

---

# Contrôle et adaptation des calculs éléments finis pour les problèmes de contact unilatéral

Patrice Coorevits\* — Patrick Hild\*\* — Jean-Pierre Pelle\*

*\*Laboratoire de Mécanique et Technologie  
ENS de Cachan / CNRS / Université P. et M. Curie  
61 avenue du Président Wilson,  
94235 Cachan Cedex - FRANCE*

*\*\*Mathématiques pour l'Industrie et la Physique  
Unité mixte de recherches CNRS-UPS-INSAT (U.M.R. 5640)  
Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne  
31062 Toulouse Cedex 4 - FRANCE*

---

*RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous proposons un estimateur d'erreur pour le problème de contact d'un solide élastique sur un socle rigide ou problème de Signorini. Cet estimateur est basé sur une mesure d'erreur en relation de comportement et sur des techniques de construction de champs admissibles. Sa mise en œuvre utilise une technique particulière de prise en compte du contact. Le taux de convergence de cet estimateur est étudié. En utilisant les procédures d'adaptation de maillages précédemment développées, on présente un exemple d'optimisation de calculs pour des discrétisations utilisant des triangles à 3 nœuds.*

*ABSTRACT. In this paper, we present an error estimator for the contact problem of an elastic body on a rigid foundation in elasticity or Signorini's problem. The estimator is based on the concept of error in the constitutive relation and on techniques of admissible fields building. It is carrying into effect with a particular technique in order to take into account the contact. The convergence rate of this estimator is studied. By using procedures of mesh adaptivity previously developed, we show an example of optimized computations for discretizations with 3-nodes triangles.*

*MOTS-CLÉS : contact, adaptivité, erreur en relation de comportement, calcul éléments finis.*

*KEY WORDS : contact, adaptivity, error in constitutive relation, finite element computation.*

---

## 1. Introduction

Les problèmes de contact unilatéral interviennent dans de nombreux domaines du calcul de structures : emboutissage, extrusion, impacts... La simulation numérique de ces phénomènes non linéaires complexes est le plus souvent effectuée par des méthodes d'éléments finis. Un enjeu important est évidemment de quantifier les erreurs inhérentes à l'utilisation de ces approximations numériques. Dans ce papier, nous proposons une méthode basée sur le concept d'erreur en relation de comportement, pour répondre à cette question dans le cadre simple d'un problème de contact unilatéral.

Du point de vue mathématique, un problème de contact unilatéral correspond à une inéquation variationnelle [DUV 72], [FIC 72], [KIK 88], dont l'approximation par éléments finis a été discutée par de nombreux auteurs. En particulier Haslinger, Hlavacek et Necas [HAS 96], ont considéré le cas de deux solides déformables et étudié la convergence des méthodes éléments finis dans le cas de maillages compatibles sur la zone de contact. Ces estimations *a priori* englobent le cas du problème de contact sur socle rigide (ou problème de Signorini). Finalement, la généralisation au cas de deux solides dont les maillages sont incompatibles sur la zone de contact est traitée dans [BEN 97], [BEN 98], [HIL 98]. Ces estimations d'erreur *a priori* fournissent des renseignements sur la convergence et sur la vitesse de convergence des méthodes d'éléments finis utilisées, mais elles ne permettent pas de quantifier les erreurs de discrétisation. Cette quantification nécessite l'élaboration d'estimations d'erreur *a posteriori*. Pour les problèmes linéaires, de nombreux travaux ont été consacrés à ces questions; ils peuvent schématiquement être classés en trois grandes catégories: les estimateurs fondés sur l'exploitation des résidus des équations d'équilibre [BAB 78], les estimateurs utilisant un lissage des champs de contrainte [ZIE 87] et les estimateurs fondés sur le concept général d'erreur en relation de comportement et sur des techniques associées de construction de champs de contraintes vérifiant rigoureusement les équations d'équilibre [LAD 75], [LAD 86], [LAD 91].

Dans le cadre des problèmes de contact unilatéral, il semble que très peu de travaux aient été réalisés sur les estimations d'erreur *a posteriori*. On peut citer néanmoins la référence [WRI 94] qui utilise une méthode de pénalisation permettant de transformer l'inéquation variationnelle en une équation variationnelle et ainsi de construire, dans ce cadre standard, un estimateur d'erreur basé sur les résidus des équations d'équilibre. L'inconvénient majeur de cette démarche est que l'estimation d'erreur *a posteriori* porte sur le problème pénalisé (et non pas sur le problème exact) et que le paramètre de pénalisation intervient directement dans l'estimation d'erreur.

Dans ce papier, nous présentons une méthode basée sur le concept d'erreur en relation de comportement, pour estimer les erreurs de discrétisation dans le cadre d'un problème de contact unilatéral en petites déformations. Cette méthode s'applique aux techniques classiques de traitement de la condition de non-pénétration au niveau du contact mais elle est particulièrement bien adaptée au traitement global de la condition de non pénétration développée dans [HIL 98].

Dans la deuxième partie, nous rappelons les équations du problème de Signorini : contact sans frottement d'un solide avec un socle rigide. Pour définir ce problème, nous utilisons la méthode décrite dans [LAD 96] qui consiste à introduire sur la zone de contact une entité mécanique surfacique comportant ses propres variables, ses équations de liaison, ses équations d'équilibre et son comportement.

Dans la troisième partie, nous construisons un estimateur d'erreur fondé sur la notion d'erreur en relation de comportement. Il repose sur une classification des équations en liaisons cinématiques, équations d'équilibre et relation de comportement. Un lien entre l'estimateur proposé et les erreurs en solution classiquement utilisées est établi. Ceci constitue, pour ce type de problème une extension du théorème de Prager-Syngé [PRA 47].

La quatrième partie traite de l'approximation du problème de Signorini par éléments finis. Nous étudions deux manières différentes d'exprimer la condition de non-pénétration. La première, très classique, consiste à définir localement nœud par nœud la condition de non-pénétration. La seconde consiste à définir cette condition de manière plus globale sur la zone de contact. Ces deux méthodes conduisent à la minimisation d'une fonctionnelle quadratique sous contraintes convexes dont la discrétisation est classique.

La cinquième partie concerne la mise en œuvre de l'estimateur qui nécessite la construction, à partir des données du problème et de la solution éléments finis, de champs de déplacement et de champs de contrainte vérifiant les liaisons cinématiques et les équations d'équilibre. Il est à noter que cette reconstruction est nettement plus simple dans le cas où la discrétisation utilise la condition de non-pénétration globale.

Dans la dernière partie, nous présentons les résultats de tests numériques qui permettent d'évaluer la qualité des estimateurs obtenus. D'autre part, en s'appuyant sur des techniques précédemment développées [COO 94], [COO 95], [COO 97], un exemple d'adaptation de maillages est présenté.

