord. \vec{x}_q^o) à la configuration actuelle C^t (coord. \vec{x}_q) permet de définir le champ de déplacement d'un point quelconque de la structure q tel que :

$$\vec{x}_q(\xi, \theta, z) = \vec{x}_q^o(\xi, \theta, z) + \vec{u}_q(\xi, \theta, z). \quad [5]$$

Pour un comportement axisymétrique de coque épaisse, les composantes du déplacement d'un point q sont indépendantes de θ et ne sont fonctions que de ξ et z :

$$\vec{u} \cdot \vec{t} = u(\xi), \quad \vec{u} \cdot \vec{n} = w(\xi), \quad \vec{u} \cdot \vec{e}_\theta = 0 \quad \text{et} \quad \beta_\theta = 0.$$

Ainsi, nous avons pour une description curviligne, le champ de déplacements suivant :

$$\vec{u}_q(\xi, \theta, z) = \vec{u}_p(\xi, \theta) + z\beta(\xi)\vec{t} = u(\xi)\vec{t} + w(\xi)\vec{n} + z\beta(\xi)\vec{t} \quad \text{où} \quad \beta(\xi)\vec{t} = \vec{e}_\theta \wedge \vec{n}. \quad [6]$$

Les formes différentielles de [5] et [6] s'écrivent :

$$d\vec{x}_q(\xi, \theta, z) = \vec{x}_{q,\xi}d\xi + \vec{x}_{q,\theta}d\theta + \vec{n}dz = \mathcal{F}_z d\vec{\xi}, \quad [7]$$

$$d\vec{u}_q(\xi, z) = \vec{u}_{q,\xi}d\xi + \vec{u}_{q,\theta}d\theta + \beta dz\vec{t} = \mathcal{L}_z d\vec{\xi} = \mathcal{L} d\vec{x}_q, \quad [8]$$

où $\langle d\xi \rangle = \langle d\xi \quad d\theta \quad dz \rangle$. Les tenseurs \mathcal{F}_z et \mathcal{L}_z sont les équivalents de \mathcal{F} et \mathcal{L} exprimés dans le système de coordonnées curvilignes.

La notation vectorielle $\vec{\cdot}$ est employée ici sous différentes formes avec principalement la notation en colonne avec $\{ \dots \}$ et en ligne avec $\langle \dots \rangle$.

Exprimées dans la base tangente au point p , les relations [7] et [8] deviennent :

$$d\vec{x}_q = \mathcal{Q} d\vec{x}_q^t, \quad \text{et} \quad d\vec{u}_q = \mathcal{Q} d\vec{u}_q^t \quad \text{avec} \quad \mathcal{Q} = [\vec{t} \quad \vec{e}_\theta \quad \vec{n}],$$

où \vec{x}_q^t et \vec{u}_q^t représentent la position et le déplacement d'un point q exprimés dans la base curviligne et \mathcal{Q} est la matrice de passage entre repères cylindrique et tangent (cf. figure 2).

L'expression du tenseur des gradients des déplacements \mathcal{L} dans cette base s'écrit alors :

$$d\vec{u}_q^t = \mathcal{L}^T d\vec{x}_q^t \quad \text{avec} \quad \mathcal{L}^T = \mathcal{Q}^T \mathcal{L} \mathcal{Q} = \mathcal{Q}^T \mathcal{L}_z \mathcal{F}_z^{-1} \mathcal{Q},$$

ce qui développé donne (cf. p. 46 [BD90b]) :

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} L_{ss} & 0 & L_{sz} \\ 0 & L_{\theta\theta} & 0 \\ L_{zs} & 0 & L_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_s + z\chi_s & 0 & \beta \\ 0 & \frac{1}{\alpha_2}(e_\theta + z\chi_\theta) & 0 \\ \frac{dw}{ds} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [9]$$

avec les termes :

$e_s = \vec{u}_{p,\xi} \cdot \vec{t}$: mesure de la déformation en membrane selon s ,

$e_\theta = \frac{1}{r} \vec{u}_{p,\theta} \cdot \vec{t}_\theta$: mesure de la déformation en membrane selon θ ,

$\chi_s = \beta_{,s}$: courbure selon s ,

$\chi_\theta = \frac{1}{r} \beta \cos(\phi)$: courbure selon θ .

Dans cette forme apparaît la variable curviligne s exprimée à partir de ξ en fonction du paramètre de Lamé m d'après la relation $ds = m d\xi$.

De l'expression [9], nous obtenons finalement la forme générale du tenseur de Green-Lagrange d'après la relation [2]. Nous obtenons ainsi :

$$\mathcal{E}_{gl} = \frac{1}{2} (\mathcal{F}^T \mathcal{F} - \mathcal{I}) = \underbrace{\frac{1}{2} (\mathcal{L} + \mathcal{L}^T)}_{\text{linéaire}} + \underbrace{\frac{1}{2} \mathcal{L} \mathcal{L}^T}_{\text{non linéaire}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_s & 0 & \frac{1}{2} \gamma_{sz} \\ 0 & \varepsilon_\theta & 0 \\ \frac{1}{2} \gamma_{sz} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad [10]$$

2.3.2 Écriture variationnelle

La forme variationnelle donnée par l'équation [1] peut se décomposer selon :

$$W = W_d + W_{int} - W_{ext} = 0,$$

où :

$$W_d = \int_{V_o} \delta \bar{u} \rho_o \frac{d^2 \bar{u}}{dt^2} dV_o, \quad W_{ext} = \oint_{\partial V_o} \delta \bar{u} \bar{f}_{s_o} dS_o,$$

$$W_{int} = 2\pi \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} ((\delta \varepsilon_s, \delta \varepsilon_\theta) \left\{ \begin{matrix} S_s \\ S_\theta \end{matrix} \right\} + \delta \gamma S_{sz}) r \alpha_2 ds dz d\theta.$$

W_d , W_{int} et W_{ext} sont respectivement les contributions dynamiques et des efforts internes et externes.

Les termes ε_s , ε_θ et γ sont les déformations en membrane, selon θ et en cisaillement, S_s , S_θ et S_{sz} étant les contraintes respectives en membrane, selon θ et en cisaillement.

Le terme en contrainte W_{int} s'écrit pour notre élément (se référer à [BD90b] pour un calcul détaillé) :

$$W_{int} = \int_{V_o} \delta \mathcal{E}_{gl} : S dV_o = 2\pi \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} ((\delta \varepsilon_s, \delta \varepsilon_\theta) \left\{ \begin{matrix} S_s \\ S_\theta \end{matrix} \right\} + \delta \gamma S_{sz}) r \alpha_2 ds dz d\theta.$$

Les déformations (tenseur ε) sont reliées aux contraintes (tenseur S) par une loi de comportement linéaire:

$$\left\{ \begin{matrix} S_s \\ S_\theta \end{matrix} \right\} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \end{matrix} \right\}, \quad S_{sz} = kG\gamma, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad [11]$$

E , ν et k sont respectivement le module d'Young, le coefficient de Poisson et le facteur de correction de cisaillement transverse.

Les efforts généralisés sont définis comme suit:

$$N_s = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_2 S_s dz, \quad M_s = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_2 z S_s dz, \quad N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_1 S_\theta dz,$$

$$M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_1 z S_\theta dz, \quad T_s = \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_2 S_{sz} dz,$$

avec N_s et N_θ les efforts de membrane suivant s et θ , M_s et M_θ les moments résultants autour de \vec{e}_θ et de \vec{t} et T_s l'effort tranchant suivant z .

Les variables α_1 et α_2 sont reliées aux rayons de courbure R_θ (selon θ) et R_s (selon s) d'après :

$$\alpha_2 = \left(1 - \frac{z}{R_\theta}\right) \quad \text{et} \quad \alpha_1 = \left(1 - \frac{z}{R_s}\right) = 1,$$

où R_θ est la distance à l'axe et $R_s = \infty$ car l'élément est tronconique.

2.3.3 Forme incrémentale

La forme incrémentale associée au travail interne se déduit de [3] :

$$\begin{aligned} \Delta W_{int} = & 2\pi \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\langle \Delta \delta \varepsilon_s \Delta \delta \varepsilon_\theta \rangle \left\{ \begin{matrix} S_s \\ S_\theta \end{matrix} \right\} + \Delta \delta \gamma S_{sz}) r ds dz \\ & + 2\pi \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\langle \delta \varepsilon_s \delta \varepsilon_\theta \rangle \left\{ \begin{matrix} \Delta S_s \\ \Delta S_\theta \end{matrix} \right\} + \delta \gamma \Delta S_{sz}) r ds dz, \end{aligned}$$

où Δ est l'opérateur variation.

2.4 Élément fini de coque de révolution

L'élément utilisé est un élément de coque tronconique à 3 d.d.l. par nœud, u , w et β , respectivement les composantes axiale et radiale du déplacement et la rotation dans le plan (x, r) . Celui-ci est représenté figure 4.

L'approximation des variables cinématiques u , w et β se fait par l'utilisation de fonctions nodales linéaires sur un élément 2 nœuds tel que l'on ait :

$$u = \sum_{i=1}^2 N_i u_i, \quad w = \sum_{i=1}^2 N_i w_i, \quad \beta_x = \sum_{i=1}^2 N_i \beta_i, \quad N_1(s) = 1 - \frac{s}{L}, \quad N_2(s) = \frac{s}{L}.$$

Les formes variationnelles respectives sont alors données¹ par :

$$\delta u = \sum_{i=1}^2 N_i \delta u_i, \quad \delta w = \sum_{i=1}^2 N_i \delta w_i, \quad \delta \beta = \sum_{i=1}^2 N_i \delta \beta_i.$$

1. pour les formes incrémentales, on remplacera δ par Δ .

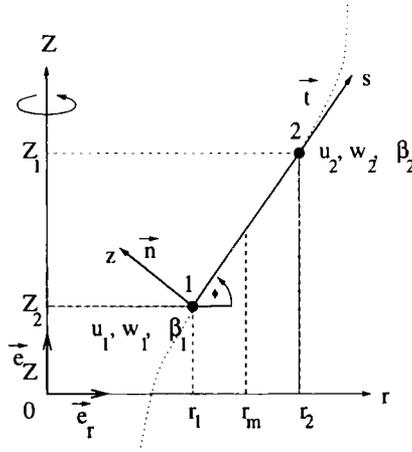


Figure 4 – Élément de coque épaisse axisymétrique tronconique

Nous noterons les inconnues nodales par élément sous la forme vectorielle suivante :

$$\langle u_e \rangle = \langle u_1 \quad w_1 \quad \beta_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \beta_2 \rangle, \quad \text{resp.} \quad \langle \delta u_e \rangle .$$

Afin d'éviter tout blocage en cisaillement transverse, nous userons systématiquement d'un seul point d'intégration numérique.

La forme variationnelle W est ensuite décomposée sur l'ensemble des éléments du domaine : $W = \sum_e W^e$.

La discrétisation des termes élémentaires fait alors apparaître des vecteurs et matrices élémentaires qui seront ensuite assemblés pour obtenir le système global à résoudre. Ces termes sont présentés ci-après.

2.4.1 Matrice masse

La matrice masse élémentaire est calculée en utilisant l'équation de la cinématique [6] :

$$W_d^e = \int_{V_e^o} \delta \bar{u}_q \rho \bar{u}_q dV^o = \int_{V_e^o} ((\delta \bar{u} + z \delta \bar{\beta})(\bar{u} + z \bar{\beta})) dV^o = \langle \delta u_e \rangle [V m e] \{ \bar{u}_e \},$$

où \bar{u} est la dérivée seconde par rapport au temps de u .

