
Maillage géométrique de surfaces

Houman Borouchaki * — Pascal Jean Frey**

* UTT, GSM-LASMIS

BP 2060, 10010 Troyes cedex

Houman.Borouchaki@univ-troyes.fr

** INRIA, Projet Gamma

BP 105, 78153 Le Chesnay cedex

Pascal.Frey@inria.fr

RÉSUMÉ. Cette étude présente une méthode d'optimisation pour générer des maillages géométriques enrichis de type éléments finis à partir d'une triangulation initiale arbitraire d'une surface. En premier lieu, on construit un support géométrique de continuité d'ordre G^1 associé à la triangulation initiale de la surface, représentant ainsi une approximation adéquate de la géométrie de la surface sous-jacente. Puis on optimise la triangulation initiale au regard de cette géométrie et de la qualité en forme des éléments. Une application particulière et intéressante de cette approche est relative à la simplification géométrique des maillages, pour laquelle l'objectif est de réduire le nombre d'éléments du maillage en préservant l'approximation géométrique, la qualité du maillage résultant étant contrôlée. L'approche proposée est validée à l'aide de quelques exemples destinés à des applications variées qui sont évalués numériquement au moyen de critères géométriques.

ABSTRACT. This study presents an optimisation method suitable to obtain an enriched geometric finite element mesh, given an initial arbitrary triangulation of a surface. To this end, we construct at first a geometric support G^1 continuous associated with the initial surface triangulation, which represents an adequate approximation of the underlying surface geometry. The initial triangulation is then optimized with respect to this geometry and the element shape quality. A specific and interesting application of the proposed approach concerns the geometric mesh simplification, in which the goal is to reduce the number of mesh elements and to preserve the geometric approximation as well as the quality of the resulting mesh. The theoretical approach is validated by means of a few examples related to various applications which are numerically evaluated using geometric criteria.

MOTS-CLÉS : maillage de surface, approximation polyédrique, optimisation de maillages, adaptation de maillages, simplification de maillages.

KEY WORDS : surface mesh, polyhedral approximation, mesh optimisation, mesh adaption, mesh simplification.

1. Introduction

Les triangulations et maillages de surfaces jouent un rôle très important dans les simulations numériques basées sur des méthodes d'éléments finis. Le maillage de la frontière d'un domaine quelconque de \mathbb{R}^3 est un problème réputé difficile qui a fait l'objet de nombreux travaux récemment (voir par exemple, [SHE 92], [HOP 96], [RYP 94], [SAM 94], [MAR 96], [BOR 97a], sur la triangulation des surfaces paramétriques). Le résultat obtenu n'est pas toujours satisfaisant, les triangulations générées correspondant à des approximations grossières de la surface ou comptant un nombre d'éléments trop important pour être exploitables. Dans ce contexte, le contrôle rigoureux de l'écart entre le maillage (qui correspond à une approximation géométrique polyédrique de la surface) et la surface réelle est l'une des clés de la modélisation. Cet écart représente localement, pour un élément du maillage, la plus grande distance d'un point de cet élément à la surface. Par définition, cette contrainte est fondamentale et permet d'assurer, si elle est satisfaite, la validité de l'approximation géométrique par rapport à une tolérance donnée.

On appelle maillage géométrique [FRE 97], un maillage satisfaisant cette contrainte géométrique. Dans le cas d'une surface composée de carreaux définis par des surfaces polynomiales ou rationnelles (par exemple, la plupart des surfaces générées dans les modeleurs géométriques), Sheng et Hirsh [SHE 92] et Piegł et Richard [PIE 95] ont proposé une méthode de génération de maillage dans laquelle l'écart à la surface est contrôlé. Pour d'autres types de surfaces telles que celles rencontrées par exemple dans des applications biomédicales, le problème est beaucoup plus crucial, dans la mesure où cet écart ne peut être contrôlé par les méthodes de génération elles-mêmes [LOR 87].

Dans le contexte des méthodes de discrétisation pour des applications de type éléments finis, un autre requis vient s'ajouter au précédent. En effet, la qualité en forme des éléments du maillage joue un rôle prépondérant dans la convergence de la simulation numérique et la précision des résultats [CIA 91]. Les méthodes classiques d'optimisation de maillages permettent éventuellement de répondre à cette requête, sans toutefois respecter la géométrie de la surface.

On s'intéresse ici à la génération de maillages géométriques surfaciques de type éléments finis. On suppose que la surface est représentée par une triangulation initiale dotée éventuellement de spécifications géométriques (arêtes vives, points singuliers, etc.). On définit un support géométrique (assez lisse, d'ordre G^1) associé à la triangulation initiale de la surface représentant ainsi une approximation adéquate de sa géométrie sous-jacente et on optimise le maillage de départ au regard de cette géométrie pour obtenir un maillage géométrique et également au regard de la qualité en forme des éléments pour obtenir un maillage de type éléments finis.

Ce support géométrique peut être défini de manière intrinsèque (par le biais d'un modeleur géométrique) ou d'une manière indépendante (en définissant une géométrie basée sur la triangulation d'origine de la surface). Dans

le premier cas, on suppose ainsi que l'optimiseur a accès à la définition géométrique analytique de la surface qui a servi à construire une triangulation initiale. Dans le second cas, on suppose que cette information n'est pas disponible et la seule donnée accessible de l'optimiseur est la triangulation initiale de la surface. L'optimisation est basée essentiellement sur un couplage de modifications topologiques locales (gouvernées par la qualité des éléments de la triangulation et la géométrie de la surface) et des opérations visant à subdiviser les arêtes trop longues, à supprimer les arêtes trop courtes et à bouger les sommets du maillage. La longueur des arêtes est calculée dans une métrique appelée géométrie de telle sorte qu'une longueur d'arête idéale dans un maillage géométrique soit égale à un [BOR 97a].

Le nombre d'éléments du maillage géométrique est généralement lié à l'écart entre le maillage et la surface réelle sous-jacente. En particulier, pour l'obtention d'un maillage géométrique satisfaisant, l'écart doit être suffisamment petit (en pratique, inférieur à 10 degrés), ce qui conduit généralement à la génération d'un nombre d'éléments trop important. En revanche, quel que soit le domaine d'application envisagé, un nombre d'éléments trop important est pénalisant. Il est donc intéressant de trouver un compromis entre l'approximation géométrique d'une part et le nombre d'éléments du maillage d'autre part. C'est l'objectif des méthodes de simplification (ou de décimation) de maillages.

Les méthodes de simplification peuvent être classées en deux catégories, selon qu'elles sont basées sur l'optimisation de critères géométriques [GUE 96], [HAM 94], [KAL 96], [SCH 92] ou qu'elles modifient la triangulation initiale pour optimiser une fonction d'énergie adéquate [HOP 96], [TUR 92]. Les domaines d'applications potentiels sont multiples et intéressent notamment la simulation numérique (biomédecine ou autre), la visualisation, la compression de données, etc.

Dans notre approche, la simplification de maillages de surfaces est conçue comme une application particulière de la méthode proposée. En effet, comme l'enrichissement géométrique du maillage est conditionné par l'écart (géométrique) désiré du maillage à la surface, il suffit de considérer des écarts plus importants ainsi qu'une valeur minimale de taille pour obtenir des maillages simplifiés.

La méthode est appliquée à quelques triangulations de surfaces, pour générer des maillages géométriques enrichis et simplifiés de ces surfaces. Ces maillages sont illustrés et évalués numériquement à l'aide de critères géométriques basés sur la seule discrétisation (maillage) de la surface. Les exemples de surfaces considérés sont représentatifs de différents domaines d'applications dans le contexte de simulation numériques par des méthodes d'éléments finis (biomécanique, mécanique des solides et mécanique des fluides).

Section 2, on précise le support géométrique associé à une triangulation de surface donnée et on indique les principales requêtes de l'optimiseur au regard de ce support. **Section 3**, on rappelle la notion de maillage géométrique

d'une surface. **Section 4**, on donne le schéma général de l'enrichissement géométrique et on détaille les principales opérations impliquées dans ce schéma. **Section 5**, on présente une application particulière de ce schéma, la simplification géométrique de maillages. **Section 6**, on rappelle brièvement les critères géométriques utilisés pour l'évaluation des maillages de surfaces. **Section 7**, on propose quelques exemples de surfaces et on montre des maillages géométriques enrichis et simplifiés de ces surfaces, qui seront par ailleurs évalués. Enfin, **Section 8**, on indique quelques extensions de l'approche proposée, notamment dans le cas anisotrope.

2. Support géométrique

Comme indiqué dans l'introduction, une tâche essentielle de l'optimiseur consiste à subdiviser les arêtes trop longues du maillage courant. Les points de subdivision doivent nécessairement appartenir à la vraie surface. Ces points sont d'abord générés sur les arêtes du maillage puis reportés sur la surface réelle, ce qui est réalisé par l'intermédiaire du support géométrique associé à la surface. Ce support représente en effet la définition analytique de la surface qui est générée par un modelleur géométrique (CAO). Ainsi, le support fournit la position d'un point de la surface le plus proche d'un point donné suivant une direction spécifiée. Un deuxième requis essentiel concerne les spécifications géométriques de la surface au voisinage de ces points, requis fondamental pour toute modification topologique locale du maillage. Cette requête fournit deux types d'informations, selon les caractéristiques de la surface au voisinage du point considéré. Dans le cas où le point présente (au moins) une continuité d'ordre C^2 (en pratique, une continuité d'ordre G^1 , *i.e.*, une continuité des plans tangents, est suffisante), la normale à la surface et le plus petit des rayons de courbure principaux en ce point sont les seules informations nécessaires. Dans le cas où le point présente une discontinuité des plans tangents, c'est le cas des points appartenant à une arête vive, les deux normales à la surface ainsi que les deux plus petits rayons de courbure principaux de part et d'autre de l'arête vive contenant le point et la tangente à cette arête en ce point sont fournis. Evidemment, ces informations sont retournées par le modelleur en même temps que la position du point considéré.