## 2. Définition du problème continu

Nous considérons ici le problème de contact d'un solide élastique sur un socle rigide indéformable classiquement appelé problème de Signorini. Nous supposons que le solide occupe le domaine  $\Omega$ , dont la frontière  $\partial\Omega$  est constituée de trois parties. Sur la première partie, notée  $\partial_1\Omega$ , on suppose que le champ de déplacement est imposé (afin de simplifier, on suppose qu'il s'agit d'un encastrement). On notera  $\partial_2\Omega$  la partie soumise à une densité surfacique d'efforts  $F_d$  donnée. La partie complémentaire, notée  $\partial_c\Omega$ , constitue la zone candidate au contact. Le solide  $\Omega$  est soumis à une densité volumique d'efforts  $f_d$ . L'opérateur d'élasticité du matériau

(opérateur de Hooke) est noté  $K$ . On supposera que l'opérateur des déformations est linéarisé.

Pour formuler clairement la notion d'erreur en relation de comportement, nous considérons, comme dans [LAD 96], la zone de contact  $\partial_c \Omega$  comme une entité mécanique à part entière. Nous introduisons, en plus des inconnues  $U$  (champ de déplacements) et  $\sigma$  (champ de tenseurs de contrainte), deux quantités supplémentaires :  $W$ , trace du déplacement  $U$  sur  $\partial_c \Omega$  et  $R$ , densité des efforts de réaction de l'obstacle indéformable sur  $\Omega$ , définie sur  $\partial_c \Omega$ . Alors le problème de Signorini devient : trouver  $(U, \sigma)$  définis sur  $\Omega$  et  $(W, R)$  définis sur  $\partial_c \Omega$  tels que :

–  $U$  et  $W$  vérifient les liaisons cinématiques :

$$U = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega \text{ et } U = W \text{ sur } \partial_c \Omega \tag{1}$$

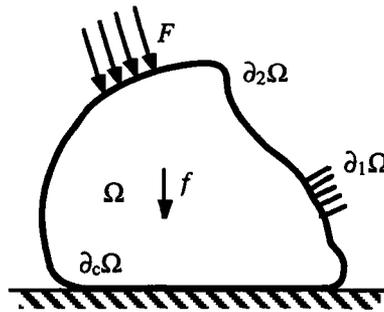


Figure 1. Problème de contact sur socle rigide indéformable

–  $\sigma$  et  $R$  vérifient les équations d'équilibre :

$$-\int_{\Omega} \text{Tr}[\sigma \varepsilon(V)] d\Omega + \int_{\Omega} f_d^T V d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} F_d^T V dS + \int_{\partial_c \Omega} R^T V dS = 0 \tag{2}$$

$$\forall V \in U_0 = \{U \text{ régulier} / U = 0 \text{ sur } \partial_1 \Omega\}$$

–  $U, W, \sigma$  et  $R$  vérifient les relations de comportement :  
élasticité :

$$\sigma = K\varepsilon(U) \tag{3}$$

contact :

$$W_n = W^T n \leq 0 \tag{4}$$

$$R_n = R^T n \leq 0 \quad [5]$$

$$R_n W_n = 0 \quad [6]$$

$$R_t = R - R_n n = 0 \quad [7]$$

où  $n$  désigne la normale unitaire extérieure à  $\Omega$  et le symbole  $^T$  représente la transposition. Les relations [4] à [6] constituent les conditions de contact unilatéral.

L'inégalité [4] traduit la non-pénétration du solide dans le socle rigide ; seuls le maintien du contact ou le décollement sont autorisés. L'inéquation [5] impose la condition de signe à la contrainte normale et [6] représente la condition de complémentarité. Finalement [7] traduit la nullité de la composante tangentielle du vecteur contrainte, c'est-à-dire l'absence de frottement.

### 3. Erreur en relation de comportement

#### 3.1. Champs admissibles

On dit qu'un couple  $\hat{s} = (\hat{u}, \hat{c})$  est admissible si :

$\hat{u} = (\hat{U}, \hat{W})$  vérifie les liaisons cinématiques [1],

$\hat{c} = (\hat{\sigma}, \hat{R})$  vérifie les équations d'équilibre [2].

#### 3.2. Mesure d'erreur en relation de comportement

Les conditions [4] à [7] sur la zone de contact sont équivalentes à la relation d'appartenance suivante [MOR 74] :

$$-W \in \partial I_K(R)$$

où  $I_K$  désigne la fonction indicatrice du cône convexe  $K$  défini par :

$$K = \{R = R_n n + R_t \text{ tel que } R_n \leq 0 \text{ et } R_t = 0\}$$

On rappelle que  $I_K(R) = 0$  si  $R \in K$  et  $+\infty$  sinon. L'inclusion [4] à [7] est elle-même équivalente à l'égalité :

$$I_K(R) + (I_K)^*(-W) + R^T W = 0$$

où  $(I_K)^*$  désigne la fonction conjuguée de  $I_K$ . On montre que  $(I_K)^* = (I_{K^0})$  où  $K^0$  désigne le cône polaire de  $K$ . Il est clair que :

$$K^0 = \{ W = W_n n + W_t \text{ tel que } W_n \geq 0 \}$$

D'autre part, d'après l'inégalité de Legendre-Fenchel, on a :

$$I_K(R) + (I_K)^*(-W) + R^T W \geq 0$$

Pour  $\hat{s} = (\hat{U}, \hat{W}, \hat{\sigma}, \hat{R})$  admissible, il en résulte que la quantité :

$$e^2(\hat{s}) = \|\hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U})\|_{\sigma,\Omega}^2 + 2 \int_{\partial_c \Omega} (I_K(\hat{R}) + I_{K^0}(-\hat{W}) + \hat{R}^T \hat{W}) dS \quad [8]$$

$$\text{où } \|\sigma\|_{\sigma,\Omega}^2 = \int_{\Omega} Tr[\sigma K^{-1} \sigma] d\Omega$$

est toujours positive ou nulle et qu'elle est nulle si et seulement si les relations de comportement [3 à 7] sont vérifiées. La quantité  $e(\hat{s})$  est par définition la mesure d'erreur en relation de comportement associée au couple admissible  $\hat{s}$ .