2.4.2 Sollicitations extérieures

Seules les sollicitations exercées par la pression seront considérées pour ce calcul.

On ignorera toute sollicitation par moments. Ce terme de sollicitations est calculé d'après l'expression :

$$W_{ext}^e = 2\pi \int_{S(t)_e} \delta \bar{u} \cdot \bar{n} p dS = \int_{S_e^o} \delta \bar{u} \cdot p \mathcal{F}^{-T} \bar{n}_o |J| dS^o = \langle \delta u_e \rangle \{ f_{ext} \},$$

où $|J|$ est le jacobien de la matrice de transformation (élément réel \Leftrightarrow élément de référence) et p la pression résultante de la différence des pressions exercées sur les parois interne et externe de l'élément.

Le tenseur gradients des transformations s'obtient d'après $\mathcal{F} = \mathcal{L} + \mathcal{I}$ avec \mathcal{L} le tenseur gradient des déplacements donné par l'équation [9] et \mathcal{I} le tenseur unité.

2.4.3 Terme de contraintes

Le terme à discrétiser est le suivant :

$$W_{int}^e = 2\pi \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\langle \delta \varepsilon_s, \delta \varepsilon_\theta \rangle \left\{ \begin{matrix} S_s \\ S_\theta \end{matrix} \right\} + \delta \gamma S_{sz}) r ds dz d\theta.$$

A l'aide de l'expression [10] et des fonctions d'approximation N_i , nous pouvons développer les termes de déformations virtuelles $\delta \varepsilon_s$, $\delta \varepsilon_\theta$ et $\delta \gamma$ selon :

$$\begin{aligned} \langle \delta \varepsilon_s, \delta \varepsilon_\theta \rangle &= \langle \delta \varepsilon_s^0, \delta \varepsilon_\theta^0 \rangle + z \langle \delta \varepsilon_s^1, \delta \varepsilon_\theta^1 \rangle = \langle \delta u_e \rangle ([B_\delta^0]^T + z[B_\delta^1]^T), \\ \delta \gamma &= \delta \gamma^0 + z \delta \gamma^1 = \langle \delta u_e \rangle (\{B_{\delta\gamma}^0\} + z\{B_{\delta\gamma}^1\}). \end{aligned}$$

Les contraintes et déformations sont reliées par la loi de comportement donnée par l'équation [11] :

$$\left\{ \begin{matrix} S_s \\ S_\theta \end{matrix} \right\} = [H] \left(\left\{ \begin{matrix} \varepsilon_s^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \end{matrix} \right\} + z \left\{ \begin{matrix} \varepsilon_s^1 \\ \varepsilon_\theta^1 \end{matrix} \right\} \right), \quad S_{sz} = kG(\gamma^0 + z\gamma^1).$$

Le terme résidu relatif aux efforts intérieurs devient alors :

$$\begin{aligned} W_{int}^e &= \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \langle \delta u \rangle ([B_\delta^0]^T + z[B_\delta^1]^T) [H] (\{\varepsilon^0\} + z\{\varepsilon^1\}) \\ &\quad + (\{B_{\delta\gamma}^0\} + z\{B_{\delta\gamma}^1\}) kG(\gamma^0 + z\gamma^1) r ds dz, \end{aligned}$$

qui intégré au centre de l'élément (un seul point de Gauss ($X_{pg} = L/2; \omega = L$)) s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} W_{int}^e &= 2\pi r_m L \langle \delta u_e \rangle ([B_\delta^0]^T [H_m] \{\varepsilon^0\} + [B_\delta^1]^T [H_f] \{\varepsilon^1\} + \{B_{\delta\gamma}^0\} H_c^0 \gamma^0 + \{B_{\delta\gamma}^1\} H_c^1 \gamma^1) \\ &= \langle \delta u_e \rangle \{f_{int}\}. \end{aligned}$$

Les matrices $[H_m]$ et $[H_f]$ ainsi que les scalaires H_c^0 et H_c^1 sont relatifs aux termes de rigidité (E, G, \dots) intégrés sur l'épaisseur.

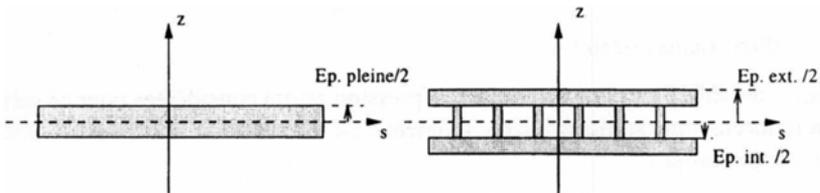


Figure 5 – [a] Épaisseur homogène - [b] Épaisseur multi-couches (tubulaire)

Les matrices relatives aux rigidités se calculent d'après :

$$([H_m], [H_f]) = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12} & H_{22} \end{bmatrix} (1, z^2) dz,$$

$$H_c^0 = \int_{-h/2}^{h/2} kG dz, \quad H_c^1 = \int_{-h/2}^{h/2} kG z^2 dz.$$

Ces termes sont différents selon que la structure est de type homogène ou multicouches (voir figure 5).

Les tuyères de type VULCAIN sont constituées d'un réseau de tubes de section carrée enroulés de manière hélicoïdale pour donner au divergent la forme désirée. Ces tubes ont pour fonction de permettre un refroidissement de la paroi interne de la jupe du moteur par circulation interne d'hydrogène liquide. Cette caractéristique géométrique sera modélisée par la suite en l'assimilant à une section de type sandwich : seules les parties pleines contribueront à la rigidité de l'ensemble (voir figure 5 [b]). Ceci ne constitue en fait qu'une approximation puisqu'elle ne tient pas compte des sections transversales présentes dans une section tubulaire (la connexion s'opère par la connectivité des éléments lors de la phase d'assemblage où les parois inférieure et supérieure du tube sont alors communes aux nœuds de l'élément).

Cette prise en compte d'une section modifiée s'est avérée nécessaire dans la mesure où une section pleine engendrait des problèmes de flambement au niveau du col de la tuyère. D'autre part, une analyse modale pour une tuyère pleine permet de montrer que l'essentiel des modes propres de la structure entière n'induisait des déplacements radiaux qu'en extrémité finale de la tuyère. Il fut ainsi décidé d'opter pour une modification des matrices de propriétés physiques afin d'éliminer tout problème de flambement et permettre une déformation de la tuyère sur l'ensemble de sa longueur.

Ces différents termes calculés, la forme complète du résidu élémentaire s'écrit alors :

$$\{r_e^p\} = [Vme]\{\ddot{u}_e\} + \{f_{int}\} - \{f_{ext}\}.$$

Après assemblage, nous obtenons le terme de résidu global : $\{R\} = \sum_e \{r_e^p\}$.

2.4.4 Calcul de la matrice tangente

Elle est obtenue en prenant l'incrément de W^e , soit :

$$\Delta W^e = \Delta W_d^e + \Delta W_{int}^e = \langle \delta u_e \rangle [K_T^e] \{\Delta u_e\}.$$

Nous avons de façon plus détaillée

$$\Delta W_d^e = \langle \delta u_e \rangle \frac{4}{\Delta t^2} [Vme] \{\Delta u_e\},$$

avec $\langle \delta u_e \rangle = \langle \delta u_1 \delta w_1 \delta \beta_1 \delta u_2 \delta w_2 \delta \beta_2 \rangle$, resp. $\{\Delta u_e\}$.

La matrice tangente relative aux contraintes est calculée à partir de :

$$\begin{aligned} \Delta W_{int}^e &= 2\pi \int_0^L \int_{-t}^t (\langle \Delta \delta \varepsilon_s \Delta \delta \varepsilon_\theta \rangle \left\{ \begin{matrix} S_s \\ S_\theta \end{matrix} \right\} + \Delta \delta \gamma S_{s,z}) r ds dz \\ &+ 2\pi \int_0^L \int_{-t}^t (\langle \delta \varepsilon_s \delta \varepsilon_\theta \rangle \left\{ \begin{matrix} \Delta S_s \\ \Delta S_\theta \end{matrix} \right\} + \delta \gamma \Delta S_{s,z}) r ds dz. \end{aligned}$$

Cette dernière expression conduit au calcul de plusieurs matrices détaillées ci-après.

2.4.5 Matrice de rigidité géométrique

Celle-ci est définie d'après

$$\Delta W_{int}^S = 2\pi \int_0^L \int_{-t}^t (\langle \Delta \delta \varepsilon_s \Delta \delta \varepsilon_\theta \rangle \left\{ \begin{matrix} S_s \\ S_\theta \end{matrix} \right\} + \Delta \delta \gamma S_{s,z}) r ds dz = \langle \delta u_e \rangle [K_S^e] \{ \Delta u_e \}.$$

2.4.6 Matrice tangente "linéaire" et des déplacements

Elle est définie d'après

$$\Delta W_L^e = 2\pi \int_0^L \int_{-t}^t (\langle \delta \varepsilon_s \delta \varepsilon_\theta \rangle \left\{ \begin{matrix} \Delta S_s \\ \Delta S_\theta \end{matrix} \right\} + \delta \gamma \Delta S_{s,z}) r ds dz = \langle \delta u_e \rangle [K_L^e] \{ \Delta u_e \}.$$

Ces matrices calculées, nous obtenons alors la forme complète de la matrice tangente élémentaire

$$[K_T^e] = \frac{4}{\Delta t^2} [Vme] + [K_S^e] + [K_L^e],$$

qui assemblée, conduit à : $[K_T] = \sum_e [K_T^e]$.

2.5 Schéma de discrétisation temporelle

Parmi les différents schémas de discrétisation temporelle proposés dans la littérature, le choix s'est porté sur un schéma implicite à l'ordre 2 de type Newmark [DT84] [BD90a].

Le schéma s'écrit sous la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \{ u^{p+1} \} &= \{ u^p \} + \Delta t \{ \dot{u}^p \} + \frac{\Delta t^2}{2} ((1-b) \{ \ddot{u}^p \} + b \{ \ddot{u}^{p+1} \}), \\ \{ \dot{u}^{p+1} \} &= \{ \dot{u}^p \} + \Delta t ((1-a) \{ \ddot{u}^p \} + a \{ \ddot{u}^{p+1} \}). \end{aligned}$$

Les différents schémas de la famille Newmark correspondent à des valeurs particulières de a et b . Choisir $a = b = \frac{1}{2}$ revient à supposer l'accélération constante sur l'intervalle Δt et égale à sa valeur moyenne. Ce schéma implicite souvent utilisé pour l'analyse dynamique des structures n'introduit aucun amortissement numérique et offre une précision temporelle d'ordre 2.

Pour des valeurs de a et b supérieures à 0.5 le schéma devient conditionnellement stable et pour $b = 0$, nous retrouvons un schéma explicite.