Dans le cas où une triangulation de la surface est la seule donnée disponible, on doit construire d'une manière interne un support géométrique définissant une surface réelle sous-jacente à la triangulation. Ce support doit au moins interpoler les sommets ainsi que les normales aux sommets de la triangulation (conditions de continuités d'ordre G^1). *A priori*, il est difficile d'estimer l'écart entre la surface réelle (qui n'est pas connue) et le support associé. *Mais, dans la mesure où la triangulation est une approximation fidèle de la surface, ce support géométrique imite raisonnablement le rôle du modelleur géométrique.*

Le problème consiste alors à construire une surface composée (au moins) d'ordre G^1 à partir d'une triangulation de la surface, chaque triangle représentant ainsi un carreau. Pour cela, deux carreaux adjacents doivent avoir le même plan tangent sur leur arête frontière commune, si celle-ci n'est pas une arête vive.

Différentes méthodes ont été proposées pour construire une surface composée d'ordre G^1 définissant le support. Parmi ces méthodes, celles proposées par Piper [PIP 87] et Farin [FAR 86], puis récemment par Walton et Meek [WAL 96] sont bien adaptées au contexte de cette étude pour définir le support géométrique. En particulier, la méthode proposée par Walton et Meek, présente l'avantage, d'une part de prendre en compte de manière explicite les spécifications géométriques (notamment les normales à la surface aux sommets) et d'autre part d'être à la fois simple dans sa formulation et peu gourmande en ressource mémoire. Avant de rappeler cette approche, on rappelle brièvement celles proposées par Piper et Farin.

Le schéma proposé par Piper [PIP 87] et Farin [FAR 86] consiste à subdiviser chaque triangle en trois triangles et à définir sur chaque nouveau triangle un carreau polynomial de degré 4 (quartique), de façon à assurer la continuité des plans tangents transversaux sur chaque arête frontière entre, d'une part les nouveaux triangles issus de la subdivision du triangle d'origine et d'autre part entre les couples de nouveaux triangles issus de la subdivision de deux triangles adjacents. Cette technique requiert une ressource mémoire assez importante. En effet, après subdivision, 28 points de contrôle, dont 9 communs aux triangles adjacents, sont associés à chaque triangle d'origine. Par ailleurs, chaque triangle définit trois carreaux et la définition de ces carreaux est étroitement liée à la qualité en forme du triangle d'origine (si celui-ci est trop étiré, la méthode présente des instabilités dans la définition des carreaux).

La méthode proposée par Walton et Meek consiste à définir un réseau de courbes frontières aux carreaux, ainsi que les plans tangents transversaux à ces frontières, indépendamment les uns des autres, par interpolation des normales à la surface aux sommets. Chaque carreau est alors défini, à partir de sa frontière, d'une manière indépendante, tout en respectant les spécifications relatives à sa frontière (les plans tangents) par une approche de Gregory [GRE 74]. L'originalité de cette méthode réside dans le fait qu'elle définit ce réseau de courbes à partir de la seule donnée des normales aux sommets (chaque courbe ainsi que le plan tangent transversal associé est complètement définie à partir de la donnée des normales aux extrémités). Chaque courbe frontière représente une cubique dont les normales principales (à la courbe) coïncident aux extrémités avec les normales à la surface. Les plans tangents transversaux (aux courbes frontières) sont engendrés par les vecteurs tangents en chaque point de ces courbes et des vecteurs issus d'une interpolation quadrique des binormales aux extrémités. Ainsi, la seule spécification des normales aux deux sommets d'une arête suffit à définir une courbe frontière d'un carreau (s'appuyant sur les deux

extrémités) ainsi que le plan tangent transversal à la surface en cette courbe. Enfin, à partir des plans tangents transversaux de chaque triangle est construit un carreau de Gregory par une approche classique. Chaque triangle est ainsi associé à un carreau défini analytiquement par une fonction rationnelle à l'intérieur et par une quartique sur les bords. Cette méthode requiert, pour chaque triangle, uniquement 9 points de contrôle communs aux triangles adjacents.

Nous avons étendu le schéma de Walton-Meek aux cas de discontinuités présentes dans la géométrie (arêtes vives, coin, etc). Rappelons que ces dernières spécifications sont, soit fournies avec la triangulation initiale de la surface, soit calculées d'une manière automatique (par exemple une arête est considérée arête vive si les deux faces partageant l'arête font un angle inférieur à un seuil fixé, etc.).

Pour conclure, rappelons que ce support géométrique est utilisé pour répondre aux requêtes suivantes :

— étant donné un point et une direction, trouver le point de la surface le plus proche,

— donner la (ou les) normale(s) et le (ou les) plus petit(s) rayon(s) de courbure principal en un point de la surface.

3. Maillage géométrique d'une surface

Avant d'introduire la définition de maillage géométrique, on rappelle brièvement la notion de maillage respectant (c'est-à-dire adapté à) une carte de tailles spécifiée.

Soient T une triangulation surfacique composée de triangles, S l'ensemble de ses sommets et $\mathcal{H}_3(S)$ une carte de tailles associée à S . La taille en un sommet P de T est représentée par un réel caractérisant, *a posteriori*, la longueur idéale de toute arête PX incidente à P , c'est-à-dire :

$$\|\overrightarrow{PX}\| = h(P) \quad [1]$$

où $h(P)$ représente cette taille idéale. En interpolant cette carte discrète de tailles $\mathcal{H}_3(S)$ sur T , on obtient une carte continue \mathcal{H}_3^c dans \mathbb{R}^3 . On définit ainsi une structure riemannienne en munissant \mathbb{R}^3 de la carte \mathcal{H}_3^c . Vérifier si T respecte la carte $\mathcal{H}_3(S)$ revient à montrer que :

$$\forall PQ \in T, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \leq l(PQ) \leq \sqrt{2} \quad [2]$$

où PQ est une arête et $l(PQ)$ sa longueur par rapport à \mathcal{H}_3^c . Rappelons que si l'arête PQ est paramétrée entre 0 et 1 par $P + t\overrightarrow{PQ}$, alors :

$$l(PQ) = \|\overrightarrow{PQ}\| \int_0^1 \frac{1}{H_{PQ}(t)} dt. \quad [3]$$

où $H_{PQ}(t)$ est une fonction monotone d'interpolation de taille telle que, si $h(P)$ et $h(Q)$ sont les tailles spécifiées respectivement aux sommets P et Q , on a :

$$H_{PQ}(0) = h(P) \quad \text{et} \quad H_{PQ}(1) = h(Q).$$

Remarquons que l'expression de l'équation (3) peut être calculée de manière exacte, si la fonction $H_{PQ}(t)$ est connue. Pour fixer les idées, on peut considérer une progression géométrique en taille le long de l'arête PQ , on a alors :

$$H_{PQ}(t) = H_{PQ}(0) \left(\frac{H_{PQ}(1)}{H_{PQ}(0)} \right)^t \quad [4]$$

et par conséquent :

$$l_{PQ} = \|\overrightarrow{PQ}\| \frac{h(Q) - h(P)}{h(Q)h(P)(\log h(Q) - \log h(P))}. \quad [5]$$

Il est possible de construire une carte de tailles \mathcal{G}_3 , appelée géométrique, associée aux points d'une surface [BOR 97a], telle que pour un maillage respectant cette carte (maillage dit géométrique), l'écart entre les triangles et la surface est contrôlé. En réalité, la carte \mathcal{G}_3 impose, pour chaque point, une taille proportionnelle au plus petit des rayons de courbure principaux, le coefficient de proportionnalité contrôlant cet écart. Dans [HAM 93] on trouve une procédure permettant un calcul approché de la base principale et des rayons de courbure principaux, à partir de la seule donnée du maillage de la surface. En pratique, cette approche est utilisée pour déterminer la carte \mathcal{G}_3 . Par ailleurs, en un sommet P , si $r(P)$ représente le plus petit des rayons de courbure principaux, alors $r(P)$ peut être approché par la simple formule :

$$r(P) = \min_{P_i} \frac{1}{2} \frac{\langle \overrightarrow{PP_i}, \overrightarrow{PP_i} \rangle}{\langle \nu_P, \overrightarrow{PP_i} \rangle}, \quad [6]$$

où P_i parcourt l'ensemble des extrémités d'arêtes incidentes à P et ν_P est la normale à la surface en P .

En outre, comme les rayons de courbure peuvent changer de manière significative au voisinage d'un point de la surface, les tailles imposées par la carte \mathcal{G}_3 suivent cette variation. Ainsi, la gradation d'un maillage respectant la carte \mathcal{G}_3 peut éventuellement ne pas être bornée localement en un point, ce qui entraîne une augmentation du nombre d'arêtes incidentes en ce point et par conséquent conduit à des éléments de qualité médiocre au voisinage de ce point. Dans [BOR 97b], on propose une procédure de correction d'une carte de tailles destinée à contrôler la gradation d'un maillage. Ainsi la carte \mathcal{G}_3 est rectifiée au moyen de cette procédure en fonction d'une gradation donnée définissant une nouvelle carte $\tilde{\mathcal{G}}_3$.