On associe à l'erreur en relation de comportement l'erreur relative notée  $\varepsilon$  et définie par :

$$\varepsilon^2 = \frac{\|\hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U})\|_{\sigma,\Omega}^2 + 2 \int_{\partial_c \Omega} (I_K(\hat{R}) + I_{K^0}(-\hat{W}) + \hat{R}^T \hat{W}) dS}{\|\hat{\sigma} + K\varepsilon(\hat{U})\|_{\sigma,\Omega}^2 + 2 \int_{\partial_c \Omega} (I_K(\hat{R}) + I_{K^0}(-\hat{W}) + \hat{R}^T \hat{W}) dS} \quad [9]$$

Ainsi,  $\varepsilon$  est une précision globale qui permet d'évaluer la qualité globale de la solution approchée  $\hat{s}$ . Soit  $E$  une partie de  $\Omega$ . On définit alors la contribution locale de  $E$  à l'erreur [9] par la quantité  $\varepsilon_E$  :

$$\varepsilon_E^2 = \frac{\|\hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U})\|_{\sigma,E}^2 + 2 \int_{(\partial_c \Omega) \cap E} (I_K(\hat{R}) + I_{K^0}(-\hat{W}) + \hat{R}^T \hat{W}) dS}{\|\hat{\sigma} + K\varepsilon(\hat{U})\|_{\sigma,\Omega}^2 + 2 \int_{\partial_c \Omega} (I_K(\hat{R}) + I_{K^0}(-\hat{W}) + \hat{R}^T \hat{W}) dS} \quad [10]$$

$$\text{où } \|\sigma\|_{\sigma,E}^2 = \int_E Tr[\sigma K^{-1} \sigma] dE$$

En pratique,  $E$  est un élément quelconque du maillage associé à  $\Omega$ . Les contributions locales permettent ainsi de localiser les erreurs sur la structure. Par construction, on a :

$$\varepsilon^2 = \sum_E \varepsilon_E^2 \quad [11]$$

Dans le cas où  $\partial_c \Omega = \emptyset$ , les définitions [9], [10] et [11] se ramènent aux définitions correspondantes pour le problème de l'élasticité [LAD 91].

### 3.3. Lien avec les erreurs en solution

Soit  $(U, W, \sigma, R)$  la solution du problème de Signorini [1] à [7]. Pour tout  $\hat{s} = (\hat{U}, \hat{W}, \hat{\sigma}, \hat{R})$  admissible, on a :

$$e^2(\hat{s}) - \|U - \hat{U}\|_{u,\Omega}^2 - \|\sigma - \hat{\sigma}\|_{\sigma,\Omega}^2 \geq 0 \quad \text{où} \quad \|U\|_{u,\Omega}^2 = \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(U)K\varepsilon(U)]d\Omega \quad [12]$$

et donc :

$$\|U - \hat{U}\|_{u,\Omega} \leq e(\hat{s}) \quad \text{et} \quad \|\sigma - \hat{\sigma}\|_{\sigma,\Omega} \leq e(\hat{s}) \quad [13]$$

Cette propriété constitue une extension du théorème de Prager-Syngé en élasticité linéaire.

*Démonstration :*

Si  $\hat{R} \notin K$  ou si  $-\hat{W} \notin K^0$ ,  $e(\hat{s}) = +\infty$  et l'équation [13] est donc vérifiée. Supposons donc que :  $\hat{R} \in K$  et  $-\hat{W} \in K^0$ .

$$\begin{aligned} \|\hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U})\|_{\sigma,\Omega}^2 &= \|\hat{\sigma} - \sigma + K\varepsilon(U - \hat{U})\|_{\sigma,\Omega}^2 \\ &= \|\hat{\sigma} - \sigma\|_{\sigma,\Omega}^2 + \|U - \hat{U}\|_{u,\Omega}^2 + 2 \int_{\Omega} \text{Tr}[(\hat{\sigma} - \sigma)\varepsilon(U - \hat{U})]d\Omega \end{aligned}$$

Comme  $\sigma$  et  $\hat{\sigma}$  vérifient [2] et que  $U$  et  $\hat{U}$  vérifient [1], on a :

$$\|\hat{\sigma} - K\varepsilon(\hat{U})\|_{\sigma,\Omega}^2 = \|\hat{\sigma} - \sigma\|_{\sigma,\Omega}^2 + \|U - \hat{U}\|_{u,\Omega}^2 + 2 \int_{\partial_c \Omega} (\hat{R} - R)^T (W - \hat{W})dS$$

En utilisant [4] à [7] ainsi que la définition [8] de  $e(\hat{s})$ , on déduit :

$$e^2(\hat{s}) = \|\hat{\sigma} - \sigma\|_{\sigma,\Omega}^2 + \|U - \hat{U}\|_{u,\Omega}^2 + 2 \int_{\partial_c \Omega} R_n \hat{W}_n dS + 2 \int_{\partial_c \Omega} \hat{R}_n W_n dS$$

La propriété est alors établie en remarquant que  $R_n \hat{W}_n \geq 0$  et  $\hat{R}_n W_n \geq 0$ .

*Remarques :*

La définition [8] ne présente véritablement un intérêt que pour des quadruplets  $\hat{s} = (\hat{U}, \hat{W}, \hat{G}, \hat{R})$  tels que  $I_{K^o}(-\hat{W})$  et  $I_K(\hat{R})$  soient finis. Sinon, l'erreur  $e(\hat{s})$  est infinie. De même, les inégalités [12], [13] ne présentent d'intérêt que sous les mêmes conditions. En pratique, pour les champs  $\hat{R}$  et  $\hat{W}$  que nous construirons, le terme  $\int_{\partial_c \Omega} \hat{R}^T \hat{W} dS$  sera toujours petit et même nul dans certains cas.

Dans le cas où certains points qui ne sont pas initialement en contact pourraient le devenir après déformation, on est amené à considérer le jeu initial. Les conditions de contact [4] à [7] sur  $\partial_c \Omega$  deviennent :

$$\begin{aligned} W_n &= W^T n \leq G_n \\ R_n &= R^T n \leq 0 \\ R_n (W_n - G_n) &= 0 \\ R_t &= R - R_n n = 0 \end{aligned}$$

où  $G_n = G_n(x)$ ,  $x \in \partial_c \Omega$  est la fonction positive connue traduisant la distance des points  $x \in \partial_c \Omega$  au socle rigide. Contrairement au cas sans jeu initial, le fait que  $G_n$  ne soit pas constant implique que les conditions de contact diffèrent suivant les points de  $\partial_c \Omega$ . Soit  $G = (G_n, 0)$ . On introduit une version plus générale de l'erreur en relation de comportement [8] qui devient :

$$e^2(\hat{s}) = \left\| \hat{G} - K\varepsilon(\hat{U}) \right\|_{\sigma, \Omega}^2 + 2 \int_{\partial_c \Omega} (I_K(\hat{R}) + I_{K^o}(-(\hat{W} - G)) + \hat{R}^T (\hat{W} - G)) dS \quad [14]$$

**4. Résolution par la méthode des éléments finis**

**4.1. Formulation variationnelle**

On pose pour tous  $U$  et  $V$  dans  $U_0$  :

$$a(U, V) = \int_{\Omega} \text{Tr}[\varepsilon(U)K\varepsilon(V)] d\Omega$$

Ainsi,  $a(\dots)$  désigne la fonctionnelle bilinéaire symétrique classique de l'élasticité. On pose également pour tout  $V$  dans  $U_0$  :

$$L(V) = \int_{\Omega} f_d^T V d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega} F_d^T V dS$$

La forme linéaire  $L(\cdot)$  prend en compte l'action des forces extérieures  $f_d$  et  $F_d$ . On définit ensuite le convexe des déplacements admissibles noté  $U_{ad}$  et comprenant la condition de non-pénétration :

$$U_{ad} = \{V \in U_0, V_n \leq 0 \text{ sur } \partial_c \Omega\}$$

où on note  $V_n = V^T n$ . Classiquement, la formulation variationnelle associée au problème de Signorini [1] à [7] est alors [DUV 72], [HAS 96], [KIK 88] : trouver  $U$  tel que :

$$U \in U_{ad}, \alpha(U, V - U) \geq L(V - U) \quad \forall V \in U_{ad} \quad [15]$$

Ce problème est bien posé et admet une solution unique dans le cas où  $\partial_1 \Omega$  est de mesure non nulle. Dans le cas contraire, il existe des conditions suffisantes d'existence et d'unicité de solutions [HAS 96].