La combinaison de ces deux équations permet d'obtenir finalement la discrétisation de notre terme d'accélération ($a = b = \frac{1}{2}$):

$$\{\ddot{u}^{p+1}\} = \frac{4}{\Delta t^2} \underbrace{(\{u^{p+1}\} - \{u^p\})}_{\{\Delta u\}} - \frac{4}{\Delta t} \{\dot{u}^p\} - \{\ddot{u}^p\}.$$

Il est alors possible de décrire le calcul de la solution par l'algorithme suivant :

- Pour chaque pas de calcul "p" (avancée en temps)
 - Pour chaque itération "i"
 - Calcul du résidu $\{R^i\}$ associé à $W^{(i)}$ (cf. équation [1])
 - Calcul de $[K_T]$ associée à $\Delta W^{(i)}$ (cf. équation [3])
telle que $W^{(i+1)} = W^{(i)} + \Delta W^{(i)} = \{R^i\} + [K_T]\{\Delta u\} = 0$
 - Résolution: $[K_T]\{\Delta u\} = -\{R^i\}$
 - Remise à jour de la solution: $\{u^p\} = \{u^p\} + \{\Delta u\}$
 - Test de convergence
 - ↔ retour boucle "i"
- ↔ retour boucle "p"

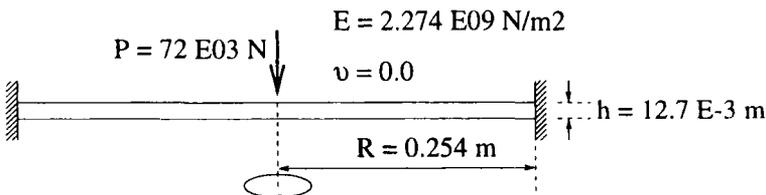
Pour chaque pas de calcul et d'itération, l'ensemble des variables constitué des grandeurs physiques (déformations, contraintes, sollicitations) et géométriques (position du maillage, vitesse, accélérations) doit être remis à jour.

2.5.1 Validation numérique de l'élément en grands déplacements

Cet exemple est directement inspiré d'une publication de K. S. Surana [Sur82] qui y développe un élément de coque axisymétrique quadratique avec prise en compte des non-linéarités géométriques.

De formulation relativement proche de celui précédemment cité, il constitue un bon exemple de validation tant pour la précision des résultats que pour l'étude de la convergence du processus itératif.

Le cas d'étude consiste en un disque encastré avec une charge concentrique centrée comme montré ci-dessous



Le maillage est composé de 10 éléments de longueurs uniformes.

La charge de $P = 72E3 N$ est ensuite appliquée par paliers de 10%.

La figure 6 représente l'évolution de la flèche au centre en fonction du chargement imposé.

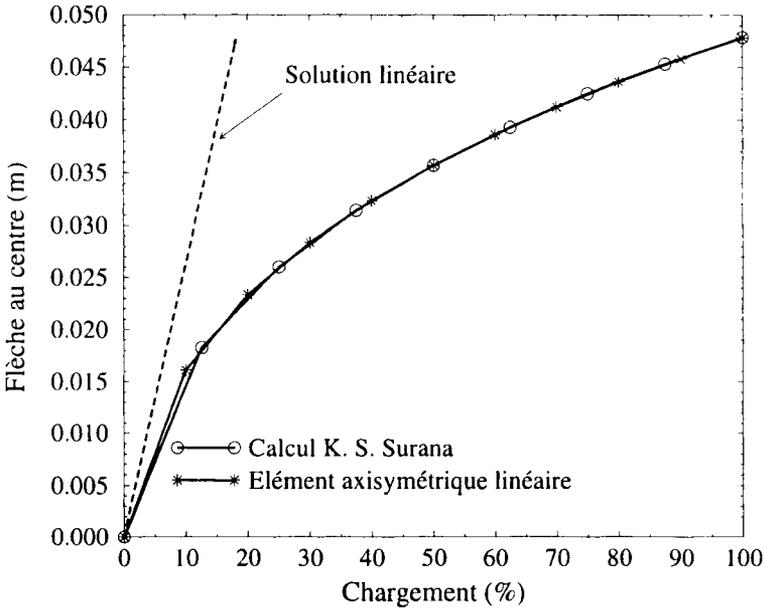


Figure 6 – Comparaison avec le calcul de K. S. Surana

On notera l'excellente superposition des résultats obtenus avec ceux de K. S. Surana, ainsi que l'écart des résultats par rapport à une théorie linéaire.

Le critère de convergence est défini par le rapport entre l'incrément itératif de la solution sur l'incrément entre deux états, à savoir

$$\text{Erreur} = \frac{\max\{\Delta u\}^i}{\max\{\Delta u\}^p},$$

où $\{\Delta u\}^i$ est l'incrément calculé à chaque itération au cours du pas de calcul "p", et $\{\Delta u\}^p$ l'incrément de la solution entre deux pas de calcul (somme des $\{\Delta u\}^i$).

Le critère de convergence a été choisi à $1E - 08$. Le tableau ci-dessous donne les itérations effectuées pour chaque pas de calcul.

| Charge (%) | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| Itérations | 6 | 5 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |

Ces résultats de convergence sont très proches de ceux obtenus par K. S. Surana. Sa technique de résolution est cependant légèrement différente puisqu'il utilise une méthode de linéarisation de Newton.

Le calcul a aussi été effectué en imposant le chargement en une seule fois: la convergence est obtenue avec la même précision en 10 itérations.

3 Équations de bilan pour un fluide sur un domaine évolutif

En général, les relations mathématiques décrivant le comportement d'un fluide sont exprimées selon un formalisme eulérien. Nous présentons dans cette section, l'écriture générale d'une loi de conservation, écriture valable aussi bien pour une description eulérienne, lagrangienne ou arbitraire (mixage des deux précédentes). Nous utiliserons un système fixe de coordonnées cartésiennes commun à chaque type de description.

Pour faciliter la compréhension de cette nouvelle approche, nous présentons tout d'abord la loi de conservation d'une grandeur scalaire C pour une équation du type convection-diffusion [Lef98].

La forme générale d'une loi de conservation pour un volume de contrôle $A(t)$ est la suivante :

$$\text{Taux d'accumulation} + \text{Echange Surfaccique} + \text{Production} = 0.$$

La surface délimitant le volume de contrôle mobile $\hat{A}(t)$ est désignée par $\hat{S}(t)$. La description de toute quantité est en terme de position \hat{x} , relative à $\hat{A}(t)$.

A l'instant "t", les vitesses de l'écoulement et d'un point p de la surface arbitraire sont respectivement \vec{u} et \vec{w} . Ceci est représenté sur la figure 7 :

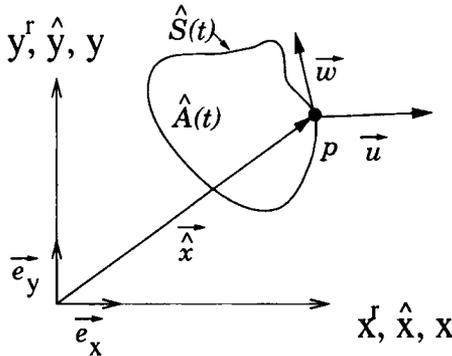


Figure 7 – Configuration arbitraire mobile $A(t)$

La loi de conservation s'écrit :

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{A}(t)} \hat{C}(\vec{x}, t) dA}_{\text{Taux d'accumulation}} + \underbrace{\oint_{\hat{S}(t)} \hat{C}(\vec{u} - \vec{w}) \cdot \vec{n} dS}_{\text{Échange surfaccique}} + \underbrace{\oint_{\hat{S}(t)} \vec{q}_n \cdot \vec{n} dS + \int_{\hat{A}(t)} \hat{f}_v dA}_{\text{Production}} = 0,$$

où :

- $\vec{u} - \vec{w}$: vitesse relative du fluide (flux convectif),

2. les vitesses associées aux points \hat{x} du domaine mobile seront exprimées sans $\hat{\cdot}$ pour alléger l'écriture, aucune confusion n'étant d'ailleurs possible.

- \vec{q}_n : flux diffusif,
- f_v : terme de production,
- \vec{n} : normale extérieure à la surface.

Le théorème de la divergence nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\hat{A}(t)} C(\vec{x}, t) dA + \int_{\hat{A}(t)} Div_{\hat{x}} [C(\vec{u} - \vec{w}) + \vec{q}_n] dA + \int_{\hat{A}(t)} f_v dA = 0.$$

En projetant sur un domaine de référence fixe A^r coïncidant avec $A(t)$ à l'instant $t = 0$ s tel que l'on ait :

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{x}^r, t), \quad d\vec{x} = \hat{\mathbf{F}}(t) d\vec{x}^r \quad \text{avec} \quad \hat{\mathbf{F}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{x}^r} \quad \text{et} \quad J = det(F),$$

et

$$J(t = 0) = 1 \quad \text{mais} \quad \frac{\partial J}{\partial t} \neq 0,$$

on obtient :

$$\int_{\hat{A}(t)} (...) dA = \int_{A^r} (...) J(t) dA^r.$$

La conservation de la quantité scalaire \hat{C} s'écrit sur ce domaine fixe :

$$\int_{A^r} \left[\frac{\partial}{\partial t} (J(t)C) \Big|_{\hat{x}} + J(t) Div_{\hat{x}} [C(\vec{u} - \vec{w}) + \vec{q}_n] + J(t)f_v \right] dA^r = 0,$$

ce qui localement peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (J(t)\hat{C}) \Big|_{\hat{x}} + J(t) Div_{\hat{x}} [\hat{C}(\vec{u} - \vec{w}) + \vec{q}_n] + J(t)\hat{f}_v = 0.$$

3.1 Lois de conservation pour fluides compressibles sur domaines axisymétriques

En remplaçant la quantité scalaire \hat{C} par une quantité vectorielle, on peut obtenir pour un fluide la loi de conservation sur un domaine axisymétrique mobile de :

1. la masse,
2. la quantité de mouvement,
3. l'énergie.

La prise en compte de la dynamique d'un maillage se traduit par l'ajout de la divergence du champ de vitesse du maillage comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \{rJU\} + rJ \frac{\partial}{\partial x} (\{F_{cx}\} - w_x\{U\}) + J \frac{\partial}{\partial r} (r(\{F_{cr}\} - w_r\{U\})) = J\{H\}, \quad [12]$$

avec :

$$\{U\} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix}, \{F_{cx}\} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix}, \{F_{cr}\} = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + p \\ (\rho e + p)v \end{pmatrix}, \{H\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Les variables u et v dénotent les composantes axiale et radiale de l'écoulement. (u_r, w_r) sont les composantes selon x et selon r du champ de vitesse du maillage, $\{U\}$ le vecteur des variables conservatives et $\{F_{cx}\}$ et $\{F_{cr}\}$ les flux convectifs eulériens définis ci-dessus.

Le système d'équations est fermé par l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p = \rho \mathcal{R}T = (\gamma - 1)(\rho e - \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)).$$

Ce système d'équations s'intègre directement sur l'espace de référence (ξ, η) d'élément de surface différentiel $d\xi d\eta$, la prise en compte de la composante axisymétrique de l'écoulement se traduisant par la pondération par r du terme temporel.

La forme précédente est telle qu'elle permet indifféremment le traitement d'un champ fluide sur maillage mobile ou fixe d'un point de vue programmation.

3.1.1 Formes faibles

Il est possible de déterminer deux formes faibles pour ce système d'équations :

$$\begin{aligned} W_I &= \int_{A^r} \langle \delta U \rangle \frac{\partial r J \{U\}}{\partial t} dA^r + \int_{A^r} \langle \delta U \rangle r J \left(\frac{\partial \{F_x\}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \{F_r\}}{\partial y} \right) dA^r \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{A(t)} \langle \delta U \rangle \{U\} dA + \int_{A(t)} \langle \delta U \rangle \left(\frac{\partial \{F_x\}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \{F_r\}}{\partial r} \right) dA = 0, \end{aligned}$$

avec $dA^r = d\xi d\eta$ dans l'espace de référence et $dA = r dx dr$ dans l'espace réel. Nous avons alors la relation $dA = J dA^r$.