En résumé, un maillage respectant la carte géométrique rectifiée $\tilde{\mathcal{G}}_3$ est un maillage géométrique de bonne qualité en forme.

4. Enrichissement géométrique de la surface

Etant donnée une triangulation de surface, le but de l'optimisation géométrique est de modifier cette triangulation pour aboutir à un maillage respectant la carte géométrique de gradation contrôlée $\tilde{\mathcal{G}}_3$ associée à la triangulation d'origine. Cette optimisation est appelée *enrichissement* (géométrique) de la surface.

L'optimisation consiste essentiellement à subdiviser les arêtes trop longues et à supprimer les arêtes trop courtes (les longueurs d'arêtes étant calculées par rapport à la carte géométrique $\tilde{\mathcal{G}}_3$) et enfin à appliquer une procédure de bougé de point pour améliorer la qualité en forme des éléments. Ces traitements utilisent essentiellement un opérateur topologique de base, la bascule d'arête. Par suite, nous allons détailler successivement la bascule d'arête, la subdivision d'arête, la suppression d'arête et le bougé de point, avant de décrire le schéma général de l'enrichissement géométrique.

4.1. Bascule d'arête

On s'intéresse ici à examiner si une configuration de paire de triangles est «optimale» vis-à-vis de l'approximation géométrique et de la qualité des éléments par rapport à la configuration alternative (après bascule d'arête). Soient K_1 et K_2 deux triangles adjacents par une arête, respectivement $N(K_1)$ et $N(K_2)$ les normales aux triangles K_1 , K_2 et $\nu_i(K_j)$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$ les normales aux sommets à la surface de K_j (cf. Figure 1). On va définir deux mesures relatives à la géométrie et une mesure relative à la qualité en forme associées à cette configuration de deux triangles. La première mesure, désignée par MG_1 , quantifie l'écart à la surface de cette configuration par :

$$MG_1 = \min_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}} \langle \nu_i(K_j), N(K_j) \rangle. \quad [7]$$

Celle-ci mesure la fidélité de l'approximation de la surface par la configuration. La deuxième mesure, MG_2 , évalue la rugosité de la surface par rapport à cette configuration et est définie simplement par

$$MG_2 = \langle N(K_1), N(K_2) \rangle. \quad [8]$$

En pratique, ces deux mesures sont combinées en une seule représentant l'approximation géométrique et la rugosité de la surface pour cette configuration. Cette mesure combinée est désignée par MG . La dernière mesure est une mesure classique de la qualité en forme d'un élément et peut être définie pour un triangle K par :

$$\gamma(K) = 4\sqrt{3} \frac{S(K)}{\sum_{1 \leq i \leq 3} l_i^2(K)}, \quad [9]$$

où $S(K)$ représente l'aire du triangle K et $l_i(K)$, $1 \leq i \leq 3$, les longueurs euclidiennes des arêtes de K . On peut définir la qualité en forme de la configuration par :

$$MQ = \min(\gamma(K_1), \gamma(K_2)). \quad [10]$$

La configuration K_1, K_2 est donc caractérisée par le couple (MG, MQ) .

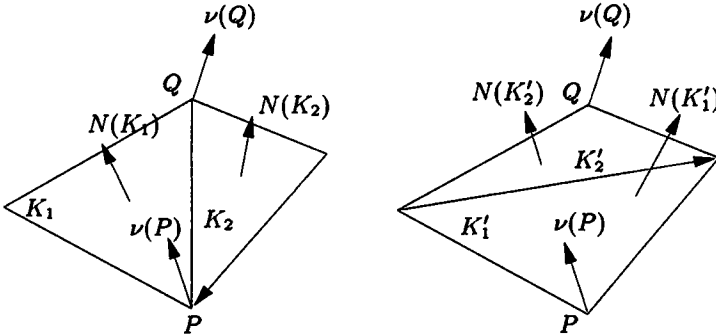


Figure 1. Bascule d'arête

Considérons la configuration alternative (après bascule d'arête) (cf. Figure 1, à droite) et soit (MG', MQ') son couple caractéristique, la bascule d'arête est appliquée si (MG', MQ') est lexicographiquement plus grand que (MG, MQ) . Ceci revient à dire que si la configuration initiale est loin de la géométrie, alors la bascule d'arête est gouvernée par la mesure géométrique, alors que dans le cas contraire, elle est gouvernée par la mesure de qualité.

4.2. Traitement des arêtes

Comme indiqué au début de cette section, le traitement des arêtes consiste soit à les subdiviser, soit à les éliminer. Dans le premier cas, la longueur de l'arête est plus grande que la longueur unité de la carte géométrique \mathcal{G}_3 , alors que dans l'autre cas, la longueur est plus petite que l'unité.

4.2.1. Subdivision d'une arête

La subdivision d'une arête consiste à introduire des points sur l'arête pour découper celle-ci en segments de longueur unité et à insérer ces points dans le maillage de la surface. Cette procédure peut être remplacée par une approche plus simple, il suffit d'introduire et d'insérer le milieu de l'arête dans le maillage. Plus précisément, ce point est créé sur l'arête (le segment droit) et reporté sur la surface *via* le support géométrique, avant d'être inséré dans le maillage. L'insertion consiste à remplacer les deux triangles partageant l'arête par quatre

nouveaux triangles (cf. Figure 2), puis à appliquer récursivement la procédure de bascule d'arêtes décrite à chaque paire de nouveaux triangles pour améliorer l'approximation géométrique, si les deux triangles partageant l'arête initiale sont loin de la géométrie, et la qualité des éléments, si ces deux triangles sont proches de la géométrie.

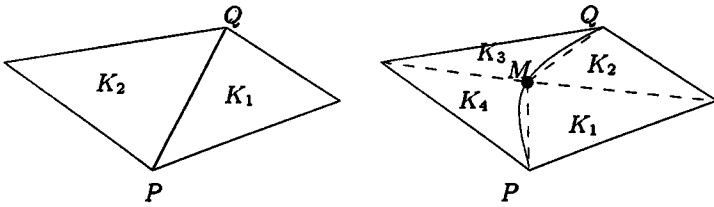


Figure 2. Subdivision d'une arête

4.2.2. Suppression d'une arête

La suppression d'une arête est basée sur deux opérateurs de base, l'élimination d'un point et l'identification des deux extrémités d'une arête. Le premier opérateur consiste à retriangleruler la cavité obtenue en supprimant du maillage la réunion des éléments ayant ce point pour sommet. Dans le plan, ceci revient à trianguler un polygone étoilé. Parmi les méthodes proposées, on en rappelle une qui présente l'avantage d'être éventuellement applicable au cas des maillages

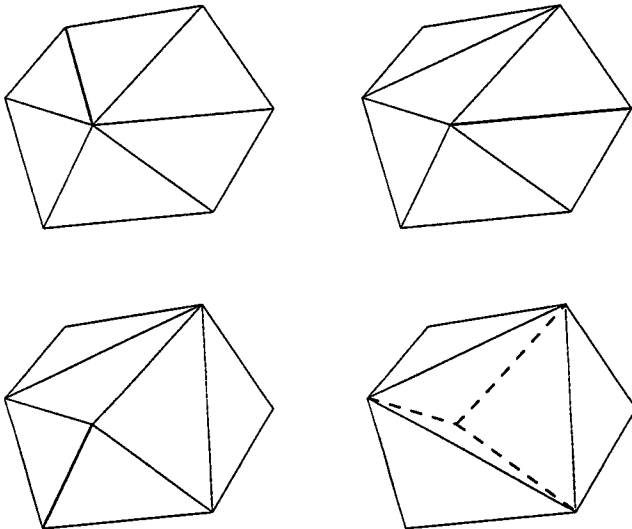


Figure 3. Suppression d'une arête

de surfaces. L'idée de base est de réduire le degré¹ du sommet à supprimer à 3 ou 4 (dans le cas dégénéré), puis à retriangler de manière triviale la cavité associée. Pour cela, on applique de manière itérative à chaque arête incidente au sommet considéré une bascule d'arête, si possible (si l'orientation des triangles résultants est préservée). Schématiquement (cf. Figure 3), cet opérateur peut s'écrire comme :

- appliquer des bascules aux arêtes incidentes au sommet considéré,
- itérer le procédé si une modification est apportée.

On peut démontrer que ce procédé converge vers une configuration de 3 ou 4 arêtes incidentes au sommet à supprimer (la deuxième configuration représentant un quadrilatère dont les deux diagonales sont orthogonales).

L'extension de ce procédé au cas des triangulations géométriques de surfaces n'est pas triviale. En effet, dans le cas plan, une bascule d'arête est validée par l'orientation correcte de la configuration alternative, alors que dans le cas des surfaces, elle est validée si la configuration alternative (ou au moins le nouveau triangle de la cavité ne contenant pas le sommet à supprimer) reste proche de la surface (c'est-à-dire que l'écart entre la normale au triangle et la normale à la surface en ses trois sommets est contrôlé). Avec cette nouvelle contrainte pour valider la bascule d'arête, la convergence de la procédure initiale ne peut être assurée. Ce qui revient à dire que si une configuration intermédiaire de l'itération est bloquée, la configuration initiale doit être restaurée, occasionnant, dans ce cas, un surcoût de travail inutile.

Dans le cas des maillages géométriques de surfaces (triangulations géométriques respectant une carte de tailles spécifiée), cette tâche est encore plus délicate. En effet, des contraintes relatives à la qualité en taille et en forme s'ajoutent à la contrainte géométrique et restreignent d'autant le nombre de configurations intermédiaires valides dans la procédure itérative de retriangulation de la cavité.