Le cas du contact avec jeu initial conduit à une condition de non-pénétration du type  $V_n \leq g$  où  $g$  est une fonction positive traduisant la distance initiale entre le solide et le socle rigide [KIK 88], [HAS 96]. Les résultats d'existence et d'unicité sont alors du même type que dans le cas  $g = 0$ .

#### 4.2. Choix de la discrétisation

Le solide  $\Omega$ , supposé polygonal, est discrétisé par éléments finis. On utilisera des éléments finis de type P1 (triangles à 3 nœuds). La raison essentielle de ce choix est que les solutions des problèmes de type contact (et plus généralement les solutions de problèmes régis par des inéquations variationnelles) ne sont pas assez régulières pour que des éléments finis de degré supérieur soient avantageux sur le plan de la convergence. On notera  $U_{0,h}$  l'analogue discret de l'espace  $U_0$ . Les fonctions  $V_h \in U_{0,h}$ , dont les composantes sont continues sur  $\Omega$  et polynomiales de degré un sur chaque triangle de la discrétisation, vérifient la condition d'encastrement sur  $\partial_1 \Omega$ . On désignera par  $h$  le pas de discrétisation sur  $\Omega$ . Pour des raisons de simplicité de notations, on notera  $V_{hn} = (V_h)^T n$ .

Il s'agit de définir un analogue discret de  $U_{ad}$ . Le but est donc de trouver une condition de non pénétration discrète telle que :

- l'implantation numérique dans un code éléments finis de cette condition soit aisée,
- les solutions discrètes vérifiant cette condition convergent vers la solution du problème continu,
- la mise en œuvre de l'erreur en relation de comportement soit aisée.

Plusieurs conditions de contact ont été étudiées sur le plan théorique, principalement pour ce qui est de la convergence des solutions discrétisées vers la solution du problème continu (cf. [HAS 96], [HIL 98] pour des estimations *a priori*). Ici, nous en étudions deux et nous précisons pour chacune d'entre elles, leur comportement vis-à-vis des conditions 1, 2 et 3 souhaitées.

Dans un premier temps, nous considérons une première condition de non-pénétration discrète pour laquelle le convexe des déplacements admissibles est défini par :

$$U_{ad,h}^{int} = \left\{ V_h \in U_{0,h}, \int_{\partial_c \Omega} (V_{hn}) \chi_h dS \geq 0, \forall \chi_h \in N_h(\partial_c \Omega) \right\} \quad [16]$$

où  $N_h(\partial_c \Omega)$  est l'ensemble des fonctions continues, négatives et affines par morceaux sur le maillage de  $\partial_c \Omega$ . Nous verrons que cette condition globale de non-pénétration est particulièrement bien adaptée à la mise en œuvre de l'erreur en relation de comportement que nous détaillerons dans la partie suivante.

Dans un deuxième temps, nous considérons la condition plus classique de non-pénétration ponctuelle. Le convexe discrétisé des déplacements admissibles est de la forme :

$$U_{ad,h}^{ponc} = \{ V_h \in U_{0,h}, V_{hn} \leq 0 \text{ sur } \partial_c \Omega \} \quad [17]$$

Cette condition locale vérifie pleinement les conditions 1 et 2. Toutefois, elle se distingue de la condition intégrale par une mise en œuvre moins aisée au niveau de la condition 3 (cf. partie suivante).

Dans les deux cas, le problème discrétisé issu de [15] devient : trouver  $U_h$  tel que :

$$U_h \in U_{ad,h}, a(U_h, V_h - U_h) \geq L(V_h - U_h) \quad \forall V_h \in U_{ad,h} \quad [18]$$

où  $U_{ad,h} = U_{ad,h}^{int}$  ou  $U_{ad,h} = U_{ad,h}^{ponc}$ .

Ce problème est bien posé et admet une solution unique (cf. étude du problème continu).

*Remarque :*

Il est clair que  $U_{ad,h}^{ponc} \subset U_{ad,h}^{int}$ . Dans le cas du contact défini de manière globale (cf. [16]), on a  $U_{ad,h}^{int} \subsetneq U_{ad}$  : la méthode éléments finis est non conforme. Par

contre, dans le cas du contact défini de manière locale (cf. [17]), on a  $\mathbf{U}_{ad,h}^{\text{ponc}} \subset \mathbf{U}_{ad}$  et la méthode est conforme.

### 4.3. Formulation matricielle du problème

Le but de cette section est de mettre sous forme adaptée à la résolution numérique, le problème de Signorini. Dans un premier temps, on considère la condition de contact de type intégral incorporée dans [16].

4.3.1. *Cas du contact défini globalement* :  $\mathbf{U}_{ad,h} = \mathbf{U}_{ad,h}^{\text{int}}$

On considère la formulation mixte suivante : trouver  $U_h \in \mathbf{U}_{0,h}$  et  $\lambda_h \in N_h(\partial_c \Omega)$  tels que :

$$\begin{cases} a(U_h, V_h) - \int_{\partial_c \Omega} \lambda_h (V_{hn}) dS = L(V_h) & \forall V_h \in \mathbf{U}_{0,h} \\ \int_{\partial_c \Omega} (\mu_h - \lambda_h)(U_{hn}) dS \geq 0 & \forall \mu_h \in N_h(\partial_c \Omega) \end{cases} \quad [19]$$

où  $N_h(\partial_c \Omega)$  a été introduit dans la partie précédente. En fait, le problème de point-selle sur  $\mathbf{U}_{0,h} \times N_h(\partial_c \Omega)$  est associé au lagrangien suivant :

$$L(V_h, \mu_h) = \frac{1}{2} a(V_h, V_h) - L(V_h) - \int_{\partial_c \Omega} \mu_h (V_{hn}) dS \quad [20]$$

En utilisant des techniques de base sur les points-selles, on montre que le problème [19] admet une solution unique, notée  $(U_h, \lambda_h)$ . On vérifie facilement que  $U_h$  est la solution du problème [18] (avec  $\mathbf{U}_{ad,h} = \mathbf{U}_{ad,h}^{\text{int}}$ ). Par ailleurs, on montre que le couple  $(U_h, \lambda_h)$  tend vers  $(U, R_n)$  où  $R_n$  désigne la contrainte normale sur la zone de contact, lorsque le pas de discrétisation  $h$  tend vers 0.