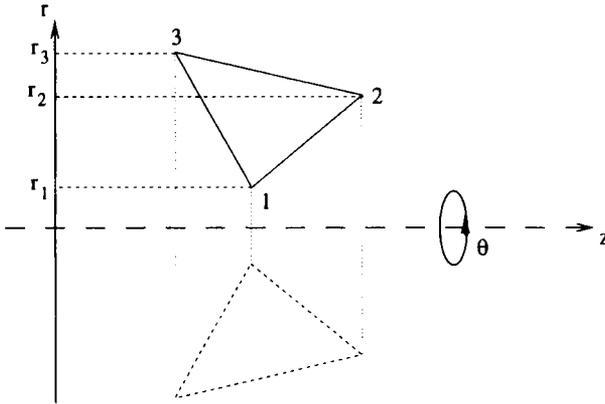
La deuxième forme possible s'obtient de la première par le biais d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} W_{II} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{A(t)} \langle \delta U \rangle \{U\} dA - \int_{A(t)} (\langle \delta U_{,x} \rangle \{F_x\} + \langle \delta U_{,r} \rangle \{F_r\}) dA \\ &\quad + \oint_{S(t)} \langle \delta U \rangle (\{F_x\} n_x + \{F_r\} n_r) dS = 0, \end{aligned}$$

avec (n_x, n_r) les composantes de la normale extérieure au domaine.

3.2 Modèle élément fini pour le fluide

L'élément fini axisymétrique choisi est représenté sur la figure ci-dessous :



Du fait de l'absence de dépendance en θ , l'intégration qui conduit à pondérer chaque terme par 2π disparaît.

Le schéma de discrétisation temporelle est celui de Lax-Wendroff [LW60] [Lef98]. Il se décompose en 2 étapes :

1. une première dite intermédiaire où une solution locale est tout d'abord calculée.
2. une seconde dite finale où la solution globale est calculée par résolution du système non linéaire global.

3.2.1 Étape intermédiaire

La solution intermédiaire est calculée d'après :

$$\int_A \{U\}^{n+1/2} r dr dz = \int_A \{U\}^n r dr dz - \frac{\Delta t}{2} \left(\int_A \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial r} \right) r dr dz + \int_A \{H\}^n dr dz \right).$$

Après décomposition de $\{U\}$ selon :

$$\{U\}^{n+1/2} = \{U\}^n + \left(\{\bar{U}\}^{n+1/2} - \{\bar{U}\}^n \right),$$

on obtient finalement :

$$\{\bar{U}\}^{n+1/2} = \{\bar{U}\}^n - \frac{1}{r_m A^e} \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{A^e} \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_r}{\partial r} \right) r dr dz - \int_A \{H\}^n dr dz \right).$$

Remarque 1 Le fait de décomposer $\{U\}^{n+1/2}$ permet de découpler $\{U\}^{n+1/2}$ de r en ne calculant que sa valeur moyenne sur l'élément pondérée par le rayon moyen (barycentrique) r_m .

Les flux intermédiaires sont alors remis à jour d'après :

$$\{F_x\}^{n+1/2} = \{F_x (U^{n+1/2})\} \quad \text{et} \quad \{F_r\}^{n+1/2} = \{F_r (U^{n+1/2})\}.$$

3.2.2 Étape finale

Elle consiste à discrétiser l'expression :

$$\begin{aligned} W_{II}^e &= \int_{A^e} \langle \delta U \rangle \{\Delta U\} r dr dz - \int_{A^e} (\langle \delta U \rangle_{,x} \{F_x\} + \langle \delta U \rangle_{,r} \{F_r\})^{n+1/2} r dr dz \\ &+ \oint_{S^e} \langle \delta U \rangle (\{F_x\} n_x + \{F_r\} n_r)^{n+1/2} dS - \int_{A^e} \langle \delta U \rangle \frac{1}{r} \{H\}^{n+1/2} r dr dz \\ &= W_{II,m}^e - W_{II,\Omega}^e - W_{II,\Gamma}^e = 0. \end{aligned}$$

La discrétisation des différents termes de notre forme variationnelle est effectuée de la manière suivante :

1. Après décomposition de $\langle \delta U \rangle$ et $\{\Delta U\}$, le terme de masse fait apparaître la matrice masse élémentaire $[M^e]_{axi}$ telle que :

$$W_{II,m}^e = \int_{A^e} \langle \delta U \rangle \{\Delta U\} dA = \langle \delta U_e \rangle [M^e]_{axi} \{\Delta U_e\},$$

avec $\langle \delta U_e \rangle = \langle \langle \delta U_e \rangle_1, \langle \delta U_e \rangle_2, \langle \delta U_e \rangle_3 \rangle$ où les indices sont relatifs aux nœuds de l'élément (resp. pour $\{\Delta U_e\}$).

La matrice $[M^e]_{axi}$ est obtenue par intégration numérique (4 points de Hammer pour intégration exacte, référence [BD90a] page 266).

2. Le terme $W_{II,\Omega}^e$ se décompose en une partie relative au flux, l'autre au terme source.

$$\begin{aligned} W_{II,\Omega}^e &= \Delta t \int_{A^e} (\langle \delta U \rangle_{,x} \{F_x\} + \langle \delta U \rangle_{,r} \{F_r\})^{n+1/2} r dr dz + source \\ &= \langle \delta U_e \rangle \{R_{\Omega F}^e\} + source. \end{aligned}$$

Le terme source est quant à lui calculé selon :

$$\begin{aligned} source &= \Delta t \int_{A^e} \langle \delta U \rangle \{H\}^{n+1/2} 2A_e dr dz \\ &= \langle \delta U_e \rangle \{R_{\Omega H}^e\}. \end{aligned}$$

3. Le contour est subdivisé en éléments linéaires à 2 nœuds tels que

$$\begin{aligned} W_{II,\Gamma}^e &= -\Delta t \int_{\Gamma^e} \langle \delta U \rangle (\{F_x\} n_x + \{F_y\} n_y)^{n+1/2} dS \\ &= \langle \delta U_e \rangle \{R_{\Gamma}^e\}. \end{aligned}$$

Ces opérations décrites ci-dessus sont résumées par l'équation

$$[M^e]_{axi} \{\Delta U_e\} = \{R_{\Omega F}^e\} + \{R_{\Omega H}^e\} + \{R_{\Gamma}^e\}.$$

Cette expression une fois assemblée conduit au système non linéaire suivant

$$[M]_{axi}\{\Delta U\} = \{R\},$$

avec $[M]_{axi}$ la matrice masse globale et $\{R\}$ le terme de résidu global.

Ces systèmes algébriques non linéaires établis, l'étape suivante consiste désormais à calculer leur solution par des techniques adaptées.

3.3 Algorithme de résolution

La résolution du système non linéaire, au cours d'un pas de calcul, est effectuée par une méthode itérative de type Jacobi.

Cet algorithme est basé sur l'utilisation d'une matrice masse diagonale $[M_d]$ dont les éléments sont déterminés d'après

$$[M_d(i, j)] = \delta_{ij} \sum_{k=1}^{ndlt} [M(i, k)] \quad \text{avec} \quad ndlt : \text{nbre de d.d.l. total.}$$

Il peut se résumer de la manière suivante.

$$\begin{aligned} [M]\{\Delta U\} &= \{R\} \quad \text{avec} \quad [M] = [M_d] + ([M] - [M_d]) \\ \Leftrightarrow [M_d]\{\Delta U\} &= \{R\} + ([M_d] - [M])\{\Delta U\}. \end{aligned}$$

On en déduit l'algorithme itératif suivant :

$$\begin{aligned} \{\Delta U_0\} &= [M_d]^{-1}\{R\} \\ \{\Delta U_{k+1}\} &= [M_d]^{-1}(\{R\} + ([M_d] - [M])\{\Delta U_k\}), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Du fait du bon conditionnement de la matrice masse diagonale, 2 ou 3 itérations suffisent pour obtenir une solution précise.

Le schéma de Lax-Wendroff n'étant plus positif dans les zones de forts gradients, une technique de capture de choc doit être associée à l'algorithme de résolution. La technique de capture de chocs utilisée est le *Flux Corrected Transport* [RLV87]. Elle se base sur le maintien d'une solution d'ordre de précision élevé dans les zones homogènes et la prise en compte d'une solution de précision inférieure dans les zones de forts gradients comme les chocs par exemple.

3.4 Cinématique d'un maillage mobile

La déformation au sens géométrique du domaine de calcul (configuration actuelle) est définie ici dans un contexte équivalent à celui des éléments finis: la configuration de référence est naturellement assimilée à l'élément fini de référence. La cinématique peut s'exprimer selon une loi générale du type (en termes de (ξ, η)):

$$\vec{x}(\vec{\xi}, t) = N_i(\vec{\xi}) \cdot \vec{x}_i(t), \quad \vec{\xi} = (\xi, \eta),$$

où les $\vec{x}_i(t)$ sont les coordonnées des nœuds du maillage mobile.

L'expression de la jacobienne reliant l'élément réel (x, y) à l'élément de référence (ξ, η) est donnée par :

$$[J(t)] = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}.$$

Le choix de la loi d'évolution temporelle est *a priori* arbitraire mais doit cependant satisfaire aux conditions de compatibilité cinématique et géométrique entre la frontière du domaine fluide et la structure qui sont communes. La qualité du maillage est aussi un point à considérer en vue d'éviter la distorsion des éléments.

La prise en compte des vitesses du maillage et du fluide ne peut se faire sans prendre certaines précautions. Il est en effet nécessaire d'éviter toute interdépendance entre ces vitesses ou influence parasite. On parle alors de consistance du schéma vis-à-vis de la mobilité du maillage.

3.5 Consistance géométrique

Un article de référence sur les maillages mobiles s'est imposé suite à l'introduction de la loi de conservation géométrique (GCL) par P. D. Thomas & C. K. Lombard (1979) [TL79]. Celui-ci fut en fait la redécouverte de la *Space Conservation Law* émise par J. G. Trulio & K. R. Trigger en 1961. Par la suite, I. Demirdzic [DP90][DP88] montra que le non-respect de cette loi pouvait, dans des cas de fortes mobilités du maillage, générer des puits ou sources de masse et contribuer à l'apparition d'oscillations numériques.

Nous formulerons alors le principe de consistance géométrique selon :

Tout champ uniforme et constant solution des équations de Navier-Stokes, doit le rester quel que soit le mouvement du maillage.