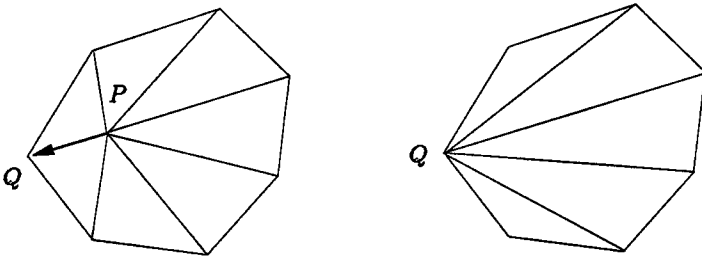


Figure 4. Identification des extrémités de l'arête

Le second opérateur, relatif à l'identification des deux extrémités d'une arête, réduit l'arête soit en l'un de ses sommets (cf. Figure 4), soit en un nou-

1. Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet.

veau sommet (cf. Figure 5). La réduction de l'arête en l'un de ses sommets n'est qu'une réécriture (retriangulation) particulière de la cavité associée au sommet supprimé, constituée des triangles incidents au sommet préservé et s'appuyant sur une arête frontière de la cavité. Ainsi, la configuration finale est connue et peut être validée a priori, quelle que soit la nature de la contrainte considérée (géométrique, qualité en taille et en forme). La réduction de l'arête en un nouveau sommet est une opération similaire au cas précédent mais plus coûteuse, deux cavités devant être retriangulées. En outre, dans ce dernier cas, la position du nouveau sommet doit être fournie par le support géométrique associé à la triangulation.

Pour conclure, la réduction de l'arête en l'un de ses sommets est l'opérateur de base retenu pour supprimer une arête, en raison de sa simplicité, de son efficacité algorithmique et de son indépendance vis-à-vis du support géométrique.

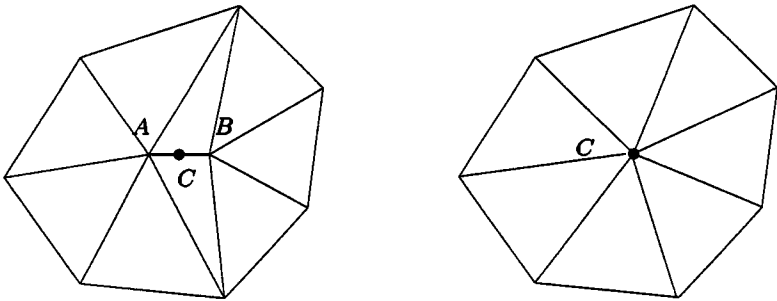


Figure 5. Réduction d'une arête

4.3. Bougé de points

Pour un sommet fixé, le bougé consiste à redéfinir les éléments incidents à ce sommet. Pour cela, dans un premier temps à partir de chaque arête frontière de cette configuration, on définit un élément optimal, donc un point, appartenant au plan support de l'élément de la configuration contenant l'arête. Puis, on détermine le barycentre de ces points définissant un point idéal. Le bougé consiste alors à déplacer pas à pas le sommet fixé vers ce point idéal (en considérant les projetés sur la surface) si la qualité des éléments de la configuration est améliorée.

4.4. Schéma général

L'enrichissement géométrique consiste essentiellement à appliquer de manière itérative le traitement décrit ci-dessus à toute nouvelle arête du maillage

tant qu'une modification peut être apportée au maillage courant, suivi d'une procédure de bougé de point. Le schéma général de la procédure d'enrichissement géométrique d'une triangulation donnée est le suivant :

— Traitement des arêtes du maillage courant

- Boucle sur toutes les arêtes du maillage courant

- * calcul de la longueur de l'arête

- * suppression de l'arête si la longueur est trop petite

- * subdivision de l'arête en son milieu si sa longueur est trop grande

— Itération du traitement des arêtes tant qu'une modification est apportée au maillage courant.

— Bougé de points, couplé avec bascule d'arête, tant que le bougé est significatif en terme de distance.

Remarques.

Les arêtes sont traitées dans un ordre aléatoire. Par conséquent les traitements de subdivision et suppression sont appliqués en alternance suivant la longueur de l'arête. La procédure de bougé de point est itérative, après chaque itération, une procédure globale de bascule d'arête est appliquée. En effet, comme les points ont été bougés, l'approximation géométrique et la qualité en forme peuvent être améliorées par la bascule d'arête.

Le coût (en temps CPU) relatif au traitement des arêtes dans l'enrichissement géométrique est dominé par celui relatif à la recherche du point de la surface le plus proche d'un point donné dans la subdivision d'une arête. Pour améliorer ce dernier, à chaque point déjà inséré dans le maillage on associe le carreau qui le contient et la recherche du point de la surface le plus proche d'un point subdivisant une arête s'effectue par adjacence à partir du carreau associé à l'une des extrémités de l'arête.

5. Simplification de maillage

La méthode que nous proposons est une application particulière et intéressante de l'optimisation géométrique et comprend successivement deux étapes, l'enrichissement géométrique de la triangulation initiale en considérant un écart géométrique assez petit et l'appauvrissement du maillage enrichi avec un écart géométrique plus important. L'appauvrissement ou la simplification du maillage résultant consiste principalement à éliminer les arêtes de longueur petite au regard de la taille géométrique idéale, suivi éventuellement d'un procédé de bougé de points.

L'élimination d'une arête dont la longueur est trop petite par rapport à la longueur idéale (la longueur unité dans la métrique géométrique) consiste, comme mentionné dans la section précédente, à identifier les deux extrémités de

cette arête. Ce procédé élimine toutes les arêtes adjacentes au sommet supprimé et crée de nouvelles arêtes (qui sont donc adjacentes au sommet préservé). Rappelons que la clé de la méthode réside dans le contrôle des contraintes suivantes :

— l'écart géométrique à la surface de tout nouveau triangle est contrôlé par rapport à l'écart limite spécifié,

— toute nouvelle arête a une qualité en taille plus proche de un que l'arête relative avant l'identification,

— la dégradation de qualité des triangles affectés par l'identification n'est pas trop importante.

La première contrainte valide l'approximation géométrique après la retriangulation. Elle s'écrit formellement, pour un nouveau triangle K :

$$1 \leq i \leq 3, \langle N(K), \nu_i(K) \rangle \geq \tau, \quad [11]$$

où $N(K)$ est la normale au triangle K et $\nu_i(K)$ la normale à la surface au sommet i de K .

La deuxième contrainte valide l'amélioration des qualités en taille des arêtes des nouveaux triangles de la cavité pour un écart donné. Soient AB l'arête à supprimer (en identifiant B à A) et BC une arête de la cavité avant la retriangulation, qui va être remplacée par AC . La contrainte s'écrit alors :

$$Q_i(AC) > Q_i(BC) \quad [12]$$

où $Q_i(a)$ représente la qualité en taille de l'arête a , et est donnée par :

$$Q_i(a) = \begin{cases} l(a) & \text{si } l(a) \leq 1 \\ \frac{1}{l(a)} & \text{si } l(a) > 1 \end{cases} \quad [13]$$

où $l(a)$ est la longueur de l'arête a mesurée par rapport à la carte géométrique correspondant à l'écart spécifié.

La troisième contrainte consiste à évaluer la qualité Q du plus mauvais des triangles de la cavité, avant retriangulation, et valider la retriangulation si son plus mauvais triangle a une qualité Q' comparable à Q . En pratique, il suffit de s'assurer que :

$$Q' \geq 0.6 Q, \quad [14]$$

où le coefficient 0.6 est choisi de telle sorte qu'une configuration de six triangles équilatéraux puisse être retriangulée.

Remarque.

Le paramètre τ représente le cosinus de l'écart angulaire θ spécifié ($\tau = \cos \theta$) et la carte géométrique impose en chaque point P de la surface la taille $\alpha r(P)$ avec $\alpha = 2 \sin \theta$ et $r(P)$ est le plus petit des rayons de courbure principaux à la surface en P [BOR 97b].

La simplification de maillage est très rapide en terme de temps CPU dans la mesure où seules des opérations topologiques locales bien définies sont appliquées.

6. Critères géométriques d'évaluation

Dans cette section, on va rappeler [FRE 97] quelques critères de nature géométrique destinés à permettre la validation de la nature géométrique d'une triangulation (c'est-à-dire la fidélité de l'approximation polyédrique). Ces mesures permettent de :

— justifier localement en un sommet le caractère géométrique de la triangulation,

— juger si la triangulation respecte la carte de tailles intrinsèques (sous-jacente à la triangulation) et, dans ce cas, si la triangulation est un maillage éléments finis.

Toutes ces mesures ont été normalisées entre 0 (localement "mauvais") et 1 (localement «bon»). Soient P un sommet fixé, $\{P_i\}$ l'ensemble des sommets incidents à P et ν_P (resp. ν_{P_i}) la normale unitaire en P (resp. en P_i). Pour évaluer localement le maillage en P , on définit les critères suivants :

— **planarité**, \mathcal{P}_P .

La planarité au sommet P est liée à l'angle maximum entre la normale ν_P et les normales $\{\nu_{P_i}\}$, et est donnée par la relation :

$$\mathcal{P}_P = \frac{1 + \min_i \langle \nu_P, \nu_{P_i} \rangle}{2}. \quad [15]$$

— **déviations**, \mathcal{D}_P .

La déviation \mathcal{D}_P au sommet P est définie comme l'angle maximum entre les arêtes PP_i et le plan tangent $\Pi(P)$ en P à la surface. Soit u_{PP_i} le vecteur unitaire de direction $\overrightarrow{PP_i}$, alors la déviation s'écrit :

$$\mathcal{D}_P = 1 - \min_i |\langle \nu_P, u_{PP_i} \rangle|. \quad [16]$$

— **rugosité**, \mathcal{R}_P .