Afin de donner la formulation matricielle de ce problème mixte, on fixe  $h$ . On dispose alors d'une discrétisation comprenant  $N$  nœuds appartenant à  $\Omega$ . Sans perte de généralité et afin de simplifier les notations, on suppose qu'il n'y a pas de conditions de type encastrement. Les  $N$  fonctions de base de  $\mathbf{U}_{0,h}$  sont notées  $\Phi_i, i = 1, \dots, N$  de telle sorte que :

$$V_h = \sum_{i=1}^N V_h(i) \Phi_i$$

On désigne par  $m$  le nombre de nœuds du maillage de  $\Omega$  sur  $\partial_c\Omega$  et les valeurs de  $i$  comprises entre 1 et  $m$  correspondent à ces nœuds. Considérons l'équation [19], c'est-à-dire :

$$a(U_h, V_h) - \int_{\partial_c\Omega} \lambda_h(V_{hn}) dS = L(V_h)$$

pour tout  $V_h \in U_{0,h}$ . En prenant  $V_h = \Phi_j, j = 1, \dots, N$ , on obtient :

$$\begin{aligned} a(U_h, \Phi_j) - \int_{\partial_c\Omega} \lambda_h(\Phi_{jn}) dS &= L(\Phi_j), \quad j = 1, \dots, m, \quad \Phi_{jn} = \Phi_j^T n \\ a(U_h, \Phi_j) &= L(\Phi_j), \quad j = m + 1, \dots, N \end{aligned}$$

Écrivons :

$$\lambda_h = \sum_{k=1}^m \lambda_h(k) \psi_k, \text{ où } \psi_k = \Phi_{kn}, \quad k = 1, \dots, m$$

Les  $\psi_k$ , au nombre de  $m$ , sont les fonctions scalaires de base sur le maillage de  $\partial_c\Omega$ . On déduit ainsi le système d'équations suivant, d'inconnues  $q$  et  $\Lambda$  :

$$\mathbf{K}q - \begin{pmatrix} \mathbf{M} \\ 0 \end{pmatrix} \Lambda = F \tag{21}$$

où :

- $q$  est le vecteur de composantes  $U_h(i), i = 1, \dots, N$ ,
- $\Lambda$  est le vecteur de composantes  $\lambda_h(k), k = 1, \dots, m$ ,
- $\mathbf{K}$  est la matrice carrée d'ordre  $N$  de coefficients  $k_{ij} = a(\Phi_i, \Phi_j), 1 \leq i, j \leq N$ ,
- $\mathbf{M}$  est la matrice carrée d'ordre  $m$  de coefficients  $m_{j,k} = \int_{\partial_c\Omega} \psi_k \psi_j dS, 1 \leq j, k \leq m$ ,
- $F$  est le vecteur de composantes  $b_j = L(\Phi_j), j = 1, \dots, N$ .

D'autre part, l'inéquation [19] donne :

$$\int_{\partial_c\Omega} \mu_h(U_{hn}) dS \geq 0, \quad \forall \mu_h \in N_h(\partial_c\Omega)$$

En désignant par  $U_{hn}(i)$  la composante normale de  $U_h(i)$ , cette dernière inéquation s'écrit également :

$$\sum_{i=1}^m U_{hn}(i) \int_{\partial_c \Omega} \psi_k \psi_i dS \leq 0, \quad k=1, \dots, m$$

c'est-à-dire, en notant  $q_N = \begin{pmatrix} U_{hn}(1) \\ \vdots \\ U_{hn}(m) \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{M}q_N \leq 0$  dans  $\mathfrak{R}^m$ .

Finalement, le problème de point-selle [19] s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{K}q - \mathbf{A}\Lambda = F & \text{dans } \mathfrak{R}^N \\ \mathbf{M}q_N \leq 0 & \text{dans } \mathfrak{R}^m \\ \Lambda \leq 0 & \text{dans } \mathfrak{R}^m \\ (\mathbf{M}q_N)^T \Lambda = 0 & \text{dans } \mathfrak{R} \end{cases}$$

la matrice  $\mathbf{A}$  étant définie en [21].

*Remarque :*

Dans le cas présent, la condition de non-pénétration de type intégral s'écrit  $\mathbf{M}q_N \leq 0$ . On notera que  $\mathbf{M}$  représente la matrice de masse (symétrique) sur le maillage de  $\partial_c \Omega$ . Il est clair que cette condition est globale et qu'elle n'implique pas la condition de non-pénétration nœud à nœud qui s'écrit  $q_N \leq 0$ . Ceci provient du fait que les coefficients de  $\mathbf{M}^{-1}$  ne sont pas positifs. Il s'ensuit que de légères pénétrations peuvent survenir et la méthode est non conforme (i.e.  $\mathbf{U}_{ad,h}^{\text{int}} \not\subset \mathbf{U}_{ad}$ ). L'étude détaillée de cette condition de contact, en particulier la convergence de  $U_h$  vers  $U$ , est effectuée dans [HIL 98]. Cependant, on notera que le multiplicateur  $\Lambda$  vérifie la condition de signe sur toute la zone de contact. Cette propriété nous sera très utile par la suite.

#### 4.3.2. Cas du contact défini localement : $\mathbf{U}_{ad,h} = \mathbf{U}_{ad,h}^{\text{ponc}}$

Soit  $M_h(\partial_c \Omega)$  l'ensemble des fonctions  $\mu_h$  continues, affines par morceaux sur le maillage de la zone de contact et vérifiant  $\mathbf{M}\mu_h \leq 0$ , où  $\mathbf{M}$  désigne la matrice de masse sur le maillage de  $\partial_c \Omega$ . On considère la formulation mixte suivante : trouver  $U_h \in \mathbf{U}_{0,h}$  et  $\lambda_h \in M_h(\partial_c \Omega)$  tels que :

$$\begin{cases} a(U_h, V_h) - \int_{\partial_c \Omega} \lambda_h(V_{hn}) dS = L(V_h) & \forall V_h \in U_{0,h} \\ \int_{\partial_c \Omega} (\mu_h - \lambda_h)(U_{hn}) dS \geq 0 & \forall \mu_h \in M_h(\partial_c \Omega) \end{cases} \quad [22]$$

En fait, le problème de point-selle sur  $U_{0,h} \times M_h(\partial_c \Omega)$  est associé au lagrangien suivant :

$$L(V_h, \mu_h) = \frac{1}{2} a(V_h, V_h) - L(V_h) - \int_{\partial_c \Omega} \mu_h(V_{hn}) dS$$

Ce lagrangien est identique à celui défini en [20], seul diffère le cône convexe fermé dans lequel on cherche le multiplicateur  $\lambda_h$ . En utilisant des techniques de base sur les points-selles, on montre que le problème [19] admet une solution unique, notée  $(U_h, \lambda_h)$ . En suivant les techniques adoptées dans [HIL 98], on montre que  $U_h$  est la solution du problème [18] (avec  $U_{ad,h} = U_{ad,h}^{pouc}$ ). De plus, le couple  $(U_h, \lambda_h)$  converge vers  $(U, R_n)$  quand  $h$  tend vers 0.