Nous supposerons un déplacement nodal linéaire en temps entre les instants $(t, t + \Delta t)$:

$$\vec{x}(\tau) = (1 - \phi(\tau))\vec{x}^m + \phi(\tau)\vec{x}^{m+1}, \quad \text{avec } \phi(\tau = t) = 0 \text{ et } \phi(\tau = t + \Delta t) = 1,$$

ce qui pour la composante radiale donne

$$r(\tau) = b_0 + b_1\phi(\tau).$$

Le jacobien de la transformation est alors une forme quadratique en $\phi(\tau)$

$$J(\tau) = a_0 + a_1\phi(\tau) + a_2\phi^2(\tau).$$

La prise en compte d'un champ de variables uniforme dans l'équation [12] conduit à la forme simplifiée suivante :

$$\frac{\partial rJ}{\partial t} = Jr\vec{\nabla} \cdot \vec{w}. \quad [13]$$

Mise sous une forme faible, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_A \delta U dA = \int_A \delta U \vec{\nabla} \cdot \vec{w} dA, \text{ où } dA = r dr d\theta dx.$$

Une intégration dans le temps nous conduit à :

$$\begin{aligned} & \int_{A^{n+1}} \delta U dA - \int_{A^n} \delta U dA \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \int_{A_r} \delta U J \vec{\nabla} \cdot \vec{w} r(\tau) dr d\theta dx d\tau \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \int_{A_r} \delta U \frac{\partial r(\tau) J(\tau)}{\partial \tau} dr d\theta dx d\tau \text{ avec [13]} \\ &= \int_0^1 \int_{A_r} \delta U \underbrace{(a_1 b_0 + a_0 b_1 + 2(a_2 b_0 + a_1 b_1)\phi(\tau) + 3a_2 b_1 \phi(\tau)^2)}_{\text{quadratique en } \phi(\tau)} dr d\theta dx d\phi. \end{aligned}$$

Les termes du membre gauche de l'équation ci-dessus sont exactement intégrables par une discrétisation spatiale type éléments finis. Pour que la GCL soit respectée, il est donc nécessaire de conduire une intégration exacte en temps du membre droit. Ce dernier étant quadratique en $\phi(\tau)$, une intégration numérique par deux points de Gauss le permet

$$t_1 = t_0 + \Delta t \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad t_2 = t_0 + \Delta t \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right),$$

avec pondération par un poids égal à $p = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la consistance géométrique du schéma sera vérifiée en intégrant les termes de flux et sources sur des géométries prises à des instants bien précis.

3.6 Remise à jour du maillage

Entre deux pas de calcul, il s'avère donc nécessaire de remettre à jour l'ensemble du maillage pour, d'une part assurer une compatibilité en déplacements des éléments frontières communs aux parois mobiles, et d'autre part éviter une distorsion trop importante des éléments. A ce sujet, plusieurs méthodes ont été développées et peuvent être considérées comme générales.

Citons notamment la méthode des ressorts [Bat89] qui revient à assimiler chaque segment (constituant les arêtes des cellules ou éléments) comme un ressort (*spring*) avec sa propre rigidité en compression. Dans les cas de grandes mobilités de maillage, il est, de plus, nécessaire d'introduire une rigidité en torsion pour éviter le chevauchement inéluctable d'éléments voisins [HTF97][Far96]. La remise à jour du domaine complet s'obtient alors par la résolution des équations d'équilibre appliquées au système de ressorts.

Une autre méthode consiste à établir une analogie entre le domaine représenté par le maillage et un domaine pseudo-élastique [PAS96] dont la déformation peut être

déterminée par la résolution classique des équations linéaires de l'élasticité. Dans ce cas, la déformation n'est pas induite par une sollicitation mais par les déplacements imposés aux nœuds relatifs à la structure déformée.

Ces méthodes ont l'avantage d'être générales mais nécessitent une phase de calcul supplémentaire et ne feront pas l'objet de ce travail.

Pour l'ensemble des calculs qui seront effectués par la suite, les domaines de calculs sont convexes. Ils permettent alors le calcul du champ de déplacement du maillage par une simple interpolation linéaire dans les deux directions entre une frontière mobile dont la vitesse locale nous est connue et son vis-à-vis généralement fixe.

4 Algorithme d'échanges

Les différents modèles introduits, il est alors nécessaire de les faire dialoguer en vue de pouvoir conduire des calculs de couplage fluide-structure.

La manière la plus simple d'opérer est de les faire calculer successivement avec un échange de données à chaque fin de calcul et de répéter le cycle le nombre de fois voulu. Cependant, les caractéristiques fluide et structure sont différentes. L'algorithme implicite de la structure permet de sélectionner des pas de temps élevés, alors que le schéma explicite du fluide se doit de respecter une condition de stabilité du type CFL [Cor92], ce qui conduit à des pas de temps inférieurs de plusieurs ordres de grandeur. Ainsi, il est plus judicieux d'effectuer une remise à jour de la structure tous les $N_{f/s}$ itérations ce qui permet de gagner en temps de calcul puisque les temps de transferts de données peuvent être non négligeables s'ils sont effectués très souvent.

Nous pouvons représenter schématiquement le couplage entre les deux codes de calcul et les échanges de données de la façon suivante :

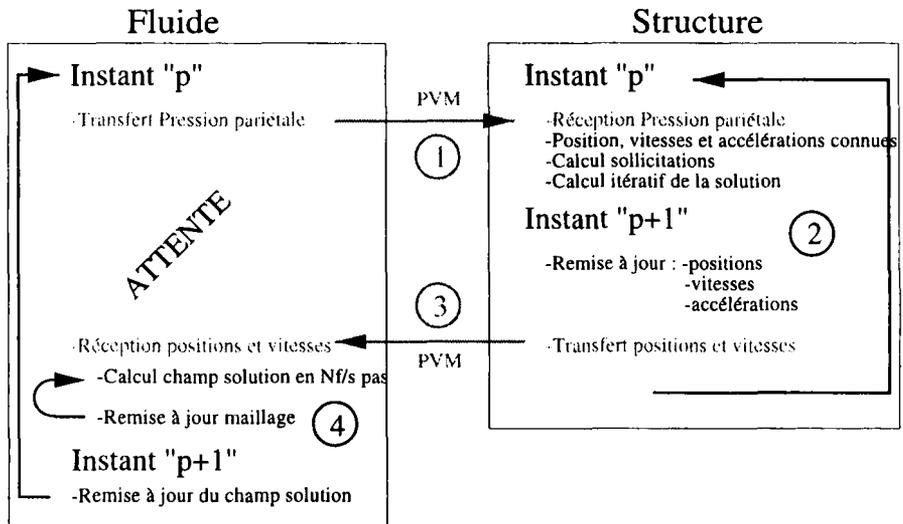


Figure 8 – Transfert des données

Un cycle complet se déroule alors de la manière suivante :

1. le fluide transmet le profil pariétal de pression au code structure *via* des bibliothèques de calcul parallèle, ainsi que le pas de temps structure: $\Delta t_s = N_{f/s} \times \Delta t_f$,
2. de ces données, le code structure calcule la solution au pas de temps suivant (temps incrémenté du pas de temps transmis par le fluide) et remet à jour les coordonnées de la paroi,
3. la structure transmet alors les positions et vitesses de l'ensemble des nœuds de la partie flexible de la paroi,
4. le fluide avance de $N_{f/s}$ pas de temps fluide pour se recalculer par rapport à la structure,
5. \leftrightarrow retour étape 1 pour un nouveau cycle.

L'algorithme de couplage a été emprunté à [TTL92] et se traduit par une avancée en temps pour le code structure, qui est ensuite "rattrapé" par le fluide. La figure 9 montre schématiquement le couplage qui s'opère par le transfert des données entre codes pour une succession de cycles de calculs.

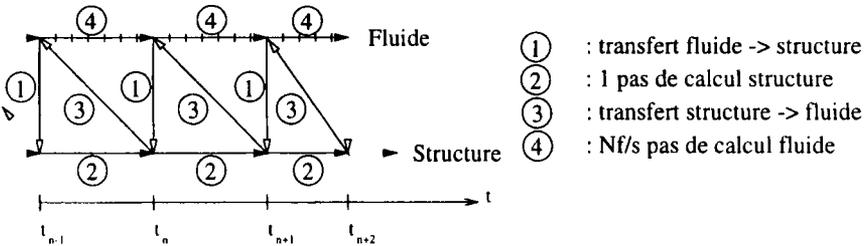


Figure 9 – Algorithme de couplage

Cet algorithme où les deux codes opèrent de façon successive avec une remise des données communes entre chaque exécution est en fait le plus simple qui puisse être envisagé. D'autres schémas ont cependant été étudiés (calculs successifs ou simultanés) et détaillés référence [Pip94].

Concernant le choix de la variable $N_{f/s}$, celui-ci ne peut être choisi arbitrairement. Si nous notons par Δt_f et Δt_s les incréments en temps respectifs du fluide et de la structure, $N_{f/s}$ est alors défini comme le rapport entier des incréments

$$N_{f/s} = \frac{\Delta t_s}{\Delta t_f}$$

Un choix correct de $N_{f/s}$ peut être confirmé d'après des considérations énergétiques en évaluant le décalage entre l'énergie perdue par le fluide au profit de la structure et celle acquise par la structure. Toutes deux peuvent être calculées séparément d'après

le travail des efforts de pression. Les profils de pression n'étant pas connus aux mêmes instants pour les deux codes, ce décalage est directement relié aux choix de la valeur de $N_{f/s}$, différente de 1.

4.1 Bibliothèque de dialogue PVM - Parallel Virtual Machine

Le couplage des deux codes d'un point de vue informatique est obtenu sous architecture parallèle avec l'utilisation des bibliothèques PVM (*Parallel Virtual Machine*) [GB94][Kes97].

Celles-ci permettent de créer un environnement d'échanges entre les codes et ne nécessitent, d'un point de vue programmation, que peu de modifications. Le principe est basé sur une hiérarchie *master-slaves* représentée sur la figure 10.

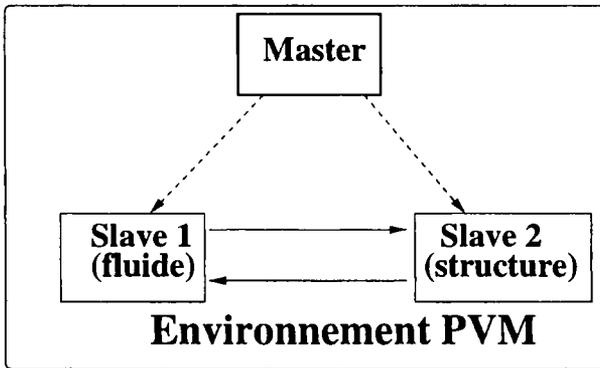


Figure 10 – Configuration master-slaves

Le *master* a pour unique tâche d'attribuer un numéro de *processus* à chacun des codes (*slave*) et de renseigner chacun du numéro de processus accordé à son vis-à-vis. Chaque *slave* ayant désormais connaissance des numéros de chacun des processus, un "dialogue" (*message-passing*) peut alors être établi et le couplage commencer.

5 Couplage aéroélastique d'un propulseur de fusée

Les phases d'allumage et d'extinction des moteurs fusée sont particulièrement critiques de par la complexité de la physique qui intervient. En régime établi, une instabilité du jet lors d'un essai au sol peut induire d'importants efforts asymétriques appelés *charges latérales*. Les effets immédiats sont un risque d'endommagement, voire de rupture du moteur. La modélisation de ces effets ne peut se faire que par un modèle fluide avec prise en compte des effets visqueux à l'aide de modèles de turbulence aptes au calcul du décollement de jet dans le moteur [Par96]. L'ambition de cette étude est cependant plus modeste et peut se justifier du fait qu'aucune donnée expérimentale n'est encore disponible à ce jour.

Actuellement, des études sont menées pour identifier l'origine des charges latérales [Act98]. Une solution pour les éliminer serait de suffisamment rigidifier la struc-

ture afin de limiter la déformation ce qui aurait pour principale répercussion de diminuer la charge utile et par voie de conséquence le rendement des lanceurs actuels.