Soient K_1 et K_2 deux faces partageant l'arête PQ , la rugosité \mathcal{R}_{PQ} le long de l'arête PQ représente l'angle dièdre entre les faces K_1 et K_2 . Soient $N(K_1)$ et $N(K_2)$ leurs normales unitaires, cette rugosité s'écrit comme :

$$\mathcal{R}_{PQ} = \frac{1 + \langle N(K_1), N(K_2) \rangle}{2}. \quad [17]$$

Par extension, on peut définir la rugosité $\mathcal{R}_P(P)$ au sommet P comme :

$$\mathcal{R}_P = \min_i \mathcal{R}_{PP_i}. \quad [18]$$

— **qualité en taille**, \mathcal{L}_P .

La qualité en taille représente la conformité physique de la triangulation par

rapport à la carte de tailles intrinsèque (déduite des longueurs d'arêtes de la triangulation). Rappelons que la longueur normalisée $l(PQ)$ d'un segment droit $[PQ] = (P + t\vec{PQ})_{0 \leq t \leq 1}$ dans la métrique de la taille intrinsèque est définie comme :

$$l_{PQ} = \|\vec{PQ}\| \int_0^1 \frac{1}{H_{PQ}(t)} dt, \tag{19}$$

où $H_{PQ}(t)$ est une fonction monotone continue qui donne la variation de tailles sur l'arête PQ , telle que $H_{PQ}(0) = \tilde{h}(P)$ et $H_{PQ}(1) = \tilde{h}(Q)$, $\tilde{h}(P)$ et $\tilde{h}(Q)$ étant les tailles intrinsèques en P et Q représentant les moyennes des longueurs d'arêtes incidentes. La qualité en taille de l'arête PQ est alors définie par :

$$\mathcal{L}_{PQ} = \begin{cases} l_{PQ} & \text{si } l_{PQ} \leq 1 \\ \frac{1}{l_{PQ}} & \text{si } l_{PQ} > 1 \end{cases} \tag{20}$$

Par extension, on peut définir la qualité en taille au sommet P comme une moyenne des longueurs \mathcal{L}_{PP_i} .

— **qualité en forme, Q_P .**

Pour tout triangle K , la qualité en forme Q_K est définie comme :

$$\gamma(K) = 4\sqrt{3} \frac{S(K)}{\sum_{1 \leq i \leq 3} l_i^2(K)}, \tag{21}$$

où $S(K)$ représente l'aire du triangle K et $l_i(K)$, $1 \leq i \leq 3$, les longueurs euclidiennes des arêtes de K . De même, par extension, la qualité en forme au sommet P est définie comme :

$$Q_P = \min_i Q_{K_i}, \tag{22}$$

où $\{K_i\}$ est l'ensemble des triangles partageant P .

Ces différents critères peuvent être combinés en un critère pondéré unique. En effet, il suffit de définir un critère moyen $\mathcal{C}(P)$ comme :

$$\mathcal{C}_P = \mathcal{P}_P^{\alpha_1} \mathcal{D}_P^{\alpha_2} \mathcal{R}_P^{\alpha_3} \mathcal{L}_P^{\alpha_4} \mathcal{Q}_P^{\alpha_5} \tag{23}$$

où $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 1$. Le contexte d'évaluation géométrique impose naturellement la pondération du critère correspondant.

Ces mesures sont toutes locales, une mesure globale consiste à prendre soit une valeur minimale \mathcal{C}_T , soit une valeur moyenne $\bar{\mathcal{C}}_T$ sur l'ensemble des sommets du maillage, c'est-à-dire :

$$\mathcal{C}_T = \min_{P \in T} \mathcal{C}_P \quad \text{et} \quad \bar{\mathcal{C}}_T = \sum_{P \in T} \mathcal{C}_P. \tag{24}$$

7. Exemples d'applications

Nous allons présenter différents exemples de triangulations de surfaces, ainsi que des maillages géométriques enrichis et simplifiés associés, relatifs à des écarts à la surface spécifiés. Pour mesurer la qualité de ces maillages, nous précisons pour chaque exemple :

- si la gradation est contrôlée,
- les écarts, spécifiés et obtenus, en degrés entre les maillages et les surfaces (qui représentent les écarts entre les plans tangents à la surface aux sommets déduits des normales aux sommets et les éléments adjacents à ces sommets),
- la qualité en taille des arêtes,
- la qualité en forme, normalisés entre 0 et 1 (1 pour le triangle équilatéral),
- les valeurs numériques des différents critères géométriques introduits.

7.1. Tête

Cet exemple représente une reconstruction polyédrique d'une iso-surface biomédicale (une tête humaine) à partir de données volumétriques et est utilisée dans le contexte d'une simulation biomédicale de problèmes inverses en magnétoencéphalographie (distribution des champs de courant). Cette triangulation (*tete-o*) comprend 67 106 points et 134 208 triangles (Figure 6, à gauche), (donnée fournie par Low Temp. Lab., Helsinki Univ. of Tech., Finlande). Avant d'enrichir cette triangulation, on a appliqué un prétraitement qui a consisté à lisser «les marches d'escalier» présentes dans la triangulation initiale et dues à la segmentation binaire de l'image volumétrique originale (ces marches sont nettement visibles sur le sommet de la tête).

On enrichit cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 3 degrés, avec contrôle de la gradation à H-choc 1.5 [BOR 97b]. Le maillage enrichi (*tete-g*, cf. Figure 6, à droite) comprend 64 048 points et 128 092 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 3.5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.51 à 3.25, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.99 % compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.43 (resp. 0.92).

On simplifie le maillage géométrique enrichi pour des spécifications d'écarts à la surface de respectivement 11, 18, 36 et 59 degrés, avec contrôle de la gradation à H-choc 1.5. Le maillage simplifié (*tete-11*, cf. Figure 8, à gauche) comprend 11 814 points et 23 624 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 6.9 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.6 à 1.81, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.53 (resp. 0.92). Le maillage simplifié (*tete-18*, cf. Figure 8, à droite) comprend 4 838 points et 9 672 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 11 degrés. Les longueurs d'arêtes

calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.61 à 1.7, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.52 (resp. 0.93). Le maillage simplifié (tete-36) comprend 1176 points et 2348 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 18.6 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.56 à 1.7, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.56 (resp. 0.93). Le maillage simplifié (tete-59) comprend 423 points et 842 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 25.5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.66 à 1.54, la moyenne des longueurs est de 1.01. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.62 (resp. 0.93).

La figure 7 montre des agrandissements au niveau de l'oreille gauche de la triangulation initiale et du maillage enrichi. La figure 9 montre des agrandissements au niveau de l'oreille gauche des maillages simplifiés correspondant à des écarts de 11 et 18 degrés.

Le tableau 1 indique les statistiques relatives aux différents critères géométriques concernant le maillage enrichi et les maillages simplifiés de «Tête».

critères	\mathcal{P}_T	\mathcal{D}_T	\mathcal{R}_T	\mathcal{L}_T	\mathcal{Q}_T
	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)
tete-o	0.30 (0.80)	0.01 (0.57)	0.00 (0.75)	0.24 (0.72)	0.00 (0.46)
tete-g	0.98 (1.00)	0.83 (0.94)	0.98 (1.00)	0.36 (0.94)	0.43 (0.83)
tete-11	0.96 (0.98)	0.77 (0.88)	0.96 (0.99)	0.72 (0.96)	0.53 (0.84)
tete-18	0.90 (0.96)	0.66 (0.81)	0.90 (0.97)	0.77 (0.96)	0.52 (0.85)
tete-36	0.65 (0.87)	0.37 (0.68)	0.70 (0.90)	0.77 (0.95)	0.56 (0.85)
tete-59	0.42 (0.79)	0.13 (0.57)	0.41 (0.80)	0.79 (0.95)	0.62 (0.85)

Tableau 1. Statistiques relatives aux critères géométriques de «Tête»

Ces mesures indiquent que les maillages enrichis et simplifiés représentent de bonnes approximations géométriques et sont adéquats pour un calcul par éléments finis.