En adoptant une démarche similaire à celle effectuée précédemment pour la condition de contact globale, on vérifie [HIL 98] que le problème de point-selle [22] s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{K}q - \mathbf{A}\Lambda & = F & \text{dans } \mathfrak{R}^N \\ q_N & \leq 0 & \text{dans } \mathfrak{R}^m \\ \mathbf{M}\Lambda & \leq 0 & \text{dans } \mathfrak{R}^m \\ (q_N)^T (\mathbf{M}\Lambda) & = 0 & \text{dans } \mathfrak{R} \end{cases}$$

*Remarque :*

Dans le cas présent, la méthode est conforme (i.e.  $U_{ad,h}^{pouc} \subset U_{ad}$ ) et le solide ne pénètre en aucun point le socle rigide. L'étude de la convergence des solutions éléments finis vers la solution du modèle continu est standard [HAS 96]. On notera que les multiplicateurs  $\Lambda$ , représentant la contrainte normale sur la zone de contact, ne vérifient pas la condition de signe mais seulement la condition affaiblie  $\mathbf{M}\Lambda \leq 0$ . Cependant, les forces nodales (représentées par les valeurs de  $\mathbf{M}\Lambda \leq 0$ ) sont négatives. Ces commentaires sont à comparer avec ceux concernant la condition sur le déplacement normal dans le cas de la condition de non-pénétration globale.

#### 4.4. Mise sous forme de problème de minimisation et résolution algorithmique

##### 4.4.1. Cas du contact défini globalement : $\mathbf{U}_{ad,h} = \mathbf{U}_{ad,h}^{\text{int}}$

En se référant à la partie précédente, on considère le problème sous la forme de recherche d'un point-selle de lagrangien qui, mis sous forme matricielle, s'écrit :

$$\max_{\Lambda \leq 0} (\min_V \frac{1}{2} V^T \mathbf{K} V - V^T F - (\mathbf{A}^T V)^T \Lambda)$$

La matrice  $\mathbf{A}$  traduit la condition de contact ; elle s'écrit :

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{M} \quad 0)$$

Sachant que  $\mathbf{K}q - \mathbf{A}\Lambda = F$  et que  $\mathbf{K}$  est inversible, il s'ensuit que le problème revient au problème de minimisation suivant :

$$\min_{\Lambda \leq 0} (\frac{1}{2} \Lambda^T \mathbf{A}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A} \Lambda + \Lambda^T \mathbf{A}^T \mathbf{K}^{-1} F + \frac{1}{2} F^T \mathbf{K}^{-1} F) \quad [23]$$

##### 4.4.2. Cas du contact défini localement : $\mathbf{U}_{ad,h} = \mathbf{U}_{ad,h}^{\text{ponc}}$

De la même manière que précédemment, on considère le problème de Signorini discrétisé avec une condition de contact ponctuelle. Dans ce cas, le problème de point-selle est :

$$\max_{\mathbf{M}\Lambda \leq 0} (\min_V \frac{1}{2} V^T \mathbf{K} V - V^T F - (\mathbf{B}^T V)^T \mathbf{M} \Lambda)$$

La matrice  $\mathbf{B}$  traduisant la condition de contact est définie par :

$$\mathbf{B}^T = (\mathbf{I}_m \quad 0)$$

Posons  $\Gamma = \mathbf{M}\Lambda \leq 0$  ( $\Gamma$  représente les charges nodales généralisées). On arrive au problème de minimisation s'écrivant :

$$\min_{\Gamma \leq 0} (\frac{1}{2} \Gamma^T \mathbf{B}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B} \Gamma + \Gamma^T \mathbf{B}^T \mathbf{K}^{-1} F + \frac{1}{2} F^T \mathbf{K}^{-1} F) \quad [24]$$

##### 4.4.3. Résolution algorithmique

Comme  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont de rang maximal, les matrices  $\mathbf{A}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{B}$  sont

symétriques définies positives. Le problème consiste alors à résoudre ces problèmes de minimisation de fonctionnelles quadratiques définies positives sous contraintes convexes. Afin de résoudre les problèmes [23] et [24], le code de calcul Castem2000 utilisé adopte l'algorithme de Frank et Wolfe [FRA 56], [MIN 83]. Il s'agit d'un algorithme itératif dont la convergence est démontrée sous les hypothèses présentes ([MIN 83], théorème 9 p. 211). Dans ce cas, le champ de déplacements  $q$  se déduit de  $\Lambda$  en écrivant  $q = \mathbf{K}^{-1}(F + \mathbf{A}\Lambda)$ .

**5. Constructions des champs admissibles**

Pour calculer l'erreur en relation de comportement [14], il faut, comme en élasticité linéaire [LAD 91] effectuer un post-traitement de la solution éléments finis  $(U_h, \sigma_h)$  afin de reconstruire les champs  $(\hat{U}, \hat{W}, \hat{\sigma}, \hat{R})$  qui vérifient [1] et [2] et, compte tenu de la remarque précédente :  $\hat{R}_i = 0, \hat{R}_n \leq 0, \hat{W}_n \leq 0$ .

Par rapport au cas de l'élasticité, les seules difficultés nouvelles consistent à reconstruire  $\hat{R}$  et  $\hat{W}$  tels que  $\hat{R}_i = 0, \hat{R}_n \leq 0, \hat{W}_n \leq 0$ .

En effet, si ces difficultés sont résolues, la construction de  $\hat{\sigma}$  s'effectue par les techniques classiques en considérant que  $\hat{R}$  est une densité surfacique de forces données et le champ de déplacement  $\hat{U}$  s'obtient en modifiant éventuellement  $U_h$  sur  $\partial_c \Omega$  pour qu'il coïncide avec  $\hat{W}$ . Les détails de la construction de  $\hat{\sigma}$  peuvent être trouvés dans [LAD 91].

**5.1. Cas de la condition de contact globale**

L'algorithme fournit des charges nodales généralisées dont la composante tangentielle est nulle et notées  $\Gamma_i = (\mathbf{M}\Lambda)_i$  aux nœuds de la zone de contact  $\partial_c \Omega$  telles que (cf. [23]) :

$$\Gamma_i = (\mathbf{M}\Lambda)_i \text{ avec } \Lambda_i \leq 0$$

On choisira donc :

$$\hat{R}_n(i) = (\mathbf{M}^{-1}\Gamma)_i = \Lambda_i$$

Il résulte que la densité d'efforts ainsi construite vérifie :

$$\hat{R}_n \leq 0 \text{ et } \hat{R}_i = 0$$

en tout point de  $\partial_c \Omega$ . D'autre part, en utilisant [19], on montre que le champ éléments finis  $\sigma_h$  est en équilibre, au sens faible des éléments finis, avec les charges

$f$ ,  $F$  et  $\hat{R}$ . Il est donc possible d'appliquer la construction classique pour obtenir  $\hat{\sigma}$ .