D’où l’idée de pouvoir mettre à profit le calcul numérique du couplage fluide-structure sur un cas d’actualité. Ce couplage ne signifie pas qu’il est entièrement responsable des problèmes liés aux moteurs fusée mais il est rendu utile et nécessaire pour justement en estimer son importance.

Dans cette section, le couplage est conduit sur un moteur fusée dont une partie de sa structure est supposée souple. L’objectif est d’étudier la réponse dynamique d’un divergent souple sollicité par un champ de pression résultant de la détente supersonique des gaz du moteur fusée. Si les déformations sont faibles (domaine de l’élasticité linéaire), la structure réagit sur ses modes fondamentaux. Deux calculs seront ainsi conduits, le premier relatif à un comportement linéaire de la structure pour vérifier le comportement modal de la structure, le second relatif à un comportement non linéaire afin de comparer les deux types de réponse.

Le domaine de calcul axisymétrique est représenté sur la figure 11.

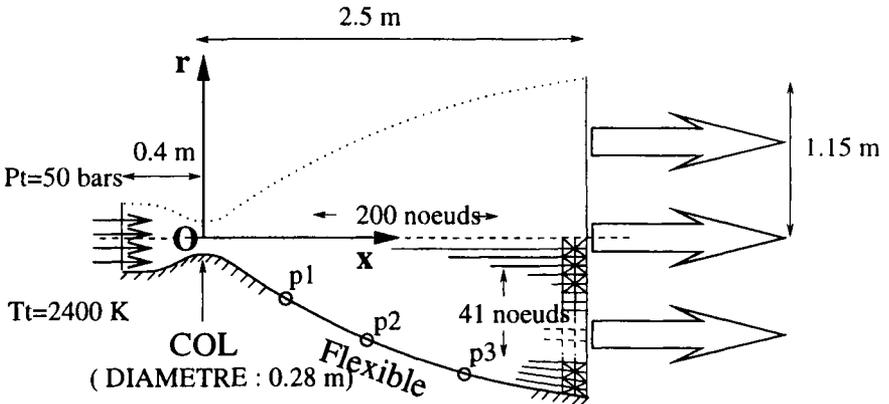


Figure 11 – Configuration moteur

Les données au cours du calcul, seront extraites de trois points localisés en aval du col à 25 %, 50 % et 75 % de la longueur flexible totale qui est de 2,45 m.

Le maillage structure est extrait du précédent et se compose de 155 éléments de type coque axisymétriques (cf. figure 11).

Les conditions aux limites sont une condition de glissement sur les parois flexibles et rigides et un traitement des entrées/sorties par les caractéristiques [Cor92].

Le calcul du champ de déplacements (et donc de vitesses) du maillage est expliqué ci-dessous et montré figure 12.

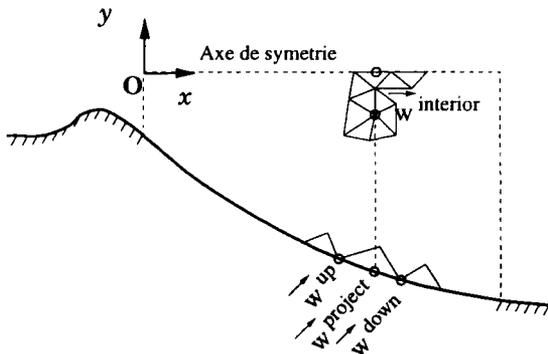


Figure 12 – Adaptation maillage

1. pour chaque nœud intérieur au maillage et susceptible de se déplacer, localisation de sa projection radiale sur la paroi flexible et détermination des nœuds de la structure (dont la vitesse est connue) encadrant la projection.
2. calcul de la vitesse $\vec{w}^{project}$ du point projeté par interpolation avec les vitesses des deux nœuds l'entourant, \vec{w}^{up} et \vec{w}^{down} .
3. déduction de la vitesse de maillage du nœud intérieur par interpolation linéaire entre le nœud projeté, de vitesse $\vec{w}^{project}$, et le nœud associé sur l'axe de symétrie de vitesse nulle.

La stabilité du schéma fluide est assurée par une condition à $CFL = 0.9$ [Cor92] qui conduit à un incrément en temps de $dt = 1.310^{-6}$ s.

Une première étape consiste à calculer la solution stationnaire du champ fluide en maintenant rigide la structure. Cet écoulement établi, la flexibilité est alors rendue à la structure et le couplage peut commencer. Au cours du calcul, sont stockés la pression et les déplacements aux nœuds pré-sélectionnés ainsi que les échanges énergétiques entre les deux domaines. Ces derniers sont calculés d'après les efforts de pression. Un calcul structure est effectué tous les 20 pas de calcul fluide.

Les propriétés matériaux choisies pour les deux cas d'étude sont :

| Linéarité | Young (N/m^2) | Epaisseur (m) | Densité (kg/m^3) | Poisson |
|------------------|-------------------|---------------|----------------------|---------|
| Cas linéaire | 1.0E10 | 0.04 | 9000 | 0.36 |
| Cas non linéaire | 8.0E08 | 0.002 | 2000 | 0.36 |

5.1 Cas linéaire

Les échanges énergétiques sont représentés au cours du temps figure 13. Y est également tracé le spectre de ce signal obtenu par un simple calcul de FFT, ainsi que

la valeur des premiers modes naturels de la structure obtenus d'après un calcul modal.

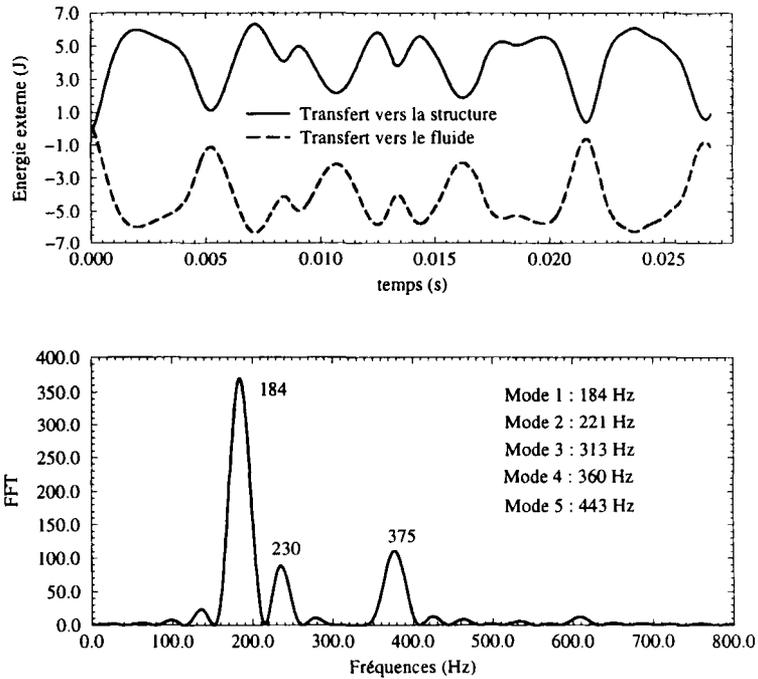


Figure 13 – Échanges énergétiques

On remarque sur la première courbe, la conservation des échanges énergétiques entre le fluide et la structure. Sur le spectre, on note la prédominance d'un pic en fréquence proche du premier mode. Ceci est un fait admis que l'essentiel des échanges énergétiques se fait sur le premier mode naturel de la structure.

Sur le graphique relatif aux déplacements radiaux, figure 14, on peut vérifier le comportement linéaire de la structure hautement rigide (la contribution axisymétrique y est pour beaucoup) par un signal dont le spectre fait apparaître des pics en fréquence au niveau des modes naturels. Les modes détectés (1, 2 et 4 surtout) se trouvent localisés en des points particuliers puisque le premier est décelable essentiellement au premier nœud de mesure, alors que le second mode est surtout décelable sur les deux derniers nœuds.

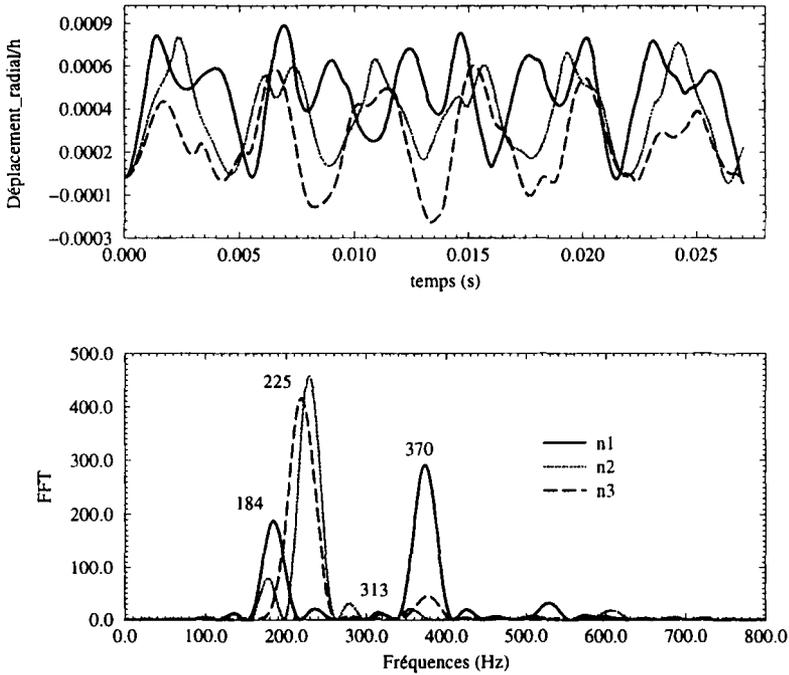


Figure 14 – Réponses en déplacements

5.2 Cas non linéaire

Le matériau est supposé cette fois-ci suffisamment souple pour permettre à la structure d'évoluer avec des déplacements supérieurs à 10 fois l'épaisseur. Cela constitue, rappelons-le, plus un cas académique qu'industriel.

Sur la planche de figures Tab.1, sont représentés les champs d'iso-valeurs pris à différents instants pour le nombre de Mach et la composante axiale de la quantité de mouvement. Chacune des figures est séparée des autres d'un intervalle de temps de 6.510^{-4} s. Les premières, pour chacune des deux variables, sont proches de l'état stationnaire où l'onde de pression créée à partir du col est particulièrement bien prononcée pour les deux champs.

Au fur et à mesure du calcul, la structure réagit aux sollicitations extérieures en commençant en haut du divergent où la sollicitation est maximale, pour se propager le long de la paroi et générer comme une vague décelable visuellement d'après le profil ondulé de la paroi, et dont l'effet sur le fluide se traduit par l'apparition d'une succession de couples *choc faible/faisceau de détente*.

Chaque perturbation créée par une courbure de la paroi est ensuite propagée par l'écoulement.



mach, min = 0.255077, max = 8.08417



rho, min = 20.0949, max = 4114.26



mach, min = 0.255045, max = 8.08454



rho, min = 20.0264, max = 4114.8



mach, min = 0.254948, max = 8.08253



rho, min = 20.1064, max = 4114.13



mach, min = 0.255072, max = 8.11799



rho, min = 19.6549, max = 4114.05

TAB. 1 – Couplage fluide et structure sur propulseur fusée à différents instants

On notera que l'onde de pression présente dans le cas d'une paroi rigide n'est que très peu affectée, une explication vraisemblable est que l'amplitude des vitesses radiales de la paroi qui est trop faible pour que l'information atteigne cette onde avant d'être évacuée du domaine de calcul.