7.2. Pièce mécanique 'dcd90'

L'exemple considéré représente une triangulation d'une pièce mécanique fournie par un modeleur (donnée de Mac Neal-Schwendler Corp.), utilisée dans la simulation numérique par des méthodes d'éléments finis et comprenant 1685 points et 3410 triangles (dcd90-o, cf. Figure 10, à gauche). Cette triangulation représente globalement une bonne approximation géométrique de la surface, en revanche elle présente localement des écarts à la surface trop importants (au maximum de l'ordre de 60 degrés). Ce modèle comporte des arêtes vives (discontinuités des plans tangents) contraintes (cf. Figure 10, à droite) qui d'une part forment localement des angles très aigus et d'autre part sont très

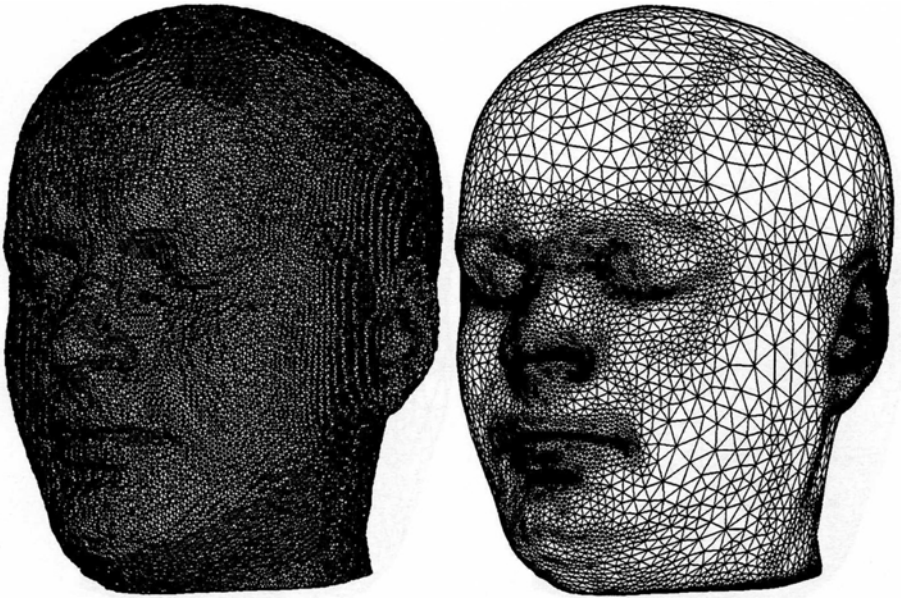


Figure 6. À gauche : triangulation initiale de Tête (données fournies par Low Temp. Lab.). À droite : maillage géométrique enrichi ($H\text{-choc}=1.5$, écart de 3 degrés)

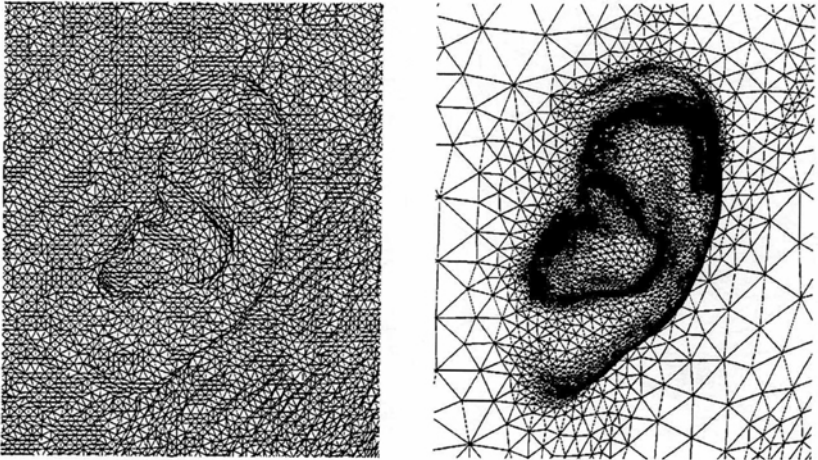


Figure 7. À gauche : agrandissement de la triangulation initiale. À droite : agrandissement du maillage enrichi ($H\text{-choc}=1.5$, écart= 3°)

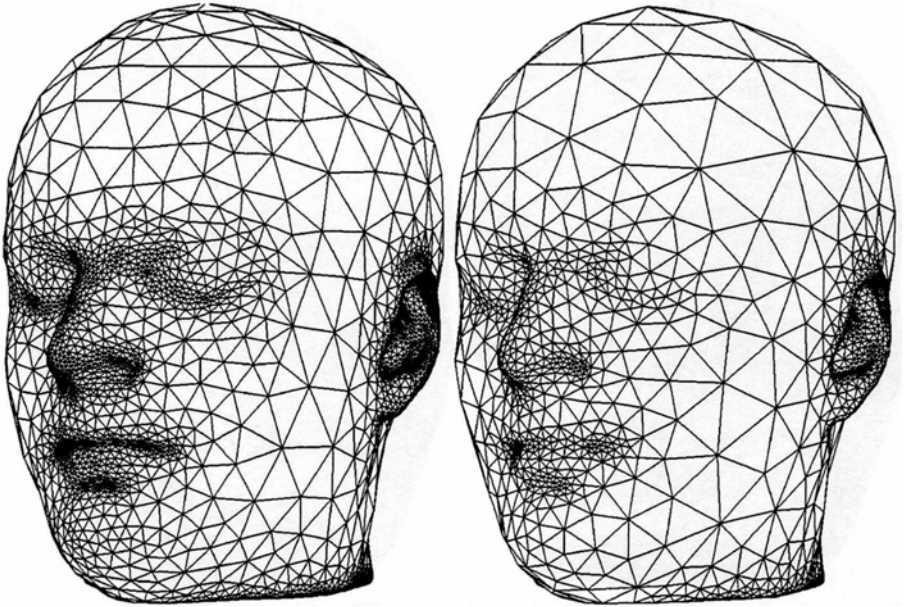


Figure 8. À gauche : maillage simplifié (H-choc=1.5, écart=11°). À droite : maillage simplifié (H-choc=1.5, écart=18°)

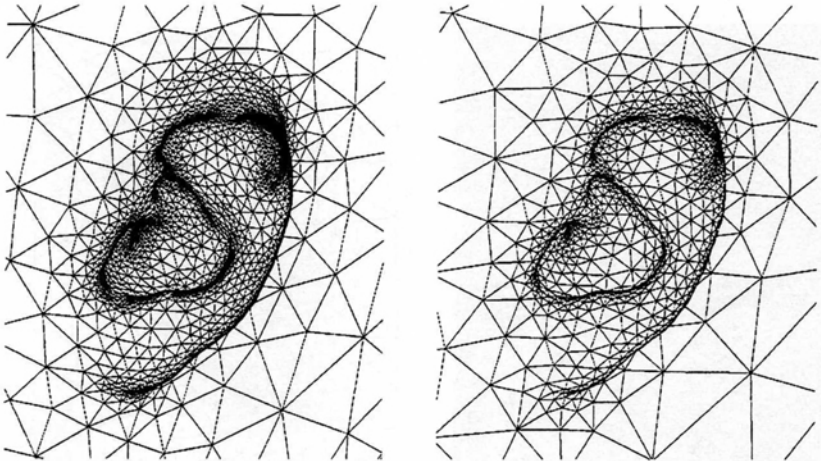


Figure 9. À gauche : agrandissement du maillage simplifié (H-choc=1.5, écart=11°). À droite : agrandissement du maillage simplifié (H-choc=1.5, écart=18°)

proches. De ce fait, la qualité en taille et en forme de tout remaillage optimisé (par l'approche proposée) est majorée.

On enrichit cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 5 degrés avec et sans contrôle de la gradation. Le premier maillage enrichi, sans contrôle de gradation, (dcd90-gh, cf. Figure 11, à gauche) comprend 18 001 points et 36 042 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 4 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.17 à 9.81, la moyenne des longueurs est de 1.06 et 98.8 % compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.1 (resp. 0.88). Le second maillage enrichi, avec contrôle de gradation à H-choc 1.5, (dcd90-g, cf. Figure 11, à droite) comprend 36 329 points et 72 698 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 2.3 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.25 à 5., la moyenne des longueurs est de 1.03 et 99.6 % compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.13 (resp. 0.94).

On simplifie le maillage géométrique enrichi avec contrôle de gradation pour des spécifications d'écarts à la surface de respectivement 14 et 36 degrés, avec contrôle de la gradation à H-choc 1.5 et sans contrôle de la gradation. Le maillage simplifié sans contrôle de gradation à écart 14 degrés (dcdgh-14, cf. Figure 12, à gauche) comprend 3 823 points et 7 686 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 7.5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.17 à 8.18, la moyenne des longueurs est de 1.08 et 96.8 % des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.05 (resp. 0.80). Le maillage simplifié avec contrôle de gradation (H-choc 1.5) à écart 14 degrés (dcdg-14, cf. Figure 12, à droite) comprend 13 183 points et 26 406 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 3.4 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.19 à 2.3, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.8 % des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.19 (resp. 0.93). Le maillage simplifié sans contrôle de gradation à écart 36 degrés (dcdgh-36) comprend 933 points et 1 906 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 12.7 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.12 à 4.29, la moyenne des longueurs est de 1.12 et 91.2 % des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.10 (resp. 0.73). Le maillage simplifié avec contrôle de gradation (H-choc 1.5) à écart 36 degrés (dcdg-36) comprend 5 157 points et 10 354 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 4.6 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.17 à 2.99, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.6 % des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.16 (resp. 0.91).

Le tableau 2 indique les statistiques relatives aux différents critères géométriques concernant les maillages enrichis et simplifiés de «dcd90».

Comme précédemment, ces mesures indiquent que les maillages sont fidèles

critères	\mathcal{P}_T	\mathcal{D}_T	\mathcal{R}_T	\mathcal{L}_T	\mathcal{Q}_T
	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)
dcd90-o	0.50 (0.96)	0.13 (0.88)	0.49 (0.97)	0.44 (0.71)	0.19 (0.70)
dcd90-gh	0.92 (0.99)	0.48 (0.93)	0.86 (0.99)	0.30 (0.93)	0.10 (0.76)
dcd90-g	0.91 (0.99)	0.46 (0.96)	0.85 (0.99)	0.29 (0.95)	0.13 (0.86)
dcd90gh-14	0.93 (0.98)	0.52 (0.87)	0.90 (0.98)	0.44 (0.92)	0.05 (0.64)
dcd90g-14	0.91 (0.99)	0.47 (0.94)	0.85 (0.99)	0.64 (0.96)	0.19 (0.85)
dcd90gh-36	0.73 (0.93)	0.35 (0.78)	0.68 (0.94)	0.65 (0.90)	0.10 (0.50)
dcd90g-36	0.75 (0.98)	0.46 (0.93)	0.71 (0.99)	0.69 (0.96)	0.16 (0.81)

Tableau 2. Statistiques relatives aux critères géométriques de «dcd90»

à la géométrie, bien qu'ils présentent des discontinuités géométriques des plans tangents et semblent satisfaisants pour un calcul par éléments finis.