L'algorithme fournit aussi un champ  $U_h$  qui ne vérifie pas rigoureusement la condition de non-pénétration. Pour les nœuds  $i$  de  $\partial_c \Omega$ , on pose :

$$\hat{U}_n(i) = \hat{W}_n(i) = \inf(U_{hn}(i), 0) \text{ et } \hat{U}_t(i) = \hat{W}_t(i) = U_{ht}(i)$$

Pour les nœuds  $i$  n'appartenant pas à  $\partial_c \Omega$ , on définit :

$$\hat{U}(i) = U_h(i)$$

et  $\hat{U}$  est construit sur  $\Omega$  affine par élément à partir de ces valeurs nodales. Compte tenu de cette construction, on a :

$$\hat{W}_n(i) \leq 0$$

Il est ainsi possible de calculer l'erreur en relation de comportement et elle est à valeur finie.

## 5.2. Cas de la condition de contact locale

Dans ce cas, l'algorithme impose à  $U_h$  de vérifier la condition de non-pénétration. On prend donc :

$$\hat{U} = U_h$$

Par contre ici, la construction de la composante normale de  $\hat{R}$  est plus complexe. L'algorithme fournit des charges nodales généralisées dont la composante tangentielle est nulle. Prenons comme composante tangentielle  $\hat{R}_t = 0$  et recherchons la composante normale affine par morceaux et continue sur la zone de contact. Elle est définie par ses valeurs aux nœuds :

$$\hat{R}_n(i), \quad i = 1, \dots, m$$

L'algorithme fournit des charges nodales généralisées  $\Gamma_i = (MA)_i$  aux nœuds telles que (cf. [24]) :

$$\Gamma_i = (MA)_i \leq 0$$

On choisira donc :

$$\hat{R}_n(i) = \inf((M^{-1}\Gamma)_i = \Lambda_i, 0)$$

Si les  $\Lambda_i$  sont tous négatifs, il est clair que, compte tenu de [22],  $\sigma_h$  est en équilibre, au sens faible des éléments finis, avec des charges  $f_d$ ,  $F_d$  et  $\hat{R}$ . Par contre, si l'une au moins des valeurs  $\Lambda_i$  est strictement positive, l'équilibre au sens faible des éléments finis n'est plus assuré. Une technique pour lever cette difficulté consiste à résoudre un problème linéaire dans  $\Omega$  avec les données en charges  $f_d$ ,  $F_d$  et  $\hat{R}$ . On obtient alors un nouveau champ de contrainte  $\tilde{\sigma}_h$ , voisin de  $\sigma_h$  à partir duquel la construction de  $\hat{\sigma}$  est possible.

## 6. Adaptation de maillages

L'objectif d'une procédure d'adaptativité est de garantir à l'utilisateur un niveau de précision tout en minimisant les coûts de calcul. Nous utilisons la h-génération qui est la procédure la plus utilisée actuellement : on modifie la taille et la topologie des éléments, mais on conserve le même type de fonctions de forme pour les différents maillages. Un maillage  $T^*$  est optimal [LAD 86] pour une mesure d'erreur  $\varepsilon$  si :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_0, \text{ erreur fixée par l'utilisateur} \\ N^* \text{ minimum (nombre d'éléments du maillage } T^*) \end{cases}$$

Pour résoudre le problème, on utilise la procédure suivante [COO 94] :

- calcul sur un premier maillage  $T$  relativement grossier,
- calcul sur  $T$  de l'erreur relative globale  $\varepsilon$  et des contributions locales  $\varepsilon_E$ ,
- détermination des caractéristiques du maillage optimal  $T^*$ ,
- second calcul éléments finis sur le maillage  $T^*$ .

## 7. Exemple de contact sur socle rigide

Cet exemple consiste en un bloc élastique, de forme carrée, posé initialement sur un socle rigide indéformable. Des charges de pression identiques sont appliquées sur la moitié du sommet ainsi que sur la moitié du bord, comme suggéré sur la figure 2.

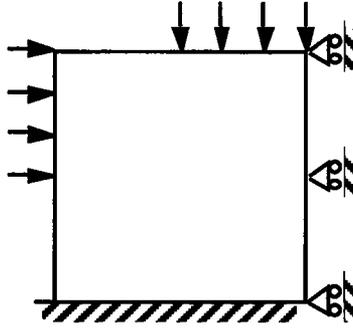


Figure 2. Configuration initiale

Sur cet exemple, en utilisant comme solution de référence la solution éléments finis associée à un maillage très fin, on calcule l'erreur exacte définie par :

$$\varepsilon_{ex} = \frac{\|U_{réf} - U_h\|_{u,\Omega}}{\|U_{réf} + U_h\|_{u,\Omega}}$$

Sur la figure 3, les convergences des erreurs exacte et calculée [9] sont ainsi comparées en fonction du nombre d'éléments en contact.

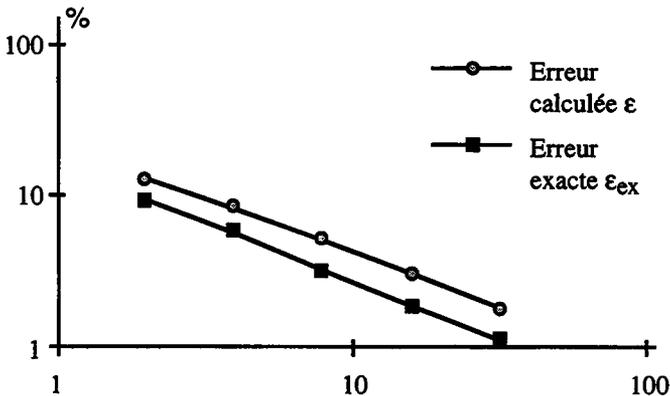


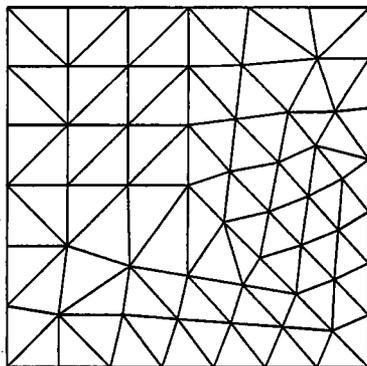
Figure 3. Convergence des erreurs en fonction du nombre d'éléments en contact

L'adaptation du calcul se fait en trois étapes :

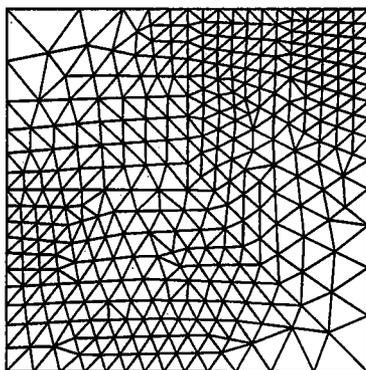
– Première étape : on considère la condition de contact [16]. Le maillage initial comporte 96 triangles à 3 nœuds pour une erreur  $\varepsilon$  de 17,5 % (figure 4). L'erreur souhaitée  $\varepsilon_0$  est de 2 %.