D'un point de vue spectral, le tableau ci-dessous regroupe les 11 premiers modes allant de 80 à 224 Hz.

| | | | | | | | | | | | |
|------|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Mode | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| [Hz] | 87 | 108 | 105 | 118 | 126 | 141 | 158 | 173 | 197 | 206 | 224 |

La rigidité de l'élément de coque axisymétrique a été modifiée par sa matrice des propriétés physiques comme il fut mentionné section 2.4.3. Dans le cas d'un élément plein, les 20 premiers modes ont des déformations maximales concentrées sur le dernier quart de la partie flexible. La pression y étant la plus faible, il a été décidé de modifier les caractéristiques physiques de l'élément afin d'homogénéiser les déformations sur une plus grande longueur. Pour ce faire, l'élément a été supposé creux, comme constitué de deux plaques de type sandwich séparées par un milieu à rigidité nulle (voir section 2.4.3). Ces plaques sont reliées entre elles aux nœuds de l'élément. Bien que ce modèle ne soit qu'approximatif, il a le mérite de fournir le résultat escompté. De plus, cette architecture de l'élément plus proche de la réalité offre à la structure totale une rigidité plus homogène espaçant suffisamment les modes pour constituer une gamme de fréquences intéressantes (le cas du matériau plein donnait les 20 premiers modes entre 80 et 85 Hz !).

Sur le graphique 15 sont représentées les évolutions des composantes radiales du déplacement (normées par l'épaisseur) en fonction du temps et leur spectre associé obtenu par FFT. On peut noter que les déplacements entrent rapidement dans la gamme du non linéaire et qu'ils s'amplifient au fur et à mesure de l'avancée du calcul. Bien que la structure ait un module d'Young très faible loin de refléter un cas industriel, ce calcul a permis de faire entrer la structure dans un comportement complètement non linéaire et ce rapidement.

Concernant les réponses en déplacements, les fréquences calculées par FFT (bas de la figure 15) ne coïncident pas avec les modes naturels. Les sept premiers pics en fréquence mesurés se situent entre 114 et 360 Hz, alors que les sept premiers modes naturels apparaissent sur une bande plus étroite allant de 87 à 158 Hz. La structure se rigidifie du fait de la prise en compte des termes non linéaires lors du calcul de la rigidité et le spectre subit un décalage positif en fréquence.

Sur la figure 16 est tracée la courbe d'échange énergétique au cours du temps pour la structure. Nous remarquons que la structure accumule sans cesse de l'énergie sans le moindre retour vers le fluide. Ce comportement traduit sans doute la présence d'un cas d'instabilité similaire à des conditions de type flutter. Cette dernière est de type dynamique et n'est *a priori* pas prévisible. Il est possible cependant de rapprocher ce résultat aux expériences de Tuovila faites en 1968 sur des tuyères coniques flexibles [TL68]. L'auteur cherchait à l'origine à observer ce type d'instabilités et celles qu'il détecta ne furent que statiques du type flambement.

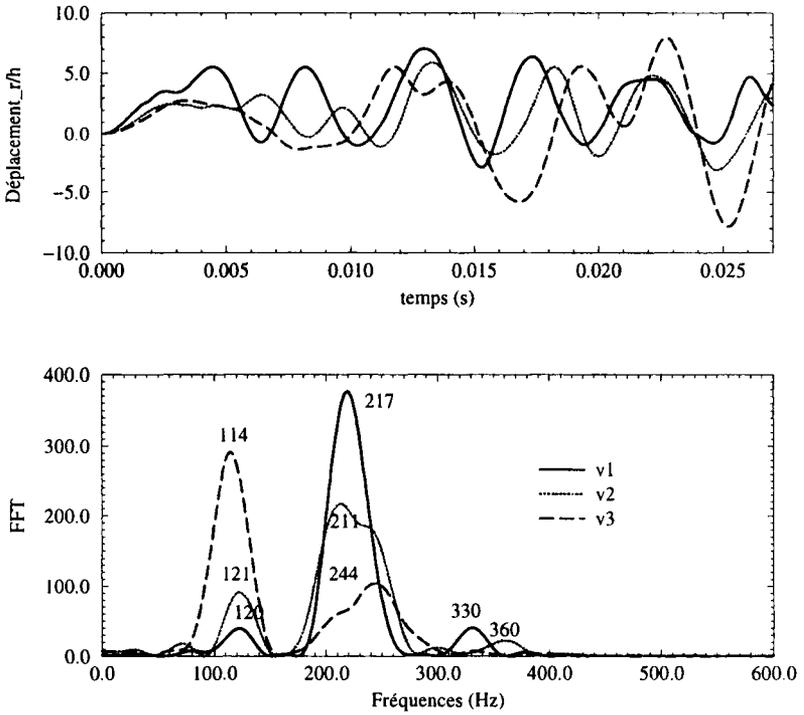


Figure 15 – Déplacements, cas non linéaire

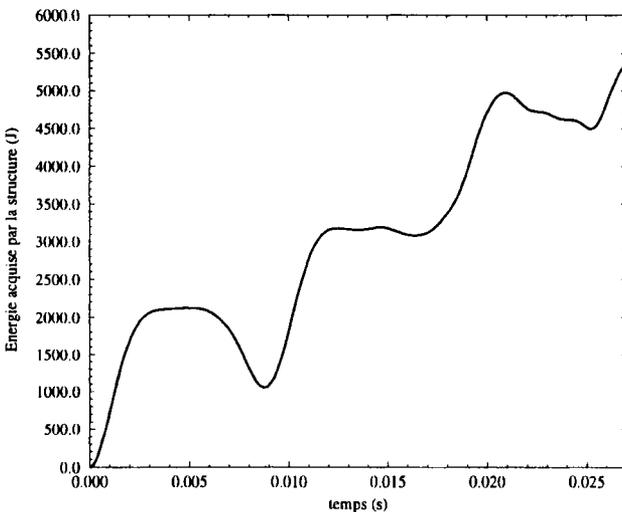


Figure 16 – Énergie captée par la structure, cas non linéaire

Les calculs ont été effectués sur une SGI R10000-194. Le temps CPU pour chaque calcul est approximativement de cinq heures. Le calcul structure à requis 1,6 % du temps global pour le cas linéaire et 4 % dans le cas non linéaire. Ces données montrent la part significative du calcul des données du fluide à l'égard de calcul structure. Ainsi, le prix à payer en temps machine pour un calcul couplé n'est que très légèrement supérieur à celui d'un calcul fluide seul mais peut apporter une précision accrue des résultats sans commune mesure.

Il est clair à la vue des précédents calculs, qu'un couplage fluide-structure appliqué au cas d'un moteur de propulseur de fusée peut s'avérer riche d'informations qualitatives. N'ayant que peu de données expérimentales sur le sujet, il est encore difficile d'établir une comparaison efficace. Cependant, ces calculs mêlant non linéarités géométriques et chocs-détentes sont encourageants et ont permis de montrer, sans la moindre adaptation du maillage (raffinement) en cours de calcul, la robustesse et l'efficacité des schémas utilisés, à la fois pour le fluide, la structure et pour l'algorithme de couplage.

Nous avons notamment pu voir :

- dans le cas de faibles déplacements, la structure adopte un comportement directement projetable sur la base de ses modes propres. Il est ainsi possible et seulement dans le cas d'un comportement linéaire, de se limiter à une analyse modale. Il n'en est cependant pas de même pour des cas de grands déplacements, où la structure par sa rigidité accrue, décale ses modes naturels (non linéaires) vers les hautes fréquences.
- l'analyse des phénomènes aéroélastiques pour des grands déplacements fait apparaître un comportement modal propre au couple fluide-structure. Il s'agit donc d'étudier la réponse d'un seul système couplé par le biais de non-linéarités [Dow75]. De plus, ce domaine du non linéaire nécessite des calculs couplés du fait de l'imprédictibilité des phénomènes qui peuvent apparaître (instabilités statiques ou dynamiques).

6 Conclusion

Ainsi, le développement d'outils numériques propres à chaque domaine de la physique peut mener à un couplage de différents codes en veillant à bien respecter les répercussions qui peuvent en résulter. En effet, la prise en compte d'une structure en grands déplacements traduit nécessairement une déformation notable du maillage fluide qui doit être modifié au cours du temps pour satisfaire à la fois les conditions cinématiques et éviter une distorsion trop importante des éléments du maillage. L'utilisation d'un maillage dynamique et le principe de consistance géométrique permettent de satisfaire cette condition.

Les outils du calcul parallèle fournissent une interface simple et efficace à mettre en œuvre pour le couplage de codes. De plus, l'utilisation de méthodes multi-domaines par le biais de ces outils permettrait de réduire le temps CPU accordé au fluide [Kes97] [Par96]. Concernant la structure, le temps CPU qui lui est accordé reste très faible et sa

non prise en compte, comme enrichissement de certaines conditions aux limites du domaine fluide, n'est donc pas justifiable en temps de calcul. De plus, ces simplifications peuvent parfois s'avérer lourdes de conséquences : exemple du flutter en aéronautique. Sa contribution peut en effet être incluse dans tout code fluide et contribuer ainsi à une plus grande rigueur des résultats en évitant l'hypothèse de parois extrêmement rigides.

Le couplage d'un moteur fusée et de son aérodynamique bien que plus académique qu'industriel a donné des résultats très satisfaisants en permettant de valider l'approche modale utilisée pour les calculs linéaires. Il a permis aussi de montrer la nécessité d'effectuer des calculs couplés pour les cas de déformations en grands déplacements du fait qu'une analyse modale s'avère complètement obsolète dans ce cas. Il semble de plus que le couplage au sein d'une tuyère flexible laisse apparaître des instabilités pouvant très bien être à l'origine du phénomène de charges latérales pour des géométries tridimensionnelles.

Ces calculs ne représentent bien sûr qu'une simplification du problème physique mais constituent en soi une première étape. Une version plus complète de cette chaîne de couplage en vue d'études plus approfondies peut être obtenue par l'introduction des effets visqueux avec la prise en compte de modèles de turbulence. Le but est de permettre l'étude de phénomènes tels les problèmes de décollements de jets présents lors des allumages à basse altitude et pouvant mener de par leur instabilité à des endommagements irréversibles [Had97][Pek93]. Ce second volet constitue l'objectif à atteindre pour les années à venir.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier les deux laboratoires pour la mise en commun de leurs soutiens scientifiques et ressources informatiques fournis au cours de ces travaux ainsi que les lecteurs anonymes pour l'aide qu'ils ont apportée à l'amélioration de la rédaction de cet article.

Bibliographie

- [Act98] Actes du colloque-Proceedings, CNES PARIS. European Seminar on Rocket Nozzle Flows, octobre 1998.
- [BA75] R. L. Bisplinghoff et H. Ashley. Principles of Aeroelasticity. Wiley and Son, New York, 1975.
- [Bat89] J. T. Batina. «Unsteady Euler airfoil solutions using unstructured dynamic meshes». *AIAA Paper No. 89-0115, AIAA 27th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada*, janvier 1989.
- [BD90a] J. L. Batoz et G. Dhatt. Modélisation des structures par éléments finis - Vol. 1. Hermès, 1990.
- [BD90b] J. L. Batoz et G. Dhatt. Modélisation des structures par éléments finis - Vol. 3. Hermès, 1990.