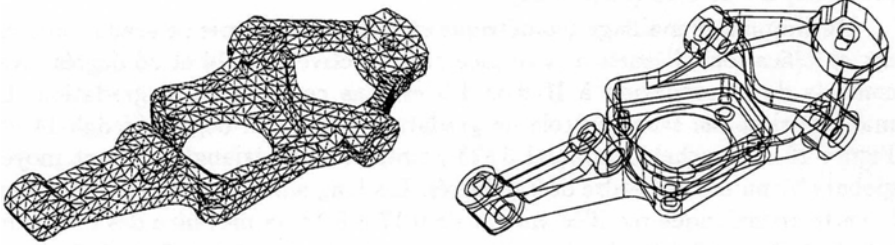


Figure 10. À gauche: triangulation initiale de «dcd90». À droite: arêtes contraintes du modèle

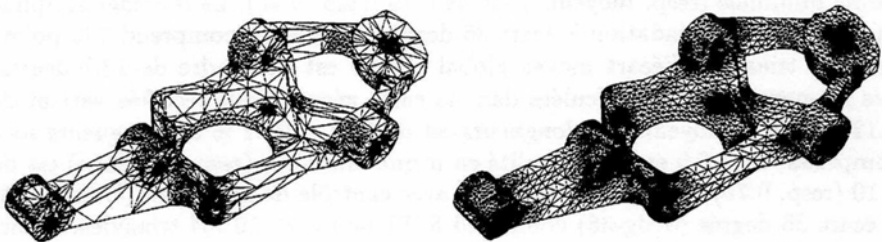


Figure 11. À gauche: maillage géométrique enrichi de «dcd90» (écart de 5 degrés). À droite: maillage géométrique enrichi de dcd90 (H-choc = 1.5, écart de 5 degrés)

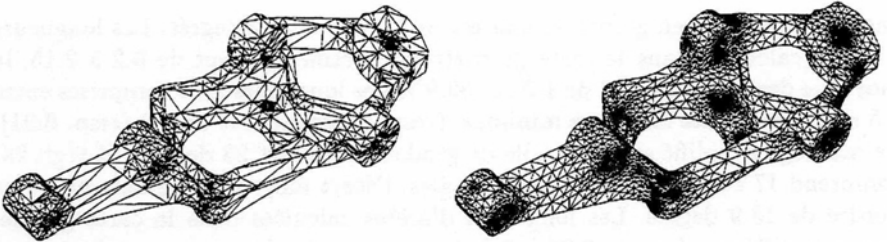


Figure 12. À gauche : maillage géométrique simplifié de dcd90 (écart de 14 degrés). À droite : maillage géométrique simplifié de dcd90 (H-choc=1.5, écart de 14 degrés)

7.3. Boeing 747

Cet exemple illustre une surface composée de plusieurs carreaux paramétrés représentant un avion (Boeing 747, donnée fournie par Boeing), utilisée dans la simulation numérique des écoulements fluides par des méthodes d'éléments finis. Cette triangulation comprend 43 575 points et 45 264 triangles et quadrilatères (b747-o, cf. Figure 13, en haut), correspond à une bonne approximation géométrique de la surface et présente des arêtes vives ainsi que des arêtes contraintes frontières de carreaux.

On enrichit cette triangulation pour une spécification d'écart à la surface de 11 degrés, avec et sans contrôle de la gradation. Le premier maillage enrichi, sans contrôle de gradation, (b747gh, cf. Figure 14, en haut) comprend 62 316 points et 124 660 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 8.6 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.23 à 3.77, la moyenne des longueurs est de 1.03 et 99.9 % compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.12 (resp. 0.90). Le second maillage enrichi, avec contrôle de gradation à H-choc 1.5, (b747g, cf. Figure 15, en haut) comprend 77 291 points et 154 610 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 7.5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.21 à 2.12, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.99 % compris entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.19 (resp. 0.92).

On simplifie le maillage géométrique enrichi pour des spécifications d'écarts à la surface de respectivement 18 et 23 degrés, avec contrôle de la gradation à H-choc 2 et sans contrôle de la gradation. Le maillage simplifié sans contrôle de gradation à écart 14 degrés (b747gh-14) comprend 26 333 points et 52 694 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 11.5 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.29 à 4.54, la moyenne des longueurs est de 1.04 et 99.8 % des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.1 (resp. 0.85). Le maillage simplifié avec contrôle de gradation (H-choc 2) à écart 18 degrés (b747g-14, cf. Figure 16, en haut) comprend 37 487 points et 75 002 tri-

angles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 9.2 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.2 à 2.15, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.9 % des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.2 (resp. 0.91). Le maillage simplifié sans contrôle de gradation à écart 23 degrés (b747gh-23) comprend 17 240 points et 34 508 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 13.9 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.32 à 3.8, la moyenne des longueurs est de 1.04 et 99.6 % des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.1 (resp. 0.83). Le maillage simplifié avec contrôle de gradation (H-choc 2) à écart 23 degrés (b747g-23) comprend 25 397 points et 50 822 triangles, l'écart moyen global obtenu est de l'ordre de 10.3 degrés. Les longueurs d'arêtes calculées dans la carte géométrique rectifiée varient de 0.31 à 1.91, la moyenne des longueurs est de 1.01 et 99.9 % des longueurs sont comprises entre 0.5 et 2. La qualité en forme minimale (resp. moyenne) est de 0.2 (resp. 0.92).

Les figures 13, 14, 15 et 16 (en bas) montrent respectivement des agrandissements au niveau des réacteurs de la triangulation initiale et des maillages enrichis et simplifiés avec et sans contrôle de gradation.

Le tableau 3 indique les statistiques relatives aux différents critères géométriques concernant les maillages enrichis et simplifiés de «Boeing 747».

critères	\mathcal{P}_T	\mathcal{D}_T	\mathcal{R}_T	\mathcal{L}_T	\mathcal{Q}_T
	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)	min (moy)
b747-o	0.54 (0.98)	0.04 (0.92)	0.01 (0.98)	0.01 (0.56)	0.01 (0.25)
b747-gh	0.93 (0.98)	0.60 (0.86)	0.92 (0.98)	0.53 (0.95)	0.13 (0.80)
b747-g	0.93 (0.98)	0.60 (0.87)	0.92 (0.99)	0.64 (0.95)	0.19 (0.84)
b747gh-18	0.88 (0.96)	0.58 (0.81)	0.89 (0.97)	0.52 (0.93)	0.10 (0.73)
b747g-18	0.90 (0.97)	0.58 (0.85)	0.90 (0.98)	0.70 (0.95)	0.19 (0.83)
b747gh-23	0.81 (0.94)	0.50 (0.77)	0.82 (0.95)	0.50 (0.92)	0.10 (0.70)
b747g-23	0.84 (0.95)	0.52 (0.82)	0.84 (0.97)	0.76 (0.95)	0.19 (0.83)

Tableau 3. Statistiques relatives aux critères géométriques, «Boeing 747»

De même, ces mesures indiquent que les maillages enrichis et simplifiés sont géométriques et sont satisfaisants pour un calcul par éléments finis. Cet exemple contient des zones où deux parties disjointes de la peau sont très proches, ce qui limite la simplification de ce maillage à des écarts assez petits. En effet, dans le cas contraire, ces deux parties peuvent s'intersecter.

8. Conclusions

Dans ce papier on a proposé une méthode pour construire un maillage géométrique enrichi de type élément fini à partir d'une triangulation initiale

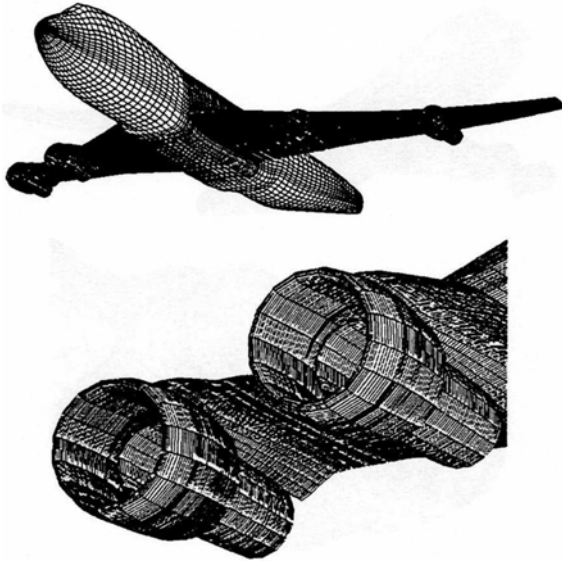


Figure 13. En haut : triangulation initiale de Boeing 747. En bas : agrandissement de la triangulation initiale