– Deuxième étape : le maillage intermédiaire comporte 644 triangles à 3 nœuds pour une erreur de 6,8 % (figure 5).

– Dernière étape : le maillage optimisé est montré figure 6, il comporte 5 595 éléments et 2 895 nœuds ; l'erreur correspondante est de 2 %. La déformée, la carte des contraintes de Von Mises et la carte des contributions à l'erreur  $\varepsilon_E$  [10] sont montrées figures 7, 8 et 9.



**Figure 4.** *Maillage initial*



**Figure 5.** *Maillage intermédiaire*

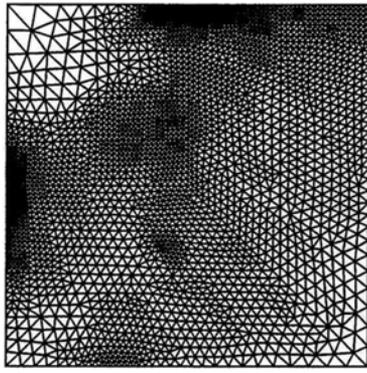


Figure 6. *Maillage optimisé*

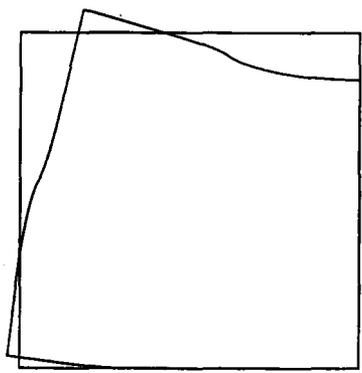
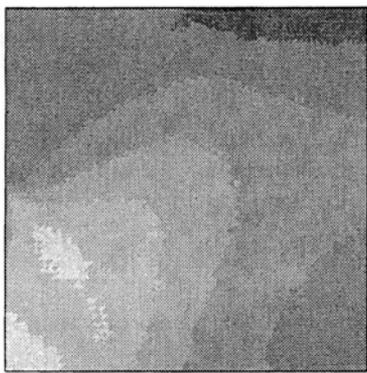


Figure 7. *Déformée*



- .04
- 2.7
- 5.3
- 7.9
- 10.
- 13.
- 16.

Figure 8. *Contrainte de Von Mises*

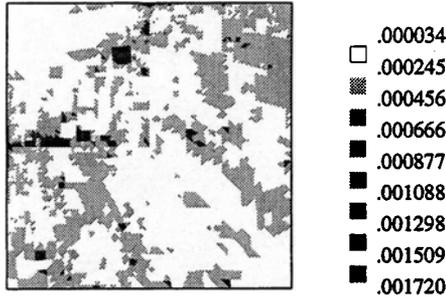


Figure 9. Carte des contributions à l'erreur  $\epsilon_E$

### 8. Bibliographie

[BAB 78] BABUSKA I., RHEINBOLDT W.C., « Error estimates for adaptive finite element computation », *Siam J. Num. Anal.*, vol. 15, p. 736-754, 1978.

[BEN 97] BEN BELGACEM F., HILD P., LABORDE P., « Approximation of the unilateral contact problem by the mortar finite element method », *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, vol. 324, p. 123-127, 1997.

[BEN 98] BEN BELGACEM F., HILD P., LABORDE P., « Extension of the Mortar Finite Element method to a variational Inequality Modelling Unilateral Contact », to appear in *Math. Mod. Meth. in Appl. Sci.*, 1998.

[COO 94] COOREVITS P., LADEVÈZE P., PELLE J.P., « Mesh optimization for problems with steep gradients », *Eng. Comp.*, vol. 11, p. 129-144, 1994.

[COO 95] COOREVITS P., LADEVÈZE P., PELLE J.P., « An automatic procedure for finite element analysis in 2D elasticity », *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 121, p. 91-120, 1995.

[COO 97] COOREVITS P., Sur l'automatisation des analyses par éléments finis, Mémoire d'habilitation à diriger les recherches de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1997.

[DUV 72] DUVAUT G., LIONS J.-L., *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, 1972.

[FIC 72] FICHERA G., in *Encyclopedia of Physics*, Edited by S. Flügge, vol. VIa/2, Springer-Verlag, Berlin, p. 391-424, 1972.

[FRA 56] FRANK M., WOLFE P., « An algorithm for quadratic programming », *Naval Research Logist Quarterly*, vol. 3, p. 95-110, 1956.

[HAS 96] HASLINGER J., HLAVACEK I., NECAS J., « Numerical Methods for Unilateral Problems in Solid Mechanics » in *Handbook of Numerical Analysis*, vol. IV, Part 2, Eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions, North Holland, 1996.

- [HIL 98] HILD P., Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse 3, 1998.
- [KIK 88] KIKUCHI N., ODEN J. T., « Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods », *SIAM*, 1988.
- [LAD 75] LADEVÈZE P., Comparaison de modèles de milieux continus, Thèse de l'Université Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1975.
- [LAD 86] LADEVÈZE P., COFFIGNAL G., PELLE J.-P., « Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis » in *Accuracy estimates and adaptive refinements in Finite Element computations*, eds. Babuska, Gago, Oliveira, Zienkiewicz J. Wiley, p. 181-203, 1986.
- [LAD 91] LADEVÈZE P., PELLE J.-P., ROUGEOT P., « Error estimates and mesh optimization for FE computation », *Eng. Comp.*, vol. 8, p. 69-80, 1991.
- [LAD 96] LADEVÈZE P., *Mécanique non linéaire des structures*, Editions Hermès, 1996.
- [MIN 83] MINOUX M., *Programmation mathématique, théorie et algorithmes*, Tome 1, Dunod, 1983.
- [MOR 74] MOREAU J.J., *On unilateral constraints, friction and plasticity*, *New variational Techniques in Mathematical Physics*, Capriz G., Stampacchia G. eds, Edizioni Cremonese, Roma, p. 175-322, 1974.
- [PRA 47] PRAGER W., SYNGE J.L., « Approximations in elasticity based on the concept of function space », *Quart. Appl. Math.*, vol. 5, p. 261-269, 1947.
- [WRI 94] WRIGGERS P., SCHERF O., CARTENSEN C., *Adaptive techniques for the contact of elastic bodies in recent developments in finite element analysis*, eds. Hughes, Onate, Zienkiewicz (CIMNE), p. 78-86, 1994.
- [ZIE 87] ZIENKIEWICZ O.C., ZHU J.Z., « A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis », *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, vol. 24, p. 337-357, 1987.