- [CNE96] SERAM CNES. Etude du comportement dynamique du divergent du moteur Vulcain. Rapport, Laboratoire de Mécanique des Structures secteur ENSAM, Université Paris VI - Dossier 60737, 1996.
- [Cor92] R. W. Cormack. Numerical computation of compressible viscous flow. Stanford University course, février 1992.
- [DF95a] G. Dhatt et M. Fafard. Mécanique non linéaire. Institut Pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur - Paris, septembre 1995.
- [DF95b] G. Dhatt et M. Fafard. Modélisation des coques en grandes rotations. Institut Pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur - Paris, septembre 1995.
- [DF95c] G. Dhatt et M. Fafard. Résolution de problèmes non linéaires. Institut Pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur - Paris, septembre 1995.
- [Dow75] E. H. Dowell. Aeroelasticity of plates and shells. Noordhoff International Publishing, 1975.
- [DP88] I. Demirdzic et M. Peric. «Space conservation law in finite volume calculations of fluid flow». *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, vol. 8, p. 1037-1050, 1988.
- [DP90] I. Demirdzic et M. Peric. «Finite volume method for prediction of fluid flow in arbitrarily shaped domains with moving boundaries». *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, Vol. 10, p. 771-790, 1990.
- [DT84] G. Dhatt et G. Touzot. Une présentation de la méthode des éléments finis. Maloine S.A. Editeur Paris, 1984.
- [Far96] C. Farhat. «High performance simulation of coupled nonlinear transient aeroelastic problems». *Ecole d'Été - Porquerolles (France) 1-6 Juillet*, 1996.
- [Fun58] Y. C. Fung. An Introduction to the Theory of Aeroelasticity. Wiley and Son, New York, 1958.
- [GB93] G. P. Guruswamy et C. Byun. «Fluid-structural interactions using Navier-Stokes equations coupled with shell finite element structures». *AIAA Paper 93-3087*, juillet 1993.
- [GB94] A. Geist et A. Beguelin. PVM 3 user's guide and reference manual. Rapport, Oak Ridge National Laboratory, mai 1994.
- [Had97] H. Hadjadj. Analyse Physique et Simulation Numérique des Ecoulements Compressibles; Application aux Tuyères de Propulseurs. Thèse, LMFN-CORIA, Université Rouen - France, 1997.
- [HTF97] B. Koobus H. Tran et C. Farhat. «Numerical simulation of vortex shedding flows past moving obstacles using the $k-\epsilon$ turbulence model on unstructured dynamic meshes». *Revue Européenne des Eléments Finis (à paraître)*, 1997. •

- [JDH82] S. Giuliani J. Donea et J. P. Halleux. «An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions». *Comp. Meth. in Applied Mechanics and Engineering* 33, p. 689-723, 1982.
- [Kes97] E. Kessy. Décomposition de domaine et calcul parallèle distribué: Application à la mécanique des fluides. Thèse, LMFN-CORIA, Université Rouen - France, 1997.
- [Lef98] E. Lefrançois. Modèle numérique de Couplage Fluide-Structure pour l'Etude des Phénomènes Aéroélastiques avec Application aux Moteurs Fusée. Thèse, LMFN-CORIA, Université de Rouen, juin 1998.
- [Löh88] R. Löhner. «An adaptive finite element solver for transient problems with moving bodies». *Computers and Structures*, Vol. 30, No. 1/2, p. 303-317, 1988.
- [LW60] P. D. Lax et B. Wendroff. «Systems of conservation laws». *Comm. Pure and Applied Mathematics*, 13 : p. 217-237, 1960.
- [Par96] Parallel CFD 96 - Capri, Italie. Implementations and Results Using Parallel Computers, A. Hadjadj, E. Kessy, E. Lefrançois, G. Dhatt and D. Vandromme, 1996.
- [PASR96] P. R. Schunk P. A. Sackinger et R. R. Rao. «A Newton-Raphson pseudo-solid domain mapping technique for free and moving boundary problems: a finite element implementation». *J. of Comp. Physics*, 1996.
- [PDa94] R. Ohayon P. Destuynder, P. Hemon et al. «Comportement aéroélastique, structures et écoulements». Institut pour la Promotion des Sciences de l'Ingénieur, Paris, juin 1994.
- [Pek93] L. O. Pekkari. «Aeroelastic stability of supersonic nozzles with separated flow». *AIAA, 29th Joint Propulsion Conference and Exhibit, Monterey, CA*, 1993.
- [Pip94] S. Piperno. Staggered time integration methods for a one-dimensional euler aeroelastic problem. Rapport , CERMICS, INRIA - Sophia-Antipolis, France, décembre 1994.
- [Pip95] S. Piperno. Simulation Numérique de Phénomènes d'Interaction Fluide Structure. Thèse, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, juin 1995.
- [RLV87] J. Peraire R. Lohner, K. Morgan et M. Vahdati. «Finite element flux-corrected transport for the Euler and Navier-Stokes equations». *Int. J. for Num. Meth. in Fluids*, Vol. 7, p. 1093-1109, 1987.
- [Sch73] R. H. Schmucker. Side loads and their reduction in liquid rocket engines. Rapport , 24th Int. Astron. Congress, Baku, USSR, octobre 1973.

- [Sch84] R. H. Schmucker. Flow processes in overexpanded chemical rocket nozzles - part I. Rapport , NASA - 77396, 1984.
- [Sur82] K. S. Surana. «Geometrically nonlinear formulation for the axisymmetric shell elements». *Int. J. for Num. Meth. in Engng.*, Vol. 18, p. 477-502, 1982.
- [TL68] W. J. Tuovila et N. S. Land. Experimental study of aeroelastic instability of overexpanded rocket nozzle extensions. Rapport , NASA TN D-4471, avril 1968.
- [TL79] P. D. Thomas et C. K. Lombard. «Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids». *AIAA J.*, vol. 17, No. 10, p. 1030-1037, 1979.
- [TM96] P. Le Tallec et J. Mouro. Structures en grands déplacements couplées à des fluides en mouvement. Rapport , INRIA - No 2961, août 1996.
- [TTL92] M. Behr T. Tezduyar et J. Liou. «A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces - the deforming spatial domain/space-time procedure: I. the concept and the preliminary numerical tests». *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.*, p. 339-351, 1992.
- [Wor95] Workshop for Computational Fluid Dynamic Applications in Rocket Propulsion and Launch Vehicle Technology - Huntsville, Alabama. Fluctuating Pressure Analysis of a 2-D SSME Nozzle Air Flow Test, avril 1995.

– Nomenclature Structure

| | |
|----------------------------|--|
| C^0, C^p, C^{p+1} | : configurations aux instants 0, p et $p + 1$ |
| E | : module d'Young |
| \bar{f}_s, \bar{f}_v | : sollicitations externes surfaciques et volumiques |
| $\{f_{ext}\}$ | : vecteur élémentaire du terme de sollicitations |
| $\{f_{int}\}$ | : vecteur élémentaire du terme de résidu en contraintes |
| \mathcal{F} | : tenseur gradient de transformations |
| G | : module de cisaillement transverse |
| H | : matrice des propriétés élastiques |
| \mathcal{I} | : tenseur diagonal unité |
| $[j] = [J]^{-1}$ | : jacobien de la transformation de élément réel/référence |
| $[K_T], [K_T^e]$ | : matrices tangentes globale et élémentaire |
| $[K_L^e], [K_S]$ | : matrices tangentes linéaire et géométrique |
| L | : longueur de l'élément |
| \mathcal{L} | : tenseur gradient des déplacements |
| p | : indice temporel |
| n_x | : composante axiale de la normale orientée vers l'extérieur |
| $[Vme]$ | : matrice masse consistante élémentaire |
| N_i | : fonction d'interpolation nodale |
| $\{R\}$ | : vecteur résidu global |
| ρ | : masse volumique |
| S^0, S^t | : surface délimitant les volumes de contrôle V^0 et V^t |
| S | : tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff (2^{nde} espèce) |
| $t, \Delta t$ | : temps et pas de temps |
| $\{u\}, \{u_e\}$ | : vecteurs déplacement global et élémentaire |
| $\{dot{u}\}, \{\ddot{u}\}$ | : vecteurs vitesse et accélération |
| V^0, V^t | : volumes de contrôle initial et actuel |
| W | : forme variationnelle (faible) |
| $\bar{x} = (x, r)$ | : coordonnées cylindriques |
| \bar{x}^0 | : vecteur position dans la configuration C^0 |
| (ξ, η) | : coordonnées curvilignes de l'espace de référence |
| $\delta \bar{u}$ | : variation de u ou déplacement virtuel |
| ε_{gl} | : tenseur des déformations de Green-Lagrange |
| ν | : coefficient de Poisson |
| σ | : tenseur des contraintes réelles de Cauchy |

– Notations

| | |
|---------------------|-------------------|
| $\{.\}$ | : vecteur colonne |
| $\langle . \rangle$ | : vecteur ligne |
| $[.]$ | : matrice |
| $. $ | : déterminant |

– Nomenclature Fluide

| | |
|--|--|
| A^e | : aire élémentaire |
| c | : célérité du son |
| C_d | : coefficient de diffusion |
| e | : énergie interne du fluide |
| $\{F_x\}$ | : flux convectif longitudinal (sur maillage mobile) |
| $\{F_r\}$ | : flux convectif radial (sur maillage mobile) |
| $\{F_{cx}\}$ | : flux convectif eulerien longitudinal |
| $\{F_{cr}\}$ | : flux convectif eulerien radial |
| $\{H\}$ | : terme source axisymétrique |
| J | : jacobien de la transformation de l'élément réel/référence |
| n | : indice temporel |
| (n_x, n_r) | : composantes cylindriques de la normale orientée vers l'extérieur |
| M | : nombre de Mach |
| $[M]_{axi}, [M^e]_{axi}$ | : matrices masses consistantes globale et élémentaire |
| $[M_d], [M_d^e]$ | : matrices masses diagonales globale et élémentaire |
| N_i | : fonction d'interpolation nodale |
| p | : pression statique (sans indice) |
| \mathfrak{R} | : constante des gaz parfaits, $\mathfrak{R} = c_p - c_v$ |
| $\{\mathcal{R}\}$ | : résidu modifié par la mobilité du maillage |
| $\{R\}$ | : résidu global |
| $\{R_{\Omega F}\}, \{R_{\Omega H}\}, \{R_{\Gamma}\}$ | : résidus des flux, source et de frontière |
| ρ | : masse volumique |
| S | : surface délimitant le volume de contrôle A |
| T | : température statique (sans indice) |
| u ou u_x | : composante longitudinale de la vitesse |
| $\{U\}$ | : vecteur des variables conservatives |
| v ou u_r | : composante radiale de la vitesse |
| W_I, W_{II} | : formes variationnelles (faibles) |
| ω | : poids d'intégration numérique |
| $\vec{x} = (x, r)$ | : coordonnées cylindriques |
| (ξ, η) | : coordonnées curvilignes de l'espace de référence |
| $\{\delta U\}$ | : fonction test ou fonction de pondération |
| γ | : rapport des chaleurs spécifiques, $\gamma = 1.4$ pour l'air |

– Indices

| | |
|----------|-----------------------------|
| e | : élément |
| res | : conditions de réservoir |
| ∞ | : conditions milieu ambiant |
| δ | : variation |