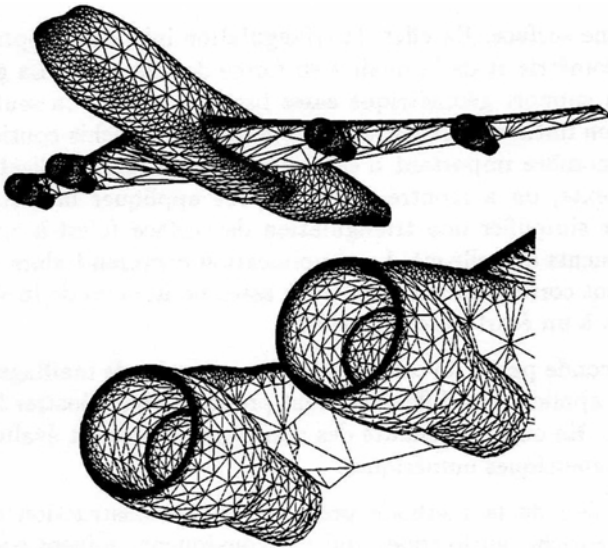


Figure 14. En haut : Maillage géométrique enrichi de Boeing 747 (écart de 11 degrés). En bas : agrandissement du maillage géométrique enrichi (écart de 11 degrés)

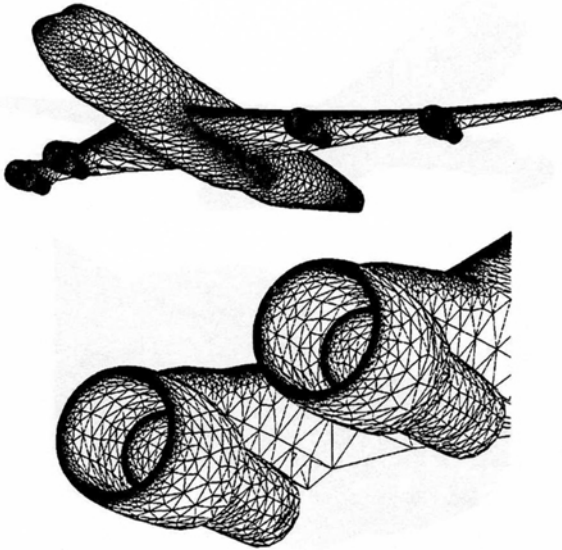


Figure 15. En haut : maillage géométrique enrichi de Boeing 747 ($H\text{-choc} = 2$, écart de 11 degrés). En bas : agrandissement du maillage géométrique enrichi de Boeing 747 ($H\text{-choc} = 2$, écart de 11 degrés)

arbitraire d'une surface. En effet, la triangulation initiale est optimisée au regard d'une géométrie et de la qualité en forme des éléments. La géométrie est définie via un support géométrique assez lisse à partir de la seule donnée de la triangulation initiale de la surface. Les maillages enrichis contiennent généralement un nombre important d'éléments qui rend leur utilisation délicate. Dans ce contexte, on a montré que l'on peut appliquer la méthode d'optimisation pour simplifier une triangulation de surface (c'est-à-dire réduire le nombre d'éléments de celle-ci). La simplification comprend alors deux étapes, l'enrichissement correspondant à un écart assez petit, suivi de la simplification correspondant à un écart plus important.

Dans la seconde partie de cette étude, des exemples de maillages de surfaces destinés à des applications différentes sont proposés pour illustrer l'efficacité de cette méthode. En outre, la qualité des maillages générés est évaluée au moyen de critères géométriques numériques.

Une extension de la méthode proposée est la construction de maillages géométriques enrichis anisotropes, qui par conséquent, doivent contenir moins d'éléments que les maillages géométriques enrichis isotropes correspondant à la même surface. Par ailleurs, dans la mesure où la triangulation initiale de la surface représente déjà une approximation géométrique satisfaisante (c'est-à-dire correspond à un écart géométrique assez petit) et contient des longueurs d'arêtes suffisamment petites, l'étape d'enrichissement peut être ignorée. C'est

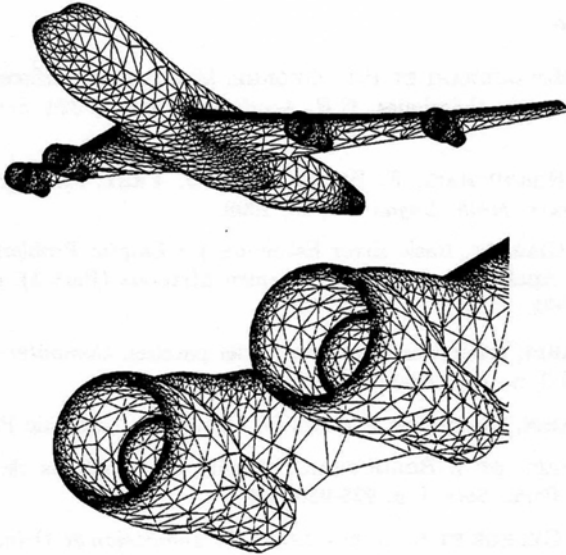


Figure 16. En haut : maillage géométrique simplifié de Boeing 747 ($H\text{-choc} = 2$, écart de 18 degrés). En bas : agrandissement du maillage géométrique simplifié de Boeing 747 ($H\text{-choc} = 2$, écart de 18 degrés)

le cas notamment de la reconstruction des iso-surfaces à partir de données volumétriques. En outre, en spécifiant une taille minimale d'arête, on peut obtenir des maillages simplifiés anisotropes approchant de manière satisfaisante la géométrie sans vérifier nécessairement les requis de qualité en forme des éléments. Ce dernier critère peut d'ailleurs être ignoré dans la procédure de simplification, ce qui conduit à des triangulations de nature géométrique. Ce dernier point fait l'objet d'une étude ultérieure.

Pour conclure, l'intégration de cette approche dans un schéma d'adaptation de maillage et sa validation sur des problèmes concrets de simulation constituent l'objectif à terme de cette étude.

Bibliographie

- [BOR 97a] H. BOROUCAKI ET P.L. GEORGE, Maillage des surfaces paramétriques. Partie I: Aspects théoriques, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 324, Serie I, p. 833-837, 1997.
- [BOR 97b] H. BOROUCAKI, F. HECHT AND P.J. FREY, Mesh gradation control, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol 43, 1998.
- [CIA 91] P.G. CIARLET, Basic Error Estimates for Elliptic Problems, *Handbook of Numerical Analysis*, vol II, Finite Element Methods (Part 1), p. 17-352, North Holland, 1991.
- [FAR 86] G. FARIN, Triangular Bernstein-Bézier patches, *Computer Aided Geometric Design*, vol 3, no 2, p. 83-128, 1986.
- [FAR 88] G. FARIN, *Curves and Surfaces for C.A.G.D.*, Academic Press, 1988.
- [FRE 97] P.J.FREY ET H.BOROUCAKI, Qualité des maillages de surfaces, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I, p. 925-930, 1997.
- [GEO 97] P.L. GEORGE ET H. BOROUCAKI, *Triangulation de Delaunay et maillage. Applications aux éléments finis*, Hermès Paris, 1997.
- [GRE 74] J.A. GREGORY, Smooth interpolation without twist constraints, in *Computer Aided Geometric Design*, Barnhill and Riesenfeld eds., Academic Press, NY, p. 71-87, 1974.
- [GUE 96] A. GUÉZIEC, Surface simplification inside a tolerance volume, IBM Research Report, RC-20440, 1996.
- [HAM 93] B. HAMANN, Curvature approximation for triangulated surfaces, in *Geometric Modelling*, Computing Suppl. 8, Farin, Hagen, Noltmeier and Knodel eds., Springer, NY, 1993.
- [HAM 94] B. HAMANN, A data reduction scheme for triangulated surfaces, *Comp. Aided Geom. Des.*, vol 11, p. 197-214, 1994.
- [HOP 96] H. HOPPE, Progressive Meshes, *Proc. Siggraph'96*, 1996.
- [KAL 96] A.D. KALVIN AND R.H. TAYLOR, Superfaces: polygonal mesh simplification with bounded error, *IEEE Comp. Graphics and App.*, p. 64-77, 1996.
- [LOR 87] W.E. LORENSEN AND H.E. CLINE, Marching cubes: a high-resolution 3D surface construction algorithm, *Siggraph'87 Conf. Proc.*, *Comp. Graphics*, vol 21, no 4, p. 163-169, 1987.
- [MAR 96] D.L. MARCUM, Unstructured grid generation components for complete systems, *Vth Int. Conf. on Grid Generation in Comp. Field Simulations*, Mississippi State, USA, 1-5 April 1996.
- [PIE 95] L.A. PIEGL AND A.M. RICHARD, Tessellating trimmed NURBS surfaces, *Comput.-Aided Des.*, vol 27, No 1, p. 16-26, 1995.
- [PIP 87] B.R. PIPER, Visually smooth interpolation with triangular Bézier patches, in *Geometric modeling: algorithms and new trends*, G. Farin Ed., SIAM, p. 221-233, 1987.

- [RYP 94] D. RYPL AND P. KRYSL, Triangulation of 3-d surfaces, Tech. Report, Czech Tech. Univ., Prague, 1994.
- [SAM 94] J. SAMAREH-ABOLHASSANI AND J.E. STEWART, Surface grid generation in parameter space, *J. Comput. Physics*, vol 113, p. 112-121, 1994.
- [SCH 92] W.J. SCHROEDER, J.A. ZARGE AND W.E. LORENSEN, Decimation of triangle meshes, *Computer Graphics (Proc. Siggraph)*, vol 26, no 2, p. 65-70, 1992.
- [SHE 92] X.SHENG AND B.E.HIRSCH, Triangulation of trimmed surfaces in parametric space, *Computer Aided Design*, vol 24, 8, p. 437-444, 1992.
- [TUR 92] G. TURK, Re-tiling polygonal surfaces, *Computer Graphics*, vol 26, no 2, p. 55-64, 1992.
- [WAL 96] D.J.WALTON AND D.S.MEEK, A triangular G^1 patch from boundary curves, *Comput. Aided Design*, vol 28, no 2, p. 113-123, 1996.